JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur des propositions d'arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 121-125.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__121_0>

Sur des propositions d'Arithmétique;

PAR PAUL APPELL.

Le présent travail est un Mémoire d'arithmétique. La méthode employée est fondée sur un théorème (n° **1**) élémentaire, d'une démonstration facile, qui revient au fond à ce fait que, dans les égalités entre sommes algébriques de fractions irréductibles, il y a forcément deux fractions qui contiennent au dénominateur une même puissance maximum d'un nombre premier quelconque. On arrive, par l'application de ce théorème, à démontrer certaines propositions sur la somme des n premiers termes de la série harmonique.

1. THÉORÈME. — *Soient des fractions irréductibles* $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ *positives ou négatives, en nombre limité j, dont la somme algébrique est nulle*

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}+\ldots+\frac{\lambda_j}{\mu_j}=0,$$

si l'un des dénominateurs, μ_j *par exemple, est divisible par une puissance entière positive k d'un nombre premier p, les autres dénominateurs sauf un,* μ_1 *pour fixer les idées, sur lequel on ne sait rien, étant divisibles par des puissances positives* α *de p moindres que k (où* α *peut être nul),* μ_1 *est divisible par* p^k.

En effet, on peut écrire

$$\mu_2=-p^{\alpha_2}\nu_2, \qquad \mu_3=-p^{\alpha_3}\nu_3, \qquad \ldots, \qquad \mu_j=-p^{k}\nu_j,$$

$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{j-1}$ étant des entiers inférieurs à k, dont certains peuvent être nuls, $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_j$ n'étant pas divisibles par p, pas plus que λ_j, et étant par suite premiers avec p^k, puisque p est premier. On a alors

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{p^{\alpha_2}\nu_2} + \frac{\lambda_3}{p^{\alpha_3}\nu_3} + \ldots + \frac{\lambda_j}{p^k\nu_j},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2 p^{k-\alpha_2}\nu_3\nu_4\ldots\nu_j + \lambda_3 p^{k-\alpha_3}\nu_2\nu_4\ldots\nu_j + \ldots + \lambda_j\nu_2\nu_3\ldots\nu_{j-1}}{p^k\nu_2\nu_3\ldots\nu_j}.$$

Comme $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est irréductible on a, en désignant par ρ un entier,

$$\lambda_2 p^{k-\alpha_2}\nu_3\nu_4\ldots\nu_j + \lambda_3 p^{k-\alpha_3}\nu_2\nu_4\ldots\nu_j + \ldots + \lambda_j\nu_2\nu_3\ldots\nu_{j-1} = \rho\lambda_1,$$
$$p^k\nu_2\nu_3\ldots\nu_j = \rho\mu_1.$$

Cet entier ρ n'est pas divisible par p, car les premiers termes du premier membre de la première équation le sont, mais pas le dernier $\lambda_j\nu_2\nu_3\ldots\nu_{j-1}$ qui, composé de facteurs non divisibles par p, n'est pas divisible par p.

Alors ρ est premier avec p^k. Donc, d'après la deuxième équation μ_1 est divisible par p^k. C. Q. F. D.

Remarque. — La condition indiquée explicitement dans l'énoncé, que le nombre des fractions est *fini*, est essentielle, le théorème ne s'applique plus si le nombre des fractions est infini. Ainsi on a

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{1}{9^n} + \ldots$$

et cependant aucun terme du second membre n'a de dénominateur divisible par 8, et 3 est élevé à une puissance paire quelconque; ce résultat se rattache à la remarque suivante.

2. Si dans la somme d'un nombre fini de fractions irréductibles $\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_j}{\mu_j}$ aucun dénominateur n'est divisible par une puissance p^k d'un nombre premier p, la somme $\frac{\lambda}{\mu}$ mise sous forme irréductible est telle que μ n'est pas divisible par p^k. Mais si ce nombre est infini, la proposition est fausse, ainsi l'on a

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{7^n} + \ldots.$$

Le dénominateur 6 est divisible par 2 et par 3 et cependant aucun des dénominateurs de la suite ne l'est.

3. Le théorème du n° **1** permet de montrer que la somme des n premiers termes de la série harmonique

$$H(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

n'est jamais entière, excepté pour $n=1$. En effet, appelons 2^k la puissance de 2 immédiatement inférieure ou égale à n. Alors

$$2^k \leqq n, \qquad 2^{k+1} > n.$$

Le terme $\frac{1}{2^k}$ figure dans $H(n+1)$; 2^k ne peut être en facteur au dénominateur d'aucun terme suivant, car ce dénominateur serait de la forme $2^k\nu$, où ν serait un entier $\geqq 2$, il serait donc supérieur ou égal à 2^{k+1}; c'est-à-dire supérieur à n, ce qui est contre l'hypothèse. Alors en posant $H(n+1) = \frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda}{\mu}$ étant une fraction irréductible, μ est divisible par 2 au moins et ne peut pas être 1.

Ainsi

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \qquad 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7} = \frac{989}{420}.$$

4. Il est évident dès lors qu'un produit tel que

$$h\,H(n+1) = h\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

n'est pas entier quand h désigne un entier non divisible par les puissances des facteurs premiers qui, d'après le théorème du n° **1**, figurent au dénominateur de $H(n+1)$. En particulier, pour que le produit soit entier, il faut que h soit divisible par 2^k, la puissance entière et positive, 2^k, étant immédiatement inférieure ou égale à n; ainsi

$$6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

n'est certainement pas entier parce que 6 n'est pas divisible par 4;

on a

$$6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{137}{10},$$

le dénominateur 10 étant, d'après le théorème du n° **1**, divisible par 2 et par 5. De même

$$12\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{147}{5},$$

ici $k=2$, $2^k=4$, 12 est divisible par 4 et 3, mais pas par 5.

Des théorèmes analogues s'appliquent aux sommes obtenues en élevant les termes de $H(n+1)$ à une puissance entière et positive.

5. Un incommensurable i est de la famille d'un autre incommensurable j, si i est une fonction rationnelle à coefficients entiers de j. Par exemple π^2, π^3, ... sont de la famille de π; $i=3\sqrt{2}+5$ est de la famille de $j=\sqrt[4]{2}$, car on a

$$i=3j^2+5.$$

Deux incommensurables i et j sont de la même famille, si i est de la famille de j et j de celle de i. Alors i et j sont liés par une relation homographique à coefficients entiers

$$Aij+Bi+Cj+D=0,$$

A, B, C, D entiers. Par exemple

$$i=\pi, \qquad j=\frac{2\pi+3}{4\pi+5}$$

sont de la même famille.

Il est probable que $\log_e 2$ et $\log_e 3$ ne sont pas de la même famille, A étant $\gtrless 0$, ni en général $\log_e h$ et $\log_e k$, h et k étant des entiers et k n'étant pas une puissance entière de h.

6. Dans ce qui précède, on pourrait employer la terminologie suivante. Une fraction irréductible $\frac{\lambda}{\mu}$ sera dite multiple d'un entier n, si son numérateur λ est divisible par n; elle sera dite multiple de $\frac{1}{n}$ si son dénominateur μ est divisible par n. Avec cette terminologie, l'énoncé du théorème du n° **1** est plus bref : on le donnera sans peine.

Cette notion peut-elle être étendue aux nombres incommensurables ? Non ; en effet, un nombre incommensurable est la limite de fractions irréductibles $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ $(i = \infty)$ qui peuvent être multiples de n ou de $\frac{1}{n}$. Mais il faudrait montrer que, quelles que soient les fractions $\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}$ dont le même incommensurable est limite, $\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}$ est multiple de n ou de $\frac{1}{n}$. Or ceci est manifestement impossible, car en prenant des nombres commensurables ε_i dont la limite est nulle, on a

$$\frac{\lambda'_i}{\mu'_i} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \varepsilon_i,$$

et les $\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}$ peuvent ne pas être multiples de n ou de $\frac{1}{n}$.