JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL MONTEL

Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 29-60.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__29_0>

Sur
les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques;

PAR PAUL **MONTEL**.

Introduction.

Je m'occupe, dans le présent travail, des fonctions sousharmoniques d'une ou de plusieurs variables. Les fonctions sousharmoniques d'une variable sont les fonctions convexes; celles de plusieurs variables s'étaient introduites à diverses reprises dans l'Analyse, mais c'est M. Frédéric Riesz qui en a fait une étude systématique et a montré leur importance dans la Théorie des fonctions.

Dans la première partie de ce Mémoire, j'établis quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions convexes. Je démontre, en particulier, que la condition nécessaire et suffisante pour que le logarithme d'une fonction positive $u(x)$ de la variable x soit une fonction convexe de x est que la fonction $e^{\alpha x}u(x)$ soit convexe en x, quelle que soit la constante réelle α. Je fais voir que la propriété, pour $\log u(x)$, d'être convexe en $\log x$, se conserve par intégration de $u(x)$ par rapport à x.

Dans la seconde partie, après avoir rappelé les propriétés fondamentales des fonctions sousharmoniques, je m'occupe aussi des fonctions positives dont le logarithme est sousharmonique, et j'établis une condition semblable à celle qui caractérise les fonctions d'une variable dont le logarithme est convexe. Je démontre que la plus grande limite des valeurs, en chaque point, de fonctions sousharmoniques appartenant à une famille normale, est une fonction sousharmonique, proposition qui a, dans la suite, de nombreuses applications.

J'établis ensuite, dans la dernière partie, un théorème fondamental relatif aux fonctions sousharmoniques, de deux variables par exemple, qui prennent une valeur constante en chaque point d'une courbe fermée appartenant à la famille des courbes $U = \text{const.}$, U désignant une fonction harmonique : la fonction sousharmonique est alors une fonction convexe de U. On retrouve ainsi le théorème des trois cercles de M. Hadamard et diverses propositions récentes relatives aux valeurs moyennes des modules des fonctions analytiques dues à M. Hardy et à M. R. Nevanlinna. Ces propositions sont étendues aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Le cas où les courbes $U = \text{const.}$ ne sont plus fermées exige une étude spéciale. Lorsque $U = x$, les fonctions considérées sont définies dans des bandes limitées par deux droites parallèles. On retrouve ainsi divers théorèmes dus à M. Walther, M. Dœtsch et MM. Hardy, Ingham et Pólya. Enfin, je montre le lien qui unit le théorème de M. Fabry sur les rayons de convergence associés des séries entières de deux variables aux recherches précédentes, en particulier au théorème de M. Hadamard, et j'établis que, dans le cas d'un nombre quelconque de variables, l'un des rayons associés est une fonction surharmonique des autres.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* insérée le 3 octobre 1927.

I. — Fonctions convexes.

1. On dit qu'une fonction $u(x)$, de la variable réelle x, est convexe lorsqu'un arc quelconque de la courbe représentative n'a aucun de ses points au-dessus de la corde qui joint ses extrémités. On dit que la fonction est concave lorsque l'arc n'a aucun de ses points au-dessous de la corde. Si $x_1 < x_2 < x_3$ sont trois valeurs quelconques appartenant à l'intervalle où l'on considère la fonction, on doit toujours avoir

$$\begin{vmatrix} x_1 & u(x_1) & 1 \\ x_2 & u(x_2) & 1 \\ x_3 & u(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqq 0$$

lorsque $u(x)$ est convexe, et l'inégalité contraire lorsque $u(x)$ est concave. Si $u(x)$ admet une dérivée seconde, la condition de convexité est $u''(x) \geqq 0$.

Pour qu'une fonction $u(x)$ soit convexe, il faut et il suffit que l'inégalité

$$u(x) \leqq \frac{1}{2}[u(x+h)+u(x-h)]$$

ou

$$\Delta^2 u = u(x+h)+u(x-h)-2u(x) \geqq 0$$

soit vérifiée pour toute valeur de x, lorsqu'on donne à h des valeurs assez petites. Si l'égalité a lieu pour une valeur de h, l'arc se confond avec la corde dans l'intervalle $(x-h, x+h)$ correspondant.

2. Une fonction convexe est continue; en chaque point, elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. La pente à droite est supérieure ou égale à la pente à gauche. Si $x_1 < x_2$, la pente à droite en x_1 est inférieure ou égale à la pente à gauche en x_2. Ces remarques se démontrent aisément en examinant la courbe représentative. Il résulte de là que, si la pente est positive ou nulle en x, elle est positive ou nulle à droite de x; si elle est négative ou nulle en x, elle est négative ou nulle à gauche de x. Une fonction convexe peut être croissante, ou décroissante, ou bien d'abord décroissante et ensuite croissante. Elle ne peut donc avoir qu'un seul minimum. Quant au maximum, il a toujours lieu à une extrémité de l'intervalle où la fonction est convexe.

Il est facile de voir qu'*une fonction convexe a une dérivée sauf pour un ensemble dénombrable de points au plus* (¹). Soit, en effet, θ l'angle positif égal à la différence des angles que font avec Ox le prolongement de la demi-tangente à gauche à l'extrémité droite de l'intervalle et la demi-tangente à droite à l'extrémité gauche. Comme les demi-tangentes ont des pentes toujours croissantes, en un point où les demi-tangentes ne sont pas portées par la même droite, le prolongement de la demi-tangente à gauche fait, avec la demi-tangente à droite, un angle positif α; le nombre des points pour lesquels $\frac{\theta}{n+1} \leqq \alpha < \frac{\theta}{n}$ est fini, n étant un entier naturel. Donc, les points pour lesquels θ n'est

(¹) Cette proposition a été d'abord démontrée par M. L. GALVANI, *Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque* (*Circolo Matematico di Palermo*, t. 41, 1916, p. 103-134).

pas nul forment un ensemble dénombrable. Ce résultat, que nous venons d'établir directement, est un cas particulier d'une proposition générale de M. Denjoy d'après laquelle toute fonction qui admet en chaque point une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche a une dérivée, sauf pour un ensemble dénombrable de points au plus (¹).

3. Si u est une fonction convexe, Cu est une fonction convexe si C est une constante positive; si u et v sont deux fonctions convexes, $u+v$ est convexe. L'intégrale d'une fonction croissante est une fonction convexe; en effet, si $v(x)=\int_a^x u(x)dt$,

$$v(x+h)+v(x-h)-2v(x)=\int_x^{x+h} u(t)\,dt+\int_x^{x-h} u(t)\,dt$$
$$=\int_0^h [u(x+t)-u(x-t)]\,dt \geqq 0.$$

Considérons une suite infinie de fonctions convexes u_n, définies dans le même intervalle, ayant une limite u : la fonction u est convexe, car l'inégalité $\Delta^2 u_n \geqq 0$ entraîne $\Delta^2 u \geqq 0$. Ainsi, une suite convergente de fonctions convexes a toujours pour limite une fonction continue.

Soit encore une famille de fonctions convexes u_n, définies dans le même intervalle, bornées dans leur ensemble, en nombre fini ou infini. La fonction $u=\overline{\lim} u_n$, égale à la plus grande limite des valeurs des fonctions pour chaque valeur de x, est une fonction convexe : la démonstration est immédiate. Ainsi, quand des fonctions convexes sont bornées, leur plus grande limite est une fonction continue.

4. Nous rencontrerons dans la suite des fonctions dont le logarithme est convexe. Voici une proposition utile relative à ces fonctions :

Pour que le logarithme d'une fonction positive $u(x)$ soit convexe, il faut et il suffit que la fonction $e^{\alpha x}u(x)$ soit convexe quelle que soit la valeur de la constante α.

(¹) A. Denjoy, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7ᵉ série, t. 1, 1915, p. 105-240).

La condition est nécessaire. Montrons d'abord que, si $\log u$ est convexe, u est convexe. En effet, on a, dans cette hypothèse,

$$2 \log u(x) \leqq \log u(x+h) + \log(x-h),$$

d'où

$$u^2(x) \leqq u(x+h)\,u(x-h)$$

et

$$u(x) \leqq \sqrt{u(x+h)\,u(x-h)} \leqq \frac{u(x+h)+u(x-h)}{2}.$$

Soit alors $u(x)$ une fonction dont le logarithme est convexe; $\log u + \alpha x$ est aussi convexe, donc $e^{\alpha x} u$ est convexe.

La condition est suffisante; en effet, si $e^{\alpha x} u$ est convexe, on a

$$2\, e^{\alpha x} u(x) \leqq e^{\alpha(x+h)} u(x+h) + e^{\alpha(x-h)} u(x-h)$$

ou

$$e^{2\alpha h} u(x+h) - 2 e^{\alpha h} u(x) + u(x-h) \geqq 0.$$

quel que soit α. Or, le trinome en Z

$$Z^2 u(x+h) - 2 Z u(x) + u(x-h)$$

est positif quand Z est négatif; d'après l'hypothèse, il n'est jamais négatif si Z est positif ou nul, donc

$$u^2(x) - u(x+h)\,u(x-h) \leqq 0$$

ou

$$2 \log u(x) \leqq \log u(x+h) + \log u(x-h).$$

La proposition est établie. Remarquons que si $u(x)$ est une fonction croissante, il suffit de supposer $\alpha \leqq 0$; en effet, le trinome ne peut avoir de racines séparées par 1, ni toutes deux supérieures à 1, car leur demi-somme serait ici inférieure à 1. Donc, s'il est positif ou nul, quand Z varie entre 0 et 1, il en sera toujours ainsi. De même, si la fonction $u(x)$ est décroissante, il suffit de supposer $\alpha \geqq 0$.

Remarquons encore que, pour que $\log u(x)$ soit convexe en $\log x$, en supposant que x varie dans un intervalle où il est positif, il faut et il suffit que $x^\alpha u(x)$ le soit quelle que soit la valeur de la constante α.

On peut aussi remarquer que : *pour que* $\log u$ *soit convexe, il faut et il suffit que* u^m *soit convexe quel que soit* m *positif et voisin de zéro.*

En effet, si $\log u$ est convexe, $m \log u$ est convexe quand m est positif, donc u^m est convexe.

Réciproquement, si u^m est convexe, $\frac{u^m - 1}{m}$ est aussi convexe, donc sa limite $\log u$ est convexe.

5. *Si* $\log u$ *est convexe en* $\log x$, *le logarithme de l'intégrale définie*

$$v(x) = \int_0^x u(x)\,dx$$

est convexe en $\log x$.

Nous supposons évidemment x et u positifs. D'après le théorème précédent, il suffit de montrer que $x^\alpha v(x)$ est convexe en $\log x$. Or, à des valeurs de $\log x$ en progression arithmétique, correspondent des valeurs de x en progression géométrique : soient kx, x, $\frac{x}{k}$ ces valeurs. Il faut vérifier que l'inégalité

$$k^\alpha v(kx) + k^{-\alpha} v\left(\frac{x}{k}\right) - 2v(x) \geqq 0$$

est satisfaite. On peut l'écrire

$$\int_0^x \left[k^\alpha u(kx) + k^{-\alpha} u\left(\frac{x}{k}\right) - 2u(x)\right] dx \geqq 0.$$

Puisque $u(x)$ est convexe en $\log x$, $x^\alpha u(x)$ est convexe en $\log x$, donc l'expression entre crochets est positive ou nulle et il en est de même de l'intégrale.

On peut aussi vérifier que

$$v^2(x) \leqq v(kx)\, v\left(\frac{x}{k}\right)$$

ou

$$\left[\int_0^x u(x)\,dx\right]^2 \leqq \int_0^x u(kx)\,dx \int_0^x u\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

Or, de l'inégalité

$$u^2(x) \leqq u(kx)\, u\left(\frac{x}{k}\right),$$

on déduit

$$\int_0^x u(x)\,dx \leqq \int_0^x \sqrt{u(kx)\, u\left(\frac{x}{k}\right)}\,dx,$$

et, de l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\int_0^x \sqrt{u(kx)\,u\left(\frac{x}{k}\right)}\,dx\right)^2 \leqq \int_0^x u(kx)\,dx \int_0^x u\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

L'inégalité à établir est donc bien vérifiée.

On remarquera que, dans l'énoncé de la proposition, on peut remplacer, sous le signe $\int$, la fonction $u(x)$ par $x^\alpha u(x)$, α étant une constante positive, puisque $\log(x^\alpha u)$ est convexe en $\log x$ en même temps que $\log u$.

II. — Fonctions sousharmoniques.

6. Pour une fonction convexe, l'arc de la courbe représentative est au-dessous de la corde ou confondu avec elle. Or, la ligne droite vérifie l'équation de Laplace à une variable $\frac{d^2 U}{dx^2} = 0$. Pour généraliser la notion de fonction convexe dans le cas de deux variables, par exemple, on considérera les solutions de l'équation de Laplace à deux variables

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

ou fonctions harmoniques, et l'on étudiera les fonctions dont chaque partie de la surface représentative est au-dessous de la surface harmonique passant par le même contour, ou coïncide avec elle. Une telle fonction sera dite sousharmonique. Si la surface est au-dessus ou coïncide avec la surface harmonique, on dit que la fonction est surharmonique (¹).

Comme il peut arriver que le problème de Dirichlet ne soit pas résoluble pour le contour considéré, M. F. Riesz a montré que la définition peut être remplacée par la suivante : une fonction est sousharmonique lorsque toute portion de la surface représentative est

(¹) On dit aussi subharmonique et superharmonique.

au-dessous de toute surface harmonique, quand il en est ainsi pour les points du contour limitant cette portion de surface.

Lorsque la fonction sousharmonique u admet des dérivées secondes, elle est sousharmonique lorsque $\Delta u \geqq 0$ en chaque point.

Dans le cas général, nous supposerons seulement que $u(x, y)$ est une fonction continue de l'ensemble des variables. Pour qu'elle soit sousharmonique, il faut et il suffit que sa valeur en chaque point ne dépasse pas sa valeur moyenne sur des cercles assez petits ayant ce point pour centre. En d'autres termes, il faut et il suffit que chaque point de la surface représentative ne soit pas au-dessus du point correspondant de la surface harmonique passant par le contour obtenu en coupant la surface par des cylindres de révolution, dont l'axe, parallèle à Oz, passe par le point considéré, et dont le rayon est assez petit. Cette condition

$$u(x, y) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta)\, d\theta$$

remplace la condition $\Delta_h^2 u \geqq 0$ des fonctions convexes. Nous l'appellerons l'inégalité fondamentale.

La propriété d'être sousharmonique ou surharmonique se conserve dans une représentation conforme du plan.

Les définitions et les conditions précédentes s'étendent immédiatement à des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Pour les démonstrations, nous renverrons aux mémoires de M. F. Riesz [1] à qui elles sont dues.

Remarquons qu'il résulte de la définition d'une fonction sousharmonique qu'elle prend sa valeur maximum sur la frontière de chaque domaine. En effet, soit M le maximum sur le contour de la fonction sousharmonique $u(x, y)$. La constante M est une fonction harmonique, et l'inégalité $u(x, y) \leqq M$, étant vérifiée sur le contour, l'est aussi à l'intérieur. Une fonction surharmonique prend son minimum sur le contour. Une fonction harmonique est à la fois sousharmonique et surharmonique : elle prend sur le contour sa valeur maximum et sa valeur mini-

---

(1) Frédéric Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel* (*Acta mathematica*, t. 48, 1926, p. 329-343).

mum. Ces propriétés résultent d'ailleurs immédiatement de l'inégalité fondamentale relative à la valeur moyenne sur une circonférence.

On voit aussi qu'une série de fonctions sousharmoniques *positives*, qui converge uniformément sur le contour d'un domaine, converge uniformément dans le domaine fermé.

7. Une fonction convexe en x, pour chaque valeur de y, et convexe en y, pour chaque valeur de x, est sousharmonique. En effet, soit $u(x, y)$ une fonction possédant cette propriété : montrons que l'inégalité fondamentale est vérifiée. Divisons la circonférence de centre (x, y) et de rayon r en $4n$ parties égales, le point $(x+r, y)$ étant un point de division. Soit $(x+h, y+k)$ un des points de division, on a

$$u(x, y+k) \leqq \frac{1}{2}[u(x+h, y+k) + u(x-h, y+k)],$$

$$u(x, y-k) \leqq \frac{1}{2}[u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)],$$

$$u(x, y) \leqq \frac{1}{2}[u(x, y+k) + u(x, y-k)],$$

d'où l'on déduit

$$u(x, y) \leqq \frac{1}{4}[u(x+h, y+k) + u(x-h, y+k) + u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)]$$

et, par suite,

$$u(x, y) \leqq \frac{\Sigma u(x+h, y+k)}{4n},$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs de u aux points de division. Si l'on fait croître n indéfiniment, on obtient, en posant

$$u(\varphi) = u(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi),$$

$$u(x, y) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varphi)\, d\varphi.$$

Nous dirons qu'une telle fonction est *doublement convexe*. Le réciproque n'est évidemment pas toujours vraie ; par exemple $u = 2x^2 - y^2$ est sousharmonique sans être convexe en x et y. Remarquons aussi que lorsque $u(x, y)$ est convexe en x et en y, la surface représentative n'est pas nécessairement convexe, par exemple $u = x^2 + y^2 + 4xy$.

8. Si u est sousharmonique, Cu est sousharmonique, C étant une constante positive. Si u et v sont sousharmoniques, $u+v$ est sousharmonique.

Si une suite infinie de fonctions sousharmoniques u_n converge uniformément vers la fonction u, cette fonction est sousharmonique, car l'inégalité fondamentale se conserve à la limite.

La fonction égale en chaque point à la plus grande des valeurs, en ce point, d'un nombre fini de fonctions sousharmoniques est sousharmonique. Quand les fonctions sont en nombre infini, on a le théorème suivant :

Si des fonctions sousharmoniques appartiennent à une famille normale et bornée dans un domaine, la fonction u égale en chaque point à la plus grande limite des valeurs de ces fonctions est sousharmonique.

D'abord, u est une fonction continue (¹); en effet, les fonctions de la famille sont également continues; au nombre ε correspond le nombre δ tel que, en deux points P et P′ du domaine dont la distance est inférieure à δ, les valeurs d'une fonction quelconque de la famille diffèrent en valeur absolue de moins de ε. Je dis que l'on a aussi

$$|u(P')-u(P)|\leqq\varepsilon.$$

En effet, soit u_m une suite infinie de fonctions de la famille telle que $u_m(P)$ ait pour limite $u(P)$. La famille étant normale, je peux extraire de cette suite une suite partielle u_n convergeant uniformément vers la fonction u_0 telle que $u_0(P)=u(P)$; l'inégalité

$$|u_n(P')-u_n(P)|<\varepsilon$$

entraîne

$$|u_0(P')-u(P)|\leqq\varepsilon$$

ou

$$u_0(P')\geqq u(P)-\varepsilon,$$

donc

$$u(P')\geqq u_0(P')\geqq u(P)-\varepsilon;$$

on aurait de même

$$u(P)\geqq u(P')-\varepsilon.$$

(¹) *Voir* P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales sc. de l'École Normale sup.*, 3ᵉ série, t. **24**, 1907, p. 233-334).

l'inégalité est donc démontrée : $u(\mathrm{P})$ est continue. Je dis qu'elle est sousharmonique; en effet, traçons une circonférence de centre P et de rayon r. L'inégalité

$$u_n(\mathrm{P}) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\mathrm{M})\,d\varphi,$$

dans laquelle M désigne un point variable sur la circonférence de centre P et de rayon r, entraîne

$$u(\mathrm{P}) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\mathrm{M})\,d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathrm{M})\,d\varphi,$$

car $u_0 \leqq u$.

9. Étudions les fonctions dont le logarithme est sousharmonique. Soit $u(x, y)$ une fonction positive. Si son logarithme est sousharmonique, il en est de même de $\log u + \alpha x + \beta y$, α et β étant des constantes; donc $e^{\alpha x + \beta y} u$ est sousharmonique, car *une fonction est sousharmonique quand son logarithme est sousharmonique*. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$\log u(\mathrm{P}) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log u(\mathrm{M})\,d\varphi,$$

d'où

$$u(\mathrm{P}) \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log u(\mathrm{M})\,d\varphi} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathrm{M})\,d\varphi,$$

car la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique. En effet, si l'on divise le cercle en n parties égales, on sait que

$$\sqrt[n]{u(\mathrm{M}_1)\,u(\mathrm{M}_2)\ldots u(\mathrm{M}_n)} \leqq \frac{u(\mathrm{M}_1) + u(\mathrm{M}_2) + \ldots + u(\mathrm{M}_n)}{n}$$

ou

$$\frac{\log u(\mathrm{M}_1) + \ldots + \log u(\mathrm{M}_n)}{n} \leqq \log \frac{u(\mathrm{M}_1) + \ldots + u(\mathrm{M}_n)}{n};$$

en passant à la limite, il vient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log u(\mathrm{M})\,d\varphi \leqq \log \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathrm{M})\,d\varphi.$$

Ainsi $e^{\alpha x + \beta y} u$ est sousharmonique, quels que soient α et β. Il est probable que cette condition est suffisante en supposant simplement que u est une fonction continue. Je n'ai pu le démontrer qu'en admettant, pour u, l'existence de dérivées secondes en x et en y (¹).

Soit alors $v = e^{\alpha x + \beta y} u$; nous avons, par hypothèse,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \geqq 0.$$

Un calcul simple donne

$$\Delta v = \Delta u + 2\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}\right) + (\alpha^2 + \beta^2) u$$

ou

$$u\,\Delta v = \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u^2 \Delta(\log u) \geqq 0.$$

Cette inégalité entraîne $\Delta(\log u) \geqq 0$, car si cette expression était négative au point x_0, y_0, on pourrait calculer α et β de manière que $u\,\Delta v$ fût négatif en ce point, ce qui contredit l'hypothèse.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour qu'une fonction continue positive u ait un logarithme sousharmonique, il est nécessaire que $e^{\alpha x + \beta y} u$ soit sousharmonique quelles que soient les constantes α et β. Si la fonction u admet des dérivées secondes en x et y, cette condition est suffisante.

On démontrerait, comme pour les fonctions convexes, que : *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\log u$ *soit sousharmonique est que u^m soit sousharmonique pour toute valeur positive de m voisine de zéro.* Il suffit même que u^m soit sousharmonique pour une infinité de valeurs positives de m ayant pour limite zéro.

10. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + iy$ dans un domaine. La fonction $\log|f(z)|$, partie réelle de $\log f(z)$, est harmonique en tout point qui n'est pas un zéro de $f(z)$; $p \log|f(z)|$ est aussi harmonique, donc $|f(z)|^p$, dont le logarithme est harmonique, est une fonction sousharmonique tant que $f(z)$ n'est

(¹) Tout récemment, M. T. Radó a pu établir la proposition générale. Voir : *Remarque sur les fonctions subharmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 186, 1928, p. 346-348).

pas nul. Si p est positif, $|f(z)|^p$ est nul en même temps que $f(z)$ et l'inégalité fondamentale est évidemment vérifiée en ce point. Ainsi, $|f(z)|^p$ est sousharmonique pour toute valeur positive de p (¹).

Si $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ sont des fonctions holomorphes dans un domaine, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, des nombres positifs, la fonction

$$|f_1(z)|^{p_1} + |f_2(z)|^{p_2} + \ldots + |f_n(z)|^{p_n}$$

est sousharmonique. Dans tout domaine intérieur, cette fonction atteint son maximum sur la frontière (²).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine contenant la circonférence $|z| = r$. Les fonctions $|f(ze^{i\varphi})|$ forment une famille normale et bornée; donc leur plus grande limite $M(r)$, maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, est une fonction sousharmonique.

Soit encore la fonction sousharmonique

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\left[|f(z)|^p + \left|f\left(ze^{\frac{2i\pi}{n}}\right)\right|^p + \ldots + \left|f\left(ze^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}\right)\right|^p\right],$$

somme de n fonctions sousharmoniques. Lorsque n croît indéfiniment, $f_n(z)$ converge uniformément vers la valeur moyenne

$$M_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi;$$

donc cette moyenne est une fonction sousharmonique. On sait que

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{M_p(r)} = M(r).$$

Considérons enfin deux fonctions holomorphes $f(z)$ et $g(z)$ sans zéro commun, la fonction $u(z)$ égale au plus grand des deux nombres $|f(z)|$ et $|g(z)|$ est sousharmonique; si l'on remplace $|f(z)|$ et $|g(z)|$ par $|f(z)|^p$ et $|g(z)|^p$, on voit que $|u(z)|^p$ est sousharmonique pour

(¹) Frédéric Riesz, *loc. cit.*, p. 337. *Voir* aussi *Ueber subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionen Theorie und in der Potentialtheorie* (*Acta litterarum ac scientiarum Regiæ Universitatis Hungaricæ Francisco-Josephinæ*, t. 2, 1925, p. 87-100); G.-H. Hardy, *On the mean value of the modulus of an analytic function* (*Proc. of the London Math. Soc.*, 2ᵉ série, vol. **14**, 1915, p. 269-277).

(²) G. Pólya et G. Szegö (*Aufgaben*, t. 1, p. 143 et 328).

p positif; donc $\log u$ est sousharmonique. Si l'on prend $g(z) \equiv 1$, on voit que $\overset{+}{\log}|f(z)|$ est sousharmonique, en désignant par $\overset{+}{\log}\alpha$ le nombre $\log\alpha$ si $\alpha \geqq 1$ et zéro si $\alpha \leqq 1$. Il en résulte, comme précédemment, que l'intégrale de MM. F. et R. Nevanlinna et de M. Ostrowski

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

est sousharmonique.

III. — Relations entre les fonctions sousharmoniques et les fonctions convexes. Applications.

11. Soit f une fonction convexe, remplaçons la variable par la fonction harmonique U, la fonction $u = f(\mathrm{U})$ est sousharmonique.

En effet, si U est une fonction de deux variables x, y, soit V une fonction conjuguée de U de sorte que $\mathrm{U} + i\mathrm{V}$ est une fonction analytique de $x + iy$; la représentation conforme

$$\mathrm{X} = \mathrm{U}(x, y), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{V}(x, y)$$

change $f(\mathrm{U})$ en la fonction $f(\mathrm{X})$ qui peut être considérée comme une fonction sousharmonique de X et Y puisqu'elle est convexe en X et en Y. Comme la représentation conforme conserve les fonctions sousharmoniques, $f(\mathrm{U})$ est sousharmonique.

Cette démonstration ne s'étend pas au cas de plus de deux variables. Pour démontrer le résultat en général, supposons d'abord que f admette une dérivée seconde et que U soit par exemple une fonction quelconque de trois variables admettant des dérivées; on a

$$\Delta u = f''\Delta_1 \mathrm{U} + f'\Delta \mathrm{U},$$

en posant

$$\Delta_1 \mathrm{U} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)^2.$$

On voit donc que :

si f est convexe et croissante et U sousharmonique, si f est convexe et décroissante et U surharmonique, si f est convexe et U harmonique, la fonction u est sousharmonique.

Pour passer de là au cas général, il suffit de remarquer que f peut être considérée comme la limite uniforme d'une suite de fonctions convexes f_n admettant des dérivées : en effet, on peut remplacer la courbe $y = f(x)$ par une ligne polygonale convexe dont l'ordonnée y_1 diffère de y de moins de ε en valeur absolue. En chaque sommet, on peut raccorder les côtés adjacents au moyen d'un arc de courbe convexe y_2 tangent à ces côtés, de manière que y_2 et y_1 diffèrent en valeur absolue de moins de ε et que les dérivées des deux premiers ordres soient égales aux points communs. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on obtient ainsi une courbe convexe f_n; or la fonction $u_n = f_n(U)$ est sousharmonique; elle a pour limite uniformément $u = f(U)$ qui est donc sousharmonique.

12. Nous allons établir un théorème réciproque dans le cas des fonctions de deux variables.

Si une fonction sousharmonique est une fonction de la fonction harmonique U, *c'est une fonction convexe de la variable* U.

En effet, supposons que la fonction sousharmonique $u = f(U)$ soit définie dans l'intervalle (a, b) où peut varier U. La fonction doit être sousharmonique dans le domaine balayé par la courbe $U = C$ lorsque C varie de a à b, ou dans une partie (D) de ce domaine limitée aux courbes $U = a$ et $U = b$. La représentation conforme

$$X = U(x, y), \qquad Y = V(x, y),$$

V étant une fonction conjuguée de U, remplace la fonction $u = f(U)$ par la fonction $u = f(X)$ sousharmonique en X, Y. Soit un rectangle (R) défini par les inégalités

$$a \leqq X_1 \leqq X \leqq X_3 \leqq b, \qquad Y_1 \leqq Y \leqq Y_3,$$

et contenu dans le domaine correspondant à (D). Sur les côtés d'abscisses X_1 et X_3, u a les valeurs u_1 et u_3; sur les côtés d'ordonnées Y_1 et Y_3, u est égale à $f(X)$. Le maximum de u a lieu sur le contour : il ne peut être atteint en un point X_0 de l'un des côtés d'ordonnées Y_1 et Y_3, sinon, il serait aussi atteint en un point intérieur (X_0, Y) et la fonction serait constante. Donc, le maximum est u_1 ou u_3, et par conséquent, la valeur u_2 prise en un point (X_2, Y) du rectangle est inférieure ou égale à celle de la fonction v linéaire en X, égale à u_1 pour $X = X_1$ et à u_3 pour $X = X_3$; sinon, $u - v$ aurait son maximum dans le rectangle. La fonction $f(X)$ est donc convexe.

Nous allons préciser ce résultat, et le démontrer autrement dans le cas où les courbes $U =$ const. sont fermées.

Si une fonction sousharmonique u des variables x, y prend des valeurs constantes sur les courbes fermées (Γ),

$$U(x, y) = \text{const.},$$

$U(x, y)$ *désignant une fonction harmonique, la fonction u est une fonction convexe de* U. *Si le domaine contient les points intérieurs à une des courbes* (Γ), *la fonction u de* U *n'est pas décroissante.*

En effet, soient $U_1 < U_2 < U_3$ trois valeurs de U correspondant à des courbes (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) contenues dans le domaine. On sait que ces courbes forment deux anneaux contigus. Soient u_1, u_2, u_3 les valeurs constantes que u prend sur ces courbes; u est une fonction $f(U)$; puisqu'elle est sousharmonique en x, y, dans l'anneau (Γ_1), (Γ_3), elle n'est pas supérieure dans cet anneau à la fonction harmonique qui prend sur (Γ_1) et (Γ_3) les valeurs u_1 et u_3. Cette fonction est linéaire en U et l'on peut déterminer les constantes A et B de manière que $AU + B$ prenne la valeur u_1 pour $U = U_1$, et la valeur u_3 pour $U = U_3$. En un point de la courbe (Γ_2), la valeur u_2 de u ne dépasse pas celle de la fonction linéaire, donc $f(U)$ est convexe.

On verrait de même que si u est surharmonique, $f(U)$ est concave; par conséquent, si $f(U)$ est harmonique, f est une fonction linéaire de la variable U.

Supposons maintenant que le domaine contienne l'intérieur de (Γ_2); la fonction égale à la constante u_2 est harmonique et égale à la fonction u sur le contour (Γ_2), on a donc, en un point de (Γ_1), si l'on suppose (Γ_1) intérieur à (Γ_2), $u \leqq u_2$, et, comme, sur (Γ_1), u a la valeur constante u_1, on a $u_1 \leqq u_2$; donc la fonction u n'est pas décroissante.

Par exemple, si $U = \log r$, les courbes (Γ) sont des cercles concentriques.

Le même raisonnement s'applique à des fonctions sousharmoniques de plusieurs variables. Par exemple, dans le cas de p variables, on peut prendre $U = \frac{1}{r^{p-2}}$: on obtiendra des hypersphères (Γ).

13. On pourrait établir des théorèmes analogues à ceux des paragraphes précédents, en considérant des fonctions composées de fonctions harmoniques ou sousharmoniques au lieu de se borner aux fonctions de fonctions. Par exemple, si f est une fonction sousharmonique de deux variables, $u = f(U, V)$, où U et V désignent deux fonctions harmoniques conjuguées des variables x et y, est une fonction sousharmonique de x, y, car la transformation conforme $U = X$, $V = Y$ remplace u par $f(X, Y)$ qui est sousharmonique par hypothèse.

On verrait de même que si f est une fonction de deux variables, convexe par rapport à chacune d'elles, la fonction $f(U, V)$ dans laquelle U et V désignent deux fonctions harmoniques quelconques d'un nombre quelconque de variables est sousharmonique par rapport à ces variables.

14. Donnons quelques applications du théorème réciproque du paragraphe **12**.

Nous avons vu que le maximum $M(r)$ du module d'une fonction holomorphe sur le cercle $|z| = r$ est une fonction sousharmonique; comme elle ne dépend que de r, elle est convexe en $\log r$; si le domaine comprend le centre du cercle, $M(r)$ est croissant.

D'autre part, en remplaçant $f(z)$ par $z^\alpha f(z)$, le maximum devient $r^\alpha M(r)$; cette fonction est convexe quel que soit α, donc $\log M(r)$ est convexe en $\log r$: c'est le théorème de M. Hadamard [1].

Soit encore $M(r)$, $m(r)$, le maximum et le minimum d'une fonction harmonique $U(x, y)$ sur la circonférence $|z| = r$. Le nombre $M(r)$ est la plus grande limite des valeurs des fonctions harmoniques $U(ze^{i\theta})$, $U(z)$ désignant la fonction $U(x, y)$: cette fonction est sousharmonique. De même $m(r)$ est surharmonique. Donc, si u est le logarihtme

(1) J. HADAMARD, *Sur les fonctions entières* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 24, 1896, p. 186-187).

de $|f(z)|$, $\log M(r)$ est une fonction convexe et $\log m(r)$ une fonction concave de $\log r$. Ce sont les théorèmes de M. A. Walther [1].

De même, la moyenne $M_p(r)$ du paragraphe **10**,

$$M_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p\, d\varphi,$$

est une fonction sousharmonique; comme elle ne dépend que de r, c'est une fonction convexe de $\log r$.

En remplaçant $f(z)$ par $z^{\frac{\alpha}{p}} f(z)$, la moyenne devient $r^\alpha M_p(r)$; cette fonction est convexe en $\log r$ quel que soit α, donc $\log M_p(r)$ est convexe en $\log r$. C'est le théorème de M. Hardy [2].

Si l'on fait croître p indéfiniment, le nombre $[M_p(r)]^{\frac{1}{p}}$ a pour limite $M(r)$. Donc, $\log M(r)$, limite de $\frac{1}{p}\log M_p(r)$, est une fonction convexe. Le théorème de M. Hadamard apparaît donc comme limite de celui de M. Hardy.

Si le domaine comprend l'origine, la fonction M_p est croissante si elle croît pour $r = 0$, car elle ne peut être que croissante ou d'abord constante, sur un segment partant de l'origine, puis croissante. Mais $M_p(0) = |f(0)|^p$, et comme $|f(z)|^p$ est sousharmonique, on a

$$|f(0)|^p = M_p(0) < M_p(r),$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que dans le cas où $|f(z)|^p$ serait harmonique, ce qui exige que $f(z)$ soit une constante, car les seules fonctions de $|f(z)|$ qui soient harmoniques sont linéaires en $\log|f(z)|$, comme nous l'avons vu.

Supposons que $f(z)$ admette un zéro d'ordre k à l'origine, alors $z^{-k}f(z)$ est holomorphe; sa valeur moyenne est $\frac{1}{r^{kp}}M_p(r)$; comme c'est une fonction croissante si $f(z)$ ne se réduit pas à Az^k, on a, si $r_1 < r_2$,

$$\frac{M_p(r_1)}{r_1^{kp}} < \frac{M_p(r_2)}{r_2^{kp}}$$

---

(1) Alwin WALTHER, *Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion auf Kreisen* (*Math. Zeitschrift*, Bd **11**, 1921, p. 157-160).

(2) G. H. HARDY, *loc. cit.* (p. 41).

ou

$$\frac{\sqrt[p]{M_p(r_1)}}{\sqrt[p]{M_p(r_2)}} < \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k,$$

inégalité établie d'abord par M. Julia (1).

Étudions, comme autre exemple, la fonction $T(r)$ de M. R. Nevanlinna (2) :

$$T(r) = m(r) + \log \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n},$$

avec

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Dans cette formule, $f(z)$ désigne une fonction méromorphe dans le plan; $r_1, r_2, \ldots, r_n$, les modules des pôles contenus dans le cercle $|z| < r$, chacun d'eux répété autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de ce pôle; si l'origine est un pôle, le module correspondant est remplacé par l'unité et non par zéro.

Lorsque la fonction $f(z)$ est holomorphe, le second terme disparaît et $T(r) = m(r)$. Cette fonction est sousharmonique comme nous l'avons vu, et ne dépend que de r. C'est donc une fonction non décroissante, et convexe en $\log r$. Lorsque $f(z)$ est méromorphe, traçons les circonférences (Γ) de centre origine et passant par les pôles. Dans chacun des anneaux ainsi obtenus, la fonction $T(r)$ est convexe. Montrons que la traversée des circonférences ne modifie pas cette propriété, ni celle de la croissance de $T(r)$ vérifiée dans le premier cercle. Supposons d'abord que les modules des zéros de $f(z)$ soient distincts des modules des pôles et désignons par $T_1(r)$ la fonction définie avec $\frac{1}{f(z)}$ comme $T(r)$ l'a été avec $f(z)$, soit

$$T_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi + \log \frac{r^m}{r'_1 r'_2 \ldots r'_m},$$

(1) G. Julia, *Sur les moyennes des modules des fonctions analytiques* (*Bulletin des Sc. math.*, 2e série, t. 51, 1927, p. 198-214).

(2) R. Nevanlinna, *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (*Acta mathematica*, Bd 46, 1925, p. 1-99).

$r'_1, r'_2, \ldots, r'_m$ étant les modules des zéros contenus dans le cercle $|z| < r$; si l'origine est un zéro, le module est remplacé par l'unité.

La formule de Jensen

$$\log|f(o)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + \log r^{n-m}\frac{r'_1 r'_2 \ldots r'_m}{r_1 r_2 \ldots r_n} \quad (^1)$$

peut s'écrire

$$\log|f(o)| = T(r) - T_1(r).$$

Quand on traverse une circonférence (Γ), $T_1(r)$ reste convexe; d'après l'égalité précédente $T(r)$ est aussi convexe. De même, en opérant de proche en proche, on voit que $T(r)$ est croissante.

Si maintenant $f(z)$ admet des zéros et des pôles de même module, le raisonnement ne s'applique plus au passage d'une circonférence (Γ) contenant à la fois un pôle et un zéro. Mais on peut remplacer $f(z)$ par $f(z) - \varepsilon_n = f_n(z)$, la fonction $f_n(z)$ n'ayant pas de zéros situés sur les cercles (Γ), et $|\varepsilon_n|$ étant aussi voisin de zéro que l'on veut. La fonction $T(r)$ relative à $f_n(z)$ possède les propriétés indiquées; on voit aisément qu'elle a pour limite la fonction $T(r)$ relative à $f(z)$. Le résultat est donc général; dans tous les cas, comme l'a établi M. R. Nevanlinna ([2]), la fonction $T(r)$ est croissante et convexe en $\log r$.

15. Dans les paragraphes précédents nous avons calculé des valeurs moyennes de fonctions sousharmoniques sur des circonférences dans le cas du plan, des surfaces sphériques dans le cas de plus de deux dimensions. On peut aussi introduire les valeurs moyennes sur des surfaces ou des volumes.

Considérons par exemple, avec M. Julia ([3]), la fonction

$$\mathfrak{M}_p(r) = \frac{1}{\pi r^2}\int\!\!\int |f(z)|^p\,d\sigma,$$

l'intégrale double étant étendue au cercle $|z| \leqq r$. Cette fonction est

---

([1]) Quand l'origine est un zéro d'ordre k, ou un pôle d'ordre k, on remplace $f(o)$ par $\overline{f(o)}$, avec $\overline{f(x)} = x^{\mp k} f(x)$.

([2]) *Loc. cit.* (p. 47), p. 13.

([3]) *Loc. cit.* (p. 47), p. 202.

sousharmonique, comme limite de la fonction sousharmonique

$$u_n(z) = \sum_{h,k} \left| f\left(\frac{h}{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} z\right) \right|^p \frac{\omega_{h,k}}{\pi r^2} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

$\omega_{h,k}$ désignant l'aire du quadrilatère curviligne compris entre les arcs de cercles de rayons $\frac{h}{n}$ et $\frac{h+1}{n}$ et les segments de rayons, d'arguments $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2(k+1)\pi}{n}$; le rapport $\frac{\omega_{h,k}}{\pi r^2}$ est indépendant de z.

L'intégrale $\mathfrak{M}_p(r)$ ne dépend évidemment que de r; comme elle est sousharmonique, elle est non décroissante et convexe en $\log r$. On peut aussi écrire

$$\mathfrak{M}_p(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r M_p(\rho) \rho \, d\rho.$$

Or, $\log M_p(\rho)$ est convexe en $\log \rho$, il en est de même de $\log[\rho M(\rho)]$, par conséquent, d'après le théorème du paragraphe **5**, le logarithme de l'intégrale est convexe en $\log r$; il en est de même de $\log \mathfrak{M}_p(r)$ qui ne diffère du logarithme de l'intégrale que par l'addition de la fonction $\log 2 - 2 \log r$, linéaire en $\log r$.

Supposons que $z = 0$ soit un zéro d'ordre k de $f(z)$; je dis que la fonction $\mu(r) = \frac{\mathfrak{M}_p(r)}{r^{kp}}$ est croissante. Cette fonction $\mu(r)$ est non décroissante; par conséquent, ou bien la fonction $\mu(r)$ est croissante, ou bien elle est d'abord constante, puis croissante. Il suffit de montrer qu'elle est croissante pour $r = 0$. Or,

$$\mu(0) = \lim_{r=0} \frac{\mathfrak{M}_p(r)}{r^{kp}} = \lim_{r=0} \frac{2}{r^{kp+2}} \int_0^r \rho^{kp+1} \overline{M_p(\rho)} \, d\rho,$$

en désignant par $\overline{M_p(\rho)}$ la valeur moyenne d'ordre p de la fonction $\overline{f(z)} = z^{-k} f(z)$. Prenons le rapport des dérivées, il vient

$$\mu(0) = \frac{2}{kp+2} \overline{M_p(0)} = \frac{2 \, |\overline{f(0)}|^p}{kp+2}.$$

Or, si $\overline{f(z)}$ n'est pas une constante, on a

$$|\overline{f(0)}|^p < \overline{M_p(\rho)},$$

d'où

$$\frac{2}{r^{kp+2}} |\overline{f(o)}|^p \int_0^r \rho^{kp+1}\, d\rho < \frac{2}{r^{kp+2}} \int_0^r \rho^{kp+1}\, \overline{M_p(\rho)}\, d\rho.$$

c'est-à-dire

$$\mu(o) < \mu(r).$$

Donc, la fonction μ est croissante, à moins que $f(z) = Az^k$, auquel cas elle est constante. Dans les autres cas, si $r_1 < r_2$, on a encore

$$\frac{\sqrt[p]{\mathfrak{M}_p(r_1)}}{\sqrt[p]{\mathfrak{M}_p(r_2)}} < \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k,$$

comme l'a montré M. Julia par une autre voie.

On étudierait de la même manière les valeurs moyennes

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int\int u(x, y, z)\, d\sigma, \quad \frac{3}{4\pi r^3}\int\int\int u(x, y, z)\, d\tau,$$

étendues à la surface et au volume d'une sphère, $u(x, y, z)$ désignant une fonction sousharmonique. On verrait que ce sont des fonctions croissantes et convexes de $\frac{1}{r}$.

16. Le théorème du paragraphe **12** relatif aux fonctions sousharmoniques de la forme $f(U)$ où la fonction U est harmonique, est valable aussi bien lorsque l'équation $U = C$ définit des courbes fermées que dans le cas où ces courbes sont ouvertes. Les autres propriétés des fonctions sousharmoniques subsistent à condition de limiter convenablement leur croissance quand le point (x, y) s'éloigne à l'infini.

Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas de domaines limités par deux parallèles à l'axe des y, domaines que nous appellerons des *bandes*.

Il importe d'abord de reprendre, pour un tel domaine, l'étude des propriétés des fonctions sousharmoniques. Nous allons voir, par exemple, que l'inégalité fondamentale relative aux valeurs moyennes demeurera une condition suffisante pour qu'une fonction u, dont la croissance est convenablement limitée, ait son maximum sur la frontière, même dans un domaine infini.

Considérons d'abord une fonction $u(x, y)$ continue en chaque point à distance finie du domaine fermé constitué par les points d'une bande, frontière comprise. Supposons que, en chaque point intérieur, l'inégalité fondamentale soit vérifiée. La fonction $u(x, y)$ est alors sousharmonique dans tout domaine à distance finie intérieur à la bande. Supposons que $u(x, y)$ tende vers $-\infty$ lorsque $|y|$ augmente indéfiniment, uniformément quel que soit x dans la bande. Soit M la borne supérieure des valeurs de u sur la frontière; je dis que l'on a, en tout point de la bande,

$$u \leqq \mathrm{M}.$$

En effet, si en un point (x_0, y_0), la fonction prenait une valeur u_0 supérieure à M, on pourrait construire un rectangle limité par les côtés extrêmes de la bande et par les droites $y = \pm l$, de manière que, sur ces derniers côtés, u fût inférieur à u_0, puisqu'il tend vers $-\infty$. Dans ce rectangle, u, qui est sousharmonique prendrait sa valeur maximum à l'intérieur, ce qui est impossible. L'égalité ne peut avoir lieu à l'intérieur que si u est constant.

Je dis que ce résultat subsiste si u, lorsque $|y|$ croît indéfiniment, croît moins vite qu'une fonction harmonique ou surharmonique $\mathrm{V}(x, y)$ qui tend vers $+\infty$ avec $|y|$. En effet, $u - \varepsilon\mathrm{V}$ est sousharmonique à l'intérieur de la bande si ε est positif; l'égalité

$$u - \varepsilon\mathrm{V} = -\mathrm{V}\left(\varepsilon - \frac{u}{\mathrm{V}}\right)$$

montre que $u - \varepsilon\mathrm{V}$ tend vers $-\infty$ quand $|y|$ augmente indéfiniment puisque, par hypothèse, $\frac{u}{\mathrm{V}}$ tend vers zéro. Admettons que les valeurs de u sur la frontière aient une borne supérieure M, on aura alors, à l'intérieur,

$$u - \varepsilon\mathrm{V} \leqq \mathrm{M} - \varepsilon\mu,$$

μ désignant le minimum de V dans la bande. Si, laissant x et y fixes, on fait tendre ε vers zéro, on voit que, $u \leqq \mathrm{M}$ [1].

---

[1] On peut prendre pour V une fonction harmonique ou sousharmonique qui tend vers $-\infty$; on change ε en $-\varepsilon$ ou V en $-$ V.

Dans la suite, nous supposerons que la bande est définie par

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2},$$

ce que l'on peut toujours admettre, car une même transformation linéaire sur x et y conserve les fonctions sousharmoniques.

Dans ce cas, admettons que l'on ait $u < e^{k|y|}$ avec $0 < k < 1$. Prenons δ positif assez petit pour que $k + \delta$ soit inférieur à 1 et donnons à V la valeur

$$V = \mathcal{R}[\cos(k+\delta)z] = \cos(k+\delta)x \operatorname{ch}(k+\delta)y.$$

On a

$$V > \frac{1}{2}\cos\frac{k\pi}{2} e^{(k+\delta)|y|},$$

et

$$\frac{u}{V} = \frac{2e^{-\delta|y|}}{\cos\frac{k\pi}{2}}$$

a pour limite 0, quand $|y|$ augmente indéfiniment, tandis que V tend vers $+\infty$.

Le théorème est applicable à une fonction sousharmonique croissant moins vite que $e^{k|y|}$, en particulier à une fonction bornée supérieurement ou inférieurement.

Dans les mêmes conditions, une fonction surharmonique reste supérieure ou égale à la borne inférieure m de ses valeurs sur la frontière de la bande.

Enfin, si la fonction U est harmonique et croît moins vite que $e^{k|y|}$ (ou que toute fonction harmonique qui tend vers $+\infty$), on a

$$m \leqq U \leqq M,$$

m et M étant les bornes inférieure et supérieure sur le contour. L'égalité ne peut avoir lieu à l'intérieur que si la fonction est constante (¹).

Dans les mêmes conditions de croissance, une fonction harmonique, nulle sur la frontière, est nulle à l'intérieur et, par conséquent, la fonc-

(¹) *Cf.* PHRAGMÉN et LINDELÖF, *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (*Acta mathematica*, t. 31, 1908, p. 381-406).

tion U est déterminée d'une manière unique par ses valeurs sur la frontière.

17. Inversement, donnons-nous, sur les droites (Δ) et (Δ') qui limitent la bande, deux suites de valeurs, continues à distance finie et inférieures à un nombre M. Il est facile de former la fonction harmonique, bornée supérieurement par exemple, qui prend ces valeurs sur (Δ) et (Δ') : nous savons que cette fonction est unique.

Considérons en effet le rectangle (R_n) déterminé par les droites $y = \pm n$ et les droites (Δ), (Δ'). Il existe une fonction harmonique U_n qui prend, sur les côtés de (R_n) portés par (Δ) et (Δ'), les valeurs données, et, sur les autres côtés, des suites continues de valeurs bornées, arbitrairement choisies : par exemple, on peut faire varier linéairement les valeurs de U_n sur ces côtés. Les fonctions U_n étant bornées supérieurement, forment une famille normale. On peut extraire, de la suite U_n, une suite convergeant uniformément dans tout domaine intérieur à la bande vers la fonction bornée supérieurement U qui prend sur (Δ) et (Δ') les valeurs données. On en déduit aisément que la suite U_n elle-même est convergente, ce qui résulte aussi du fait qu'elle converge sur la frontière [1].

Soit alors u une fonction sousharmonique et bornée supérieurement dans la bande. Je dis que u est inférieure ou égale à la fonction bornée U qui prend les mêmes valeurs que u sur la frontière de toute bande intérieure.

En effet, pour former U_n, nous pouvons prendre, sur les côtés portés par $y = \pm n$, les valeurs de u. Comme u est sousharmonique dans le rectangle (R_n) correspondant à la bande partielle considérée, on a

$$u \leqq U_n$$

et, à la limite,

$$u \leqq U.$$

L'égalité n'est possible à l'intérieur que si u coïncide, dans la bande, avec U. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un point P, intérieur à la bande, en lequel la fonction sousharmonique $v = u - U$ serait

(1) *Voir* P. MONTEL, *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math. pures et appliquées*, 7e série, t. 3, p. 1-54).

négative. Joignons ce point au point P′ en lequel $v = 0$, par hypothèse. Il y a alors un point Q du segment PP′, tel que, en tous les points de PQ, sauf en Q, v est négatif; au point Q, v est nul. Si l'on trace une circonférence de centre Q et assez petite pour couper le segment QP, on voit que l'inégalité fondamentale ne peut être vérifiée pour cette circonférence.

18. Une fonction sousharmonique dans une bande ou une partie de cette bande, et qui est constante sur chaque parallèle aux bords, est une fonction convexe de x, comme il résulte du théorème du paragraphe **12** en prenant $U \equiv x$.

Lorsque la fonction sousharmonique est bornée supérieurement ou inférieurement, on peut le démontrer aisément d'une manière directe.

En effet, soient $x_1 < x_2 < x_3$ trois abscisses de droites intérieures à la bande; u_1, u_2, u_3 les valeurs de u sur ces droites. La fonction $Ax + B$ est harmonique et l'on peut déterminer A et B de manière qu'elle prenne pour x_1 et x_3 les valeurs u_1 et u_3. En un point d'abscisse x_2, la fonction u a une valeur u_2 qui doit être inférieure ou égale à celle de la fonction linéaire. Donc $u(x)$ est une fonction convexe.

Considérons par exemple une fonction harmonique U, bornée en module dans la bande, et soient $M(x)$, $m(x)$, $\mu(x)$ le maximum de U, de $-U$, de $|U|$, sur chaque droite d'abscisse x. Les fonctions $U(x, y+h)$ forment une famille normale, h ayant une valeur réelle arbitraire. La fonction $M(x)$ égale en chaque point à leur plus grande limite est sousharmonique, donc convexe en x. Il en est de même de $-m(x)$; donc $m(x)$ est concave. Quant à $\mu(x)$, qui est le plus grand des deux nombres $M(x)$ et $-m(x)$, c'est une fonction convexe. Nous retrouvons ainsi un théorème de M. Walther.

On obtiendrait de la même manière les théorèmes correspondants pour les fonctions harmoniques de trois variables définies dans une tranche limitée par deux plans parallèles, ou à l'intérieur d'un cylindre indéfini [1].

---

[1] A. Walther, *Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik*, Bd 1, 1921, p. 336-338; Bd 2, 1922, p. 69-71. — *Voir* aussi Rogosinski, *Zür Theorie der Dirichletschen Reihen* (*Math. Zeitschrift*, Bd 20, 1924, p. 280-320).

Soient encore $f(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans la bande, $M(x)$ le maximum de $|f(x+iy)|$ lorsque x est fixe; c'est la plus grande limite de la famille normale des fonctions $|f(z+ih)|$, h ayant une valeur réelle quelconque. $M(x)$ est donc sousharmonique et bornée, et, par suite, convexe en x. Si l'on remplace $f(z)$ par $e^{\alpha z}f(z)$, α étant réel, le nouveau maximum est $e^{\alpha x}M(x)$. Cette fonction étant convexe en x quel que soit α, $\log M(x)$ est convexe en x. C'est le théorème de M. Dœtsch ([1]). Comme le fait remarquer l'auteur, on peut, au moyen de la représentation conforme, déduire le théorème des trois cercles du précédent théorème de trois droites.

19. Considérons encore l'intégrale

$$J(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(z)|^p\,dy$$

étudiée par MM. Hardy, Ingham et Pólya ([2]), et supposons d'abord que l'on ait

$$|f(z)|<Ae^{-k|y|},$$

A et k étant des constantes positives : l'intégrale existe évidemment pour toute valeur de x dans la bande. Cette intégrale est la limite de

$$u(x,y,l)=\int_{y-l}^{y+l}|f(z)|^p\,dy$$

lorsque l croît indéfiniment, et cette limite est atteinte uniformément lorsque le point (x,y) reste dans une région finie intérieure à la bande. Or,

$$u(x,y,l)=\lim_{n=\infty}\frac{2l}{n}\sum_k\left|f\left(z+i\frac{kl}{n}\right)\right|^p$$

$$[k=-(n-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1)].$$

Le second membre est une fonction sousharmonique, il en est donc de même de u, et, par suite, de sa limite $J(x)$. Cette fonction soushar-

---

([1]) G. Doetsch, *Ueber die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden* (*Math. Zeitschrift*, Bd 8, 1920, p. 237-240).

([2]) Hardy, Ingham et Pólya, *Theorems concerning mean values of analytic functions* (*Proc. of the Royal Soc.*, A, vol. 113, 1927, p. 542-569).

monique et bornée ne dépendant que de x est convexe en x; donc son maximum a lieu à l'une des extrémités de l'intervalle.

D'autre part, si l'on remplace $f(z)$ par $e^{\frac{\alpha z}{r}} f(z)$, l'intégrale considérée est remplacée par $e^{\alpha x} \mathrm{J}(x)$: cette dernière fonction est convexe quel que soit α, donc $\log \mathrm{J}(x)$ est une fonction convexe de x.

Ces résultats obtenus par les auteurs cités ont été étendus par eux au cas où la croissance de la fonction $|f(z)|$ est assujettie à certaines limitations très générales. Je renverrai à leur Mémoire pour l'étude de cette extension.

20. Nous allons étendre aux fonctions de deux variables complexes certains des résultats précédents.

Soit $f(z, z')$ une fonction holomorphe de deux variables complexes dans le domaine $|z| \leqq \mathrm{R}$, $|z'| \leqq \mathrm{R}'$. Soit $r < \mathrm{R}$ et $r' < \mathrm{R}'$. Lorsque z et z' varient de façon que

$$|z| \leqq r, \qquad |z'| \leqq r',$$

$|f(z, z')|$ a un maximum $\mathrm{M}(r, r')$ qui est atteint pour des valeurs z_0 et z'_0 telles que

$$|z_0| = r, \qquad |z'_0| = r'.$$

En effet, si l'on avait par exemple $|z_0| < r$, la fonction $f(z, z'_0)$, holomorphe en z dans le cercle $|z| < r$, atteindrait son maximum en un point intérieur : elle serait constante et l'on pourrait alors toujours supposer que $|z_0| = r$.

La fonction $\mathrm{M}(r, r')$ est une fonction continue de l'ensemble des variables r et r'. En effet, $f(z, z')$ étant continue dans le domaine à quatre dimensions

$$|z| \leqq \mathrm{R}, \qquad |z'| \leqq \mathrm{R}',$$

au nombre positif ε arbitraire, correspond un nombre δ tel que les inégalités

$$|z_1 - z_0| < \delta, \qquad |z'_1 - z'_0| < \delta$$

entraînent

$$|f(z_1, z'_1) - f(z_0, z'_0)| < \varepsilon.$$

Prenons alors

$$|r_1 - r| < \delta, \qquad |r'_1 - r'| < \delta.$$

La valeur $\mathrm{M}(r, r')$ est prise en un point (z_0, z'_0) tel que $|z_0| = r$,

$|z'_0| = r'$. Prenons z_1, de module r_1 et de même argument que z_0, et z'_1, de module r'_1 et de même argument que z'_0; on aura

$$|z_1 - z_0| < \delta, \qquad |z'_1 - z'_0| < \delta,$$

donc

$$M(r_1, r'_1) \geqq |f(z_1, z'_1)| \geqq |f(z_0, z'_0)| - \varepsilon = M(r, r') - \varepsilon.$$

On démontrerait de même que

$$M(r, r') \geqq M(r_1, r'_1) - \varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$|M(r_1, r'_1) - M(r, r')| < \varepsilon$$

pour

$$|r_1 - r| < \delta, \qquad |r'_1 - r'| < \delta.$$

La continuité est établie.

Considérons maintenant la fonction $M(r, z')$ égale au maximum de $|f(z, z')|$ lorsque z' est fixe et $|z| \leqq r$. Le nombre $M(r, r')$ est évidemment la plus grande limite de $M(r, z')$ lorsque z' prend toutes les valeurs de module inférieur ou égal à r', car c'est une fonction continue de z'. Or $M(r, z')$ est une fonction croissante et convexe de $\log r$: il en est donc de même de $M(r, r')$.

Ainsi, la fonction $M(r, r')$ est croissante en r et en r'; elle est convexe en $\log r$ et en $\log r'$; c'est donc une fonction sousharmonique des variables $\log r$ et $\log r'$ dans la région

$$\log r \leqq \log R, \qquad \log r' \leqq \log R'.$$

En remplaçant $f(z, z')$ par $z^\alpha z'^\beta f(z, z')$ on verrait que : $\log M(r, r')$ *est sousharmonique en* $\log r$ *et* $\log r'$ *et doublement convexe.*

On peut considérer de même l'intégrale

$$M_p(r, r') = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi}, r'e^{i\varphi'})|^p \, d\varphi \, d\varphi'$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_p(r, r'e^{i\varphi'}) \, d\varphi',$$

en posant

$$M_p(r, z') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi}, z')|^p \, d\varphi.$$

Or, $M_p(r, z')$ est une fonction croissante et convexe en $\log r$, quel que soit z'. Il en est donc de même de sa valeur moyenne sur le cercle $|z'| = r'$, car c'est la limite de la fonction convexe

$$\frac{1}{n}\left[M_p(r, z') + M_p\left(r, z'e^{\frac{2i\pi}{n}}\right) + \ldots + M_p\left(r, z'e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}\right)\right]$$

lorsque n croît indéfiniment.

Ainsi, $M_p(r, r')$ est croissante et convexe en $\log r$, croissante et convexe en $\log r'$: c'est une fonction sousharmonique de ces deux variables et convexe par rapport à chacune d'elles.

En remplaçant $f(z, z')$ par $z^{\frac{\alpha}{p}} z'^{\frac{\beta}{p}} f(z, z')$, on verrait que $r^{\alpha} r'^{\beta} M_p(r, r')$ possède les mêmes propriétés, quelles que soient les constantes α et β. Donc $\log M_p(r, r')$ *est une fonction sousharmonique des variables* $\log r$ *et* $\log r'$, *convexe par rapport à chacune d'elles.*

Comme $\sqrt[p]{M_p(r, r')}$ a pour limite $M(r, r')$, les fonctions sousharmoniques $\frac{\log M_p}{p}$ ont pour limite $\log M$. La fonction limite est donc doublement convexe et $\log M$ est sousharmonique. Le premier théorème apparaît ainsi comme un cas limite du second.

21. Appliquons les résultats précédents à l'étude des rayons de convergence associés pour les séries entières de plusieurs variables.

Supposons que la série double

$$\sum_{p, q} a_{p,q} z^p z'^q \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots; q = 0, 1, 2, \ldots)$$

soit convergente, et par suite absolument convergente, pour $|z| < R$, $|z'| < R'$; pour chaque valeur de r inférieure à R, il existe un nombre r' tel que la série soit absolument convergente pour $|z| < r$, $|z'| < r'$ et divergente pour $|z| > r$, $|z'| > r'$; r' est une fonction $u(r)$ de la variable r, et l'on dit que les rayons r et r' sont associés. D'après ce qui précède, r' n'est jamais nul puisqu'il est au moins égal à R'. Si l'on pose

$$A_{p,q} = |a_{p,q}|$$

et

$$\varphi_q(z) = A_{0,q} + A_{1,q} z + \ldots + A_{p,q} z^p + \ldots,$$

le rayon r' est le rayon de convergence de la série entière en z'

$$\varphi_0(r) + z'\varphi_1(r) + \ldots + z'^q\varphi_q(r) + \ldots.$$

Il est donc égal à l'inverse de la plus grande limite de $\sqrt[q]{\varphi_q(r)}$:

$$\log\frac{1}{r'} = \overline{\lim_{q=\infty}}\ \frac{\log\varphi_q(r)}{q};$$

mais $\varphi_q(r)$ est le maximum de $|\varphi_q(z)|$ sur la circonférence $|z| = r$, puisque tous les coefficients sont positifs. D'après le théorème des trois cercles de M. Hadamard, $\log\varphi_q(r)$ est convexe en $\log r$; il en est donc de même de sa plus grande limite $-\log r'$. Par conséquent $\log r'$ est une fonction concave de $\log r$. C'est le théorème de M. Fabry [1].

Passons à une série à trois variables

$$\sum_{p,q,s} a_{p,q,s} z^p z'^q z''^s \qquad (p, q, s = 0, 1, 2, \ldots),$$

que nous supposerons convergente, et, par suite, absolument convergente, pour $|z| < R$, $|z'| < R'$, $|z''| < R''$. Si l'on se donne $r < R$ et $r' < R'$, il existe un nombre r'' tel que la série soit absolument convergente pour $|z| < r$, $|z'| < r'$, $|z''| < r''$ et divergente pour $|z| > r$, $|z'| > r'$, $|z''| > r''$. Le rayon r'' sera une fonction $u(r, r')$ de r et r' qui n'est jamais nulle puisque r'' est au moins égal à R''. On démontre aisément qu'elle est continue en (r, r'). Posons encore

$$A_{p,q,s} = |a_{p,q,s}|$$

et

$$\varphi_s(z, z') = \sum_{p,q} A_{p,q,s} z^p z'^q \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Le rayon r'' est le rayon de convergence de la série $\sum_{s=0}^{s=+\infty} \varphi_s(r, r')z''^s$, il

---

(1) *Voir* E. FABRY, *Sur les rayons de convergence d'une série double* (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris*, t. 134, 1902, p. 1190-1192). — *Voir* aussi G. FABER, *Ueber die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher* (*Math. Annalen*, Bd 61, 1906, p. 289-324), et F. HARTOGS, *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhändiger Veränderlichen*, etc. (*Math. Annalen*, Bd 62, 1906, p. 1-88).

est donné par la formule

$$-\log r'' = \overline{\lim_{s=\infty}} \frac{\log \varphi_s(r, r')}{s}.$$

Or, le second membre est une fonction doublement convexe en $\log r$ et en $\log r'$. Comme cette propriété se conserve à la limite, la fonction $-\log r''$ est sousharmonique, et l'on peut énoncer la proposition :

Dans une série entière à plusieurs variables, les rayons de convergence associés sont tels que le logarithme de chaque rayon est une fonction surharmonique des logarithmes de tous les autres, concave par rapport au logarithme de chacun d'eux.