JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

D. WOLKOWITSCH

Étude générale et purement géométrique des déplacements dans les systèmes élastiques à trois dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 219-225.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__219_0>

Étude générale et purement géométrique des déplacements dans les systèmes élastiques à trois dimensions (¹);

PAR D. WOLKOWITSCH.

L'objet de ce Mémoire est d'étudier les propriétés du déplacement infiniment petit en un point d'un système élastique de l'espace.

1. *Déplacement en un point d'un système élastique à trois dimensions. Droites monogyres.* — Une force quelconque F, appliquée au point A d'un système élastique, communique à ce point un déplacement infinitésimal qui est une viration D; celle-ci peut être remplacée par deux rotations $r_1 r_2$ dont les axes sont portés par deux droites conjuguées quelconques du complexe linéaire de droites de moment nul correspondant à la viration; nous écrivons l'équation de ce complexe $\Phi = 0$.

Une force F′ également appliquée au point A accomplira, au cours des déformations produites par la force F, un travail dont l'expression sera la somme des produits par r_1 et r_2, des moments de la force F′ par rapport aux axes de rotation; cette expression est proportionnelle à Φ.

Si la droite F′ appartient au complexe $\Phi = 0$, elle produit un travail nul au cours du déplacement dû à la force F. Appelons de même $\Phi' = 0$ l'équation du complexe correspondant à la force F′.

D'après le théorème de réciprocité (Betti), si la droite F′ appartient au complexe $\Phi = 0$, la droite F appartiendra au complexe $\Phi' = 0$.

Pour certaines droites F, le déplacement D se réduit à une rotation

(¹) M. d'Ocagne a présenté à ce sujet deux Notes de l'auteur à l'Académie, publiées aux *Comptes rendus* des 2 janvier et 3 décembre 1923.

unique; le complexe $\Phi = 0$ est alors *spécial* et nous dirons que la droite F est *monogyre*.

Définissons la viration par les composantes lmn de la translation, et $\alpha\beta\gamma$ de la rotation, $lmn\alpha\beta\gamma$ sont fonctions des coordonnées pluckériennes de la droite F, celle-ci sera monogyre si la relation

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

est vérifiée. Les droites monogyres forment donc un complexe que nous nous proposons d'étudier par la géométrie.

Remarques. — I. Les coefficients de l'expression Φ dépendent seulement de la position dans l'espace de la force F et nullement de son intensité, cela est une conséquence des hypothèses fondamentales de l'élasticité.

II. Supposons les forces FF′ appliquées simultanément suivant des droites fixes, et faisons-les varier d'intensité indépendamment l'une de l'autre; les déplacements du point A pourront être représentés par deux rotations portées par les deux droites conjuguées communes aux deux complexes linéaires $\Phi = 0$ et $\Phi' = 0$; ce sont les deux droites de Schönemann-Mannheim du mouvement à deux degrés de liberté, les deux paramètres étant les intensités des deux forces.

2. *Complexe des droites monogyres.* — Soient dans un plan P de l'espace deux droites Mx, My.

Soient $\Phi_x = 0$ le complexe linéaire correspondant à la force-unité appliquée suivant Mx et $\Phi_y = 0$ le complexe correspondant à la force-unité appliquée suivant My.

Soient en outre F une force passant par le point M et contenue dans le plan P, et $\alpha\beta$ ses composantes suivant Mx et My. L'équation du complexe correspondant sera

$$\Phi_F = \alpha\Phi_x + \beta\Phi_y = 0.$$

En faisant varier le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ nous obtiendrons toutes les droites du plan, passant par le point M; et comme, dans le faisceau de complexes linéaires déterminé par les deux complexes Φ_x et Φ_y, il existe deux complexes spéciaux, nous voyons qu'on peut mener dans le plan P deux droites du complexe passant par le point M. La courbe du complexe est donc une conique et le complexe est du second ordre.

5. *Hyperboloïde adjoint à un plan, à un point.* — Traçons dans le plan P une troisième droite Z qui ne passe pas par le point M et rappelons qu'un vecteur quelconque F du plan P peut toujours être décomposé d'une façon unique suivant les trois côtés du triangle. Soient $\alpha\beta\gamma$ les trois composantes de F suivant Mx, My et Z.

L'équation du complexe linéaire correspondant à F sera

$$\Phi_F = \alpha\Phi_x + \beta\Phi_y + \gamma\Phi_z = 0,$$

$\Phi_z = 0$ représentant le complexe correspondant à une force-unité dirigée suivant la droite Z.

Ainsi les complexes relatifs à toutes les forces contenues dans le plan P appartiennent à un réseau de complexes linéaires.

Les axes R des complexes spéciaux de ce réseau constituent une semi-quadrique H (M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, Gauthier-Villars).

Une droite F' de la semi-quadrique complémentaire rencontre tous les axes de rotation R, le complexe $\Phi_{F'}$ correspondant devra contenir toutes les droites monogyres du plan xMy. Ceci n'est possible que si le complexe linéaire $\Phi_{F'}$ est *spécial*, son axe ρ se trouvant contenu dans le plan.

La droite ρ est telle qu'une rotation ayant cette droite pour axe est produite par une force unique; nous dirons que cette droite est *monodyne*. La parfaite analogie existant entre les vecteurs rotations et les vecteurs forces permet de dire que les droites monodynes de l'espace forment un complexe du second ordre.

L'hyperboloïde H est dit *adjoint* au plan.

Comme les vecteurs passant par un point p de l'espace peuvent se décomposer suivant trois directions fixes quelconques passant par ce point, on voit qu'aux droites monogyres passant par le point p correspondent des droites monodynes constituant une semi-quadrique h, et que les génératrices de la semi-quadrique complémentaire sont des droites monogyres dont les droites monodynes correspondantes se trouvent sur un cône de second degré de sommet p, et qui est le cône relatif à ce point dans le complexe des droites monodynes.

La quadrique h est dite *adjointe* au point p.

4. *Congruence des droites à la fois monodynes et monogyres.* — Les cônes des deux complexes, de sommet p, ont quatre génératrices communes, et les deux coniques des deux complexes d'un plan P admettent quatre tangentes communes; les droites à la fois monodynes forment donc une congruence du 4^e degré et du 4^e ordre.

5. *Points et plans singuliers.* — Considérons une droite D_1 de la congruence; la droite monogyre F et la droite monodyne R qui lui correspondent forment un plan P_1 puisqu'elles appartiennent à deux semi-quadriques complémentaires.

La quadrique Q_1 adjointe au plan P_1 admet donc la droite D_1 comme génératrice commune aux deux systèmes. Cette quadrique est donc soit un cône, soit un système de deux plans. Dans l'un ou l'autre cas, il existe, dans le plan P_1, trois droites monogyres au moins qui correspondent à trois axes de rotation se coupant deux à deux; par conséquent toute droite du plan P_1 est monogyre.

Le même raisonnement montrerait que toute droite du plan P_1 est également monodyne.

On peut voir en outre que si la quadrique Q_1 dégénérait en un système de plans, ces deux plans seraient confondus; comme conséquence, l'intersection de ce plan double avec le plan P_1, droite monogyre, couperait l'axe de la rotation qu'elle produit. Une force appliquée suivant cette intersection accomplirait donc un travail nul, ce qui est impossible, car ce travail est positif : c'est le travail de déformation du système élastique.

La conséquence de cette impossibilité est que la quadrique Q_1 est un cône, nous appellerons son sommet p_1.

Toute droite de l'espace menée par p_1 est elle-même monogyre, car une force agissant suivant une pareille droite peut être remplacée par ses trois composantes suivant trois droites fixes auxquelles correspondent trois axes de rotation contenus dans le plan P_1.

Ainsi le point p_1 est un point singulier, le plan P_1 un plan singulier des deux complexes des droites monogyres et des droites monodynes. Toute droite passant par le point p_1 est monogyre et monodyne, et l'axe de rotation et la force correspondants sont contenus dans le plan P_1.

6. *Ellipses d'élasticité.* — Considérons deux forces $F_1 F_2$ du plan P_1; R_1 R_2 les deux axes de rotation correspondants, qui passent par le point p_1 et ont pour traces sur le plan P_1 les points r_1 et r_2.

A la résultante F des deux forces $F_1 F_2$ correspond la rotation R résultante de R_1 et R_2, et dont la trace r sera un point de la droite $r_1 r_2$.

Faisons varier le rapport $\frac{F_1}{F_2}$ nous obtenons un faisceau de droites F correspondant à des points r en ligne droite. La correspondance est homographique et le théorème de réciprocité transforme cette homographie en une involution puisque si le point r se trouve sur une force F′ le point r' devra se trouver sur F.

Les points doubles de l'involution sont imaginaires puisqu'une force ne peut rencontrer l'axe de la rotation qu'elle produit.

Il existe donc dans le plan P_1 une conique telle que les points r et les droites F correspondantes soient pôles et polaires par rapport à cette conique. Celle-ci ne peut avoir de points réels, pôles des tangentes correspondantes, et situés sur ces dernières, ce ne peut donc être qu'une ellipse imaginaire dont l'équation réduite a la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$. Les points r et les droites F sont antipôles et antipolaires par rapport à la conique conjuguée $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ qui est réelle.

Dans les systèmes à plan de symétrie sollicités par des forces contenues dans ce plan, cette dernière ellipse E est l'ellipse de Ritter, le point p_1 se trouve alors à l'infini sur la normale au plan P_1.

Le même raisonnement, transformé par dualité, permettrait de définir une deuxième ellipse E′, par rapport à laquelle les droites R du plan P_1 et les traces f des forces correspondantes F, qui passent par le point p_1, sont antipôles et antipolaires; nous avons rencontré cette ellipse dans les systèmes à plan de symétrie sollicités par des forces normales à ce plan (*Technique moderne*, septembre 1922), et l'avons appelée ellipse d'élasticité transversale.

Appelons $p_2\,p_3\,p_4$ les antipôles doubles des deux ellipses EE′, chacun d'eux est un point singulier du complexe.

Considérons en effet une force F passant par p_2, et soit $p_2\,t$ la trace sur le plan P_1 du plan p_1F. On peut remplacer F par ses composantes suivant p_1p_2 et $p_2\,t$.

A la composante p_1p_2 correspond une rotation dirigée suivant p_3p_4 et à la composante $p_2\,t$ correspond une rotation passant par p_1 et contenue dans le plan $p_1\,p_3\,p_4$; les deux rotations se coupent et la force F est monogyre, on verrait aussi qu'elle est également monodyne par un raisonnement identique.

7. *Tétraèdre fondamental.* — Nous avons démontré l'existence de quatre points singuliers, il ne peut y en avoir d'autres. Ces quatre points forment le tétraèdre fondamental des deux complexes qui sont tétraédraux.

Chaque face contient deux ellipses analogues à E et E′ et peut être choisie pour l'étude des déformations du système.

Une force dirigée suivant une arête du tétraèdre produit une rotation dirigée suivant l'arête opposée.

Ce tétraèdre devient un prisme pour les systèmes à plan de symétrie, les arêtes de ce prisme sont normales à ce plan. Dans les trois faces normales au plan de symétrie, les deux ellipses sont conjuguées par rapport aux triangles des sommets correspondants dont l'un se trouve à l'infini sur la normale, elles ont donc un axe commun. Une fois connu le tétraèdre fondamental, l'étude des déformations du système sera très simplifiée car une force peut toujours être remplacée par six forces dirigées suivant les six arêtes d'un tétraèdre, et que l'on connaît la rotation produite par chaque composante.

8. *Remarque.* — Nous avons admis au paragraphe 5 que les droites FR étaient distinctes, mais elles pourraient être confondues en une droite D_2 appartenant elle aussi à la congruence.

S'il en est ainsi, la quadrique adjointe à un point q_1 de D_1 admet la droite D_2 comme génératrice double, elle dégénère soit en un cône, soit en un système de plans.

Si c'était un cône de sommet q' (point de D_2) la droite $q'\,q_1$ rencontrerait l'axe de la rotation qu'elle produit, nous savons que c'est impossible.

La quadrique est donc composée de deux plans qui se coupent suivant la droite D_2. Quand le point q se déplace sur D_1, les deux plans se correspondent homographiquement; aux deux plans doubles correspondent deux points $p_1 p_2$, qui sont les points singuliers conjugués des plans doubles. On définirait de même deux points $p_3 p_4$ de la droite D_2 qui sont les deux autres sommets du tétraèdre fondamental.