JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. GOURSAT

Sur un problème de la théorie des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 1-27.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur un problème de la théorie des surfaces;

PAR E. GOURSAT.

Le problème étudié dans ce Mémoire m'a été suggéré par la lecture des articles de G. Darboux sur les surfaces isothermiques (1). Après avoir posé le problème dans toute sa généralité, G. Darboux, n'ayant en vue que la recherche de nouvelles surfaces isothermiques, s'est borné à indiquer une solution élégante dans un cas très particulier qui se rattache à la déformation des quadriques. Mais il n'est jamais revenu, du moins à ma connaissance, sur le cas général qui fait l'objet de ce Mémoire, et qui exigeait des méthodes toutes différentes.

Les principaux résultats obtenus ont été résumés dans deux notes présentées à l'Académie des Sciences (2).

1. Je rappellerai d'abord l'objet du problème, et la formule fonda-

(1) *Comptes rendus*, t. 78, 1899, p. 1264, 1299, 1483. J'aurai souvent l'occasion de renvoyer le lecteur au grand ouvrage de G. Darboux sur la *Théories des Surfaces*. J'indiquerai seulement, avec le nom de l'auteur, le tome et la page.

(2) *Comptes rendus*, t. 182, 1926, p. 1433; t. 184, 1927, p. 178.

mentale de G. Darboux. Soient x, y, z trois fonctions des deux paramètres u, v; l'élément linéaire de la surface (Θ) décrite par le point m de coordonnées, x, y, z, par rapport à un système d'axes rectangulaires, est donné par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

où l'on a posé

$$(2) \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G}.$$

Des relations (2) on déduit par différentiation les formules classiques

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, & \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, & \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}, \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, & \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}. \end{cases}$$

Conservant les notations classiques, nous poserons

$$\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}, \qquad \mathrm{S}c\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}, \qquad \mathrm{S}c\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}, \qquad \mathrm{S}c\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}},$$

c, c', c'' désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface; D, D′, D″ ne sont définis qu'au signe près, comme les cosinus c, c', c'' eux-mêmes; le quotient $\dfrac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{H}^4}$ représente la courbure totale, et par suite $\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2$ s'exprime uniquement au moyen des coefficients E, F, G et de leurs dérivées.

Les dérivées du second ordre $\dfrac{\partial x^2}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ s'expriment à leur tour par des formules de la forme ([1]).

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{A}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{C}c, \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \mathrm{A}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{B}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{C}c', \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \mathrm{A}\dfrac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{B}\dfrac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{C}c'', \end{cases}$$

([1]) DARBOUX, t. 3, p. 250.

dont on peut calculer directement les coefficients en multipliant les deux membres des trois relations par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ respectivement, puis par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, et enfin par c, c', c''. En ajoutant, et tenant compte des relations évidentes $\mathrm{S}\, c\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\mathrm{S}\, c\frac{\partial x}{\partial v} = 0$, on obtient pour A et B des valeurs qui ne dépendent que de E, F, G, et de leurs dérivées, tandis que l'on a $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}$. On obtient de même les formules

$$(4)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} &= \mathrm{A}_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}} c, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \mathrm{A}_2 \frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}_2 \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}} c, \end{aligned} \right.$$

A_1, B_1, A_2, B_2 ne dépendant que des coefficients E, F, G et de leurs dérivées, et les dérivées du second ordre de y et de z se déduisant des formules précédentes en remplaçant x et c par y et c', ou par z et c''.

Au point $m(x, y, z)$ de la surface (Θ) faisons correspondre un point M du plan tangent à cette surface, dont les coordonnées sont données par les formules

$$(5) \qquad \left\{ \begin{gathered} \mathrm{X} = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \mathrm{Y} = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \mathrm{Z} = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v}, \end{gathered} \right.$$

λ et μ étant des fonctions des paramètres u, v. Le lieu du point M est une surface (Σ), pour laquelle l'élément linéaire $d\Sigma$ est donné par la formule

$$(6) \qquad d\Sigma^2 = d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 = \mathrm{S}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\, dv\right)^2;$$

des formules (5) on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} &= \left(1 + \frac{\partial \mu}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

et, si l'on y remplace $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ par leurs expressions tirées des relations (4) et (4)′ il vient

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = P\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\lambda D + \mu D'}{H} c, \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial v} = P_1\dfrac{\partial x}{\partial u} + Q_1\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\lambda D' + \mu D''}{H} c, \end{cases}$$

P, Q, P_1, Q_1 ne dépendant que des fonctions E, F, G, λ, μ et de leurs dérivées. En portant dans l'expression de $d\Sigma^2$, on voit que cette forme quadratique en du, dv se composera de deux parties distinctes, une forme $\mathfrak{F}$ provenant des termes en $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ dans les dérivées de X, Y, Z, et dont les coefficients ne dépendent encore que de E, F, G, λ, μ et de leurs dérivées, d'autre part une forme où figurent D, D′, D″, qui a pour expression

$$\frac{(\lambda D + \mu D')^2 du^2 + 2(\lambda D + \mu D')(\lambda D' + \mu D'')\, du\, dv + (\lambda D' + \mu D'')^2 dv^2}{H^2}.$$

Cette forme peut s'écrire de la façon suivante

$$\frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}{H^2}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2) + \frac{D'^2 - DD''}{H^2}(\mu\, du - \lambda\, dv)^2;$$

si l'on remplace $\frac{D'^2 - DD''}{H^2}$ par son expression au moyen des coefficients E, F, G et de leurs dérivées, et qu'on réunisse le second terme à la forme $\mathfrak{F}$, on obtient finalement la formule de Darboux

$$(8)\qquad d\Sigma^2 = \Omega + \frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}{H^2}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2),$$

où Ω est une forme quadratique en du, dv, *dont les coefficients ne dépendent que de* E, F, G, λ, μ, *et de leurs dérivées*.

Si l'on remplace les fonctions λ, μ des paramètres u, v, par deux autres fonctions λ_1, μ_1 des mêmes paramètres, au point m de (Θ) on fait correspondre un autre point M_1 du plan tangent en m à (Θ), et le lieu du point M_1 est une nouvelle surface (Σ_1) pour laquelle on a

$$(8)'\quad (d\Sigma_1)^2 = \Omega_1 + \frac{D\lambda_1^2 + 2D'\lambda_1\mu_1 + D''\mu_1^2}{H^2}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2),$$

la forme Ω_1 se déduisant de la forme Ω en remplaçant λ et μ par λ_1 et μ_1 respectivement.

2. Le second membre de la formule (8) est la somme de deux formes quadratiques, dont la première ne change pas quand on remplace la surface (Θ) par une surface (Θ') admettant le même élément linéaire, en conservant les mêmes valeurs pour λ, μ, tandis que la seconde dépend de D, D', D'', et par conséquent varie avec la surface (Θ'). Pour abréger, nous appellerons *déformation* l'opération qui consiste à remplacer la surface (Θ) par une autre surface (Θ') admettant le même élément linéaire, en faisant correspondre les points m, m', des deux surfaces, qui ont les mêmes coordonnées curvilignes (u, v). On sait d'ailleurs que l'on ne peut pas toujours passer de (Θ) à (Θ') par une suite continue de déformations au sens physique du mot. Dans la suite des énoncés, on peut aussi remplacer la déformation de la surface (Θ) par le roulement de cette surface sur une surface applicable (Θ') de façon que le point de contact admette sur les deux surfaces les mêmes coordonnées (u, v), et que les éléments linéaires en coïncidence se correspondent de la même façon. Cela posé, considérons le trièdre (T) ayant pour sommet un point m de (Θ) et pour arêtes la normale à la surface et les tangentes aux deux courbes (u) et (v) qui passent par m, et associons à chacun de ces trièdres un point M situé dans le plan tangent à (Θ). Si l'on déforme la surface (Θ), chaque point m entraînant le trièdre (T), le lieu du point M après cette opération est une nouvelle surface (Σ') qui se déduit de (Θ') de la même façon que (Σ) se déduit de (Θ), et dont l'élément linéaire s'obtiendrait en remplaçant dans la formule (8) D, D', D'' par les valeurs relatives à la surface (Θ'). La surface (Σ_1) est remplacée de même par une surface (Σ'_1), dont l'élément linéaire s'obtiendrait de la même façon.

Lorsque les fonctions (λ, μ), (λ_1, μ_1) annulent respectivement les coefficients des deux formes Ω, Ω_1, on déduit immédiatement des formules (8) et (8)'

$$\left(\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}\right)^2 = \frac{D\lambda_1^2 + 2D'\lambda_1\mu_1 + D''\mu_1^2}{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}; \tag{9}$$

si donc on fait correspondre les points M, M_1 des surfaces Σ, Σ_1, il y a similitude des éléments infiniment petits correspondants des deux surfaces Σ, Σ_1, et cette propriété se conserve quand on remplace la surface (Θ) par une autre surface quelconque (Θ') applicable sur (Θ), ou, ce qui revient au même, quand on fait rouler (Θ) sur une surface applicable (Θ'), et qu'on prend les surfaces décrites par les points M, M_1, associés au point de contact variable m de (Θ) et de (Θ'). Il est à remarquer que le rapport de similitude des deux éléments dépend de D, D', D'', et par conséquent varie quand on remplace (Θ) par (Θ'), à moins que l'on ait $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu = 0$, cas que nous allons examiner.

3. G. Darboux a découvert, par voie synthétique, un cas étendu où il existe deux fonctions $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$ annulant les trois coefficients de la forme Ω. Je montrerai, dans un autre Mémoire, que la solution de Darboux est la seule solution de ce problème. D'une façon plus générale, proposons-nous de déterminer les fonctions λ, μ, λ_1, μ_1 de (u, v) de façon que le rapport $\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}$ soit indépendant du rapport $\frac{dv}{du}$, pour toutes les valeurs admissibles de D, D', D''. Les surfaces (Σ), (Σ_1) se correspondent alors avec similitude des éléments infiniment petits, et cette propriété se conserve quand on remplace la surface (Θ) par une autre surface admettant le même élément linéaire. On a, nous l'avons vu, une solution de ce problème en supposant que λ, μ, λ_1, μ_1 annulent les trois coefficients des deux formes Ω, Ω_1, mais il y a une infinité de solutions différentes de celle-là.

Nous allons d'abord démontrer que les trois points m, M, M_1, qui se correspondent sur les trois surfaces (Θ), (Σ), (Σ_1), doivent être en ligne droite, si les deux formes Ω, Ω_1 ne sont pas identiquement nulles. En effet, si les droites mM, mM_1 ne coïncident pas, on peut choisir les courbes coordonnées de façon que les droites mM, mM_1 soient tangentes respectivement aux deux courbes coordonnées qui passent au point m de (Θ); on a alors, dans ce système de coordonnées,

$$\lambda_1 = \mu = 0.$$

Soient

$$d\Sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 + \frac{D\lambda^2}{H}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

$$d\Sigma_1^2 = e_1\,du^2 + 2f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2 + \frac{D''\mu_1^2}{H}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2)$$

les expressions des éléments linéaires des deux surfaces. Pour que le rapport $\left(\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}\right)^2$ soit indépendant de $\frac{dv}{du}$, il faut que l'on ait

$$\frac{e+\frac{D^2\lambda^2}{H^2}}{e_1+\frac{DD''\mu_1^2}{H^2}}=\frac{f+\frac{DD'\lambda^2}{H^2}}{f_1+\frac{D'D''\mu_1^2}{H^2}}=\frac{g+\frac{DD''\lambda^2}{H^2}}{g_1+\frac{D''^2\mu_1^2}{H^2}},$$

et cela, pour toutes les valeurs admissibles de D, D', D''. La première égalité s'écrit, en chassant les dénominateurs,

$$ef_1-e_1f+\frac{\lambda^2}{H^2}(D^2f_1-DD'e_1)+\frac{\mu_1^2}{H^2}(D'D''e-DD''f)=0.$$

Si l'on remplace dans cette relation DD'' par D'^2+K, où K ne dépend que de E, F, G, on a une relation quadratique en D, D', D'', qui doit être vérifiée identiquement, car elle ne se confond pas avec la relation $DD''=D'^2+K$; ce qui exige que l'on ait

$$e\mu_1^2=f_1\lambda^2=e_1\lambda^2=f\mu_1^2=0,$$

et par suite

$$e=e_1=f=f_1=0.$$

En égalant de même les deux derniers rapports, on obtient les conditions $g=g_1=0$, de sorte que les formes Ω et Ω_1 doivent être identiquement nulles.

Si ces deux formes ne sont pas identiquement nulles, les trois points sont donc alignés.

Nous pouvons alors supposer qu'on a choisi les courbes coordonnées de façon que les droites mM soient tangentes aux courbes (v). Avec ce système de coordonnées, on a $\mu=\mu_1=0$, et les formules (8) et (8)' deviennent

$$d\Sigma^2=\Omega+\frac{D\lambda^2}{H^2}(D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2),$$

$$d\Sigma_1^2=\Omega_1+\frac{D\lambda_1^2}{H^2}(D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2).$$

On tire immédiatement de ces deux relations

$$(10)\qquad \frac{d\Sigma^2}{\lambda^2}-\frac{d\Sigma_1^2}{\lambda_1^2}=\frac{\Omega}{\lambda^2}-\frac{\Omega_1}{\lambda_1^2}$$

et le rapport $\left(\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}\right)^2$ sera égal à $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2$, quels que soient D, D′, D″, pourvu que les trois coefficients de la forme $\frac{\Omega}{\lambda^2} - \frac{\Omega_1}{\lambda^2}$ soient nuls. On s'assure du reste aisément, par un calcul analogue à celui qui vient d'être fait, que ces conditions sont nécessaires pour que le rapport $\left(\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}\right)^2$ soit indépendant de $\frac{du}{dv}$, et de D, D′, D″.

4. La formule (10) a une interprétation géométrique simple. Si les droites $m\mathrm{MM}_1$ ne sont pas des droites isotropes (cas singulier qui sera examiné plus loin), le rapport $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda}\right|$ est égal au rapport des distances $m\mathrm{M}$, $m\mathrm{M}_1$, de sorte que le rapport de similitude des éléments infiniment petits correspondants des deux surfaces (Σ), (Σ_1) est égal au rapport des distances de ces deux éléments au point m.

Étant donné un couple de surfaces (Σ), (Σ_1) qui se correspondent point par point avec conservation des angles, cette remarque fournit la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux surfaces puissent être déduites d'une surface (Θ) par la construction que l'on vient d'expliquer. En effet, s'il en est ainsi, les droites MM_1 forment une congruence de droites, le point m est un des points focaux sur MM_1, et la surface (Θ) est une des nappes de la surface focale. *Le rapport de similitude des éléments infiniment petits correspondants des deux surfaces* (Σ), (Σ_1) *est donc égal au rapport des distances de ces deux éléments à l'un des points focaux situés sur* MM_1.

Cette condition est suffisante. En effet, si l'on a pris sur la surface (Θ) un système de coordonnées curvilignes tel que les courbes (v) soient les arêtes de rebroussement des développables de la congruence situées sur (Θ), le rapport $\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}$ est égal au rapport $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda}\right| = \frac{m\mathrm{M}_1}{m\mathrm{M}}$, et par suite la forme $\frac{\Omega}{\lambda^2} - \frac{\Omega_1}{\lambda_1^2}$ est identiquement nulle. Comme cette propriété se conserve quand on remplace la surface (Θ) par une surface applicable sur (Θ), on peut énoncer la proposition suivante.

Étant donné au couple de surfaces (Σ), (Σ_1) *qui se correspondent avec conservation des angles, si le rapport de similitude de deux éléments infi-*

niment petits correspondants est égal au rapport des distances de ces deux éléments à l'un des points focaux m situés sur la droite MM_1 *qui les joint, cette propriété se conserve pour tous les couples de surfaces que l'on déduit de* (Σ), (Σ_1), *en faisant rouler la surface* (Θ) *lieu du point m, sur une surface applicable sur* (Θ), *le point m entraînant la droite* MM_1 *dans ce roulement.*

On obtient une classe étendue de couples de cette espèce, en supposant que (Θ) est une surface développable. Si l'on applique cette surface (Θ) sur un plan, les surfaces (Σ), (Σ_1) viennent aussi se confondre avec ce plan, et l'on a ainsi une transformation ponctuelle du plan qui conserve les angles. Inversement, imaginons, pour plus de clarté, que l'on établisse, entre les points M, M_1 de deux plans superposés P, P_1, une correspondance qui conserve les angles. Sur la droite MM_1 qui joint deux points correspondants prenons un point m tel que le rapport de similitude des éléments infiniment petits $\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}$ des deux plans soit égal à $\frac{mM_1}{mM}$. Le lieu de ce point m est un troisième plan Π superposé aux deux premiers. Si l'on fait ensuite rouler ce plan Π sur une surface développable (Θ) le point de contact m entraînant la droite mMM_1 et les deux points M, M_1, ces deux points M, M_1 décrivent deux surfaces (Σ), (Σ_1) qui se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits. De toute transformation du plan qui conserve les angles on peut donc déduire une infinité de couples de deux surfaces (Σ), (Σ_1) jouissant de la propriété dont il s'agit, et l'on obtient ainsi la solution la plus générale du problème lorsque (Θ) est une surface développable.

Les transformations élémentaires qui conservent les angles conduisent à des résultats faciles à vérifier. Pour une translation de longueur $2l$, le rapport des éléments est égal à l'unité, les droites MM_1 sont égales à $2l$ et parallèles, et le point m est le milieu de MM_1. Les droites MM_1 forment une famille de géodésiques parallèles. On est donc conduit à l'énoncé suivant : *Étant donnée sur une développable une famille de géodésiques parallèles, à partir de chaque point m de cette surface on porte sur la tangente à la géodésique qui passe par ce point et de part et d'autre du point m, une longueur constante* $mM = mM_1 = l$;

les deux surfaces obtenues sont applicables l'une sur l'autre. Ces surfaces, nécessairement réglées, ont été signalées par M. Caronnet [1].

Si la transformation est une rotation autour d'un point fixe O, le rapport $\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma}$ est encore égal à l'unité, et le point m est le milieu de la droite MM_1. Les droites Om forment une famille de géodésiques issues d'un point fixe; la droite MmM_1 est orthogonale à la géodésique qui joint le point O au point m, et la longueur $mM = mM_1$ est proportionnelle à la distance Om. On a donc le théorème suivant : *Étant donnée sur une développable* (Θ) *une famille de géodésiques passant par un point* O *de cette surface, si à partir de chaque point* m *de* (Θ) *on porte sur la tangente à* (Θ) *qui est orthogonale à la géodésique passant en* m, *de part et d'autre de ce point, une longueur* $mM = mM_1$, *proportionnelle à la distance géodésique* Om, *les deux surfaces décrites par les points* M, M_1 *sont applicables l'une sur l'autre.*

Les autres transformations élémentaires, comme l'homothétie, la symétrie, etc., conduisent à des énoncés analogues.

La théorie des surfaces isothermiques fournit un autre exemple intéressant. Soient (Σ), (Σ_1) deux surfaces isothermiques qui se correspondent point par point avec conservation des angles, et parallélisme des plans tangents, (X, Y, Z) les coordonnées d'un point M de (Σ), (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées du point correspondant M_1 de (Σ_1). Ces six coordonnées sont des fonctions de deux paramètres (u, v), satisfaisant aux relations [2]

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = k\dfrac{\partial X}{\partial u}, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial u} = k\dfrac{\partial Y}{\partial u}, & \dfrac{\partial Z_1}{\partial u} = k\dfrac{\partial Z}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = -k\dfrac{\partial X}{\partial v}, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial v} = -k\dfrac{\partial Y}{\partial v}, & \dfrac{\partial Z_1}{\partial v} = -k\dfrac{\partial Z}{\partial v}, \end{cases}$$

$$(12)\quad \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0.$$

On déduit de ces relations

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = k^2(dX^2 + dY^2 + dZ^2),$$

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. 21, 1893, p. 134.

(2) G. Darboux, t. 2, p. 241.

de sorte que le rapport de similitude des éléments infiniment petits est $|k|$.

Pour avoir les points focaux de la congruence formée par les droites MM_1, soit m au point situé sur l'une de ces droites, de coordonnées

$$x = X + l(X_1 - X), \qquad y = Y + l(Y_1 - Y), \qquad z = Z + l(Z_1 - Z),$$

où le rapport $\frac{mM_1}{mM}$ est égal à $\frac{l-1}{l}$. Les équations

$$\frac{dx}{X_1 - X} = \frac{dy}{Y_1 - Y} = \frac{dz}{Z_1 - Z},$$

qui déterminent le points focaux, conduisent facilement, en tenant compte des relations (11), à l'équation du second degré en l

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}[1 + l(k-1)], & \frac{\partial X}{\partial v}[1 - l(k+1)], & X_1 - X \\ \frac{\partial Y}{\partial u}[1 + l(k-1)], & \frac{\partial Y}{\partial v}[1 - l(k+1)], & Y_1 - Y \\ \frac{\partial Z}{\partial u}[1 + l(k-1)], & \frac{\partial Z}{\partial v}[1 - l(k+1)], & Z_1 - Z \end{vmatrix} = 0,$$

admettant les deux racines $l = \frac{1}{1-k}$, $l = \frac{1}{1+k}$. Pour ces deux valeurs de l, le rapport $\frac{l-1}{l}$ est égal à $\pm k$. *Le rapport de similitude des éléments infiniment petits des deux surfaces est donc égal au rapport des distances des deux points* M_1, M *à l'un quelconque des points focaux situés sur* MM_1.

Les quatre points M, M_1, m_1, m_2 forment une division harmonique.

La déformation de l'une quelconque des nappes de la surface focale fournira une infinité de couples de surfaces (Σ), (Σ_1), se correspondant avec conservation des angles, mais qui ne seront plus des surfaces isothermiques sauf dans le cas particulier des surfaces parallèles.

5. Après ces remarques générales, proposons-nous de trouver toutes les formes de l'élément linéaire telles que la forme $\frac{\Omega}{\lambda^2} - \frac{\Omega_1}{\lambda_1^2}$ est identiquement nulle, pour des expressions convenables de λ, λ_1. En écartant toujours le cas où les droites MM_1 seraient des droites isotropes, nous pouvons supposer que les courbes (u) et (v) sont orthogonales, c'est-à-dire que l'élément linéaire est de la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Les surfaces (Σ) et (Σ_1) sont représentées respectivement par des équations

$$(\Sigma) \qquad X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$(\Sigma_1) \qquad X_1 = x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y_1 = y + \lambda_1 \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z_1 = z + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial u}.$$

On a dans ce cas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D}{H} c,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{D'}{H} c$$

et des formules analogues pour les dérivées secondes de y et de z. On en tire

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\lambda}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \frac{D}{H} c,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \log E}{\partial v}\right) \frac{\partial x}{\partial u} + \left(1 + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \frac{D'}{H} c;$$

les dérivées de Y et de Z se déduisant de celles de X en remplaçant x et c par y et c', ou par z et c''. Le carré de l'élément linéaire de (Σ) a donc pour expression

$$d\Sigma^2 = S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2S \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} du\, dv + S\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

ou, en effectuant les calculs, et tenant compte des relations

$$\mathrm{S}c\frac{\partial x}{\partial u}=0, \qquad \mathrm{S}c\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

$$(13)\quad \begin{aligned} d\Sigma^2 = {} & \left[\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial u}\right)^2\mathrm{E}+\frac{\lambda^2}{4\mathrm{G}}\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)^2\right]du^2 \\ & +\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial v}\right)^2\mathrm{E}+\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log \mathrm{G}}{\partial u}\right)^2\mathrm{G}\right]dv^2 \\ & +2\left[\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial v}\right)\mathrm{E}-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log \mathrm{G}}{\partial u}\right)\right]du\,dv \\ & +\frac{\lambda^2}{\mathrm{H}^2}(\mathrm{D}\,du+\mathrm{D}'\,dv)^2 \quad (^1). \end{aligned}$$

Il est inutile pour la suite de transformer le dernier terme, car $\mathrm{D}'^2-\mathrm{DD}''$ serait multiplié par λ^2, et disparaît dans la différence $\frac{\Omega}{\lambda^2}-\frac{\Omega_1}{\lambda_1^2}$. On aurait $d\Sigma_1^2$ en remplaçant λ par λ_1, et la condition $\frac{d\Sigma_1^2}{\lambda_1^2}=\frac{d\Sigma^2}{\lambda^2}$ sera satisfaite si λ, λ_1 satisfont aux trois relations

$$(14)\quad \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial u}\right)^2,$$

$$(15)\quad \begin{aligned} & \left(\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial v}\right)^2\mathrm{E}+\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{G}}{\partial u}\right)^2\mathrm{G} \\ & =\left(\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial v}\right)^2\mathrm{E}+\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{G}}{\partial u}\right)^2\mathrm{G}, \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} & \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial v}\right)\mathrm{E}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} \\ & =\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log \mathrm{E}}{\partial v}\right)\mathrm{E}-\frac{1}{2\lambda_1}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Dans ces trois équations figurent quatre fonctions E, G, λ, λ_1; on est donc assuré *a priori* que le problème admet une infinité de solutions, dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables. On peut, par exemple, se donner une des quatre fonctions, et chercher à déterminer les trois autres.

---

(1) On peut aussi calculer $d\Sigma^2$ sans introduire D, D′, D″, H, en partant des formules qui donnent les dérivées partielles de X, Y, Z. La condition $\frac{d\Sigma^2}{\lambda^2}=\frac{d\Sigma_1^2}{\lambda_1^2}$ conduit aux mêmes formules que dans le texte. Ce calcul s'applique au cas où l'un des coefficients E, G serait nul, c'est-à-dire au cas où (Θ) serait une développable isotrope. Si les courbes (v) ne se confondent pas avec les génératrices, les courbes (u) étant les génératrices, on a $\mathrm{G}=0$, puisque ds^2 doit être le carré d'une forme linéaire en du, dv.

6. Prenons par exemple $E=1$, ce qui revient à supposer que les courbes (v) sont des géodésiques. Les équations (14), (15), (16) se simplifient et deviennent

$$\frac{\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{\lambda^2}=\frac{\left(1+\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}\right)^2}{\lambda_1^2},\qquad \frac{\left(1+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\lambda^2}=\frac{\left(1+\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}\right)\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}}{\lambda_1^2},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2+\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\log G}{\partial u}\right)^2 G}{\lambda^2}=\frac{\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}\right)^2+\left(1+\frac{\lambda_1}{2}\frac{\partial\log G}{\partial u}\right)^2 G}{\lambda_1^2}.$$

De la première relation on tire

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}=\pm\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u}\right),$$

ce qui fait plusieurs cas à examiner.

Premier cas. — Soit

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u}.$$

La seconde relation nous donne

$$\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial v},$$

de sorte que le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ est une fonction $F(u)$ de la seule variable u.

En remplaçant λ_1 par $\lambda F(u)$ dans la première condition, on en tire

$$\lambda=\frac{F(u)-1}{F'(u)},\qquad \lambda_1=\frac{F(u)[F(u)-1]}{F'(u)}.$$

La dernière condition devient ensuite [1]

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\partial\log G}{\partial u}=0,$$

---

[1] Cette relation exprime que les points M, M_1 sont conjugués harmoniques par rapport au segment mm', m' étant le second point focal de la congruence formée par les droites MM_1. On a donc la même propriété qui a été signalée pour les surfaces isothermiques.

ce qui prouve que G est de la forme UV; en remplaçant dv par $\sqrt{V}\,dv$, on peut donc supposer que G est une fonction de la seule variable u, ce qui montre que la surface (Θ) est applicable sur une surface de révolution, les courbes (v) correspondant aux méridiens. Inversement, si G est une fonction de u, la fonction $F(u)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{F'(u)}{F(u)-1}+\frac{F'(u)}{F(u)[F(u)-1]}+\frac{G'(u)}{G(u)}=0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par la formule

$$[F(u)-1]^2 G(u)-K F(u)=0,$$

K étant une constante arbitraire. Les deux racines F, F_1 de cette équation ont pour produit l'unité, et ces deux racines donnent les valeurs de λ, λ_1

$$\lambda=\frac{F(u)-1}{F'(u)},\qquad \lambda_1=\frac{F_1(u)-1}{F'_1(u)}.$$

Chaque élément linéaire $ds^2=du^2+G(u)dv^2$ fournit une infinité de solutions du problème, dépendant d'une constante arbitraire. Si $G(u)=u^2$, les transformations correspondantes du plan (n° 4) sont des inversions.

Deuxième cas. — Soit $\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}=-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u}$. La seconde relation donne $\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\lambda_1)=0$. Le produit $\lambda\lambda_1$ est donc une fonction $F(u)$ de u seul. En remplaçant λ_1 par $\frac{F(u)}{\lambda}$ dans la première condition, on trouve que λ doit satisfaire à l'équation

$$\lambda^2+F'(u)\lambda+F(u)=0,$$

le produit des racines étant égal à $F(u)$, λ et λ_1 sont donc les racines d'une équation de cette forme. La dernière condition donne ensuite

$$G(u)=F(u)\,V,$$

et l'on peut encore supposer que V se réduit à une constante, de sorte que G est encore une fonction de la seule variable u, et l'on a

$$F(u)=K\,G(u),$$

K étant constant. En définitive λ et λ_1 sont racines d'une équation

$$\lambda^2 + K\,G'(u)\lambda + K\,G(u) = 0.$$

Chaque élément $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$ fournit donc une infinité de solutions de cette espèce dépendant d'une constante arbitraire. En particulier si $G(u) = 1$, ou $G(u) = u^2$, l'élément linéaire convient à une surface développable. La transformation correspondante du plan est une translation ou une homothétie (n° 4).

Troisième cas. — Si l'on a à la fois $1 + \frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0$, $1 + \frac{\partial\lambda_1}{\partial u} = 0$, on en déduit

$$\lambda = V - u, \qquad \lambda_1 = V_1 - u,$$

V et V_1 étant des fonctions de v. La troisième condition conduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre en G, dont l'intégrale générale est

$$G = V_2(V - u)(V_1 - u) - \frac{V'^2}{V_1 - V}(V_1 - u) + \frac{V_1'^2(V - u)}{V_1 - V},$$

V_2 étant une autre fonction arbitraire de v; G est un binome du second degré en u, $G = au^2 + bu + c$, et V, V_1 sont deux intégrales particulières de l'équation

$$\left(\frac{dV}{dv}\right)^2 + aV^2 + bV + c = 0.$$

Nous retrouvons le cas considéré par Darboux des surfaces applicables sur une surface réglée.

7. Dans le cas général, l'équation (14) se dédouble en deux équations analytiquement distinctes

$$(17) \qquad \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial \log\lambda}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial u} = \pm\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\partial \log\lambda_1}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial u}\right),$$

de sorte que le problème admet deux espèces de solutions distinctes. Prenons d'abord le signe + dans le second membre; la relation (17) devient

$$(17)' \qquad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right).$$

En représentant le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ par $\frac{f+1}{f-1}$ (de sorte que le changement de f en $-f$ revient à permuter λ et λ_1), l'équation $(17)'$ devient

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_1}=\frac{f'_u}{f+1}-\frac{f'_u}{f-1}=\frac{-2f'_u}{f^2-1}$$

et l'on tire de ces deux relations

$$(18) \qquad \lambda=-\frac{f-1}{f'_u}, \qquad \lambda_1=-\frac{f+1}{f'_u}.$$

L'équation (16) devient, en tenant compte de $(17)'$,

$$\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log E}{\partial u}\right)\frac{\partial\log\frac{\lambda_1}{\lambda}}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log E}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda}\right),$$

ou, en remplaçant λ et λ_1 par les expressions (18),

$$(19) \qquad \frac{2f'_v f''_{u^2}}{f'_u}-f'_v\frac{\partial\log E}{\partial u}-f'_u\frac{\partial\log E}{\partial v}=0.$$

Connaissant deux fonctions $f(u, v)$, $E(u, v)$ satisfaisant à l'équation (19), les formules (18) donnent λ et λ_1. La condition (15) s'écrit, en réunissant les termes qui dépendent de E, et ceux qui dépendent de G,

$$(15)' \qquad E\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\lambda_1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial v}\log(E\lambda\lambda_1)+G\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda}+\frac{\partial\log G}{\partial u}\right)=0.$$

En remplaçant λ et λ_1 par les expressions (18) elle devient

$$\frac{-2Ef'_v}{f^2-1}\left(\frac{2ff'_v}{f^2-1}-\frac{2f''_{uv}}{f'_u}+\frac{\partial\log E}{\partial v}\right)+\frac{2Gf'_u}{f^2-1}\left(\frac{\partial\log G}{\partial u}-\frac{2ff'_u}{f^2-1}\right)=0;$$

posons

$$G=H(f^2-1)$$

et remplaçons $\frac{\partial\log E}{\partial v}$ par sa valeur tirée de (19)

$$\frac{2f'_v f''_{u^2}}{(f'_u)^2}-\frac{f'_v}{f'_u}\frac{\partial\log E}{\partial u},$$

il reste

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\left(\frac{f'_v}{f'_u}\right)^2 \frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{f^2-1} + E\left[\frac{2f(f'_v)^2}{f'_u(f^2-1)^2} - \frac{2f'_v f''_{uv}}{(f'_u)^2(f^2-1)} + \frac{2(f'_v)^2 f''_{u^2}}{(f'_u)^3(f^2-1)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left[E\left(\frac{f'_v}{f'_u}\right)^2 \frac{1}{f^2-1}\right].$$

On en tire

$$H = V - E\left(\frac{f'_v}{f'_u}\right)^2 \frac{1}{f^2-1},$$

et par suite

$$G = V(f^2-1) - E\left(\frac{f'_v}{f'_u}\right)^2, \tag{20}$$

V étant une fonction arbitraire de v. Les formules (18) et (20) font connaître λ, λ_1, G, dès que l'on connaît deux fonctions E, f satisfaisant à la relation (19). Si l'on se donne *a priori* une de ces deux fonctions la seconde est déterminée par une équation aux dérivées partielles. Si, par exemple, on prend $E=1$, on doit avoir $f'_v=0$, ou $f''_{uv}=0$, et l'on retrouve les solutions du paragraphe précédent.

8. La condition (19) prend une forme plus symétrique en posant

$$T = \log\left(E\frac{f^2-1}{f'^2_u}\right) = \log(E\lambda\lambda_1).$$

On en déduit en effet

$$\frac{\partial \log E}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{2ff'_u}{f^2-1} + \frac{2f''_{u^2}}{f'_u},$$

$$\frac{\partial \log E}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{2ff'_v}{f^2-1} + \frac{2f''_{uv}}{f'_u},$$

et l'équation (19) devient

$$f'_v\frac{\partial T}{\partial u} + f'_u\frac{\partial T}{\partial v} + 2f''_{uv} - \frac{4ff'_uf'_v}{f^2-1} = 0. \tag{19'}$$

Si l'on pose encore

$$Z = \log\left(\frac{f+1}{f-1}\right),$$

on a

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{2f'_u}{f^2-1}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = -\frac{2f'_v}{f^2-1}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = -\frac{2f''_{uv}}{f^2-1} + \frac{4ff'_uf'_v}{(f^2-1)^2},$$

et l'équation $(19)'$ peut encore s'écrire

$$(19)'' \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u} = 0.$$

Les quantités T et Z qui figurent dans cette formule s'expriment facilement au moyen des segments

$$mM = \sqrt{E}\lambda = l, \qquad mM_1 = \sqrt{E}\lambda_1 = l_1,$$

compris entre le point m de (Θ) et les points M, M_1 des surfaces (Σ), (Σ_1). On a en effet

$$T = \log(ll_1), \qquad Z = \log\left(\frac{l_1}{l}\right);$$

en remplaçant T et Z par ces expressions dans la formule $(19)''$, elle prend la forme élégante

$$(21) \qquad l_1\frac{\partial^2 l}{\partial u\,\partial v} - l\frac{\partial^2 l_1}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant : *l et l_1 sont deux intégrales particulières d'une équation de Laplace à invariants égaux*

$$(21)' \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial u\,\partial v} = P(u, v)\,l,$$

où $P(u, v)$ peut être une fonction quelconque de u et de v.

Connaissant deux fonctions $l(u, v)$, $l_1(u, v)$ satisfaisant à la relation (21), il est facile d'en déduire les expressions correspondantes de λ, λ_1, E, G. On a en effet

$$(22) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f+1}{f-1} = \frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{l_1}{l}, \qquad f = \frac{l_1+l}{l_1-l}, \qquad f'_u = -\frac{2ll_1}{(l_1-l)^2}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{l_1}{l}\right),\\ &f'_v = -\frac{2ll_1}{(l_1-l)^2}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{l_1}{l}\right), \qquad \frac{1}{\lambda} = -\frac{f'_u}{f-1} = \frac{l_1}{l_1-l}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{l_1}{l}\right),\\ &\qquad\qquad \frac{1}{\lambda_1} = \frac{l}{l_1-l}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{l_1}{l}\right),\\ &E = \left[\frac{ll_1}{l_1-l}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{l_1}{l}\right)\right]^2, \qquad G = \frac{4ll_1}{(l_1-l)^2}V - \left[\frac{ll_1}{l_1-l}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{l_1}{l}\right)\right]^2. \end{aligned}\right.$$

On peut écrire ces formules sous une forme plus simple en posant

$$l = e^{\alpha+\beta}, \qquad l_1 = e^{\alpha-\beta};$$

la condition (21) devient

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}=0, \tag{23}$$

tandis que les formules (22) sont remplacées par les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda=\frac{e^{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial u}}, \qquad \lambda_1=\frac{e^{-\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial u}},\\ &E=\left(\frac{e^{\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial u}}{\mathrm{sh}\,\beta}\right)^2, \qquad G=\frac{V}{\mathrm{sh}^2\beta}-\left(\frac{e^{\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial v}}{\mathrm{sh}\,\beta}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Remarque. — Lorsque $V=0$, le ds^2 convient à une surface développable. En effet, la condition (23) exprime que $e^{2\alpha}$ est un facteur intégrant pour $\frac{\partial\beta}{\partial u}du-\frac{\partial\beta}{\partial v}dv$, et l'on a

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2=\frac{d\beta}{\mathrm{sh}^2\beta}d\gamma,$$

en posant

$$d\gamma=e^{2\alpha}\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}du-\frac{\partial\beta}{\partial v}dv\right).$$

Si l'on suppose la surface (Θ) appliquée sur le plan $z=0$, on peut prendre

$$x+iy=-\coth\beta, \qquad x-iy=\gamma;$$

les coordonnées isotropes du point correspondant M de Σ sont

$$X+iY=x+iy+\frac{e^{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial u}}\frac{\partial(x+iy)}{\partial u},$$

$$X-iY=x-iy+\frac{e^{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial u}}\frac{\partial(x-iy)}{\partial u}.$$

On a en particulier

$$X+iY=-\coth\beta+\frac{e^{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta}{\frac{\partial\beta}{\partial u}}\frac{1}{\mathrm{sh}^2\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u}=1.$$

Le lieu du point M dans le plan est donc une droite isotrope. Quand on fait rouler le plan sur une développable, cette droite engendre une développable isotrope.

En remplaçant λ par λ_1, on trouve de même

$$X_1 + iY_1 = -1,$$

de sorte que les surfaces (Σ), (Σ_1) sont engendrées par des droites isotropes *parallèles*.

9. Prenons maintenant le signe — dans le second membre de la formule (14); elle devient

$$(25) \qquad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\partial}{\partial u} \log(E\lambda\lambda_1) = 0.$$

Posons, comme dans les paragraphes précédents,

$$\sqrt{E}\lambda = l = e^{\alpha+\beta}, \qquad \sqrt{E}\lambda_1 = l_1 = e^{\alpha-\beta};$$

la relation (25) devient

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} + 2\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0.$$

On a d'autre part $\dfrac{\lambda}{\lambda_1} = e^{2\beta}$, et l'on tire de ces formules

$$\lambda = -\frac{\operatorname{ch}\beta}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}} e^{\beta}, \qquad \lambda_1 = -\frac{\operatorname{ch}\beta}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}} e^{-\beta}, \qquad E = \left(\frac{e^{\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}}{\operatorname{ch}\beta}\right)^2.$$

Quelles que soient les fonctions $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, les fonctions λ, λ_1, E données par ces formules satisfont bien à la relation (25) et par suite à la condition (14). Portons ces expressions de λ, λ_1, E dans la relation (16); elle devient, après réduction,

$$2\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial\beta}{\partial u} + \operatorname{tangh}\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{\partial\alpha}{\partial u}\operatorname{tangh}\beta\frac{\partial \log E}{\partial v}$$

et il reste, tous calculs faits, la condition

$$(26) \qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{tangh}\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} + \operatorname{coth}\beta\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u},$$

analogue à la condition (23). Tout système de deux fonctions $\alpha(u, v)$,

$\beta(u, v)$, satisfaisant à cette condition, fournit trois fonctions λ, λ_1, E, qui vérifient les deux équations (14) et (16). La valeur correspondante de G est fournie par l'équation (15) qui devient, en remplaçant λ, λ_1, E par les expressions précédentes,

$$\frac{4e^{2\alpha}}{\mathrm{ch}^2\beta}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial v}+2\,\mathrm{G}\,\mathrm{tangh}\,\beta\,\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\log\frac{\mathrm{G}}{e^{2\alpha}}\right)=0.$$

En posant $\mathrm{G}=\mathrm{H}e^{2\alpha}$, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u}+2\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial v}}{\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{ch}\,\beta}=0;$$

remplaçons dans cette équation $\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}$ par sa valeur

$$\mathrm{tangh}\,\beta\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}-(\mathrm{coth}\,\beta)^2\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}$$

tirée de la condition (26). Elle devient

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u}+\frac{2\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}}{\mathrm{sh}^2\beta}-\frac{2\,\mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{sh}^3\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2=0$$

ou

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2}{\mathrm{sh}^2\beta}\right]=0.$$

On a donc

$$\mathrm{H}=\mathrm{V}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\beta}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2,$$

V étant une fonction arbitraire de v, et, en définitive, on satisfait aux équations du système proposé en prenant pour λ, λ_1, E, G les expressions suivantes :

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}&\lambda=-\frac{\mathrm{ch}\,\beta}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}e^{\beta}, &&\lambda_1=-\frac{\mathrm{ch}\,\beta}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}e^{-\beta},\\&\mathrm{E}=\left[\frac{e^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u}}{\mathrm{ch}\,\beta}\right]^2, &&\mathrm{G}=\mathrm{V}\,e^{2\alpha}-\left[\frac{e^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v}}{\mathrm{sh}\,\beta}\right]^2,\end{aligned}\right.$$

α et β étant deux fonctions de (u, v), qui satisfont à la condition (26). Si l'on introduit les segments $l = e^{\alpha+\beta}$, $l_1 = e^{\alpha-\beta}$, cette condition devient

$$(26)' \qquad \frac{\partial^2(ll_1)}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\log(l-l_1)\frac{\partial(ll_1)}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\log(l+l_1)\frac{\partial(ll_1)}{\partial u},$$

tandis que les formules (27) deviennent

$$(27)' \qquad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{l+l_1}{l_1}\dfrac{\partial}{\partial u}\log(ll_1), & \lambda_1 = -\dfrac{l+l_1}{l}\dfrac{\partial}{\partial u}\log(ll_1), \\[2ex] \mathrm{E} = \left[\dfrac{\dfrac{\partial(ll_1)}{\partial u}}{l+l_1}\right]^2, & \mathrm{G} = \mathrm{V}ll_1 - \left[\dfrac{\dfrac{\partial(ll_1)}{\partial v}}{l-l_1}\right]^2. \end{cases}$$

Le cas où l'on aurait à la fois

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\log\lambda}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{E}}{\partial u} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial\log\mathrm{E}}{\partial u} = 0$$

a déjà été examiné, car ces relations entraînent, d'après la condition (16), $\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} = 0$, et l'on peut supposer $\mathrm{E} = 1$ (*cf.* n° **6**).

Remarque. — Lorsque $\mathrm{V} = 0$, le $ds^2 = e^{2\alpha}\left(\dfrac{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}{\operatorname{ch}\beta}\right)^2 du^2 - e^{2\alpha}\left(\dfrac{\frac{\partial\alpha}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}\right)^2 dv^2$ convient encore à une surface développable. En effet, la condition (26) exprime que

$$\operatorname{tangh}\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}du + \coth\beta\frac{\partial\alpha}{\partial v}dv$$

est une différentielle exacte $d\mu$, et l'on peut écrire

$$d(e^{\alpha+\mu})\,d(e^{\alpha-\mu}) = e^{2\alpha}(d\alpha^2 - d\mu^2) = e^{2\alpha}\left[\left(\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial u}}{\operatorname{ch}\beta}du\right)^2 - \left(\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial v}}{\operatorname{sh}\beta}dv\right)^2\right],$$

c'est-à-dire

$$ds^2 = d(e^{\alpha+\mu})\,d(e^{\alpha-\mu}).$$

Si l'on suppose la surface S appliquée sur le plan $z = 0$, on peut prendre pour coordonnées isotropes du point m, qui correspond aux valeurs (u, v) des paramètres, $x + iy = e^{\alpha+\mu}$, $x - iy = e^{\alpha-\mu}$.

Les points M, M_1 des surfaces (Σ), (Σ_1) viennent coïncider avec deux points du plan (X, Y, o), (X_1, Y_1, o) dont les coordonnées isotropes vérifient la relation

$$X - iY = x - iy + \lambda \frac{\partial(x-iy)}{\partial u} = e^{\alpha-\mu} - \frac{\operatorname{ch}\beta}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}} e^{\beta} \frac{\partial(e^{\alpha-\mu})}{\partial u}$$

$$= e^{\alpha-\mu}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\beta}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}} e^{\beta} \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial u} e^{-\beta}}{\operatorname{ch}\beta}\right] = o.$$

On trouve de même

$$X_1 + iY_1 = x + iy + \lambda_1 \frac{\partial(x+iy)}{\partial u} = o.$$

Les surfaces (Σ), (Σ_1) viennent donc s'appliquer sur les deux droites isotropes $X - iY = o$, $X_1 + iY_1 = o$. Ces surfaces sont donc, comme dans le premier cas, des développables isotropes, mais elles sont engendrées par des droites isotropes *non parallèles*.

10. Il suit de là que, pour avoir des surfaces (Σ) qui ne se réduisent pas à des développables isotropes, on doit prendre une fonction V différente de zéro dans les formules (24) et (27). Lorsque V n'est pas nul, on peut supposer $V = 1$ sans diminuer la généralité, car cela revient à remplacer v par $\int \sqrt{V}\, dv$, simple changement du paramètre. On vérifie du reste aisément que les conditions (23) et (26) ne changent pas de forme quand on remplace v par une fonction quelconque $\varphi(v')$ du nouveau paramètre v'.

Il faut encore, pour avoir une solution du problème proposé, que les formules (24) et (27) fournissent pour λ et λ_1 des valeurs finies. Dans le cas des formules (24), il faut donc que $\frac{\partial\beta}{\partial u}$ ne soit pas nul, c'est-à-dire *que* β *dépende de la variable* u. Si $\frac{\partial\beta}{\partial u} = o$, λ et λ_1 seraient infinies, à moins que l'on ait aussi $\operatorname{sh}\beta = o$, $e^{2\beta} = 1$ et l'on aurait $\lambda_1 = \lambda$. Les surfaces (Σ) et (Σ_1) seraient confondues.

Dans le cas des formules (27), λ et λ_1 auront des valeurs finies pourvu que $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$ ne soit pas nul. Les valeurs de λ, λ_1, E sont indéterminées si l'on a à la fois $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0$, $\operatorname{ch} \beta = 0$. On aurait alors $e^{2\beta} = -1$, et par suite $\lambda_1 = -\lambda$. Ce cas singulier sera examiné dans un autre Mémoire.

11. Pour traiter complètement la question au point de vue analytique, il nous reste à examiner le cas où les droites MM_1 sont des tangentes isotropes de la surface (Θ), ce qui ne peut avoir lieu si les deux points M et M_1 sont réels. Supposons la surface (Θ) rapportée à ses lignes de longueur nulle, les droites MM_1 étant tangentes aux courbes (v). L'élément linéaire étant mis sous la forme

$$ds^2 = 2e^{\omega}\, du\, dv,$$

la condition

$$\frac{\Omega}{\lambda^2} = \frac{\Omega_1}{\lambda_1^2}$$

conduit aux deux relations

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial v} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}{\partial v} = \mathrm{H}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial u} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}{\partial u} - \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{1}{\lambda_1^2} = \mathrm{K}. \tag{29}$$

L'équation aux différentielles totales

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(\mathrm{K} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{1}{\lambda^2}\right) du + \mathrm{H}\, dv \tag{30}$$

doit donc admettre deux intégrales au moins, ce qui exige que la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u}\mathrm{H} + \frac{2}{\lambda}\mathrm{H}$$

soit vérifiée identiquement. On en déduit les expressions suivantes de H et de K :

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}, \qquad \mathrm{K} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)^2 + \mathrm{U}$$

et l'équation (30) prend la forme

$$(30)' \quad d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left[U - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{1}{\lambda^2}\right]du - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}dv.$$

L'intégrale générale est

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u} + f(u),$$

$f(u)$ étant une intégrale de l'équation différentielle

$$f'(u) - f^2(u) = U.$$

En résumé, on obtient l'intégrale générale des équations (28) et (29) en prenant pour $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda_1}$ les expressions suivantes :

$$(31) \qquad \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u} + f(u), \qquad \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial u} + f_1(u),$$

$f(u)$ et $f_1(u)$ étant deux fonctions de u qui satisfont à la condition

$$f'(u) - f^2(u) = f_1'(u) - f_1^2(u).$$

On peut exprimer f et f_1 explicitement au moyen d'une fonction arbitraire et de sa dérivée. Si l'on pose en effet

$$f - f_1 = F(u),$$

on en tire

$$(32) \qquad f = \frac{F^2(u) + F'(u)}{2F(u)}, \qquad f_1 = \frac{F'(u) - F^2(u)}{2F(u)}.$$

Il reste encore à examiner le cas où la surface (Θ) serait une développable isotrope. On sait que dans ce cas le ds^2 de la surface est le carré d'une forme linéaire (1) en du, dv, $ds^2 = (a\,du + b\,dv)^2$. Il reste encore à distinguer deux cas, suivant que $a\,du + b\,dv$ est une différentielle exacte ou non. Dans le premier cas, la surface (Θ) ne peut être qu'un plan isotrope, et les surfaces (Σ), (Σ_1) se confondent avec ce plan. On peut donc se borner au cas où le ds^2 est de la forme p^2dq^2, p et q étant deux variables distinctes. Cela étant, prenons pour courbes (v) les

(1) *Voir* par exemple, G. Darboux, t. I (note de la page 148).

courbes de (Θ) auxquelles les droites MM_1 restent tangentes. Si ces courbes étaient les génératrices rectilignes de (Θ), les surfaces (Σ), (Σ_1) se confondraient avec (Θ). Nous pouvons donc supposer que les courbes (u) sont les génératrices. Le carré ds^2 a alors une expression de la forme

$$ds^2 = E\,du^2,$$

E *n'étant pas une fonction de u seulement.* Dans les formules (24) et (27), on doit avoir $G = 0$, E renfermant la variable v. Une discussion facile montre qu'on satisfait à ces conditions en prenant pour α, β, v des fonctions vérifiant les relations suivantes :

$$V = 1, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial v} = e^{-\alpha}, \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} = 0,$$

dans les formules (24), ou

$$V = 1, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = \operatorname{sh}\beta,$$

dans les formules (27).

Ces résultats conduisent à un certain nombre de questions qui feront l'objet d'un second Mémoire.

Note.

L'équation (26) se rapproche des équations à invariants égaux par la propriété suivante. Si l'on élimine μ entre les deux relations

$$\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = \operatorname{tangh}\beta\,\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \operatorname{cotgh}\beta\,\frac{\partial\alpha}{\partial v},$$

on obtient l'équation (26); si on élimine α, on obtient la nouvelle équation

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{cotgh}\beta\,\frac{\partial\beta}{\partial v}\,\frac{\partial\mu}{\partial u} + \operatorname{tangh}\beta\,\frac{\partial\beta}{\partial u}\,\frac{\partial\mu}{\partial v}$$

qui est équivalente à l'équation adjointe de la première. On en déduit facilement que, si la suite de Laplace déduite de l'équation (26′) se termine dans un sens, elle se termine dans les deux sens.