JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. MANDELBROJT

La recherche des points singuliers d'une fonction analytique représentée par une série des puissances

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 197-210.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__197_0>

La recherche des points singuliers d'une fonction analytique représentée par une série des puissances ;

PAR S. MANDELBROJT

(Paris).

---

1. Par analogie avec un théorème de M. Hadamard concernant la détermination des singularités d'une fonction analytique représentée par l'expression

$$\mathcal{F}(x) = \int_c f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} = \sum a_n b_n x^n,$$

en connaissant les singularités des fonctions

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

et

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

Hurwitz a démontré le théorème suivant :

La fonction

$$\text{(1)} \qquad F(x) = \int_c \psi(\eta)\xi(x-\eta)\,d\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m b_0 + C_m^1 \alpha_{m-1}\beta_0 + \ldots + \beta_m \alpha_0}{x^{m+1}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m}{x^{m+1}},$$

où

$$\text{(2)} \qquad \psi(x) = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \ldots$$

et

$$\text{(3)} \qquad \xi(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x^2} + \ldots,$$

admet comme seuls points singuliers possibles les points d'affixes $\alpha+\beta$, si les points singuliers de $\psi(x)$ sont les points d'affixes α et ceux de la fonction $\xi(x)$ les points d'affixes β.

$\psi(x)$ et $\xi(x)$ sont donc supposées régulières à l'infini, et la fonction $F(x)$ l'est alors également.

Fixons la fonction

$$\xi(x)=\frac{\beta_0}{x}+\frac{\beta_1}{x^2}+\ldots.$$

Une fonction $\psi(x)$ régulière à l'infini, quelconque d'ailleurs étant donnée, nous désignerons l'opération (1) par

$$F(x)=T[\psi(x), \xi(x)].$$

2. L'opération T peut être considérée comme une généralisation du procédé qui correspond à la transformation d'Euler effectuée sur la série entière

$$\theta(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots.$$

En effet, on sait qu'en posant

$$y=\frac{z}{1-z},$$

on a

$$(4)\qquad \Theta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k\frac{\Delta^k\alpha_0}{1-z}=\frac{1}{z-1}\Sigma\Delta^n\alpha_0 y^k$$

$$=\frac{1}{1-z}(\Delta^0\alpha_0+\Delta^1\alpha_0 y+\ldots+\Delta^k\alpha_0 y^k+\ldots)$$

où $\Delta^k\alpha_0$ est la $k^{\text{ième}}$ différence par rapport au coefficient α_0 dans la suite

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,$$

c'est-à-dire l'égalité suivante a lieu :

$$\Delta^k\alpha_0=\alpha_k-C_k^1\alpha_{k-1}+C_k^2\alpha_{k-2}+\ldots\pm\alpha_0.$$

D'autre part, on voit qu'en posant

$$(5)\qquad \xi(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\ldots=\xi_1(x),$$

on a d'après la formule (1)

$$T[\psi(x), \xi_1(x)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m - C_m^1 \alpha_{m-1} + \ldots \pm \alpha_0}{x^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n \alpha_0}{x^{n+1}}.$$

En posant dans (1) et (5) $x = \frac{1}{\zeta}$, on voit que par l'opération T on est conduit dans ce cas, en prenant $\xi(x) = \xi_1(x)$, à associer à la série

$$\alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^2 + \ldots \tag{6}$$

la série

$$\Delta^0 \alpha_0 \zeta + \Delta^1 \alpha_0 \zeta^2 + \ldots = \zeta(\Delta^0 \alpha_0 + \Delta^1 \alpha_0 \zeta^1 + \ldots)$$

qui est, à un facteur sans importance près, de la même forme que la série qui constitue la partie droite de la formule (4).

Ces considérations permettent de voir que les résultats obtenus en appliquant l'opération T seront beaucoup plus précis grâce au théorème de Hurwitz.

3. Nous supposerons le rayon de convergence de la série (6) égale à un, c'est-à-dire que nous supposerons que la fonction $\psi(x)$ est régulière à l'extérieur du cercle de rayon un, elle admet au contraire sur ce cercle un point singulier au moins.

Pour

$$\xi_2(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x^2} + \ldots,$$

nous prendrons toujours une fonction qui n'admet qu'un seul point singulier d'affixe -1 dans le plan tout entier. On sait, d'après un théorème de M. Faber, que la série

$$\beta_0 \zeta - \beta_1 \zeta^2 + \beta_2 \zeta^3 - \ldots \tag{3 bis}$$

(qui n'a, alors, dans tout le plan qu'un seul point singulier d'affixe 1) est telle qu'on peut trouver une fonction entière $g(z)$ avec

$$|g(z)| < e^{\varepsilon r} \quad (|z| = r), \tag{7}$$

ε étant donné, pour r assez grand, pour que l'on ait

$$\beta_n = -g(n+1). \tag{8}$$

La réciproque est d'ailleurs, d'après cet auteur et d'autres, également vraie; c'est-à-dire que de (7) et (8) il résulte que (3 *bis*) représente bien une fonction n'ayant pour singularités que le point d'affixe 1.

4. Nous posons alors

$$\xi_2(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x^2} + \ldots,$$

avec

$$\beta_n = g(n+1) \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$g(z)$ satisfaisant à la condition (7). Comme on l'a remarqué pour l'opération $H(\varphi, f)$ (qui correspond au théorème de M. Hadamard, mentionné au début) remarquons que si l'on a

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

on a aussi

$$\text{(9)} \qquad T[\varphi(x), \xi(x)] = T[\varphi_1(x), \xi(x)] + T[\varphi_2(x), \xi(x)].$$

Il est aussi très facile de démontrer le lemme suivant :

Lemme I. — *Si $\varphi(x)$ n'a qu'un seul point singulier d'affixe α_1, la fonction $T[\varphi(x), \xi(x)]$ admet le point d'affixe $\alpha_1 - 1$ comme point singulier.*

En effet, d'après le théorème de Hurwitz, c'est le seul point singulier possible. S'il n'était pas singulier, la fonction T serait régulière dans le plan tout entier (l'infini compris), elle serait donc constante, et d'après (1) on voit qu'on aurait

$$T[\varphi(x), \xi_2(x)] = 0,$$

et encore d'après la même formule (1), on devrait avoir

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

le lemme est donc démontré.

Il résulte du lemme I et de (9), le lemme II :

Lemme II. — *Si $\varphi(x)$ n'a qu'un nombre fini de points singuliers non critiques d'affixes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, les points d'affixes $\alpha_1 - 1$, $\alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_k - 1$ sont des points singuliers de la fonction*

$$T[\varphi(x), \xi_2(x)].$$

Dans les hypothèses du lemme, on pourra présenter $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_k(x),$$

où $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ n'a qu'un seul point singulier d'affixe α_i.

La formule (9) qui est aussi vraie pour un nombre quelconque de termes $[\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_k(x)$ jointe au lemme I suffit pour conclure le lemme II.

3. Lemme III. — *Désignons par $\varphi_\vartheta(x)$ une fonction n'ayant qu'un seul point singulier d'affixe $e^{i\vartheta}$ $(|\vartheta| = \delta \leqq \pi)$. Désignons par*

$$\frac{\gamma_0^{(\vartheta)}}{x} + \frac{\gamma_1^{(\vartheta)}}{x^2} + \ldots = \mathrm{T}[\varphi_\vartheta(x), \xi_2(x)].$$

Alors la fonction $\mathrm{K}(\delta)$ définie par l'égalité

$$\mathrm{K}(\delta) = \mathrm{K}(\vartheta) = \mathrm{K}(-\vartheta) = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\gamma_n^{(\vartheta)}|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\gamma_n^{(-\vartheta)}|}$$

est une fonction constamment croissante de la variable δ pour

$$0 \leqq \delta \leqq \pi.$$

En désignant par $\mathrm{P}(\delta) = \mathrm{P}(\pm\vartheta)$ le point d'affixe $e^{\pm i\vartheta}$ et par $\mathrm{P}_1(\delta) = \mathrm{P}_2(\pm\vartheta)$ le point d'affixe $e^{\pm i\vartheta} - 1$, on voit immédiatement que

$$\overline{\mathrm{P}_1(\delta_1)\mathrm{O}} > \overline{\mathrm{P}_1(\delta_2)\mathrm{O}}$$

si $\delta_1 > \delta_2$, car

$$\left[\widehat{\mathrm{OP}(\delta_1)\mathrm{P}_1(\delta_1)} > \widehat{\mathrm{OP}(\delta_2)\mathrm{P}_1(\delta_2)}\right];$$

d'autre part, la quantité $\mathrm{K}(\pm\vartheta)$ représentant le rayon du cercle en dehors duquel la fonction

$$\mathrm{T}[\varphi_\vartheta(x), \xi_2(x)]$$

est régulière, et le point $\mathrm{P}_1(-\vartheta)$ étant un point singulier de cette fonction (d'après le lemme I) et le seul point singulier (d'après le théorème de Hurwitz), on voit que la conclusion du lemme a lieu.

On voit en même temps que

$$K(\pm\pi) = 2 \quad (^1),$$

6. Théorème I. — *Soit*

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{F}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

une série de rayon de convergence égal à un. Si $\mathfrak{F}(z)$ n'a des points singuliers que sur ce cercle (elle est donc régulière à l'infini), la quantité

$$\text{(10)} \qquad \varphi = \arccos\left(1 - \frac{K^2}{2}\right),$$

avec

$$K = \overline{\lim}\sqrt[n]{|\gamma_n|},$$

où

$$\gamma_m = a_{m+1}g(1) - C_m^1 a_m g(2) + \ldots \pm a_1 g(m+1),$$

$g(z)$ étant une fonction entière satisfaisant à la condition

$$|g(z)| < e^{\varepsilon r},$$

représente un argument d'un point singulier.

Comme cas particulier, on a le théorème :

Théorème I *bis*. — *Dans les conditions du théorème I la quantité*

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{K^2}{2}\right),$$

avec

$$K = \overline{\lim}\sqrt[n]{|\Delta^n a_1|},$$

où $\Delta^n a_1$ est la $n^{\text{ième}}$ différence de la suite

$$a_1 \quad a_2, \quad \ldots,$$

---

(1) Donc la remarque de M. Lindelöf (pour le cas considéré) (*Comptes rendus*, 28 février 1898) d'après laquelle le point d'affixe 1 est singulier si

$$\underline{\lim}\frac{1}{\sqrt[n]{|\Delta^n a_0|}} = \frac{1}{2},$$

entre comme cas particulier de nos considérations si l'on se borne au seul cas traité.

par rapport à l'élément a_1 représente un argument d'un point singulier (c'est-à-dire qu'un des deux points $e^{\pm i\varphi}$ est un point singulier).

Démonstration des théorèmes I et I *bis* :

Posons dans (A)

$$z = \frac{1}{x}$$

et désignons par

$$\pi(x) = \mathcal{F}(x) - a_0 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots.$$

Considérons d'autre part la série

$$\xi_2(S) = \frac{g(1)}{\zeta} - \frac{g(2)}{\zeta} + \ldots.$$

La série

$$T[\pi(x), \xi_2(x)] = \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots,$$

avec

$$\gamma_m = a_{m+1}g(1) - C_m^1 a_m g(2) + \ldots \pm a_1 g(m+1),$$

est régulière à l'extérieur du cercle de rayon K

$$K = \overline{\lim} \sqrt[m]{|\gamma_m|},$$

et elle admet sur ce cercle *au moins un point singulier*.

Soit $Ke^{i\theta}$ un de ces points singuliers. D'après le théorème de Hurwitz, et d'après ces hypothèses, la fonction $\pi(x)$ doit admettre un point singulier $e^{i\varphi}$ qui vérifie l'égalité

$$e^{i\varphi} - 1 = Ke^{i\theta};$$

ou alors

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} K\cos\theta + 1 = \cos\varphi, \\ K\sin\theta \quad\;\; = \sin\varphi, \end{cases}$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\varphi = \operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{K^2}{2}\right).$$

L'un des deux points $e^{\pm\varphi}$ (ou tous les deux) est un point singulier de $\mathcal{F}_1(x)$, et aussi de la fonction $\mathcal{F}(z)$.

Si l'on sait qu'un des deux points $e^{\pm\varphi}$ est un point singulier, alors il n'y a plus de difficultés pour discerner lequel de ces deux points l'est.

Par exemple, pour que $e^{+i\varphi}$ soit singulier il faut et il suffit qu'on ait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{| a_0 - c_n^1 a_1 e^{i(\pi-\varphi)} + c_n^2 a_2 e^{2i(\pi-\varphi)} - \ldots \pm a_n e^{n(\pi-\varphi)}} = 2 \qquad (^1).$$

Théorème I. — *Si $\mathfrak{F}(z)$ n'a qu'un nombre fini de points singuliers non critiques tous situés sur le cercle de rayon un, le point d'affixe $e^{\pm i\varphi}$, où φ est déterminé de la manière indiquée précédemment, est le point singulier le plus rapproché du point d'affixe* -1.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ les affixes des points singuliers de la fonction $\mathfrak{F}(x)$ $\left[\text{donc les points singuliers de } \mathfrak{F}(z) \text{ sont les points d'affixes } \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \ldots, \frac{1}{\beta_k}\right]$.

On peut écrire

$$\mathfrak{F}(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

$f_i(x)$ admettant le point d'affixe β_i comme seul point singulier.

En adoptant l'écriture

$$\beta_i = e^{i\vartheta_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

supposons que l'on ait

$$|\vartheta_1| > |\vartheta_2| > |\vartheta_3| > \ldots > |\vartheta_k|. \tag{12}$$

On a d'après les lemmes I et II

$$K(|\vartheta_1|) > K(|\vartheta_2|) > \ldots > K(|\vartheta_j|).$$

Il résulte du lemme II que $K(|\vartheta_j|)$ est le rayon de convergence de $T[\pi(x), \xi_2(x)]$, c'est-à-dire que cette fonction restant régulière à l'extérieur du cercle de rayon $K(|\vartheta_j|)$, elle admet sur ce cercle un point singulier au moins (d'affixe $e^{\pm i\vartheta_i} - 1$), c'est-à-dire

$$K(|\vartheta_j|) = K = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\gamma_n^{(\pm\vartheta)}|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|\gamma_n|},$$

les γ_n étant les coefficients de la série

$$T[F(x), \xi_2(x)] = \frac{\gamma_0}{x} + \frac{\gamma_1}{x^2} + \ldots.$$

---

(1) *Voir* Lindelöf, *Comptes rendus*, février 1918, ou Pringsheim, *Comptes rendus* de Munich, 1912. L'analogue résulte aussi du théorème I *bis*.

Le point $e^{\pm i\vartheta_i}$ étant précisément obtenu par (B) on voit d'après (12) que le théorème est démontré.

[Il se peut que $e^{i\vartheta_{i-1}}$ soit symétrique de $e^{i\vartheta_i}$ par rapport à l'axe réel, c'est-à-dire que les points $e^{\vartheta_{i-1}}$ et e^{ϑ_i} soient tous deux des points singuliers de $\mathfrak{f}(z)$.]

8. Grâce à ce dernier théorème si $\mathfrak{f}(z)$ n'a qu'un nombre fini de points singuliers, tous non critiques et situés sur le cercle de convergence, alors *on peut de proche en proche calculer les affixes de tous ces points*.

Ceci résulte de la remarque simple suivante :

Si, ν étant un nombre entier, on considère les points d'affixes

$$(13)\qquad e^{\frac{2i\pi}{2^{\nu+1}}},\quad e^{\frac{2.2i\pi}{2^{\nu+1}}},\quad \ldots\quad e^{\frac{2qi\pi}{2^{\nu+1}}},\quad \ldots,\quad e^{\frac{2(2^{\nu-1}-1)i\pi}{2^{\nu+1}}},$$

il est clair que quel que soit l'ensemble fini de points $x_0, x_1, \ldots, x_k$, donné à l'avance et situé sur le cercle de rayon 1, on peut choisir un entier ν et un autre entier $q\,(q < 2^{\nu+1})$ tels que le point x_0, par exemple, soit de tous les points $x_0, x_1, \ldots, x_k$ le point le plus approché du point $e^{\frac{2iq\pi}{2^{\nu+1}}}$.

En effet, en désignant par

$$\overline{x_0x_1},\quad \overline{x_0x_2},\quad \ldots,\quad \overline{x_0x}$$

les distances comptées par les arcs du cercle de rayon 1 entre le point x_0 et les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ successivement, et en désignant par δ la plus petite de ces distances, il n'y a qu'à prendre

$$\nu > 1 + \log\frac{\pi}{\delta}$$

car alors on aura

$$\frac{\pi}{2^{\nu-1}} < \delta.$$

On peut alors trouver un entier q_1 tel que, δ étant la distance entre x_0 et x_s, on ait que sur l'arc x_0x_s soient situés les points

$$e^{\frac{2i\pi q_1\pi}{2^{\nu+1}}}\quad \text{et}\quad e^{\frac{2i(q_1+1)\pi}{2^{\nu+1}}};$$

l'un de ces points, par exemple $e^{\frac{2iq_1\pi}{2^{\nu+1}}}$, est plus près de x_0 que de x_s, le point x_0 est alors le point singulier le plus rapproché du point $e^{\frac{2iq_1\pi}{2^{\nu+1}}}$.

En désignant par $x_0 = e^{i\varphi_0}$, on voit que pour la fonction

$$
(14) \qquad \mathfrak{F}(z) = a_0 + a_1 e^{i\left(\frac{q_1\pi}{2^\nu} - \pi\right)} x + \ldots + a_n e^{in\left(\frac{q_1\pi}{2^\nu} - \pi\right)} x^n + \ldots
$$

$$
= a_0 + a_n e^{\frac{iq_1\pi}{2}} + \ldots + a_n e^{\frac{inq_1\pi}{2^\nu}+\ldots} \qquad \text{avec} \quad (q_2 < 2^{\nu+1})
$$

le point d'affixe $e^{i\left(\pi - \frac{q_1\pi}{2^\nu} + \varphi_0\right)}$ est le point singulier le plus voisin du point -1. Ce point sera alors obtenu par la formule (10) appliquée à la série (14).

C'est-à-dire après un nombre fini d'opérations qui correspondent successivement aux nombres $\nu = 1, 2, \ldots, p$ et en prenant pour chaque ν tous les entiers correspondants $q \leqq 2^{\nu+1}$ on finit par déterminer l'affixe du point $e^{-i\left(\pi - \frac{q_1\pi}{2^\nu} + \varphi_0\right)}$, on peut de même tout de suite discerner lequel des deux points est un point singulier.

De même après un nombre fini d'opérations on aura déterminé les affixes de tous les points singuliers.

Il faut évidemment connaître à l'avance le nombre de points singuliers, pour ne plus continuer l'opération une fois les affixes de tous les points singuliers déterminés.

On voit, d'ailleurs, que de la même manière on pourra déterminer les affixes de tous les points singuliers isolés non critiques (en supposant que tous les points soient situés sur le cercle de convergence).

9. C'est ici qu'il convient de placer la démonstration d'un théorème qui porte, il est vrai, un caractère différent des considérations précédentes, mais qui se relie facilement à ces considérations par la démonstration.

D'après un théorème d'Eisenstein, une série entière à coefficients rationnels

$$
(15) \qquad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots
$$

qui représente une fonction algébrique jouit de la propriété que l'on peut trouver un entier N tel que les quantités $A_n N^n$ soient des nombres entiers.

La réciproque n'est évidemment pas vraie.

Il suffit, en effet, d'après le théorème déjà classique de M. Fatou, de changer le signe d'une infinité de coefficients d'une série jouissant de la propriété telle que les $A_n N^n$ soient entiers, pour que le cercle de convergence de la série ainsi obtenue soit une coupure; donc la fonction représentée par cette nouvelle série, bien qu'elle jouisse de la propriété mentionnée, n'est pas algébrique.

Dans le cas où tous les A_n sont des entiers, on connaît le théorème de M. Carlson : ou bien la série (15) admet le cercle de convergence comme coupure, ou bien elle représente une fonction rationnelle de la forme

$$\frac{\mathfrak{P}(z)}{(1-z^p)^q},$$

où $P(x)$ est un polynome et où p et q sont des entiers positifs.

Nous allons démontrer le théorème que voici :

Si (15) *est une série à coefficients rationnels, tels que l'on puisse choisir un nombre* N *pour lequel les quantités*

$$A_0, \quad A_1 N, \quad \ldots, \quad A_n N^n, \quad \ldots$$

soient des entiers, et que la fonction représentée par cette série soit régulière à l'extérieur et sur la circonférence du cercle de rayon $\frac{N}{N^2-1}$ *et de centre* $\frac{N_2}{N^2-1}$ $\Big($*ou, en particulier, si cette fonction est régulière à l'extérieur du cercle de rayon* $\frac{1}{N+1}$ *et de centre* $1\Big)$, *alors cette fonction est de la forme*

$$\frac{\mathfrak{P}(z)}{(1-z)^n},$$

où $P(x)$ *est un polynome, et où* n *est un entier positif.*

Pour la démonstration, posons dans (3)

$$\beta_n = N^n(-1)^n,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\xi_2(x) = \sum \frac{(-1)^n N^n}{x^n},$$

et dans (2)

$$\alpha_n = a_{n+1} N^{n+1},$$

c'est-à-dire qu'on a

$$F(x) = \sum \frac{a_{n+1} N^{n+1}}{x^{n+1}}.$$

On aura alors pour (1)

$$T[F(x), \xi_2(x)] = \sum \frac{\gamma_n}{x^{n+1}}$$

avec

(16) $$\gamma_n = (a_1 N) N^n - C_n^1 (a_2 N^2) N^{n-1} + \ldots \pm (a_n N^n) N.$$

D'après les hypothèses du théorème la fonction

$$F(x) = \frac{a_1 N}{x} + \frac{a_2 N^2}{x^2} + \ldots$$

est régulière à l'extérieur et sur la circonférence du cercle de centre N et de rayon 1, et d'après le théorème d'Hurwitz la série

$$T[F(x), \xi_2(x)] = \sum \frac{\gamma_n}{x^{n-1}}$$

est régulière à l'extérieur et sur la circonférence du cercle de centre *zéro* et de rayon *un*.

D'autre part, d'après les hypothèses et d'après (16) on voit que les γ sont des entiers. On a donc

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|\gamma_n|} = \theta < 1;$$

donc $\lim \gamma_n = 0$, et comme les γ_n sont des entiers, il en résulte qu'il existe un entier n_0 tel que l'on ait $\gamma_n = 0$ pour $n > n_0$.

On a donc, d'après la formule (4),

$$\Sigma A_p z^{p-1} = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{\Delta_k A_0}{(1-z)} \left(\frac{z}{1-z}\right)^k = \frac{P_1(z)}{(1-z)^n}$$

et l'on a

$$A_0 + A_1 z + \ldots = A_0 + z \Sigma A_p z^{p-1} = \frac{P_1(z) z}{(1-z)^n} + a_0 = \frac{P(z)}{(1-z)^n}$$

et le théorème est démontré.

10. Il résulte de ce théorème en particulier que si l'on désigne par δ la distance du point 1 au point singulier [1] le plus éloigné de lui, on peut écrire

$$\frac{1}{N+1} < \delta, \tag{17}$$

$$N > -1 + \frac{1}{\delta},$$

c'est-à-dire en supposant que toutes les singularités sont assez rapprochées du point 1, et si l'on suppose l'existence des points singuliers autres que celui d'affixe 1, on obtient une limite inférieure pour la quantité N, dont l'existence pour les fonctions algébriques résulte du théorème d'Eisenstein.

Car si l'on suppose que (17) n'a pas lieu, il résulterait du dernier théorème que la fonction en question n'a qu'un seul point singulier d'affixe 1.

11. On peut tirer du dernier théorème des conclusions qui se rapportent aux nombres transcendants. Je l'ai fait dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (février 1926). L'énoncé du théorème étant compliqué, je veux ici reproduire un cas particulier plus net de ce théorème, sans reproduire la démonstration (qui est donnée dans la Note citée).

Je remarque seulement, comme je l'ai fait à la page 199, que si une fonction entière $g(z)$ croît moins vite que $e^{\varepsilon|z|}$ alors la fonction représentée par la série

$$\Sigma g(n) x^n$$

n'a qu'un seul point singulier dans le plan tout entier.

Théorème. — *Soit ζ un nombre donné.*

Supposons que l'on puisse faire correspondre à tout polynome

$$Q(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p$$

à coefficients entiers et de degré p quelconque, une fonction

---

[1] Le point singulier à l'infini doit aussi être considéré.

entière $g(z)$ *croissant moins vite que* $e^{s|z|}$, *telle que si l'on écrit*

$$\theta(x) = Q(x)\sum g(n)x^n + \frac{\sum g(n)x^n}{x-\zeta} = \sum c_n x^n + b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p,$$

$R(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p$ *désignant la partie principale du pôle à l'infini de la fonction* $\theta(x)$, *on a que les quantités* $c_n k^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *sont des entiers, k étant un entier convenablement choisi, alors le nombre* ζ *est transcendant.*

Nous reviendrons sur les séries de Taylor encore une fois, dans un Mémoire de ce même Recueil.