JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TH. DE DONDER

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 173-187.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__173_0>

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque;

Par Th. De DONDER

(Bruxelles).

La Relativité générale a montré qu'il est essentiel d'écrire les équations de la Physique mathématique sous forme *invariante* pour tout changement des variables figurant l'espace et le temps. On sait que ce résultat s'obtient en partant d'une forme différentielle *quadratique;* celle-ci se trouve aussi à la base des recherches de E. Cotton se rapportant à la théorie invariantive des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Dans ce Mémoire, nous montrerons qu'il en est encore ainsi pour les équations d'un *ordre quelconque.* En étudiant l'équation adjointe, on est amené à faire une remarque importante : tout l'algorithme se réduit à des *dérivées variationnelles.* Rappelons que ces dérivées fournissent les principes extrémants de la mécanique, de l'électromagnétisme, de la gravifique, de la quantification. Cette opération variationnelle établit donc un lien entre les fondements de la Physique et ses méthodes d'intégration.

1. *Équation linéaire d'un ordre quelconque.* — Pour fixer les idées, considérons l'équation générale aux dérivées partielles du troisième ordre, et posons

$$F(U) \equiv \square_3 U + \square_2 U + \square_1 U + DU = E. \tag{1}$$

Les symboles qui figurent dans (1) sont définis comme suit :

$$\square_2 \mathrm{U} \equiv \frac{1}{m} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(m \mathrm{A}^\alpha), \tag{2}$$

où

$$\mathrm{A}^\alpha \equiv \sum \sum_\gamma \mathrm{A}^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\beta}\right)_{.\gamma}. \tag{3}$$

Les fonctions contravariantes $\mathrm{A}^{\alpha\beta\gamma}$ sont symétriques par rapport aux indices α, β, γ; le symbole m représente un multiplicateur ou facteur de densité. Dans (3), nous avons introduit la dérivée covariante

$$\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\beta}\right)_{.\gamma} \equiv \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_\beta \, \partial x_\gamma} - \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\varepsilon} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

Les indices α, β, γ, ε prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Les accolades de Christoffel qui figurent dans (4) sont déduites du tenseur contravariant symétrique $\mathrm{B}^{\alpha\beta}$. Ce tenseur sera utilisé, en outre, dans

$$\square_2 \mathrm{U} \equiv \frac{1}{m} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(m \mathrm{B}^\alpha), \tag{5}$$

où

$$\mathrm{B}^\alpha \equiv \sum_\beta \mathrm{B}^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\beta}. \tag{6}$$

Enfin, dans (1), nous avons posé

$$\square_1 \mathrm{U} \equiv \sum_\alpha \mathrm{C}^\alpha \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\alpha}. \tag{7}$$

Pour indiquer la variance par rapport à un changement quelconque des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, nous avons utilisé ci-dessus les notations classiques. Ainsi, les lettres majuscules imprimées U, D, E indiquent des invariants (au sens élargi de S. Lie); les symboles A^α, B^α et C^α représentent des grandeurs contravariantes; etc. Il en résulte que les divers termes qui figurent dans (1) sont invariants. Pour n'introduire dans (1) que le nombre strictement nécessaire des coefficients, nous avons utilisé les dérivées covariantes (4) attachées à la forme *quadratique* invariante

$$(\delta s)^2 \equiv \sum_\alpha \sum_\beta \mathrm{B}_{\alpha\beta}\,\delta x^\alpha\,\delta x^\beta. \tag{8}$$

Si le discriminant de cette forme n'est pas nul, on prendra, en général, pour m, la racine carrée de ce discriminant. Les $m^2\mathrm{B}^{\alpha\beta}$ sont les mineurs des $\mathrm{B}_{\alpha\beta}$ pris dans ce discriminant.

On remarquera que la forme invariante (1) s'étend immédiatement aux équations d'un ordre *quelconque*.

Nous pourrons écrire, après quelques calculs, l'équation (1) sous la forme habituelle, *non* invariante,

$$\mathrm{F}(\mathrm{U}) \equiv \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \left[a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\gamma} + b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} + c_\alpha \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\alpha}\right] + d\mathrm{U} = e, \tag{9}$$

où les coefficients symétriques $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta}$ ainsi que c_α seront donnés par

$$\left\{\begin{aligned} a_{\alpha\beta\gamma} &\equiv \mathrm{A}^{\alpha\beta\gamma},\\ b_{\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{m}\sum_\gamma \left[\frac{\partial(m\mathrm{A}^{\alpha\beta\gamma})}{\partial x_\gamma} - \frac{m}{2}\sum_\varepsilon \left(\mathrm{A}^{\alpha\varepsilon\gamma}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \varepsilon\gamma\end{matrix}\right\} + \mathrm{A}^{\beta\varepsilon\gamma}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \varepsilon\gamma\end{matrix}\right\}\right)\right] + \mathrm{B}^{\alpha\beta},\\ c_\alpha &\equiv -\frac{1}{m}\sum_\beta\sum_\gamma\sum_\varepsilon \frac{\partial\left(m\mathrm{A}^{\varepsilon\beta\gamma}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\varepsilon\end{matrix}\right\}\right)}{\partial x_\gamma} + \frac{1}{m}\sum_\beta \frac{\partial(m\mathrm{B}^{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} + \mathrm{C}^\alpha. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On aura, en outre, $d = \mathrm{D}$ et $e = \mathrm{E}$.

Si l'on se donnait, *a priori*, les coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta}$, ... de l'équation (9), le calcul des $\mathrm{B}_{\alpha\beta}$ exigerait l'intégration des équations aux dérivées partielles qui figurent dans la seconde ligne de (10). Mais on pourrait éviter cette intégration en introduisant une *nouvelle* forme quadratique que l'on se donnerait *a priori;* celle-ci permettrait de calculer les accolades qui se trouvent dans (10). Dans la suite de ce Mémoire, nous ne ferons usage que de la forme (8).

2. *Équation adjointe.* — Retournons à l'équation (9) et, pour simplifier l'écriture, adoptons les notations

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_\alpha}, \qquad p_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}, \qquad p_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial^3 \mathrm{U}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\gamma}. \tag{11}$$

En introduisant une nouvelle fonction V, on aura

$$(12)\quad \mathrm{VF(U)} \equiv \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma [\mathrm{V} a_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta\gamma} + \mathrm{V} b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \mathrm{V} c_\alpha p_\alpha] + d\,\mathrm{UV} = e\mathrm{V}.$$

Par intégration par parties, on aura d'abord

$$(13)\quad m\mathrm{VF(U)} \equiv \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \left[\frac{d(m\mathrm{V} a_{\alpha\beta\gamma} p_{\alpha\beta})}{dx_\gamma} - p_{\alpha\beta} \frac{d(m\mathrm{V} a_{\alpha\beta\gamma})}{dx_\gamma}\right] + \sum_\alpha \sum_\beta \left[\frac{d(m\mathrm{V} b_{\alpha\beta} p_\alpha)}{dx_\beta} - p_\alpha \frac{d(m\mathrm{V} b_{\alpha\beta})}{dx_\beta}\right] + \sum_\alpha \left[\frac{d(m\mathrm{V} c_\alpha \mathrm{U})}{dx_\alpha} - \mathrm{U} \frac{d(m\mathrm{V} c_\alpha)}{dx_\alpha}\right].$$

En répétant l'opération de l'intégration par parties, on aura enfin

$$(14)\quad m\mathrm{VF(U)} \equiv \mathrm{U} \frac{\delta[m\mathrm{VF(U)}]}{\delta \mathrm{U}} + \sum_\alpha \frac{d(\alpha)}{dx_\alpha}.$$

Explicitons ces notations condensées. La *dérivée variationnelle* $\frac{\delta}{\delta \mathrm{U}}$ indique une dérivée *partielle* par rapport à U *généralisée* comme suit :

$$(15)\quad \frac{\delta}{\delta \mathrm{U}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathrm{U}} - \sum_\alpha \frac{d}{dx_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right) + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{d^2}{dx_\alpha\, dx_\beta}\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha\beta}}\right) - \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \frac{d^3}{dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha\beta\gamma}}\right)\cdots$$

La dérivée $\frac{d}{dx_\alpha}$ doit être prise *totalement* par rapport à x_α; ainsi, on aura

$$(16)\quad \frac{df}{dx_\alpha} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{U}} p_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial f}{\partial p_\beta} p_{\alpha\beta} + \sum_\beta \sum_\gamma \frac{\partial f}{\partial p_{\beta\gamma}} p_{\alpha\beta\gamma},$$

où f représente une fonction quelconque des $x_1, \ldots, x_n$, de U et des dérivées p_β, $p_{\beta\gamma}$, ... ($\beta, \gamma = 1, \ldots, n$). Dans la formule (14) cette fonction f devient $m\mathrm{VF(U)}$.

Donnons maintenant la valeur de (α) qui figure dans (14). On aura

$$(17)\quad (\alpha) \equiv \mathrm{U} \frac{\delta[m\mathrm{VF}_\alpha(\mathrm{U})]}{\delta \mathrm{U}} + \sum_\beta p_\beta \frac{\delta[m\mathrm{VF}_{\alpha\beta}(\mathrm{U})]}{\delta \mathrm{U}} + \sum_\beta \sum_\gamma p_{\beta\gamma} \frac{\delta[m\mathrm{VF}_{\alpha\beta\gamma}(\mathrm{U})]}{\delta \mathrm{U}},$$

où l'on a posé

$$(18)\quad \begin{cases} F_\alpha(U) \equiv \sum_\beta \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} p_{\beta\gamma} + \sum_\gamma b_{\alpha\gamma} p_\gamma + c_\alpha U, \\ F_{\alpha\beta}(U) \equiv \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma + b_{\alpha\beta} U, \\ F_{\alpha\beta\gamma}(U) \equiv a_{\alpha\beta\gamma} U. \end{cases}$$

Effectuons les calculs indiqués au second membre de (14). On trouvera successivement, en se reportant à (1),

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial[mV\,DU]}{\partial U} \equiv + mVD, \\ \dfrac{\partial[mV\,\square_1 U]}{\partial U} \equiv - \sum_\alpha \dfrac{d(mVC^\alpha)}{dx_\alpha}, \\ \dfrac{\partial[mV\,\square_2 U]}{\partial U} \equiv + \sum_\alpha \dfrac{d\left(\sum_\beta m \dfrac{\partial V}{\partial x_\beta} B^{\alpha\beta}\right)}{dx_\alpha}, \\ \dfrac{\partial[mV\,\square_3 U]}{\partial U} \equiv - \sum_\alpha \dfrac{d\mathcal{A}^\alpha}{dx_\alpha}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(20)\quad \mathcal{A}^\alpha \equiv \sum_\beta \sum_\gamma \left[\frac{d\left(m \dfrac{\partial V}{\partial x_\gamma} A^{\alpha\beta\gamma}\right)}{dx_\beta} + \sum_\varepsilon m \frac{\partial V}{\partial x_\beta} A^{\beta\gamma\varepsilon} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \varepsilon\gamma \end{Bmatrix} \right].$$

On démontre aisément, grâce au calcul absolu, que les fonctions $\mathcal{A}^\alpha$ sont contravariantes tensorielles. De même, on verra que toutes les expressions qui figurent dans (19) sont des multiplicateurs; il suffira de les diviser par m pour obtenir des invariants.

Posons

$$(21)\quad \begin{cases} \mathcal{B}^\alpha \equiv \sum_\beta m \dfrac{\partial V}{\partial x_\beta} B^{\alpha\beta}, \\ \mathcal{C}^\alpha \equiv mVC^\alpha, \\ \mathcal{D} \equiv mVD. \end{cases}$$

On aura donc

$$(22) \qquad \frac{\delta[m\mathrm{VF}(\mathrm{U})]}{\delta\mathrm{U}} \equiv \sum_\alpha \frac{d}{dx_\alpha}[-\mathcal{A}^\alpha + \mathcal{B}^\alpha - \mathcal{C}^\alpha] + \mathcal{D}.$$

Par définition, nous dirons que

$$(23) \qquad \mathrm{G}(\mathrm{V}) \equiv \frac{1}{m}\frac{\delta[m\mathrm{VF}(\mathrm{U})]}{\delta\mathrm{U}}$$

est la *fonction adjointe* de F(U). On voit que c'est un *invariant*.

En vertu de (22) et (23), on aura

$$(24) \qquad \mathrm{G}(\mathrm{V}) \equiv \frac{1}{m}\sum_\alpha \frac{d}{dx_\alpha}[-\mathcal{A}^\alpha + \mathcal{B}^\alpha - \mathcal{C}^\alpha] + \frac{1}{m}\mathcal{D}.$$

L'*équation adjointe* de (1) sera, par définition,

$$(25) \qquad \mathrm{G}(\mathrm{V}) = 0.$$

Les calculs qui nous ont fourni (19) ont été considérablement simplifiés en utilisant systématiquement l'*identité*

$$(26) \qquad \frac{\delta}{\delta\mathrm{U}}\left(\frac{df}{dx_\alpha}\right) \equiv 0,$$

où la dérivée *totale* par rapport à x_α n'est autre que celle qui est explicitée dans (16). Pour vérifier cette identité (26), on n'aura qu'à utiliser (15) et (16).

3. *Identité fondamentale.* — Grâce à la fonction adjointe (23), la formule (14) s'écrira

$$(27) \qquad \mathrm{VF}(\mathrm{U}) - \mathrm{UG}(\mathrm{V}) \equiv \frac{1}{m}\sum_\alpha \frac{d(\alpha)}{dx_\alpha}.$$

Rappelons que les (α) sont donnés par (17) et (18). Nous désignerons la relation (27) sous le nom d'*identité fondamentale*.

Multiplions les deux membres de (27) par

$$(28) \qquad \delta\mathrm{S}_n \equiv m\,\delta x_1 \ldots \delta x_n$$

et intégrons dans une variété n-uple ; d'où

$$(29)\qquad \int_{n\text{-uple}} [U.V]\,\delta S \equiv \int_{n\text{-uple}} \sum_{\alpha} \frac{d(\alpha)}{dx_\alpha}\,\delta x_1 \ldots \delta x_n,$$

où nous avons posé

$$(30)\qquad [U.V] \equiv VF(U) - UG(V).$$

Reportons-nous à (17) qui fournit la définition de (α), et effectuons les calculs ; en utilisant l'identité (26), on obtient, après réduction,

$$\begin{aligned}(31)\quad (\alpha) \equiv UV&\left[m C^\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{\partial m\left(A^{\alpha\varepsilon\beta}\left\{ {\gamma \atop \varepsilon\beta} \right\} - A^{\varepsilon\beta\gamma}\left\{ {\alpha \atop \beta\varepsilon} \right\}\right)}{\partial x_\gamma}\right] \\ &+ U\,\frac{\partial V}{\partial x_\beta}\left[- m B^{\alpha\beta} + \frac{m}{2}\left(A^{\alpha\varepsilon\gamma}\left\{ {\beta \atop \varepsilon\gamma} \right\} + A^{\beta\varepsilon\gamma}\left\{ {\alpha \atop \varepsilon\gamma} \right\}\right) + \frac{\partial m A^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma}\right] \\ &+ V\,\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\left[m B^{\alpha\beta} - \frac{m}{2}\left(A^{\alpha\varepsilon\gamma}\left\{ {\beta \atop \varepsilon\gamma} \right\} + A^{\beta\varepsilon\gamma}\left\{ {\alpha \atop \varepsilon\gamma} \right\}\right)\right] \\ &- m A^{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\,\frac{\partial V}{\partial x_\gamma} + m A^{\alpha\beta\gamma}\, V\,\frac{\partial^2 U}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma} + m A^{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma}\,U.\end{aligned}$$

Dans (31), l'indice α est *fixe*, tandis que β, γ, ε prennent chacun les valeurs $1, \ldots, n$. Pour faire apparaître la variance, groupons convenablement les termes de (31) ; d'où

$$\begin{aligned}(32)\quad (\alpha) \equiv\ & UV m C^\alpha + m B^{\alpha\beta}\left(V\,\frac{\partial U}{\partial x_\beta} - U\,\frac{\partial V}{\partial x_\beta}\right) - m A^{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\,\frac{\partial V}{\partial x_\gamma} \\ &+ V m A^{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma} - \frac{\partial U}{\partial x_\varepsilon}\left\{ {\varepsilon \atop \beta\gamma} \right\}\right] \\ &+ U\left[\frac{\partial m A^{\alpha\beta\gamma}\,\dfrac{\partial V}{\partial x_\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V}{\partial x_\beta}\, m A^{\beta\varepsilon\gamma}\left\{ {\alpha \atop \varepsilon\gamma} \right\}\right] \\ &+ \frac{\partial\left[UV\,\dfrac{m}{2}\left(A^{\alpha\varepsilon\beta}\left\{ {\gamma \atop \varepsilon\beta} \right\} - A^{\varepsilon\beta\gamma}\left\{ {\alpha \atop \beta\varepsilon} \right\}\right)\right]}{\partial x_\gamma}.\end{aligned}$$

Substituons (32) dans le second membre de (29) ; remarquons que le dernier terme de (32) dérivé par rapport à x_α et sommé par rapport à α disparaît identiquement ; d'où

$$(33)\qquad \int_{n\text{-uple}} \sum_{\alpha} \frac{dm P^\alpha}{dx_\alpha}\,\delta x_1 \ldots \delta x_n.$$

où l'on a posé

$$(34)\qquad \begin{aligned} P^\alpha \equiv\ & UVC^\alpha + B^{\alpha\beta}\left(V\frac{\partial U}{\partial x_\beta} - U\frac{\partial V}{\partial x_\beta}\right) - A^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\frac{\partial V}{\partial x_\gamma} \\ & + VA^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_\beta\,\partial x_\gamma} - \frac{\partial U}{\partial x_\varepsilon}\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}\right) \\ & + \frac{U}{m}\left(\frac{\partial m A^{\alpha\beta\gamma}\dfrac{\partial V}{\partial x_\beta}}{\partial x_\gamma} + mA^{\beta\varepsilon\gamma}\frac{\partial V}{\partial x_\beta}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \varepsilon\gamma\end{matrix}\right\}\right). \end{aligned}$$

On voit immédiatement que P^α est contravariant.

L'expression qui figure sous le signe d'intégration de (3) est une différentielle *exacte* n-uple au sens de H. Poincaré et E. Picard (¹); ici elle a la forme d'une divergence; on aura donc

$$(35)\qquad \begin{aligned} & \int_{n\text{-uple}} \sum_\alpha \frac{d(mP^\alpha)}{dx_\alpha}\,\delta x_1\ldots\delta x_n \\ & \equiv \oint_{(n-1)\text{-uple}} \sum_\alpha (-1)^\alpha m P^\alpha\,\delta x_1\ldots\delta x_{\alpha-1}\,\delta x_{\alpha+1}\ldots\delta x_n. \end{aligned}$$

Substituons dans (29); d'où

$$(36)\qquad \boxed{\int_{n\text{-uple}} [U.V]\,\delta S_n \equiv \oint_{(n-1)\text{-uple}} \sum_\alpha (-1)^\alpha m P^\alpha\,\delta x_1\ldots\delta x_{\alpha-1}\,\delta x_{\alpha+1}\ldots\delta x_n.}$$

On s'assurera aisément (²) de ce que l'expression

$$(37)\qquad \sum_\alpha (-1)^\alpha m P^\alpha\,\delta x_1\ldots\delta x_{\alpha-1}\,\delta x_{\alpha+1}\ldots\delta x_n \qquad (\alpha = 1\ldots n)$$

qui figure sous le signe d'intégration du second membre de (36) est *invariante*.

Il sera souvent utile de faire intervenir les équations de la frontière $(n-1)$-uple écrite dans (36). Pour simplifier, représentons cette frontière par

$$(38)\qquad f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

(¹) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1891 (*voir* p. 14).

(²) On pourra consulter ma *Théorie des Invariants intégraux*, Paris, Gauthier-Villars, 1927 [*voir* p. 88, formules (301), (303) et (304)].

Posons

$$\delta S_{n-1} \equiv (-1)^\alpha \frac{m\sqrt{\Delta_1 f}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}} \delta x_1 \ldots \delta x_{\alpha-1} \delta x_{\alpha+1} \ldots \delta x_n, \tag{39}$$

où

$$\Delta_1 f \equiv \sum_\alpha \sum_\beta B^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\beta}. \tag{40}$$

Cet invariant n'est autre que le paramètre de Lamé.

Introduisons aussi les composantes covariantes du vecteur *normal*

$$N_\alpha \equiv \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}}{\sqrt{\Delta_1 f}}. \tag{41}$$

Nous admettons donc que le paramètre de Lamé n'est pas nul sur la frontière considérée ([1]).

Substituons (39) et (41) dans la relation fondamentale (36); d'où

$$\int_{n\text{-uple}} [U.V]\, \delta S_n \equiv \oint_{(n-1)\text{-uple}} \left(\sum_\alpha P^\alpha N_\alpha\right) \delta S_{n-1}. \tag{42}$$

Posons

$$P_N \equiv \sum_\alpha P^\alpha N_\alpha; \tag{43}$$

d'où, enfin, l'identité fondamentale, sous forme géométrique

$$\boxed{\int_{n\text{-uple}} [U.V]\, \delta S_n \equiv \oint_{(n-1)\text{-uple}} P_N\, \delta S_{n-1}.} \tag{44}$$

Pour obtenir la valeur explicite de P_N on n'aura qu'à substituer (34) dans (43); on obtient

$$P_N \equiv UVC_N + \left(V\frac{\partial U}{\partial N} - U\frac{\partial V}{\partial N}\right) - \frac{\partial'(UV)}{\partial N} + V\frac{\partial^2 U}{\partial N^2} + U\frac{\partial'^2 V}{\partial N^2} \tag{45}$$

([1]) Cette restriction devient inutile si, dans les définitions (39) et (41), on n'introduit pas $\sqrt{\Delta_1 f}$.

en posant

$$
(46)\quad \left\{
\begin{aligned}
C_N &\equiv \sum_\alpha C^\alpha N_\alpha,\\
\frac{\partial U}{\partial N} &\equiv \sum_\alpha \sum_\beta B^{\alpha\beta} \frac{\partial U}{\partial x_\beta} N_\alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial N} \equiv \sum_\alpha \sum_\beta B^{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial x_\beta} N_\alpha,\\
\frac{\partial'(UV)}{\partial N} &\equiv \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \frac{\partial V}{\partial x_\gamma} N_\alpha,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial N^2} &\equiv \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right)_{,\gamma} N_\alpha,\\
\frac{\partial'^2 V}{\partial N^2} &\equiv \frac{1}{m} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \left[\frac{d\, m A^{\alpha\beta\gamma} \dfrac{\partial V}{\partial x_\beta}}{d x_\gamma} + \sum_\varepsilon m A^{\beta\varepsilon\gamma} \frac{\partial V}{\partial x_\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \varepsilon\gamma \end{matrix} \right\} \right] N_\alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

Toutes ces dérivées normales sont invariantes; chacune a donc une signification intrinsèque, indépendante du choix des variables $x_1 \dots x_n$.

4. *Réciprocité.* — La relation (23) définit la fonction adjointe $G(V)$ de la fonction $F(U)$. En répétant cette opération sur $G(V)$ on obtient la fonction adjointe

$$
(47)\qquad H(U) \equiv \frac{1}{m} \frac{\delta[mUG(V)]}{\delta V}.
$$

On vérifie aisément, grâce à l'identité (26), que

$$
(48)\qquad H(U) \equiv F(U).
$$

C'est en cela que consiste la propriété de la *réciprocité*. Elle peut s'énoncer : l'adjointe de l'adjointe de $F(U)$ n'est autre que $F(U)$. Il en résulte que $mF(U)$ peut s'exprimer au moyen d'une dérivée variationnelle.

5. *Fonction associée.* — Il sera utile de considérer aussi une autre fonction invariante

$$
(49)\qquad G^*(V) \equiv \square_3 V + \nabla_2 V + DV,
$$

où

$$\nabla_2 V \equiv \frac{1}{m} \sum_\alpha \frac{d}{dx_\alpha} \left[m \sum_\beta B^{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial x_\beta} - m C^\alpha V \right]. \tag{50}$$

Nous dirons que $G^*(V)$ est la fonction *associée* de $F(U)$.

En procédant comme au paragraphe précédent, on trouvera l'identité remarquable

$$\begin{aligned} \int_{n\text{-uple}} & [VF(U) - UG^*(V) + K(U, V)] \,\delta S_n \\ & = \oint_{(n-1)\text{-uple}} \left[V \frac{\partial^2 U}{\partial N^2} - U \frac{\partial^2 V}{\partial N^2} + \frac{\partial(UV)}{\partial N} + UVC_N \right] \delta S_{n-1}, \end{aligned} \tag{51}$$

où l'on a conservé les notations (46); on a posé, en outre,

$$K(U, V) \equiv \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} \left[\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\beta} \right)_{.\gamma} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial x_\beta} \right)_{.\gamma} \right] \tag{52}$$

et

$$\frac{\partial(UV)}{\partial N} \equiv U \frac{\partial V}{\partial N} + V \frac{\partial U}{\partial N}. \tag{53}$$

Si l'on remarque que $K(U, V)$ est symétrique gauche par rapport à U et V, on déduit immédiatement de (51) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{n\text{-uple}} & [VF(U) + UF(V) - UG^*(V) - VG^*(U)] \\ & \equiv \oint_{(n-1)\text{-uple}} \left[\frac{\partial(UV)}{\partial N} + UVC_N \right] \delta S_{n-1}. \end{aligned} \tag{54}$$

Remarquons enfin que la fonction associée jouit aussi de la propriété de la *réciprocité;* donc, l'associée de l'associée de $F(U)$ n'est autre que $F(U)$.

6. *Équations de Buhl.* — Dans tout ce qui précède, le multiplicateur m n'était assujetti qu'à satisfaire à la condition de variance

$$m = m' \frac{\partial(x')}{\partial(x)}, \tag{55}$$

où $\frac{\partial(x')}{\partial(x)}$ est le déterminant fonctionnel des nouvelles variables $x'_1 \ldots x'_n$

par rapport aux anciennes $x_1 \ldots x_n$; le symbole m' représente la transformée de m. Comme nous l'avons dit, il sera souvent utile de prendre, comme multiplicateur m, la racine carrée du discriminant de la forme quadratique (8). Cependant, dans certains problèmes d'analyse, il sera plus avantageux de prendre, pour m, un *multiplicateur de Jacobi* ou un multiplicateur de Jacobi *généralisé*. C'est ce qui se présente dans l'intégration des *équations de Buhl*. Nous appelons ainsi toute équation de la forme (¹)

$$F(U) \equiv \sum_i \sum c_{ij} X_i X_j U + \sum_i c_i X_i U + c U = d \qquad (i, j = 1, \ldots, \nu \leqq n), \tag{56}$$

où l'on a posé

$$X_i U \equiv \sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} X_i^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{57}$$

Nous admettrons que le système

$$X_i U = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{58}$$

est *complet* et que les ν équations qu'il comprend sont distinctes. Les coefficients c_{ij}, c_i, c ainsi que d qui figurent dans (56) sont des fonctions de $x_1 \ldots x_n$. On n'a pas nécessairement c_{ij} identique à c_{ji}.

En général, l'équation (56) sera du second ordre. Si l'on prenait plus de deux *opérateurs*, $X_i X_j X_k U$ par exemple, on obtiendrait une équation d'un ordre supérieur au second.

Proposons-nous d'écrire l'équation (56) sous la forme *invariante* (1). Ici les $A^{\alpha\beta\gamma}$ sont nuls, et l'on aura

$$F(U) \equiv \square_2 U + \square_1 U + DU = E, \tag{59}$$

où les symboles $\square_2 U$ et $\square_1 U$ sont définis par (5) et (7). Tous calculs faits, on aura

$$B^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} (X_i^\alpha X_j^\beta + X_j^\alpha X_i^\beta) \tag{60}$$

(¹) Ad. Buhl, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. X, 1904, fasc. 1, p. 85-129); *voir* spécialement l'équation (3).

et

$$(61)\qquad C^\alpha \equiv \sum_\beta \sum_i \sum_j \Bigg[\frac{1}{2} c_{ij}\left(\frac{\partial X_j^\alpha}{\partial x_\beta} X_i^\beta - \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial x_\beta} X_j^\beta\right) - \frac{1}{2} c_{ij}\left(X_j^\alpha \frac{\partial X_i^\beta}{\partial x_\beta} + X_i^\alpha \frac{\partial X_j^\beta}{\partial x_\beta}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_\beta}(X_i^\beta X_j^\alpha + X_j^\beta X_i^\alpha) - \frac{1}{2} c_{ij}(X_j^\alpha X_i \log m + X_i^\alpha X_j \log m) + c_i X_i^\alpha \Bigg]$$

$$(i, j = 1, \ldots, \nu \leqq n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Retournons au système complet (58) et supposons qu'on ait la structure

$$(62)\qquad \sum_\beta \left(\frac{\partial X_j^\alpha}{\partial x_\beta} X_i^\beta - \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial x_\beta} X_j^\beta\right) \equiv \sum_k c_k^{ij} X_k^\alpha \qquad (i, j, k = 1, \ldots, \nu).$$

Nous avons montré [1] que le système complet (52) possédera toujours un multiplicateur (de Jacobi) *généralisé* m, que nous avons défini par le système d'équations

$$(63)\qquad X_i \log m = -\left[\sum_\alpha \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial x_i} + \sum_k c_k^{ik}\right].$$

Quand on aura trouvé un tel multiplicateur généralisé m, il y aura avantage à l'introduire dans (61); il en résultera de grandes simplifications. On aura

$$(64)\qquad C^\alpha \equiv \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \Bigg[c_{ij} \sum_k (c_k^{ij} X_k^\alpha + c_k^{ik} X_j^\alpha + c_k^{jk} X_i^\alpha) - (X_i c_{ij}) X_j^\alpha - (X_j c_{ij}) X_i^\alpha \Bigg] + \sum_i c_i X_i^\alpha.$$

On voit immédiatement que C^α prendrait une forme encore plus réduite si le système (58) était *jacobien;* alors tous les c_k^{ij} seraient nuls.

---

(1) Th. DE DONDER, *Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé* (*Bull. Ac. Roy. de Belgique*, *Cl. des Sc.*, 1908, p. 795-811).

Si $\nu = n$, l'inverse du déterminant des $X_i^\alpha (\alpha, i = 1 \ldots n)$ sera un multiplicateur généralisé m.

Remarquons enfin que si l'on a un multiplicateur généralisé m du système complet (58) ainsi que $(n - \nu - p)$ solutions distinctes, on en déduira ([1]) immédiatement *l'invariant intégral p-uple*

$$(65)\qquad \frac{m}{\Delta}\begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \ldots & \delta_1 x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_p x_1 & \ldots & \delta_p x_n \\ X_1^1 & \ldots & X_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^\nu & \ldots & X_n^\nu \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_{n-\nu-p}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_{n-\nu-p}}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$(66)\qquad \Delta = \sum \left[\frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_{n-\nu-p})}{\partial(x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_{n-\nu-p}})} \right]^2 \qquad (\alpha_1 \ldots \alpha_{n-\nu-p} = 1 \ldots n).$$

La sommation Σ est étendue à toutes les combinaisons $(n - \nu - p)$ à $(n - \nu - p)$ des nombres $1, 2, \ldots, n$. On pourra aussi écrire (65) sous la forme intégrale

$$(67)\qquad \int \frac{m}{\Delta} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_p} (-1)^{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p} \begin{vmatrix} X_1^1 & \ldots & X_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^\nu & \ldots & X_n^\nu \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_{n-\nu-p}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_{n-\nu-p}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \delta x_{\beta_1} \ldots \delta x_{\beta_p}$$

$$(\beta_1 \ldots \beta_p = 1 \ldots n).$$

([1]) Th. De Donder, *Sur le multiplicateur généralisé* (*Bull. Ac. Roy. de Belg., Cl. des Sc.*, 1910 (*voir* spécialement § 16); *Applications du multiplicateur généralisé* (*Ibid.*, 1909; *voir* spécialement le paragraphe intitulé : « Application aux invariants intégraux »).

Si l'on prend $\nu = p = 1$ et $n = 3$, on retrouvera le théorème dû à M. P. Appell (¹), qui permet d'écrire la propriété du dernier multiplicateur de Jacobi sous une forme *symétrique* par rapport aux variables $x_1 \ldots x_n$.

(¹) P. Appell, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, séance du 4 novembre 1912. On trouvera une première extension du théorème de P. Appell dans ma Note parue dans les *Comptes rendus*, séance du 10 février 1913.