JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. DE LA VALLÉE-POUSSIN

Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 125-144.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__125_0>

Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n;

PAR C. DE LA VALLÉE POUSSIN.

(à Louvain).

I. — Propriétés générales de l'équation linéaire du second ordre.

1. Dans le Tome III de son *Traité d'Analyse* (Chap. V), M. E. Picard obtient, par une méthode élégante, des conditions suffisantes pour que l'intégrale d'une équation du second ordre soit déterminée, ou ne soit pas déterminée, par les valeurs qu'elle prend pour deux valeurs données de x. Il fait à cette occasion de très intéressantes applications de la méthode des approximations successives. Nous nous proposons d'exposer ici une méthode qui conduit à des résultats simples concernant la même question.

Nous considérons seulement l'équation linéaire

$$y'' + 2Xy' + X_1 y = X_2.$$

Nous supposons que les coefficients X, X_1 et X_2 sont des fonctions uniformes et continues de x, mais nous ne postulons pas leur dérivabilité. Nous restons donc dans le domaine réel.

Nous disons, pour abréger le langage, que le *théorème d'unicité* s'applique à l'équation différentielle si chaque intégrale de cette équation est déterminée d'une manière unique par ses valeurs en deux points $x = a$ et $x = b$. La démonstration du théorème d'unicité pour l'équation avec second membre se ramène à celle du même théorème pour l'équation sans second membre, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Pour que le théorème d'unicité s'applique à l'équation complète dans un intervalle donné, il suffit qu'il s'applique à l'équation sans second membre

$$y'' + 2Xy' + X_1 y = 0. \tag{1}$$

Il est d'ailleurs nécessaire et suffisant pour cela que toute intégrale de cette dernière équation qui s'annule deux fois dans l'intervalle considéré soit identiquement nulle.

En effet, s'il existe deux intégrales différentes y_1 et y_2 de l'équation (complète ou incomplète), qui sont égales entre elles pour deux valeurs a et b de x, leur différence $y_2 - y_1$ est une intégrale de l'équation (1) qui s'annule en ces deux points.

Il nous suffit donc d'étudier l'équation linéaire et homogène (1).

Nous rappellerons que toute intégrale de l'équation (1) est de la forme $C_1 u_1 + C_2 u_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes et u_1, u_2 deux solutions particulières formant un système fondamental.

Il suit de là qu'*aucune intégrale de l'équation* (1) *ne peut devenir infinie pour une valeur finie $x = a$, tant que les coefficients* X *sont des fonctions continues.* En effet, on peut choisir un système fondamental u_1, u_2 ayant des valeurs initiales finies pour $x = a$ et alors toute autre intégrale $C_1 u_1 + C_2 u_2$ reste aussi finie pour $x = a$.

2. *Le théorème d'unicité s'applique sans condition à l'équation à deux termes*

$$y'' + 2Xy' = 0.$$

En effet, on tire de cette équation

$$y' = C e^{-\int 2X\,dx}.$$

Donc, y' ne peut s'annuler sans être identiquement nul ($C = 0$). Or, si y s'annule deux fois, sa dérivée s'annule en un point intermédiaire, donc elle est identiquement nulle. Alors y est constant et, par conséquent, nul.

3. *Le théorème d'unicité s'applique à l'équation à trois termes*

$$y'' + 2Xy' + X_1 y = 0 \tag{1}$$

dans tout intervalle où l'équation de Riccati,

$$\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + X_1 = 0, \tag{2}$$

admet une solution φ *qui reste finie.*

Proposons-nous de ramener ce cas au précédent par le changement de variables

$$y = u e^z,$$

où u est la nouvelle inconnue et z une fonction auxiliaire à choisir convenablement. L'équation (1) devient

$$u'' + 2u'(z + X) + u(z'' + z^2 + 2Xz' + X_1) = 0.$$

Tant que z est fini, u et y s'annulent toujours simultanément. Pour ramener l'équation (1) à celle à deux termes, il suffit de choisir pour z une solution finie de l'équation

$$z'' + z'^2 + 2Xz' + X_1 = 0.$$

Mais z reste fini avec z'. Posant $z' = \varphi$, il suffit de trouver une solution finie de l'équation (2).

4. *Inversement, le théorème d'unicité ne peut s'appliquer à l'équation linéaire dans un intervalle où une intégrale de l'équation de Riccati varie de* $+\infty$ *à* $-\infty$.

En effet, l'équation (2) se ramène à (1) par la substitution

$$\varphi = \frac{y'}{y}. \tag{3}$$

Or, y restant fini (n° **1**), y doit nécessairement s'annuler quand φ passe par l'infini; donc y s'annulera deux fois si φ varie de $+\infty$ à $-\infty$.

5. *Le théorème d'unicité s'applique à l'équation linéaire* (1) *dans tout intervalle* (a, b) *où cette équation elle-même admet une intégrale* y *qui ne s'annule pas.*

En effet, la relation (3) définit alors au moyen de y une solution φ de l'équation de Riccati, et cette solution reste finie.

Montrons encore que ce théorème peut aussi bien se démontrer par la considération directe de l'équation linéaire elle-même.

Supposons que l'équation linéaire (1) admette une intégrale positive u qui ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b). Soit, par impossible, y une autre intégrale qui s'annule en deux points x_0 et x_1 de cet intervalle et qui prend, entre ces deux points, des valeurs différentes de zéro, par exemple, positives. L'intégrale Cu (qui ne s'annule pas) coupe ou ne coupe pas l'intégrale y entre x_0 et x_1, suivant que la constante C est plus ou moins grande. La valeur de C, qui fait la frontière de ces deux classes, définit une intégrale Cu qui touche l'intégrale y sans se confondre avec elle, ce qui est impossible.

6. *Le théorème d'unicité s'applique à l'équation linéaire* (1) *dans tout intervalle où le quotient $u_1 : u_2$ de deux intégrales indépendantes ne passe pas par toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.*

En effet, l'intégrale $C_1 u_1 - C_2 u_2$ ne peut s'annuler que si le quotient $u_1 : u_2$ passe par la valeur $C_1 : C_2$ (deux intégrales indépendantes ne pouvant s'annuler ensemble). Donc, si ce quotient ne passe pas par toutes les valeurs, on peut choisir les constantes de manière que $C_1 u_1 - C_2 u_2$ ne s'annule pas.

Il suit de là que, dans un intervalle où le théorème d'unicité ne s'applique pas, chaque intégrale (sauf 0) change de signe (à moins qu'elle ne s'annule aux extrémités, car elle ne peut toucher l'axe des x) et elle rencontre nécessairement toutes les autres intégrales.

7. *L'équation de Riccati* (2) *admet une intégrale finie dans tout intervalle où le trinome caractéristique en φ,*

$$\varphi^2 + 2X\varphi + X_1,$$

a ses racines réelles, pourvu qu'il existe une fonction $F(x)$ *non croissante et comprise au sens large* (*limites non exclues*) *entre les deux racines du trinome.*

Supposons d'abord les deux racines différentes et $F(x)$ intermédiaire entre elles *au sens étroit*. Faisons croître x à partir de la valeur initiale x_0 et décrivons une intégrale $\varphi(x)$ de l'équation de Riccati en lui attribuant une valeur initiale $\varphi_0 > F(x_0)$. Cette intégrale restera finie. En effet, d'une part, φ ne peut croître indéfiniment, car le trinome $\varphi^2 + 2X\varphi + X_1$ devient positif pour φ suffisamment grand, alors φ' est négatif et φ décroît. D'autre part, φ reste supérieur à $F(x)$, car, si φ est suffisamment voisin de F, il tombe entre les deux racines du trinome et le rend négatif. Alors φ' est positif, φ croît et s'élève au-dessus de la fonction non croissante $F(x)$.

La conclusion subsiste même si les conditions ne sont réalisées qu'*au sens large*. En effet, soit ε un infiniment petit positif; les deux racines du trinome altéré $(\varphi^2 + 2X\varphi + X_1 - \varepsilon)$ s'écartent l'une de l'autre et de la fonction F. Donc, l'équation de Riccati altérée,

$$\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + X_1 - \varepsilon = 0,$$

admet une solution φ_1 finie et $> F(x)$, de même valeur initiale φ_0 que l'intégrale antérieure φ. Si donc, cette intégrale φ descendait au-dessous de $F(x)$, la solution φ_1, qui est infiniment voisine de φ quand ε est infiniment petit, descendrait aussi au-dessous de $F(x)$, ce qui contredit la conclusion précédente.

Ce théorème entraîne le suivant :

8. *Le théorème d'unicité s'applique à l'équation linéaire dans un intervalle où les racines du trinome caractéristique sont réelles, si l'on peut définir une fonction continue* $F(x)$ *non croissante et non extérieure à l'intervalle des racines.*

Voici quelques cas particuliers : Le théorème d'unicité s'applique :

1° *Si* X_1 *est nul ou négatif*, auquel cas les racines sont réelles et de signes contraires, car la fonction non croissante $F = 0$ est comprise entre les racines;

2° *Si les racines sont réelles et l'une au moins non croissante*, car on peut poser F égal à cette racine;

3° *Si les racines sont réelles et le coefficient* X *non décroissant*, car $F = -X$ est une fonction non croissante égale à la moyenne des racines.

9. *Le théorème d'unicité s'applique à l'équation linéaire dans un intervalle (a, b) s'il existe une fonction continue $\varphi(x)$ vérifiant, dans tout cet intervalle, la condition*

$$\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + X_1 \overline{\gtrless} 0. \tag{4}$$

En effet, donnons-nous une fonction $\varphi(x)$ douée d'une dérivée continue et remplaçons l'inconnue de l'équation de Riccati par $\mu + \varphi$ où μ est la nouvelle inconnue. L'équation transformée en μ est

$$\mu' + \mu^2 + 2\mu(\varphi + X) + (\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + X_1) = 0.$$

C'est donc encore une équation de Riccati semblable à (2), et il suffit pour qu'elle ait une solution μ finie que le terme indépendant soit nul ou négatif (cas particulier du 1° qui précède). Le théorème est donc établi.

Admettons (pour un moment) la dérivabilité de X et considérons les deux cas particuliers qu'on obtient en remplaçant dans (4) la fonction φ par $-X$, puis par $-2X$. Nous voyons que :

Le théorème d'unicité s'applique à l'équation linéaire dans tout intervalle où est vérifiée l'une au moins des deux conditions suivantes (la même partout) :

$$X' \overline{\gtrless} X_1 - X^2, \qquad X' \overline{\gtrless} \frac{X_1}{2}.$$

10. *Le théorème d'unicité s'applique à l'équation linéaire dans tout intervalle où il existe une fonction continue et positive y satisfaisant (sans s'annuler) à la condition*

$$y'' + Xy' + X_1 y \overline{\gtrless} 0. \tag{5}$$

En effet, les conditions (4) et (5) se ramènent réciproquement l'une à l'autre, en multipliant (4) par l'exponentielle (positive et non nulle)

$$y = e^{\int \varphi\,dx}.$$

Cette nouvelle règle met immédiatement en évidence que le théorème d'unicité s'applique si X_1 est négatif. En effet, on satisfait à la condition (5) en prenant, pour fonction y, une constante positive. C'est le premier cas particulier signalé au n° **8**.

11. *Le théorème d'unicité ne peut s'appliquer à l'équation linéaire dans un intervalle (a, b) s'il existe une fonction continue et dérivable $\psi(x)$ qui vérifie la condition*

$$\psi' + \psi^2 + 2X\psi + X_1 \geqq 0 \tag{6}$$

dans un intervalle (x_0, x_1) contenu dans (a, b) et qui varie de $+\infty$ à $-\infty$ quand x varie de x_0 à x_1.

Observons que la courbe $y = \psi(x)$ partage le plan en deux régions distinctes : celle de gauche A et celle de droite B. La région A est limitée par le bord inférieur de la courbe et la région B par son bord supérieur.

Supposons, en premier lieu, que la condition (6) ait lieu au sens étroit (égalité exclue). Je dis qu'il est impossible qu'une intégrale $y = \varphi(x)$ de l'équation de Riccati passe de la région A dans la région B. En effet, elle traverserait la courbe $y = \psi(x)$, mais, au point d'intersection, on aurait, en vertu de (6), $\varphi' < \psi'$, de sorte que le point qui décrit $y = \varphi$ venant de la région A (qui est sous la courbe), devrait y rentrer. Il suit de là que l'intégrale de l'équation de Riccati qui a pour point initial $(x_0, y_0 = +\infty)$ est tout entière dans la région A et varie, par conséquent, de $+\infty$ à $-\infty$ entre x_0 et une abscisse $x'_1 < x_1$.

Supposons, en second lieu, que la condition (6) ait lieu au sens large. L'intégrale de l'équation de Riccati, modifiée par l'addition d'un ε positif,

$$\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + X_1 + \varepsilon = 0,$$

intégrale issue du même point initial $(x_0, y_0 = +\infty)$, varie de $+\infty$ à $-\infty$ quand x varie de x_0 à une abscisse $x'_1 < x_1$, et cela sans sortir de la région A. Faisons tendre ε vers zéro; cette intégrale se déplace, sans se recouper (car $-\varphi'$ décroît avec ε), ni sortir de la région A, elle tend donc vers une intégrale de l'équation de Riccati non modifiée, et elle varie toujours de $+\infty$ à $-\infty$ entre x_0 et x_1.

Dans tous les cas, le théorème en cause est ramené à celui du n° **4**.

Le théorème ainsi établi conduit au suivant par l'artifice employé au n° **11**.

12. *Le théorème d'unicité ne peut s'appliquer dans un intervalle*

(a, b) s'il existe une fonction y qui vérifie la condition

(7) $$y'' + Xy' + X_1 y \gtreqless 0$$

et qui est positive entre deux points x_0 et x_1 où elle s'annule, ces points étant intérieurs à (a, b).

Faisons, par exemple, $y = \sin x$; nous voyons que le théorème d'unicité ne peut pas s'appliquer à l'équation linéaire dans l'intervalle $(0, \pi)$ si l'on a, dans cet intervalle,

$$X \cos x + (X_1 - 1) \sin x \gtreqless 0.$$

II. — Remarques sur quelques équations linéaires du second ordre de forme particulière.

13. Considérons d'abord l'équation

(8) $$y'' + X_1 y = 0.$$

1° Si X_1 est nul ou négatif, le théorème d'unicité s'applique dans un intervalle quelconque (n° **8**);

2° Si X_1 est $\gtreqless k^2$, il suffit pour que $y'' + X_1 y$ soit positif avec y, que l'on ait

$$y'' + k^2 y = 0.$$

Cette équation a pour solution

$$y = \sin k(x - x_0).$$

qui est positif entre x_0 et $x_0 + \frac{\pi}{k}$ et s'annule à ces limites. Donc, le théorème d'unicité n'est certainement pas applicable dans un intervalle (x_0, x_1) d'amplitude $\pi : k$ (n° **12**);

3° Si X_1 est positif et tend vers zéro quand x tend vers l'infini, le cas est plus difficile à trancher. Mais si X_1 tend vers zéro d'une manière convenable, le théorème d'unicité s'appliquera même dans un intervalle illimité. Nous allons le montrer.

La condition (4) du n° **9** est, dans ce cas-ci,

$$\varphi' + \varphi^2 + X_1 \gtreqless 0.$$

Faisons la substitution

$$\varphi = \frac{1}{x+\psi};$$

la condition se réduit à

$$X_1 \overline{\overline{<}} \frac{\psi'}{(x+\psi)^2}.$$

Donc, si l'on se donne pour ψ diverses fonctions croissantes de x, on obtient des expressions de X_1 positif pour lesquelles le théorème d'unicité s'applique à l'équation (8) dans un intervalle aussi grand qu'on veut ou même illimité.

14. Considérons maintenant l'équation

$$y'' + 2Xy' + k^2y = 0 \tag{9}$$

dans laquelle X_1 est une constante positive k^2. Nous n'avons pas à nous occuper du cas où X_1 est une constante négative, le théorème d'unicité s'appliquant alors dans tout intervalle (n° **8**).

Le cas où $|X|$ est $\geqq k$ se résout aussi immédiatement. L'une des substitutions $\varphi = +k$ ou $\varphi = -k$ (suivant le signe de X) satisfait à la condition

$$\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + k^2 \overline{\overline{<}} 0. \tag{10}$$

Donc, le théorème d'unicité s'applique à l'équation (9) dans un intervalle quelconque (n° **9**).

Il suffit donc de considérer le cas où X est susceptible de valeurs comprises entre $\pm k$.

Supposons que l'on ait, m et M étant deux nombres fixes $> -k$,

$$-m < X < M.$$

La condition (10) sera vérifiée, pour φ positif, si l'on a

$$\varphi' + \varphi^2 + 2M\varphi + k^2 = 0;$$

et pour φ négatif, si l'on a

$$\varphi' + \varphi^2 - 2m\varphi + k^2 = 0.$$

On tire de la première équation

$$dx = -\frac{d\varphi}{\varphi^2 + 2M\varphi + k^2}.$$

Les racines du trinome au dénominateur sont imaginaires ou négatives; donc ce trinome est positif avec φ, auquel cas x et φ (positif) varient en sens contraires. Si φ varie de ∞ à o et que x parte de la valeur initiale x_0, x varie dans un intervalle (x_0, x_1) d'amplitude

$$x_1 - x_0 = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi^2 + 2M\varphi + k^2}.$$

De même, on tire de la seconde équation

$$dx = -\frac{d\varphi}{\varphi^2 - 2m\varphi + k^2}.$$

Les racines du trinome au dénominateur sont imaginaires ou positives, donc ce trinome est positif si φ est négatif, auquel cas x et φ (négatif) varient en sens contraires. Si φ varie de o à $-\infty$ et que x parte de la valeur initiale x_1, x varie dans un intervalle (x_1, x_2), d'amplitude

$$x_2 - x_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{d\varphi}{\varphi^2 - 2m\varphi + k^2} = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi^2 + 2m\varphi + k^2}.$$

Les deux intervalles (x_0, x_1) et (x_1, x_2) peuvent alors être portés bout à bout, et l'on définit ainsi une fonction continue φ qui vérifie la condition (10) et qui varie de $-\infty$ à $+\infty$ quand x varie de x_0 à x_2.

Désignons, pour simplifier, par $\lambda(m, k)$ l'intégrale (dépendant des deux paramètres m et k)

$$(11) \qquad \lambda(m, k) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi^2 + 2m\varphi + k^2}.$$

Nous pouvons énoncer les conclusions suivantes, comme conséquences du théorème du n° **9**, car la condition (4) est vérifiée :

Si X *admet un maximum* $M > -k$, *le théorème d'unicité s'applique à l'équation* (9) *dans tout intervalle d'amplitude inférieure à* $\lambda(M, k)$. *Si* X *admet un minimum* $-m < k$, *il s'applique dans tout intervalle* *d'amplitude inférieure à* $\lambda(m, k)$. *Enfin, si l'on a* $-m < X < M$ (m *et* M *étant* $> -k$), *le théorème s'applique dans tout intervalle d'amplitude inférieure à* $\lambda(m, k) + \lambda(M, k)$.

Le calcul de la fonction λ définie par l'intégrale (11) est d'ailleurs élémentaire, mais il y a deux cas à distinguer :

1° Si m est $> k$, les racines de $\varphi^2 + 2m\varphi + k^2$ sont réelles et négatives; elles ont pour valeurs $-m \pm h$, en posant

$$h = \sqrt{m^2 - k^2}.$$

On a, dans ce cas,

$$\lambda(m, k) = \frac{1}{2h} \log \frac{m+h}{m-h}.$$

2° Si $|m|$ est $< k$, on désigne par α un angle compris entre $\pm \frac{\pi}{2}$ et du même signe que m, et l'on pose

$$m = k \sin \alpha.$$

Il vient alors

$$\lambda(m, k) = \frac{1}{k \cos \alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

15. Le théorème précédent admet évidemment une réciproque. Pour définir une fonction φ qui vérifie la condition (6) du théorème du n° **11**,

$$\varphi' + \varphi^2 + 2X\varphi + k^2 \gtreqless 0, \tag{6}$$

et qui est continue ainsi que sa dérivée, il suffit d'assujettir φ aux conditions

$$\varphi' + \varphi^2 - 2m\varphi + k^2 = 0 \qquad (\varphi \text{ positif}),$$
$$\varphi' + \varphi^2 + 2M\varphi + k^2 = 0 \qquad (\varphi \text{ négatif}).$$

On définit ainsi une fonction φ qui varie de $+\infty$ à $-\infty$ dans un intervalle (x_0, x_2) comme dans le calcul précédent. Si l'on applique le théorème du n° **11**, on est ainsi conduit au théorème suivant :

Si l'on a $-m < X < M$ (m *et* M *étant* $> -k$), *le théorème d'unicité ne s'appliquera pas à l'équation* (9) *dans un intervalle d'amplitude supérieure à* $\lambda(-m, k) + \lambda(-M, k)$.

16. On peut, des théorèmes précédents, déduire des conséquences applicables à l'équation de la forme générale

$$(1) \qquad y'' + X y' + X_1 y = 0.$$

En effet, si X_1 est $< k^2$, la condition

$$y'' + X y' + X_1 y \gtreqless 0$$

est une conséquence de

$$(9) \qquad y'' + X y' + k^2 y = 0.$$

Le théorème d'unicité s'appliquera à l'équation (1) dans tout intervalle où il s'applique à l'équation (9).

Inversement, si X_1 est $> k^2$, le théorème d'unicité ne s'appliquera pas à l'équation (1) dans un intervalle où il ne s'applique pas à l'équation (9).

III. — Équations linéaires d'ordre supérieur.

17. Les méthodes précédentes sont particulières aux équations du second ordre. Pour les équations d'ordre plus élevé, il est facile de généraliser le théorème d'unicité. On dira que ce théorème se vérifie pour l'équation d'ordre n si deux intégrales ne peuvent avoir plus de $n - 1$ points communs sans coïncider. Mais on ne peut plus justifier la validité du théorème à l'aide d'inégalités aussi simples que celles qui ont fait l'intérêt de la théorie précédente.

Une intégrale de l'équation linéaire d'ordre n

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = 0$$

est déterminée par les valeurs qu'elle prend en n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donnés dans un intervalle (a, b), pourvu que cet intervalle soit suffisamment petit. Nous nous proposons ici d'indiquer un procédé général, que nous croyons nouveau, pour fixer l'amplitude h d'un intervalle où cette proposition est applicable.

Nous établirons d'abord un lemme préliminaire.

18. *Si la fonction $\varphi(x)$ s'annule n fois au moins dans l'intervalle*

(a, b), d'amplitude h, et si sa dérivée d'ordre n est de module $\overline{\overline{<}}\,\mu$ dans cet intervalle, on a

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx < \mu \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des racines de φ, et x_{n+1} une autre valeur quelconque de x dans l'intervalle (a, b); nous pouvons déterminer le coefficient A par la condition que la différence

$$\varphi(x) - \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2\ldots n} \mathrm{A}$$

s'annule pour $x = x_{n+1}$. Cette différence est alors une fonction de x qui s'annule $n+1$ fois au moins dans l'intervalle (a, b), alors sa dérivée $n^{\text{ième}}$ s'annule au moins une fois, donc en un point ξ du même intervalle, et l'on a, en ce point,

$$\varphi^{(n)}(\xi) = \mathrm{A}.$$

Remplaçons maintenant x_{n+1} par x (le point x_{n+1} étant quelconque), nous avons, dans l'intervalle (a, b), qui contient ξ,

$$\varphi(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2\ldots n} \varphi^{(n)}(\xi).$$

Cette formule n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de l'expression connue sous le nom de *Reste de la formule d'interpolation de Newton*.

Il vient, d'après cette formule,

$$\int_a^b |\varphi|\,dx < \frac{\mu}{n!}\int_a^b |(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\,dx.$$

L'égalité n'aurait lieu que si φ était un polynome de degré $\overline{\overline{<}}\,n$. Désignons par $\psi(x)$ le produit positif

$$|(x-x_2)\ldots(x-x_n)|;$$

nous avons

$$\int_a^b |(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\,dx = \int_a^{x_1} (x_1 - x)\psi\,dx + \int_{x_1}^b (x-x_1)\psi\,dx.$$

Cherchons le maximum de cette intégrale quand x_1 varie de a à b.

Elle a pour dérivée par rapport à x_1

$$\int_a^{x_1} \psi\,dx - \int_{x_1}^{b} \psi\,dx.$$

Cette dérivée passe du négatif au positif quand x varie de a à b. Donc l'intégrale décroît d'abord pour croître ensuite dans l'intervalle (a, b) et, par conséquent, elle atteint sa plus grande valeur à l'une des extrémités.

Le même raisonnement s'applique à $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Donc, pour rendre maximum l'expression

$$\int_a^b |(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\,dx,$$

il faut donner à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement l'une des valeurs extrêmes a ou b. L'expression est ainsi réduite à la forme

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^{n-p}\,dx = h^{n+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{n-p}\,dx = h^{n+1}\frac{p\,!\,(n-p)!}{(n+1)!}.$$

Cette intégrale est maximée en donnant à p sa plus grande valeur n, et son maximum est $h^{n+1}:(n+1)$, ce qui prouve la proposition.

19. Revenons maintenant à l'équation différentielle d'ordre n,

$$(12) \qquad y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \ldots + X_{n-1} y' + X_n y = 0,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données, continues et uniformes de x. Nous avons le théorème suivant :

Deux intégrales différentes de l'équation (12) *ne peuvent se couper en plus de* $n-1$ *points dans un intervalle d'amplitude* h, *en désignant par* h *la racine positive de l'équation*

$$(13) \qquad M_1\frac{h}{1} + M_2\frac{h^2}{1.2} + \ldots + M_n\frac{h^n}{n!} = 1,$$

et par $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *les maxima des modules de* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *dans l'intervalle considéré des valeurs de* x.

En effet, supposons qu'une intégrale y s'annule n fois dans l'intervalle (a, b) d'amplitude h. Sa dérivée y' s'annulera $n-1$ fois, y'' s'annulera $n-2$ fois, ... et $y^{(n-1)}$ au moins une fois dans l'intervalle. Il vient donc, par le lemme précédent, en désignant par μ le module maximum de cette dernière dérivée,

$$\int_a^b |y^{(n-2)}|\,dx < \frac{\mu h^2}{1.2}, \qquad \int_a^b |y^{(n-3)}|\,dx < \frac{\mu h^3}{1.2.3}, \qquad \ldots,$$
$$\int_a^b |y|\,dx < \frac{\mu h^n}{n!}.$$

Soient ξ et ξ_1 les valeurs de x qui donnent à $|y^{(n-1)}|$ les valeurs o et μ dans l'intervalle (a, b); nous tirons de l'équation différentielle (12)

$$-\int_\xi^{\xi_1} y^{(n)}\,dx = \int_\xi^{\xi_1} (X_1 y^{(n-1)} + X_2 y^{(n-2)} + \ldots)\,dx;$$

par conséquent,

$$\mu \overline{\overline{<}} \int_a^b [M_1 |y^{(n-1)}| + M_2 |y^{(n-2)}| + \ldots]\,dx,$$

et *a fortiori*, puisque $|y^{(n-1)}|$ est $\overline{\overline{<}} \mu$, et en utilisant les majorantes précédentes,

$$\mu \overline{\overline{<}} \mu M_1 \frac{h}{1} + \mu M_2 \frac{h^2}{1.2} + \ldots + \mu M_n \frac{h^n}{n!}.$$

Supprimons le facteur commun μ, nous en concluons immédiatement le théorème énoncé.

20. Il est intéressant de déduire de l'équation (13) quelques expressions de h présentant un caractère particulier de simplicité.

Soit M la plus grande des quantités $M_1, M_2, \ldots, M_n$ la racine h de l'équation (13) est supérieure à celle de l'équation

$$\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{h^n}{n!} = \frac{1}{M}$$

et *a fortiori* à celle de l'équation

$$e^h = 1 + \frac{1}{M}.$$

De là, le théorème suivant :

Si ses coefficients X *sont tous de module* $< M$, *deux intégrales différentes de l'équation linéaire d'ordre n ne peuvent se couper en plus de* $n-1$ *points dans un intervalle d'amplitude*

$$h = \log\left(1 + \frac{1}{M}\right).$$

D'autre part, soit L la plus grande des quantités

$$M_1,\quad \sqrt{M_2},\quad \sqrt[3]{M_3},\quad \ldots,\quad \sqrt[n]{M_n};$$

la racine de l'équation (13) est supérieure à celle de l'équation

$$\frac{Lh}{1} + \frac{(Lh)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(Lh)^n}{n!} = 1,$$

et *a fortiori* à celle de

$$e^{Lh} - 1 = 1.$$

De là cet autre théorème :

Deux intégrales de l'équation linéaire d'ordre n ne peuvent se couper en plus de $n-1$ *points dans un intervalle d'amplitude*

$$h = \frac{\log 2}{L},$$

si L *est la borne supérieure, dans cet intervalle, de l'ensemble des modules*

$$|X_1|,\quad \left|X_2^{\frac{1}{2}}\right|,\quad \left|X_3^{\frac{1}{3}}\right|,\quad \ldots,\quad \left|X_n^{\frac{1}{n}}\right|.$$

21. Si deux intégrales de l'équation (12) ont, entre elles, un contact d'un certain ordre pour $x = a$, leur différence possède, pour cette même valeur de x, un contact du même ordre avec l'axe des x et réciproquement. Un contact d'ordre p tient, dans les raisonnements précédents, la place de $p+1$ points d'intersection infiniment voisins. En particulier, un contact d'ordre $n-2$ peut remplacer $n-1$ points d'intersection. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si deux intégrales différentes de l'équation linéaire d'ordre n ont, entre elles, un contact d'ordre $n-2$ *au point* $x = a$, *elles ne peuvent plus se* *recouper dans un intervalle contenant ce point et dont l'amplitude h est définie dans les théorèmes précédents.*

22. *Dans un intervalle où toute intégrale de l'équation linéaire d'ordre n qui s'annule n fois est identiquement nulle, il existe une intégrale de cette équation, et une seule, qui prend n valeurs arbitrairement données pour n valeurs données de x.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs de x et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les valeurs données correspondantes de y. Donnons-nous un système fondamental d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_n$. L'intégrale qui répond à la question sera donnée par la formule

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

à condition de déterminer les constantes C par le système de n équations linéaires

$$b_i = C_1 u_1(a_i) + C_2 u_2(a_i) + \ldots + C_n u_n(a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il existe une solution du système et une seule si le déterminant $\| u_k(a_i \|$ n'est pas nul. Mais l'annulation de ce déterminant est précisément la condition pour que le système précédent soit compatible pour des valeurs toutes nulles des b_i et non toutes nulles des C_k, auquel cas il existe des intégrales s'annulant aux n points a_i sans être identiquement nulles. Donc, si ces solutions sont impossibles, le déterminant n'est pas nul et la proposition est démontrée.

IV. — Extension du théorème d'unicité aux équations différentielles non linéaires d'ordre n.

23. Considérons l'équation d'ordre n et du type général

$$(14) \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

On suppose que, quand x varie dans un intervalle (a, b), l'ensemble des variables $x, y, y', \ldots$ (considérées comme indépendantes), varie dans un domaine D où la fonction f est continue par rapport à toutes les variables, et *lipschitzienne* par rapport à l'ensemble des variables y, $y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Quand on dit que la fonction est *lipschitzienne*, on entend par là que l'on peut assigner des nombres positifs $M_1, M_2, \ldots, M_n$, tels que la différence des valeurs de la fonction f en deux points de même abscisse dans le domaine D, à savoir :

$$f(x, y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(n-1)}) - f(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-2)}),$$

ne surpasse pas la somme

$$M_1 | y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)} | + M_2 | y_2^{(n-2)} - y_1^{(n-2)} | + \ldots + M_n | y_2 - y_1 |.$$

Les nombres $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont appelés *constantes de Lipschitz* de la fonction dans le domaine D, et la condition précédente est la *condition de Lipschitz*.

Ces conditions suffisent, comme on le sait, pour assurer l'existence de l'intégrale de l'équation (14) et l'unicité de sa détermination par un système de valeurs initiales $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, à condition, bien entendu, de ne pas sortir du domaine D.

Nous allons montrer que ces mêmes conditions suffisent aussi pour assurer l'unicité de la détermination de l'intégrale par n points dans un certain intervalle dont il s'agit précisément de déterminer l'amplitude maximum. Mais nous ne pourrions plus démontrer l'existence d'une intégrale passant par n points *arbitrairement choisis*, même dans un intervalle où ce théorème d'unicité s'applique.

24. *Si deux intégrales différentes de l'équation* (14) *d'ordre n sont contenues dans le domaine* D, *elles ont, au plus, $n - 1$ points communs entre deux abscisses a et b, dont la différence $h = b - a$ est égale à la racine positive de l'équation*

$$M_1 \frac{h}{1} + M_2 \frac{h^2}{1.2} + \ldots + M_n \frac{h^n}{n!} = 1,$$

où $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les constantes de Lipschitz, de $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, relatives respectivement à $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$.

En effet, soient y_1 et y_2 deux intégrales contenues dans le domaine D. Nous désignerons leur différence par

$$\delta y = y_2 - y_1.$$

Substituons successivement y_1 et y_2 dans l'équation (14), puis soustrayons les deux résultats membre à membre; il vient, en utilisant la *condition de Lipschitz*,

$$|\delta y^{(n)}| < M_1|\delta y^{(n-1)}| + M_2|\delta y^{(n-2)}| + \ldots + M_n|\delta y|.$$

Si les deux intégrales y_1 et y_2 ont n points communs dans l'intervalle (a, b), leur différence δy s'annule n fois et les dérivées successives $\delta y'$, $\delta y''$, $\ldots$, $\delta y^{(n-1)}$ s'annulent respectivement $n-1$ fois, $n-2$ fois, $\ldots$, et une fois au moins dans le même intervalle. Soit μ le module maximum de δy^{n-1}, ensuite ξ et ξ_1 les valeurs de x qui donnent à $|\delta y^{(n-1)}|$ les valeurs o et μ; il vient en intégrant $\delta y^{(n)}$ de ξ à ξ_1, et en utilisant l'inégalité précédente

$$\mu < \int_a^b [M_1|\delta y^{(n-1)}| + M_2|\delta y^{(n-2)}| + \ldots + M_n|\delta y|]\, dx.$$

Mais les intégrales de $|\delta y^{(n-1)})|$, $|\delta y^{(n-2)}|$, $\ldots$ admettent exactement les mêmes majorantes que celles de $|y^{(n-1)}|$, $|y^{(n-2)}|$, $\ldots$ dans la démonstration du n° **19**, de sorte que la démonstration actuelle s'achève exactement comme celle de ce numéro.

25. Le théorème précédent conduit, comme au n° **20**, à des théorèmes d'un énoncé plus simple. Nous nous contenterons de formuler le suivant :

Deux intégrales de l'équation d'ordre n,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

contenues dans un domaine D *où la fonction f est lipschitzienne, ne peuvent se couper en plus de n — 1 points, entre deux abscisses a et b, dont la différence b — a ne surpasse pas la borne.*

$$h = \log\left(1 + \frac{1}{M}\right),$$

où M *est la plus grande des constantes de Lipschitz de f.*

26. Il suit évidemment des théorèmes précédents, qu'une intégrale qui ne sort pas du domaine D est déterminée par n de ses points dans un intervalle dont l'amplitude h ne surpasse pas l'une ou l'autre des bornes indiquées. Mais le théorème n'a pas la même précision que dans le cas de l'équation linéaire, parce que, si l'intégrale est bien déterminée d'une manière unique quand elle existe, il n'est pas prouvé qu'il existe toujours une intégrale passant par n points arbitrairement donnés et ne sortant pas du domaine D.