JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. HOSTINSKY

Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 35-43.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__35_0>

Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe;

PAR B. HOSTINSKÝ.

1. *Introduction. Énoncé de problèmes à résoudre.* — Les probabilités de différentes permutations que peuvent présenter les cartes d'un jeu après n battages successifs ont été étudiées par H. Poincaré (¹). Il a trouvé le résultat suivant : quelles que soient les probabilités p_i des opérations qui consistent à permuter les cartes ($i = 1, 2, \ldots, r!$, r étant le nombre de cartes), toutes les permutations possibles se présenteront avec une probabilité constante [égale à $(r!)^{-1}$], quand n augmente indéfiniment. M. Hadamard a traité ce problème par une méthode simple (²) qui s'étend aisément aux problèmes où figurent des variables continues (³).

Je me propose, dans ce travail, de résoudre un problème analogue de celui du battage des cartes. Mais nous aurons à considérer, au lieu des opérations qui consistent à permuter les cartes, les rotations d'une sphère autour des axes qui passent par son centre.

Soit Σ une sphère à centre fixe O et de rayon égal à l'unité. Supposons que Σ puisse tourner autour des axes qui passent par O et

(¹) H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, 2ᵉ édition, Paris, 1912, nº 225 et suiv.

(²) J. HADAMARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 4 juillet 1927, p. 5.

(³) *Voir* les Notes de l'auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, (t. 186, 9 janvier 1928, p. 59, et 20 février 1928, p. 487), celles de M. Hadamard (t. 186, 23 janvier 1928, p. 189, et 30 janvier 1928, p. 275), ainsi que le travail de l'auteur : *Sur les transformations itérées des variables aléatoires* (*Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk*, nº 93 : Brno, 1928).

que la probabilité de subir une telle rotation dépende des paramètres géométriques qui la définissent. Soit P un point fixe ($OP = 1$) que nous prenons pour pôle d'un système de coordonnées sphériques sur Σ. La position d'un point A sur Σ sera définie par ses coordonnées x_1 (distance polaire de A à P) et x_2 (angle compris entre le plan OPA et entre un plan fixe passant par OP). Une rotation $U(u_1, u_2, u_3)$ sera définie par les coordonnées sphériques u_1 et u_2 du point d'intersection $C(u_1, u_2)$ de son axe avec Σ et par l'angle de rotation $2u_3$. Ainsi à toute rotation autour d'un axe passant par O correspondra un point dans un espace à trois dimensions que nous nommerons E. Soit $d\tau_U = \sin u_1 \sin^2 u_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3$ l'élément de volume dans E au voisinage du point U; cette formule a été employée par M. F. Perrin dans ses études du mouvement brownien de rotation ([1]). Le second membre de la formule ne change pas quand on passe de U à la rotation inverse U^{-1} (car c'est seulement u_1 qui doit être remplacé par $\pi - u_1$, tandis que les u_2 et u_3 ne changent pas). Pour obtenir toutes les rotations, il faut faire varier u_1 de o à π, u_2 de o à 2π et u_3 de o à $\frac{1}{2}\pi$. Le volume total de E est donné par la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 u_1 \sin u_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 = \pi^2.$$

Cela posé soit $F(u_1, u_2, u_3) \sin u_3 du_1 du_2 du_3$ ou $F(U) d\tau_U$ la probabilité pour que le point représentatif d'une rotation prise au hasard se trouve à l'intérieur de l'élément $d\tau_U$. Le théorème sur les probabilités totales donne

$$\iiint_E F(U) \, d\tau_U = 1. \tag{1}$$

Imaginons que Σ subisse une rotation U. Un point matériel, lié à Σ, qui, avant la rotation, occupait la place $A(x_1, x_2)$, va occuper, après elle, la place A'. Soit $d\sigma_U = \sin y_1 \, dy_1 \, dy_2$ l'élément de surface sur

---

([1]) F. Perrin, *Étude mathématique du mouvement brownien de rotation* (*Thèse*, Paris, 1928; *Annales scientifiques de l'École Norm. sup.*, 1928).

la sphère unitaire au voisinage du point $B(y_1, y_2)$ et soit

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2)\sin y_1\,dy_1\,dy_2 = f(A, B)\,d\sigma_B$$

la probabilité pour que A' soit situé à l'intérieur de $d\sigma_B$. Si la sphère subit deux rotations successives dues au hasard, la probabilité pour qu'un de ses points vienne de A à l'intérieur de $d\sigma_B$ sera égale à

$$\left[\int\int_\Sigma f(A, M)f(M, B)\,d\sigma_M\right]d\sigma_B$$

et si elle subit n rotations successives, la probabilité du passage de A à un point intérieur à $d\sigma_B$ sera égale à $P^{(n)}(A, B)\,d\sigma_B$, où

$$P^{(n)}(A, B) = \int\int_\Sigma \cdots \int\int_\Sigma f(A, M_1)f(M_1, M_2)\ldots f(M_{n-1}, B)\,d\sigma_1\ldots d\sigma_{n-1},$$

$$P^{(n)}(A, B) = \int\int_\Sigma P^{(n-1)}(A, M)f(M, B)\,d\sigma_M,$$

$$P^{(1)}(A, B) = f(A, B),$$

$d\sigma_R$ étant l'élément de surface sur Σ au voisinage du point M_R. La fonction $P^{(n)}(A, B)$ mesure la *densité de probabilité* relative au passage d'un point, lié à la sphère mobile, de A à B par n rotations successives.

Nous nous proposons de résoudre les problèmes suivants :

PREMIER PROBLÈME. — *La fonction* F(U) *étant donnée, calculer la fonction* $f(A, B)$.

SECOND PROBLÈME. — *Trouver la valeur limite de* $P^{(n)}(A, B)$ *quand n augmente indéfiniment.*

Introduisons encore la densité de probabilité $\Phi^{(n)}(b, b')$ relative au passage d'une position b de la sphère mobile à une autre position b' par n rotations successives. Soit a une position déterminée de Σ et soient b et b' deux autres qui s'en déduisent par la rotation $U(u_1, u_2, u_3)$ ou par $V(v_1, v_2, v_3)$. Nous écrirons

$$U(a) = b, \qquad V(a) = b', \qquad U^{-1}V(b) = b'.$$

Une position quelconque b sera donc représentée par le point unique de E qui correspond à U. Un point de E, situé à l'intérieur de l'élément $d\tau_V$ représente ainsi soit une rotation qui change a en une autre position m (voisine de b'), soit la position m elle-même. Et la probabilité pour qu'une rotation amène la sphère Σ de b à m par n rotations successives sera désignée par $\Phi^{(n)}(b, b')\,d\tau_V$. Nous aurons à résoudre encore les deux problèmes suivants :

TROISIÈME PROBLÈME. — *La fonction* F(U) *étant donnée, calculer la fonction* $\Phi^{(1)}(b, b')$.

QUATRIÈME PROBLÈME. — *Trouver la valeur limite de* $\Phi^{(n)}(b, b')$ *quand* n *augmente indéfiniment.*

2. *Formules fondamentales.* — L'axe d'une rotation $U(u_1, u_2, u_3)$ coupe Σ en un point $C(u_1, u_2)$. Un point lié à Σ sera transporté par U de $A(x_1, x_2)$ en $B(y_1, y_2)$. Posons, pour abréger, dans le triangle sphérique ABC,

$$AB = 2c, \qquad \cos AC = \cos BC = k$$

et construisons la hauteur CD, D étant le milieu de AB. Les triangles PCA et PCB donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos u_1 \cos x_1 + \sin u_1 \sin x_1 \cos(x_2 - u_2) = k, \\ \cos u_1 \cos y_1 + \sin u_1 \sin y_1 \cos(y_2 - u_2) = k. \end{cases}$$

Nous avons de plus, dans le triangle ADC,

$$k = \cos c \cos CD, \qquad \sin CD = \cot u_3 \tang c$$

et, en éliminant CD,

$$(3)\qquad k = \frac{\sqrt{\cos 2c - \cos 2u_3}}{\sin u_3}.$$

Enfin, α étant l'angle DAC, les triangles ABC et ADC donnent

$$(4)\qquad \cos 2c = \cos x_1 \cos y_1 + \sin x_1 \sin y_1 \cos(x_2 - y_2).$$

$$(5)\qquad \cos u_3 = \sin\alpha \cos c.$$

3. *Changement de variables. Propriétés du déterminant fonctionnel.* — Soient, dans les formules précédentes y_1 et y_2 les coordonnées d'un point fixe B. L'ensemble de formules (2), (3), (4) et (5) donne les quantités u_1, u_2 et u_3 en fonction de x_1, x_2 et α. En effet, les équations (3) et (4) ne servent qu'à éliminer k et c de sorte que nous avons trois équations (2) et (5) pour déterminer les u_i. Dérivons-les successivement par rapport à x_1, x_2 et α; nous aurons neuf équations qui permettent de calculer les neuf dérivées partielles figurant dans le déterminant fonctionnel des u_i par rapport aux variables x_1, x_2 et α. Après avoir éliminé les paramètres auxiliaires k et c par un calcul un peu long on obtient le résultat suivant :

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, \alpha_3)} = -\frac{\sin x_1}{4 \sin u_1 \sin^2 u_3}.$$

Le système d'équations (2), (3), (4) et (5) ne change pas quand on échange les points A et B. Par conséquent u_1 et u_3 sont des fonctions symétriques de ces deux points et l'expression

$$(6) \qquad \frac{1}{\sin x_1} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, \alpha)}$$

est aussi symétrique par rapport à A et B. Si nous fixions le point $A(x_1, x_2)$ (au lieu de fixer B, comme nous l'avons fait dans le calcul précédent), le déterminant fonctionnel des u_i par rapport aux variables y_1, y_2, et α, divisé par $\sin y_1$, ne serait pas différent de l'expression (6), donc

$$(7) \qquad \frac{1}{\sin x_1} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, \alpha)} = \frac{1}{\sin y_1} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(y_1, y_2, \alpha)} = -\frac{1}{4 \sin u_1 \sin^2 u_3}.$$

4. *Solution du premier problème.* — Soit $A(x_1, x_2)$ un point sur Σ et désignons par $U(u_1, u_2, u_3)$ une rotation qui transporte A en un point $B(y_1, y_2)$. Prenons les quantités y_1, y_2 et α pour coordonnées de la rotation U. L'expression $F(U)\,d\tau_U$ (*voir* l'Introduction) de la probabilité élémentaire relative au choix de U se change en

$$(8) \qquad F \sin u_1 \sin^2 u_3 \left| \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(y_1, y_2, \alpha)} \right| dy_1\, dy_2\, d\alpha = \frac{F}{4} d\sigma_B\, d\alpha,$$

où $d\sigma_B = \sin y_1\, dy_1\, dy_2$ est l'élément de surface sur Σ. La formule (8) exprime la probabilité pour qu'une rotation prise au hasard satisfasse aux deux conditions suivantes :

1° de transporter le point A en un point situé à l'intérieur de l'élément $d\sigma_B$;

2° d'avoir un angle de rotation tel que l'angle α soit compris entre α et $\alpha + d\alpha$.

Supposons que les points A et B soient fixes. L'équation (5) montre que u_3 diminue de $\frac{\pi}{2}$ à c quand α augmente de o à $\frac{\pi}{2}$; et que u_3 augmente de c à $\frac{\pi}{2}$, quand α augmente de $\frac{\pi}{2}$ à π. En faisant parcourir à α l'intervalle $(0, \pi)$ on obtient toutes les rotations qui amènent A en B. Donc l'intégrale simple de l'expression (8), prise par rapport à α de o à π:

$$\left[\int_0^\pi \frac{F}{4} d\alpha\right] d\sigma_B,$$

donne la probabilité totale pour qu'une rotation amène le point A en un point infiniment voisin de B. Il résulte de la définition que nous avons donnée de la fonction $f(A, B)$ que

$$f(A, B) = \int_0^\pi \frac{F}{4} d\alpha; \tag{9}$$

il faut exprimer, dans la fonction F sous le signe d'intégration, les variables primitives u_1, u_2, u_3 en fonction de y_1, y_2, α. La formule (9) donne la solution du premier problème.

5. *Solution du second problème.* — L'intégrale de l'expression (8) étendue à toutes les rotations dont les axes passent par O est égale à l'unité, d'après (1), Or effectuons d'abord l'intégration par rapport à α de o à π, et intégrons ensuite par rapport aux coordonnées y_1 et y_2 du point B. La formule (9) montre que

$$\int\int_\Sigma f(A, B)\, d\sigma_B = 1, \tag{10}$$

A étant un point quelconque sur Σ.

Si nous prenons x_1, x_2 et α pour variables d'intégration, les formules (1), (7) et (9) donnent

$$\int\int_\Sigma f(A, B)\, d\sigma_A = 1 \tag{11}$$

pour tout point B pris sur Σ, avec $d\sigma_A = \sin x_1\, dx_1\, dx_2$.

Dans un travail cité plus haut (*C. R. Acad. Sc.*, 20 février 1928) j'ai démontré le théorème suivant : si $f(x, y)$ est une fonction continue et positive et si elle satisfait pour toute valeur de $x (a \leqq x \leqq b)$ aux équations

$$\int_a^b f(x, y)\, dy = 1, \qquad \int_a^b f(y, x)\, dy = 1,$$

la fonction itérée $f^{(n)}(x, y)$ tend vers la valeur constante $(b-a)^{-1}$ quand n augmente indéfiniment. Ce théorème s'étend immédiatement aux fonctions qui dépendent de deux points situés sur la sphère Σ, à condition de remplacer les intégrations simples par des intégrations doubles et la longueur $(b-a)$ de l'intervalle d'intégration par l'aire totale de la sphère Σ. La fonction $f(A, B)$ introduite plus haut satisfait aux conditions du théorème, comme le montrent les équations (10) et (11). Nous avons, par conséquent, en faisant usage de la notation expliquée dans l'Introduction

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(A, B) = \frac{1}{4\pi}.$$

Soient F *la densité de probabilité relative à une rotation* U, A *la position initiale d'un point lié à la sphère* Σ *et* B *la position finale qu'il prend après n rotations successives prises au hasard. La valeur limite de la densité de probabilité relative au déplacement* AB, *quand n augmente indéfiniment, est constante ; elle ne dépend ni des points* A *et* B *ni de la fonction* F.

Ce théorème correspond au résultat trouvé par M. Lévy [1] à propos du problème du battage des cartes. M. Lévy trouve que, quelles que soient les probabilités p_i (*voir* l'Introduction), la probabilité pour qu'une carte vienne, après n battages successifs, du $i^{\text{ième}}$ rang au $k^{\text{ième}}$, a pour limite r^{-1}, quand n augmente indéfiniment, r étant le nombre de cartes. Au lieu du passage d'une carte d'un rang à l'autre, nous avons considéré le déplacement d'un point de A à B ; le nombre de cartes est remplacé par l'aire totale de la sphère.

6. *Solution du troisième et du quatrième problème.* — Pour étudier

(1) P. LÉVY, *Calcul des Probabilités*, p. 49, Paris, 1925.

la fonction $\Phi^{(1)}(b, b')$ et les fonctions qui s'en obtiennent par itérations successives, considérons une rotation $U(u_1, u_2, u_3)$ qui résulte de l'application successive de $V(v_1, v_2, v_3)$ et de $W(w_1, w_2, w_3)$. La formule symbolique

$$U = VW$$

équivaut à trois équations entre les paramètres u_i, v_i et w_i. Calculons le déterminant fonctionnel des u_i par rapport aux variables v_i sous l'hypothèse que les w_i ne changent pas. Pour cela, introduisons les paramètres d'Olinde Rodrigues :

$$\lambda = \sin u_1 \sin u_2 \sin u_3, \qquad \mu = \sin u_1 \cos u_2 \sin u_3, \qquad \nu = \cos u_1 \sin u_3;$$

ces formules donnent

$$\frac{D(\lambda, \mu, \nu)}{D(u_1, u_2, u_3)} = -\sin u_1 \sin^2 u_3 \cos u_3.$$

Écrivons maintenant les formules analogues pour les rotations V et W et exprimons les λ, μ, ν en fonction de paramètres d'Olinde Rodrigues relatifs à V et à W (*voir* la Thèse de M. F. Perrin, p. 12); en faisant le calcul on trouve

$$\frac{D(\lambda, \mu, \nu)}{D(v_1, v_2, v_3)} = -\sin v_1 \sin^2 v_3 \cos u_3$$

et le quotient de ces deux déterminants donne le déterminant fonctionnel cherché :

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(v_1, v_2, v_3)} = \frac{\sin v_1 \sin^2 v_3}{\sin u_1 \sin^2 u_2}.$$

Nous trouverons par la même méthode

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(w_1, w_2, w_3)} = \frac{\sin w_1 \sin^2 w_3}{\sin u_1 \sin^2 u_3},$$

en admettant que les v_i ne changent pas.

Introduisons les v_i comme variables d'intégration dans l'intégrale (1). Il vient

$$\text{(13)} \qquad \iiint_E F(VW)\, d\tau_V = 1, \qquad \text{pour W quelconque.}$$

Si nous prenons les w_i pour variables d'intégration,

$$(14) \qquad \iiint_E F(VW)\, d\tau_W = 1, \qquad \text{pour V quelconque.}$$

En désignant toujours par U la rotation qui change a en b et par V celle qui change a en b', le troisième problème se résout simplement par la formule

$$(15) \qquad \Phi^{(1)}(b, b') = F(U^{-1}V).$$

En effet, $U^{-1}V$ est la rotation unique qui change b en b'; la densité de probabilité relative à elle n'est autre chose que la densité $\Phi^{(1)}$ cherchée.

La densité de probabilité relative au passage de b à b' par n rotations successives sera définie par la formule

$$\Phi^{(n)}(b, b') = F^{(n)}(U^{-1}V)$$

avec

$$F^{(n)}(U^{-1}V) = \iiint_E F^{(n-1)}(U^{-1}T)\, F(T^{-1}V)\, d\tau_T, \qquad F^{(1)} = F.$$

Or, remplaçons, dans les formules (13) et (14), V par U^{-1} et W par V. Nous aurons

$$\iiint_E F(U^{-1}V)\, d\tau_U = 1 \qquad \text{pour V quelconque,}$$

$$\iiint_E F(U^{-1}V)\, d\tau_V = 1 \qquad \text{pour U quelconque;}$$

donc $F(U^{-1}V)$ envisagée comme fonction de deux points U et V dans E (ou, ce qui revient au même, fonction de deux positions b et b') satisfait aux conditions du théorème rappelé au n° 5 et nous avons le résultat suivant :

$$\lim_{n=\infty} \Phi^{(n)}(b, b') = \frac{1}{\pi^2}.$$

Quelle que soit la densité de probabilité F(U) *pourvu qu'elle satisfasse à la condition* (1) *et qu'elle soit positive, après un nombre infini de rotations successives toute position de* Σ *pourra être atteinte avec une densité de probabilité uniforme égale à* π^{-2}.

Ce résultat correspond à celui de Poincaré que nous avons rappelé dans l'Introduction.