JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. GOSSE

Des équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par la méthode de Darboux

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 381-399.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__381_0>

Des équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par la méthode de Darboux;

PAR R. GOSSE.

Ce Mémoire (¹) est consacré à la démonstration du théorème fondamental suivant :

Si une équation $r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$ *admet, pour le système* II *de caractéristiques correspondant à la racine* m_2, *un invariant d'ordre supérieur à* 3, *sans en admettre d'ordre inférieur, ou bien elle admet une involution d'ordre* 3 *ou bien* $\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s}$ *est nul* sauf peut-être dans un cas particulier qui sera précisé.

Après avoir généralisé quelques résultats connus et introduit quelques notations (²) et définitions commodes, je démontre (³) d'abord que :

Si le système II *admet une involution d'ordre* $n > 4$, *sans en admettre d'autre d'ordre compris entre* n *et* 3, *ou bien elle admet une involution d'ordre* 3 *ou bien* $\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_2 \frac{\partial m_2}{\partial s}$ *est nul.*

Pour avoir complètement démontré le théorème fondamental, il suffit alors d'étudier le cas où l'équation donnée admet à la fois un

(¹) *Voir* ma Note aux *Comptes rendus*, t. 174, p. 1612. Quelques-uns des résultats de ce Mémoire ont été publiés sans démonstration par M. Gau dans une Note postérieure à la mienne, mais qui provenait de l'ouverture d'un pli cacheté déposé bien avant ma Note : la priorité de M. Gau, en ce qui concerne nos résultats communs, est donc incontestable.

(²) Pour les notations, *voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations du second ordre*, t. II, p. 78, et GAU, *Thèses* (Gauthier-Villars, 1911), Chap. I.

(³) Ce théorème a été énoncé par M. Gau dans la Note précitée.

invariant d'ordre $n > 3$ et une involution d'ordre 4 et de montrer qu'il conduit aux mêmes conclusions : c'est à cette étude et à l'exposé de quelques conséquences évidentes du théorème fondamental qu'est consacrée la fin de mon travail.

1. *Notations.* — *a.* Nous poserons, en supposant $m_2 \neq m_1$,

$$C_1 = \frac{\dfrac{\partial m_1}{\partial t} - m_1 \dfrac{\partial m_1}{\partial s}}{m_2 - m_1}, \qquad C_2 = \frac{\dfrac{\partial m_2}{\partial t} - m_2 \dfrac{\partial m_2}{\partial s}}{m_2 - m_1},$$

$$\delta = \frac{\dfrac{\partial m_1}{\partial t} - m_2 \dfrac{\partial m_1}{\partial s}}{m_2 - m_1} = \frac{\dfrac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \dfrac{\partial m_2}{\partial s}}{m_1 - m_2},$$

$$F_n(a) = \frac{\partial a}{\partial p_{0n}} - m_1 \frac{\partial a}{\partial p_{1n-1}}, \qquad G_n(a) = \left(\frac{da}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{da}{dy}\right) - \frac{\partial a}{\partial p_{1n-1}} \left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right).$$

Si a est une expression où l'on considère comme constantes toutes les dérivées partielles d'ordre supérieur à n, on a alors, sur une caractéristique du système II,

$$\frac{da}{dx} = \left[\frac{da}{dx}\right] + m_2 \left[\frac{da}{dy}\right] = G_n(a) + (p_{1n} + m_2 p_{0n+1}) F_n(a).$$

b. Si $n \geq 3$, on a (*voir* GAU, *loc. cit.*)

$$\left|\frac{d^n f}{dy_n}\right| = p_{1n+1} \frac{\partial f}{\partial s} + p_{0n+2} \frac{\partial f}{\partial t} + p_{1n} M_n + p_{0n+1} N_n + \delta_n.$$

Si l'on pose

$$\left|\frac{d^2 f}{dy^2}\right| = p_{13} \frac{\partial f}{\partial s} + p_{04} \frac{\partial f}{\partial t} + \left(p_{12} \frac{\partial f}{\partial s} + p_{03} \frac{\partial f}{\partial t}\right)^{(2)} + E p_{03} + F p_{12} + G,$$

on obtient

$$\left[\frac{d^3 f}{dy^3}\right] = p_{14} \frac{\partial f}{\partial s} + p_{05} \frac{\partial f}{\partial t} + M_3 p_{13} + N_3 p_{04} + \delta_3,$$

δ_3 étant facile à calculer. On en déduit sans peine δ_4 et δ_5. Cette dernière expression est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre 5 et l'on démontre, par voie d'induction complète, que, pour $n \geq 5$,

$$\delta_n = H_n p_{1n-1} + I_n p_{0n} + K_n,$$

K_n étant au plus d'ordre $n-1$ et H_n et I_n étant donnés par les formules

$$H_n = n\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial p}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial s}\right], \qquad I_n = n\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right].$$

Si nous convenons, toutes les fois qu'il n'y aura à craindre aucune ambiguïté, de désigner par F' ce qui reste de F quand on y a supprimé les termes d'ordre le plus élevé, on a, en posant $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$,

$$H_{n-1} = H'_{n-1} + N\left(p_{13}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + p_{04}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}\right), \qquad I_{n-1} = I'_{n-1} + N\left(p_{13}\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} + p_{04}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right).$$

c. Nous poserons, avec M. Gau,

$$A = -\left[\frac{dm_2}{dy}\right], \qquad B = \left[\frac{dm_2}{dy}\right] - \frac{1}{m_2 - m_1}\left(\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right] + m_2\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

et nous désignerons par $\mu_{\alpha,\beta}$ l'expression $A\alpha + B\beta$, α et β étant des constantes. On a

$$\mu_{\alpha,\beta} = \mu'_{\alpha,\beta} + (\beta - \alpha)\left(\frac{\partial m_2}{\partial s}p_{12} + \frac{\partial m_2}{\partial t}p_{03}\right) - \beta C_1(p_{12} + m_2 p_{03}).$$

Si l'on pose

$$\lambda_{n,1} = An + B + M_{n-1} = \mu_{n,1} + M_{n-1},$$

on a de même

$$\lambda_{n,1} = (n-1)\left(\frac{\partial m_1}{\partial s}p_{12} + \frac{\partial m_1}{\partial t}p_{03}\right) - C_1(p_{12} + m_2 p_{03}) + \lambda'_{n,1}.$$

Enfin, nous désignerons par θ_h le groupement $p_{1h-1} + m_1 p_{0h}$, nous réservant de supprimer l'indice toutes les fois que ce sera possible sans nuire à la clarté.

2. *Définition des facteurs canoniques*. — *a*. Nous dirons qu'une équation d'ordre $n > 3$, en involution avec $r + f = 0$, est mise sous la forme canonique quand on l'écrit

$$\psi_n \equiv p_{1n-1} + m_1 p_{0n} + \varphi(x, y, z, p_{01} \ldots p_{0n}, p_{11}, \ldots, p_{1n-2}) = 0.$$

M. Gau (*loc. cit.* p. 12-13) a montré que l'on a

$$\frac{d\psi_n}{dx} = \psi_n(An + B) = \mu_{n,1}\psi_n.$$

Cette condition nécessaire n'est suffisante pour qu'il existe une involution d'ordre n que si ψ_n a la forme indiquée. Plus généralement, s'il existe une fonction φ d'ordre n telle que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi F,$$

F étant d'ordre inférieur à n, il existe une involution d'ordre n si φ ou $\frac{1}{\varphi}$ sont susceptibles de s'annuler.

M. Gau a démontré (*loc. cit.*, p. 11-12) que s'il existe une involution d'ordre $n > 3$, le système

$$F_{n-1}(\varphi) = \lambda_{n,1}, \qquad G_{n-1}(\varphi) = \mathcal{J}_{n-1} + \varphi\mu_{n,1}$$

admet une solution. Pour démontrer la réciproque, il suffit de remarquer que si l'on pose

$$\psi \equiv p_{1n-1} + m_1 p_{0n} + \varphi,$$

on a identiquement

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_{0n}} - m_1 \frac{\partial\psi}{\partial p_{1n-1}} = 0$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2\left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_{1n-1}} \\ \equiv p_{0n}\left(\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]\right) + G_{n-1}(\varphi) + F_{n-1}(\varphi)(p_{1n-1} + m_1 p_{0n}) \\ - (p_{1n-1}M_{n-1} + p_{0n}N_{n-1} + \mathcal{J}_{n-1}).\end{aligned}$$

Le second membre se réduit, tous calculs faits, à $\mu_{n,1}\psi$. Donc le premier s'annule en même temps que ψ, ce qui démontre la proposition.

b. M. Gau a signalé que, s'il existe un invariant d'ordre n, on peut le mettre sous la forme

$$u = v(p_{1n-1} + m_1 p_{0n} + \varphi) \equiv v\psi_n$$

(v étant d'ordre $n-1$).

Nous dirons qu'il est alors mis sous la forme canonique [1].

---

[1] *Voir* Clairin, *Sur les invariants des équations aux dérivées partielles de second ordre* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1920, p. 107-116).

M. Clairin a remarqué que v vérifie alors une relation de la forme

$$\frac{dv}{dx} + v\mu_{n,1} = 0.$$

Si nous appelons *facteur canonique* d'ordre K toute fonction d'ordre K qui vérifie une relation de la forme $\frac{du}{dx} + u\mu_{\alpha,\beta} = 0$ (α et β étant des constantes), on peut donc dire :

S'il existe un invariant d'ordre $n > 3$, il existe un facteur canonique d'ordre au plus égal à $n-1$.

Quand β n'est pas nul, $\frac{\alpha}{\beta}$ s'appellera *l'indice* du facteur. Donc *s'il y a une involution d'ordre n, il existe un facteur canonique d'ordre et d'indice n; s'il y a un invariant d'ordre n, il y a de plus un facteur canonique d'indice n et d'ordre inférieur à n.*

Nous ferons souvent usage des remarques évidentes qui suivent :

1° *S'il existe un facteur canonique v, il ne peut en exister un autre u de même indice* ($u \neq v \times$ const.) *sans qu'il y ait un invariant d'ordre égal à celui du facteur qui est de l'ordre le plus haut.*

2° *S'il existe trois facteurs canoniques d'ordres différents, il y a un invariant d'ordre égal à celui du facteur qui est de l'ordre le plus haut.*

5. Théorème I. — *L'existence d'un facteur canonique d'ordre $h > 3$ entraîne ou bien celle d'un facteur canonique d'ordre inférieur et d'indice h, ou bien celle d'une involution d'ordre h.*

On a, par hypothèse,

$$(1) \qquad \frac{dv}{dx} + v\mu_{\alpha,\beta} = \left[\frac{dv}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dv}{dy}\right] + v(A\alpha + B\beta) = 0;$$

d'où, puisque h est supérieur à 3,

$$(2) \qquad F_h(v) = 0, \qquad G_h(v) + v\mu_{\alpha,\beta} = 0;$$

v ne dépend des dérivées d'ordre h que par l'intermédiaire de θ_h et l'on a

$$\left[\frac{dv}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dv}{dy}\right] + \frac{\partial v}{\partial \theta_h}[p_{0h}(m_2 - m_1)\lambda_{h,1} - \theta_h M_{h-1} - \mathcal{J}_{h-1}] + v\mu_{\alpha,\beta} = 0,$$

les deux premières dérivées étant prises en regardant θ_h comme une constante. Cette relation se réduit à une identité en p_{0h} quand on y remplace p_{1h-1} par $\theta_h - m,\ p_{0h}$. Il vient donc :

$$(3)\quad F_{h-1}(v) = \lambda_{h,1}\frac{\partial v}{\partial \theta_h}, \qquad G_{h-1}(v) + \frac{\partial v}{\partial \theta_h}(\theta_h \mu_{h,1} - \delta_{h-1}) + v\mu_{\alpha,\beta} = 0,$$

et les systèmes (1), (2), (3) sont absolument équivalents.

Si le système (3) admet plus d'une solution, il y a un invariant et par suite une involution d'ordre h. S'il n'admet qu'une solution, le système complet qu'on en déduit a tous ses coefficients indépendants de θ_h, sauf ceux de $\frac{\partial v}{\partial \theta_h}$ qui sont du premier degré en θ_h et v vérifie par suite une équation de la forme

$$\frac{\partial v}{\partial \theta_h} = \frac{lv}{l_1\theta_h + l_2}.$$

On a par suite deux cas à distinguer :

1° $v = be^{a\theta}$ $(ab \neq 0)$. Le système (3) donne alors immédiatement

$$\frac{da}{dx} + a(Ah + B) = 0.$$

Il y a un facteur canonique a d'ordre $\leqq h - 1$ et d'indice h. M. Clairin a montré que, si a se réduit à une constante $\neq 1$, l'équation proposée est une équation linéaire. Nous écarterons ce cas.

2° $v = c(\theta_h + b)^a$. $(ac \neq 0)$. Il y a alors évidemment une involution d'ordre h, $\theta_h + b = 0$. On a d'ailleurs

$$F_{h-1}(a) = 0, \qquad G_{h-1}(a) = 0;$$

s'il n'y a pas d'invariants d'ordre $\leqq h - 1$, a est une constante et l'on a de plus

$$(4)\qquad \frac{dc}{dx} + c\{A(\alpha + ah) + B(\beta + a)\} = 0.$$

Il y a encore un facteur canonique d'ordre $\leqq h - 1$. Mais il peut se réduire à une constante. Dans ce cas, on a

$$A(\alpha + ah) + B(\beta + a) = 0,$$

et nous tombons sur le cas écarté d'une équation linéaire *sauf si l'on a*

$$\alpha + ah = \beta + a,$$

c'est-à-dire si l'indice est égal à l'unité.

Dans le cas particulier où $\alpha + ah$ et $\beta + a$ sont nuls simultanément la relation (4) se réduit à une identité.

Corollaire. — *Si l'équation proposée*, qu'on suppose non linéaire, *admet un facteur canonique d'ordre $h > 3$, sans admettre d'involutions d'ordre $\leq h$, il existe un facteur canonique d'ordre $\leqq 3$. Il en est ainsi, en particulier, si l'équation admet un invariant d'ordre $n > 3$ sans admettre d'involution d'ordre inférieur à n.*

4. Théorème II. — *Si une équation admet un facteur canonique d'ordre 3, ou bien $C_2 = 0$, ou bien il y a au moins une involution d'ordre 3; si le facteur est d'ordre inférieur à 3, les mêmes conclusions subsistent à condition que l'indice du facteur soit différent de 1.*

On a

$$\frac{dv}{dx} + v(A\alpha + B\beta) = 0.$$

Si v est d'ordre 0, 1, 2, en égalant à zéro les coefficients des dérivées d'ordre 3, on trouve $C_2 = 0$, *si $\beta - \alpha$ n'est pas nul.* Si v est du troisième ordre, le système

$$F_3(v) = 0, \qquad G_3(v) + v\mu_{\alpha,\beta} = 0$$

montre que $\varphi = \mathcal{L}.v$ ne dépend des dérivées du troisième ordre que par l'intermédiaire de $\theta = p_{12} + m_1\, p_{03}$ et l'on a :

$$(S)\quad \begin{cases} F_2(\varphi) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}(I\theta - k) = 3(\beta - \alpha) + 3C_1, \\[2ex] G_2(\varphi) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}[C_2\theta^2 + \theta(K - F) - G] = (\beta - \alpha)C_2\theta - \mu_{\alpha,\beta}. \end{cases}$$

Si ce système admet deux solutions, il y a un invariant du troisième ordre; s'il n'en admet qu'une, le système complet qu'on en déduit aura ses coefficients indépendants de θ, sauf pour ceux de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, qui sont du second degré au plus, les seconds membres étant des polynomes en θ. On aura donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{P(\theta)}{l\theta^2 + l_1\theta + l_2} \qquad (\text{P étant un polynome en } \theta) :$$

1° Si $l = l_1 = 0$, φ est un polynome en θ et la seconde équation de S montre alors que C_2 est nul.

2° Si $l = 0$, on a

$$\varphi = a_1 L(\theta + \lambda_1) + P_1(\theta), \qquad v = (\theta + \lambda_1)^{a_1} P(\theta)$$

et $\theta + \lambda_1 = 0$ est en involution avec la proposée.

3° Si l n'est pas nul, on a soit

$$\varphi = a_1 L(\theta + \lambda_1) + a_2 L(\theta + \lambda_2) + P_1(\theta),$$

soit

$$\varphi = a_1 L(\theta + \lambda_1) - \frac{a_2}{\theta + \lambda_1} + P_1(\theta).$$

Dans le premier cas, il y a deux involutions d'ordre 3; dans le second cas, il est clair que $\frac{d(\theta + \lambda_1)}{dx}$ s'annule en même temps que $\theta + \lambda_1$; il y a encore une involution d'ordre 3. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si l'équation proposée admet un invariant d'ordre $n > 3$, sans admettre d'involution d'ordre inférieur, on a $C_2 = 0$. S'il en est de même pour le second système de caractéristiques, on a aussi $C_1 = 0$ et l'équation est une équation de Monge-Ampère.*

3. Théorème III. — *S'il existe un nombre v d'ordre au plus égal à 3 et tel que l'on ait*

$$\frac{dv}{dx} + v\mu_{2,1} + KC_2 = 0,$$

K étant une constante non nulle, ou bien $C_2 = 0$, ou bien il y a une involution d'ordre 3.

En changeant v en Kv, on peut toujours prendre $K = 1$. Si v est d'ordre inférieur à 3, le calcul indiqué pour le théorème II donne $C_2 = 0$.

Si φ est d'ordre 3, la relation donne

$$F_2(\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(I\theta - K) + \varphi I = 0,$$

$$G_2(\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}[C_2\theta^2 + \theta(K - F) + G] + \varphi(2C_2\theta + K - F) + C_2 = 0.$$

En posant $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, on en déduit

$$F_2(\varphi') + \frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}(I\theta - K) + \varphi' I = 0,$$

$$G_2(\varphi') + \frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}[C_2\theta^2 + \theta(K - F) + G] + 2\varphi'(2C_2\theta + K - F) + 2\varphi C_2 = 0.$$

Mais on voit facilement que

$$\mu'_{3,1} = K - F,$$

et l'on a évidemment :

$$F_2(\varphi' - \varphi^2) + \frac{\partial(\varphi' - \varphi^2)}{\partial\theta}(I\theta - K) + 2I(\varphi' - \varphi^2) = 0,$$

$$G_2(\varphi' - \varphi^2) + \frac{\partial(\varphi' - \varphi^2)}{\partial\theta}[C_2\theta^2 + \theta(K - F) - G] + 2(\varphi' - \varphi^2)(2C_2\theta + K - F) = 0.$$

Si $\varphi' - \varphi^2$ n'est pas nul, ces relations expriment que $\sqrt{\varphi' - \varphi^2}$ est un facteur canonique d'ordre et d'indice 3; nos conclusions résultent alors du théorème II. Si $\varphi' - \varphi^2$ est nul, on a $\varphi = \frac{-1}{\theta + \lambda}$ et l'on voit immédiatement que $\theta + \lambda = 0$ est une involution d'ordre 3 (*voir* GAU, *Thèse*, Chap. I). C. Q. F. D.

6. *Involution d'ordre supérieur à* 3. — Nous sommes maintenant en mesure de discuter rapidement les conditions auxquelles le système

$$(\Sigma) \qquad F_{n-1}(\varphi) = \lambda_{n,1}, \qquad G_{n-1}(\varphi) = \mathfrak{G}_{n-1} + \varphi\,\mu_{n,1}$$

a au moins une solution, c'est-à-dire les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée admette une involution d'ordre $n > 3$.

Nous aurons toujours, si $n-1$ est supérieur à 3,

$$\varphi = p_{0n-1}\lambda_{n,1} + u(x, y, z, p_{01}\ldots p_{0n-2}, p_{11}\ldots p_{1n-3}, \theta_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{du}{dx}\right] + m_2\left[\frac{du}{dy}\right] + p_{0n-1}\left\{\left[\frac{d\lambda_{n,1}}{dx}\right] + m_2\left[\frac{d\lambda_{n,1}}{dy}\right]\right\} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial \theta_{n-1}} p_{0n-1}\left(\left[\frac{dm_1}{dx}\right] + m_2\left[\frac{dm_1}{dy}\right]\right) \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial \theta_{n-1}}(p_{1n-2}M_{n-2} + p_{0n-1}N_{n-2} + \delta_{n-2}) \\
&= \mu_{n,1}(p_{0n-1}\lambda_{n,1} + u) + H_{n-1}p_{1n-2} + I_{n-1}p_{0n-1} + K_{n-1}.
\end{aligned}$$

Supposons $n > 5$. Quand on fait, dans la relation précédente,

$$p_{1n-2} = \theta_{n-1} - m_1 p_{0n-1},$$

elle doit se réduire à une identité en p_{0n-1}. En tenant compte de l'ordre des diverses expressions qui y figurent et posant

$$\sigma_{n,1} = \frac{\left[\dfrac{d\lambda_{n,1}}{dx}\right] + m_2\left[\dfrac{d\lambda_{n,1}}{dy}\right] - \mu_{n,1}\lambda_{n,1} + m_2 H_{n-1} - I_{n-1}}{m_2 - m_1},$$

il vient

$$(\Sigma_1)\quad \begin{cases} F_{n-2}(u) = \dfrac{\partial u}{\partial \theta_{n-1}}\lambda_{n-1,1} - \sigma_{n,1} + m_1 H_{n-1}, \\[2ex] G_{n-2}(u) + \dfrac{\partial u}{\partial \theta_{n-1}}(\theta_{n-1}\mu_{n-1,1} - \delta_{n-2}) = u\,\mu_{n,1} + \theta_{n-1}\sigma_{n,1} + K_{n-1}. \end{cases}$$

Nous discuterons d'abord ce système *en supposant qu'il n'y ait pas d'involution d'ordre inférieur à* n et nous désignerons par des accents les dérivées par rapport à θ_{n-1}. On a

$$(\Sigma_2)\quad \begin{cases} F_{n-2}(u') = \dfrac{\partial u'}{\partial \theta_{n-1}}\lambda_{n-1,1}, \\[2ex] G_{n-2}(u') + \dfrac{\partial u'}{\partial \theta_{n-1}}(\theta_{n-1}\mu_{n-1,1} - \delta_{n-2}) = A\,u' + \sigma_{n,1}; \\[2ex] F_{n-2}(u'') = \dfrac{\partial u''}{\partial \theta_{n-1}}\lambda_{n-1,1}, \\[2ex] G_{n-2}(u'') + \dfrac{\partial u''}{\partial \theta_{n-1}}(\theta_{n-1}\mu_{n-1,1} - \delta_{n-2}) + u''\mu_{n-2,1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on compare les deux dernières égalités au système (3) du théorème I, on voit que

$$\frac{du''}{dx} + u''[A(n-2)+B] = 0.$$

1° $u'' = 0$. Soit n' l'ordre effectif de u'. Si $n' = 4$, en remarquant que

$$\sigma_{n,1} = \sigma'_{n,1} + (n-2)C_1(p_{13} + m_2 p_{04}) + N\left(p_{13}\frac{\partial m_2}{\partial s} + p_{04}\frac{\partial m_2}{\partial t}\right)$$

du système

$$(\Gamma) \qquad F_4(u') = 0, \qquad G_4(u') = Au' + \sigma_{n,1}$$

on tire, en désignant par ω une fonction de θ_4, les conditions

$$F_3(\omega) = \frac{\partial\omega}{\partial\theta_4}\lambda_{4,1} + (n-2)C_1 - N\Delta,$$

$$G_3(\omega) + \frac{\partial\omega}{\partial\theta_4}(\theta_4\mu_{4,2} - \Delta_3) = \omega A + \sigma'_{n,1} - \theta_4 NC_2,$$

d'où, en désignant par des accents les dérivées par rapport à θ_4,

$$F_3(\omega') = \frac{\partial\omega'}{\partial\theta_4}\lambda_{4,1},$$

$$G_3(\omega') + \frac{\partial\omega'}{\partial\theta_4}(\theta_4\mu_{4,1} - \Delta_3) + \omega'\mu_{3,1} + NC_2 = 0.$$

Si ω'' n'est pas nul, on a

$$\frac{d\omega''}{dx} + \omega''(\mu_{4,1} + \mu_{3,1}) = 0.$$

Il y a un facteur canonique d'indice $\frac{7}{2}$ et il n'y a pas d'involution d'ordre inférieur à l'ordre du facteur. On a donc $C_2 = 0$ (th. II). Si ω'' est nul, on a $\frac{d\omega'}{dx} + \omega'(3A + B) + NC_2 = 0$ et C_2 est nul d'après le théorème III. Si n' est inférieur à 4, les coefficients des termes du quatrième ordre de $\sigma_{n,1}$ sont nuls et l'on en conclut encore $C_2 = 0$.

2° $u'' = 0$ et $n' > 4$. Le système Σ_2 s'écrit

$$F_{n'}(u') = 0, \qquad G_{n'}(u') = Au' + \sigma_{n,1}.$$

On en tire, par un calcul déjà fait,

$$(C) \qquad \begin{cases} F_{n'-1}(v) = \dfrac{\partial v}{\partial\theta_{n'}}\lambda_{n',1}, \\ G_{n'-1}(v) + \dfrac{\partial v}{\partial\theta_{n'}}(\theta_{n'}\mu_{n',1} - \Delta_{n'-1}) = Av + \sigma_{n,1}, \end{cases}$$

v ne dépendant des dérivées de l'ordre n' que par l'intermédiaire de $\theta_{n'}$. En dérivant par rapport à $\theta_{n'}$, on a encore

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}}\right)+\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}}\{A(n'-1)+B\}=0.$$

Comme par hypothèse $\frac{\partial v}{\partial \theta_{n'}}$ n'est pas nul, c'est un facteur canonique d'indice $n'-1$ et d'ordre inférieur à n. On en conclut comme plus haut que C_2 est nul.

3° Si u'' n'est pas nul, on retombe sur les équations obtenues dans le cas que nous venons de traiter, où l'on aurait fait $n'=n-1$. On est donc ramené au même résultat.

Remarque. — Les résultats du calcul que nous venons de faire subsistent intégralement si, au second membre de la seconde équation du système Σ, nous ajoutons une expression ψ d'ordre au plus égal à $n-2$. Il suffit en effet d'ajouter ψ à K_{n-1} dans le système Σ_1 et nous retrouverons les mêmes conclusions car, pour les obtenir, nous avons dérivé au moins une fois le système Σ_1 par rapport à θ_{n-1}.

7. *Involutions d'ordre* 5. — Si $n=5$, on a encore

$$\varphi=p_{04}\lambda_{3,1}+u(x,y,z,p,q,s,t,p_{12},p_{03},\theta_4).$$

Mais δ_4 ne suit plus la loi démontrée pour δ_n, $n\geqq 5$. Le calcul direct de δ_4 montre alors que l'on a

$$\begin{aligned}
&p_{04}\left(\left[\frac{d\lambda_{3,1}}{dx}\right]+m_2\left[\frac{d\lambda_{3,1}}{dy}\right]\right)+G_3(u)+F_3(u)[\theta_4+(m_2-m_1)p_{04}]\\
&\quad+\frac{\partial u}{\partial \theta_4}[p_{04}(m_2-m_2)\lambda_{4,1}-\vartheta_4 M_3-\delta_3)\\
&=\mu_{3,1}(p_{04}\lambda_{3,1}+u)+K_4+3\left[p_{04}\left(\frac{\partial f}{\partial t}-m_1\frac{\partial f}{\partial s}\right)+\vartheta_4\frac{\partial f}{\partial s}\right]\text{[2]}\\
&\quad+p_{04}\left\{\frac{\partial \delta_3}{\partial p_{03}}+\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial p}\right]+3\left(\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\right\}\\
&\quad+(\theta_4-m_1p_{04})\left\{\frac{\partial \delta_3}{\partial p_{12}}+\left[\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}\right]+3\left(\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Cette relation est une identité en p_{04}. Si l'on identifie les termes du deuxième degré, on tombe sur l'identité facile à vérifier

$$3(m_2 - m_1)^2 C_1 = 3\left(\frac{\partial f}{\partial t} - m_1 \frac{\partial f}{\partial s}\right)\text{(²)},$$

et en appelant H'_4, I'_4, $\sigma'_{5,1}$, ce que deviennent les expressions H'_{n-1}, I'_{n-1} $\sigma'_{n,1}$ quand on y fait $n = 5$, l'identité en $p_{0,4}$ donne

$$F_3(u) = \frac{\partial u}{\partial \theta_4}\lambda_{4,1} + 3\theta_4\left(2\frac{\partial m_1}{\partial s} - C_1\right) - \sigma'_{5,1} + m_1 H'_4,$$

$$G_3(u) + \frac{\partial u}{\partial \theta_4}(\theta_4 \mu_{4,1} - \vartheta_3) = u\,\mu_{5,1} - 3\theta_4^2 C_2 + k_4 + \theta_4 \sigma'_{5,1}.$$

On en tire successivement, en dérivant,

$$F_3(u') = \frac{\partial u'}{\partial \theta_4}\lambda_{4,1} + 3\left(2\frac{\partial m_1}{\partial s} - C_1\right),$$

$$G_3(u') + \frac{\partial u'}{\partial \theta_4}(\theta_4 \mu_{4,1} - \vartheta_3) = A u' - 6\theta_4 C_2 + \sigma'_{5,1},$$

$$F_3(u'') = \frac{\partial u''}{\partial \theta_4}\lambda_{4,1};$$

$$G_3(u'') + \frac{\partial u''}{\partial \theta_4}(\theta_4 \mu_{4,1} - \vartheta_3) + u''\mu_{3,1} + 6C_2 = 0.$$

Si u''' est nul, u'' est une fonction du troisième ordre au plus qui vérifie la relation

$$\frac{du''}{dx} + u''(3A + B) + 6C_2 = 0.$$

S'il n'y a pas d'involution d'ordre 3, on a $C_2 = 0$ (théorème III).

Si u''' n'est pas nul, une dérivation de plus donne

$$\frac{du'''}{dx} + u'''(7A + 2B) = 0.$$

En supposant toujours qu'il n'y a pas d'involution d'ordre 3, si u''' est d'ordre $\leqq 3$, on aura encore $C_2 = 0$. Si u''' est d'ordre 4, ou bien il n'y a pas d'involution d'ordre 4, dans ce cas il y a un facteur canonique d'indice 4 et d'ordre $\leqq 3$ et l'on a $C_2 = 0$; ou bien il y a une involution d'ordre 4 :

$$\psi_4 \equiv \theta_4 + b = 0.$$

D'après le théorème II, le seul cas où l'on ne soit pas assuré que C_2

est nul, est celui où

$$u''' = c(\theta + b)^a,$$

a étant une constante, et l'on a

$$\frac{dc}{dx} + c\{A(4a + 7) + B(2 + a)\} = 0.$$

Si $4a + 7$ n'est pas égal à $2 + a$, c est un facteur canonique d'ordre ≤ 3 et d'indice différent de 1 : C_2 est encore nul. Si maintenant on suppose $a = -\frac{5}{3}$, on a

$$u'' = \frac{c}{a+1}(\theta + b)^{a+1} + u_1,$$

u_1 étant d'ordre au plus égal à 3. Or

$$\frac{du''}{dx} + u''(3A + B) + 6C_2 = 0.$$

En remplaçant dans cette relation u'' par sa valeur, on a

$$\frac{du_1}{dx} + u_1(3A + B) + 6C_2 = 0$$

et le théorème III montre que $C_2 = 0$.

Donc, *s'il existe une involution d'ordre 5, sans qu'il en existe d'ordre 3, on a certainement* $C_2 = 0$.

Les résultats obtenus dans les paragraphes **7** et **8** peuvent évidemment s'énoncer ainsi :

Si l'involution d'ordre minimum est d'ordre $n > 4$, on a $C_2 = 0$. S'il en est de même pour l'autre système de caractéristiques, l'équation proposée est une équation de Monge-Ampère.

8. *Équations qui admettent une involution d'ordre 4.* — La discussion directe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi paraît très difficile. Nous ferons, pour la simplifier, une hypothèse supplémentaire. Nous admettrons que, l'involution d'ordre minimum étant d'ordre 4, il existe un invariant d'ordre $n > 3$, sans qu'il en existe d'ordre inférieur.

Si $n = 4$, il existe un facteur canonique d'indice 4 et d'ordre $n \leq 3$:

on a $C_2 = 0$. Si $n = 5$, il y a une involution d'ordre 5 sans qu'il en existe d'ordre 3 ; C_2 est encore nul. Si $n > 5$, si l'involution d'ordre minimum est d'ordre $l \geqq 5$, $C_2 = 0$; le seul cas qui reste à examiner est donc celui où $l = 4$, $n > 5$.

A. Supposons qu'il existe une involution d'ordre k compris entre 4 et n. On peut supposer $k > 5$. S'il existe un facteur canonique v d'ordre $m < k$ et d'indice p, on a

$$\frac{dv}{dx} = v(\mathrm{A}p + \mathrm{B}), \qquad \frac{d\psi_k}{dx} = \psi_k(\mathrm{A}k + \mathrm{B}), \qquad \frac{d\psi_4}{dx} = \psi_4(4\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Il existe un invariant d'ordre k, si p n'est pas égal à 4. On a donc $p = 4$, et puisque l'invariant d'ordre minimum est d'ordre $n > 4$, on a

$$v = c\psi_4 \qquad (c \text{ étant une constante}).$$

Discutons alors le système Σ (n° 6) où l'on a fait $n = k$.

1° Si ω'' est nul ou si $n' \leqq 4$, on a $C_2 = 0$. Si ω'' n'est pas nul ($n' = 4$), c'est un facteur canonique dont l'indice $\frac{7}{2}$ est différent de 4 et il y a alors un invariant d'ordre k, ce qui est contraire à nos hypothèses ; ω'' ne peut être différent de zéro et C_2 est toujours nul.

2° Si $n' > 4$, $\dfrac{\partial v}{\partial \theta_n'}$ est un facteur canonique d'ordre inférieur à k et d'indice $n' - 1$. On doit avoir $n' = 5$ et

$$\frac{\partial v}{\partial \theta_5} = c\psi_4, \qquad v = c\psi_4(\theta_5 + v_1),$$

c n'étant pas nul et v_1 étant d'ordre $\leqq 4$.

On en déduit, en portant cette valeur de v dans les conditions que vérifie cette expression,

$$\mathrm{F}_4(v_1) = \lambda_{5,1}, \qquad \mathrm{G}_4(v_1) = \sigma_4 + v_1\,\mu_{5,1} + c\,\sigma_{n,1}\,\psi_4,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dv_1}{dx} = v_1(5\mathrm{A} + \mathrm{B}) + c\,\sigma_{n,1}\,\psi_4.$$

En posant

$$v_1 = cl\,\psi_4,$$

on voit que

$$\frac{dl}{dx} = \mathrm{A}\, l + \sigma_{n,1},$$

l étant d'ordre au plus égal à 5. On est ainsi ramené au système (Γ) qui entraîne la condition $C_2 = 0$, sauf si l est égal à 5.

B. S'il n'y a pas d'involution d'ordre compris entre 4 et n, l'existence de l'invariant d'ordre n implique celle d'un facteur canonique v d'ordre $h \leq n-1$ et d'indice n. Si $h < 4$, on a $C_2 = 0$. Si $h > 4$, comme il n'y a pas d'involution d'ordre h, il existe un facteur canonique v_1 (théorème I) d'ordre $< h$ et d'indice h; les relations

$$\frac{dv}{dx} + v(\mathrm{A}n + \mathrm{B}) = 0, \qquad \frac{dv_1}{dx} = v_1(\mathrm{A}h + \mathrm{B}), \qquad \frac{d\psi_4}{dx} = \psi_4(4\mathrm{A} + \mathrm{B}),$$

où h est compris entre 4 et n, entraîneraient l'existence d'un invariant d'ordre $h < n$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Il ne nous reste donc à examiner que le cas où $h = 4$.

La seule forme de v pour laquelle C_2 ne soit pas obligatoirement nul est alors $v = \omega\psi_4^a$, a étant une constante et ω une fonction d'ordre au plus égal à 3. On a d'ailleurs

$$\frac{d \log \omega}{dx} + a(4\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{A}n + \mathrm{B} = 0,$$

et le seul cas où C_2 ne sera pas obligatoirement nul est celui où

$$4a + n = a + 1,$$

ω étant une fonction d'ordre au plus égal à 2.

9. Nous n'avons donc qu'à élucider le cas où, l'invariant d'ordre minimum étant d'ordre $n > 5$, il existe exclusivement une involution d'ordre 4 et un nombre $w \neq 0$ d'ordre au plus égal à 2 et tel que

$$\frac{dw}{dx} = w(\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

Dans ce cas, s'il existe un facteur canonique ω d'ordre $< n$ tel que

$$\frac{d\omega}{dx} + \omega(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta) = 0,$$

on a nécessairement

$$\omega = c\psi_1^a u^b, \qquad a = \frac{\beta - \alpha}{3}, \qquad b = -\beta - a,$$

c étant une constante non nulle.

Reprenons alors la discussion du système (Σ_2) (n° 6) :

1° $u'' = 0$ et u' est d'ordre $n' \leqq 4$. Si $n' < 4$, ou bien si $n' = 4$, $\omega'' = 0$, on a $C_2 = 0$. Si ω'' n'est pas nul, on a

$$\frac{d\omega''}{dx} + \omega''(7A + 2B) = 0.$$

On a donc, d'après la remarque que nous venons de faire,

$$\omega'' = \frac{\psi_1^{\frac{5}{3}}}{c_1 u^{\frac{1}{3}}}, \qquad \omega' = \frac{1}{c u^{\frac{1}{3}}}\left\{(\vartheta_1 + b)^{-\frac{2}{3}} + \omega_1\right\},$$

ω_1 étant d'ordre au plus égal à 3.

On a d'ailleurs

$$\frac{d\omega'}{dx} + \omega'(3A + B) + NC_2 = 0,$$

qui donne, en y remplaçant ω' par sa valeur,

$$\frac{d\omega_1}{dx} + \frac{2\omega_1}{3}(4A + B) + Ncu^{\frac{1}{3}}C_2 = 0,$$

et, en posant $\omega' = clu^{\frac{1}{3}}$,

$$\frac{dl}{dx} + (3A + B)l + NC_2 = 0,$$

l étant d'ordre $\leqq 3$. On a encore $C_2 = 0$.

2° Supposons $u'' = 0$ et u' d'ordre n' $(4 < n' \leqq n - 1)$. On a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta_{n'}}\right) = \frac{\partial v}{\partial \vartheta_{n'}}\left\{A(n' - 1) + B\right\} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta_{n'}} = \frac{\psi_1^a u^b}{c}, \qquad v = \frac{\psi_1^a u^b(\vartheta_{n'} + v_1)}{c}$$

avec

$$a = \frac{2 - n'}{3}, \qquad b = -1 - \frac{2 - n'}{3}.$$

Si l'on porte cette valeur de v dans les conditions (C), en remarquant que

$$F_{n'}(\psi_1) = 0, \qquad F_{n'}(w) = 0, \qquad F_{n'}(\vartheta_{n'}) = 0;$$
$$G_{n'}(\psi_1) = 4A + B, \qquad G_{n'}(w) = A + B, \qquad G_{n'}(\vartheta_{n'}) = 0,$$

on trouve les conditions

$$(\mathrm{C})' \quad F_{n'-1}(v_1) = \lambda_{n',1}, \qquad G_{n'-1}(v_1) = \vartheta_{n'-1} + v_1\mu_{n',1} + c\,b_{n,1}\,\psi_1^{\frac{n'-2}{3}}\,w^{1+\frac{2-n'}{3}},$$

où $n' = n-1$. Supposons que n' soit supérieur à 6. On peut poser

$$v_1 = p_{0n',1}\,\lambda_{n',1} + u_1$$

et la remarque faite à la fin du n° **6** nous permet d'écrire immédiatement que u_1 vérifie le système

$$(\Sigma_1)' \begin{cases} F_{n'-2}(u_1) = \dfrac{\partial u_1}{\partial \vartheta_{n'-1}}\lambda_{n'-1,1} - \sigma_{n',1} + m_1 H_{n',1}, \\ G_{n'-1}(u_1) = \dfrac{\partial u_1}{\partial \vartheta_{n'-1}}(\vartheta_{n'-1}\mu_{n'-1,1} - \vartheta_{n'-2}) = u_1\mu_{n',1} + \theta_{n',1}\sigma_{n',1} + K_{n'-1} + c\,\sigma_{n,1}\,\psi_1^{\frac{n'-2}{3}}\,w^{1+\frac{2-n'}{3}}. \end{cases}$$

En posant $u'_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial \theta_{n'-1}}$, on obtiendra en dérivant un système $(\Sigma_2)'$ qui n'est autre que (Σ_2) où u' est changé en u'_1 et n' en n. On le discutera comme (Σ_2) et il nous amènera, par conséquent, à un système $(\Sigma_2)''$ qu'on obtiendrait en changeant dans (Σ_2) n en n'', n'' étant tel que

$$n'' = n' - 1 = n - 2$$

et ainsi de suite. On ne sera arrêté que lorsqu'on tombera sur une fonction v d'ordre $n' \leq 5$ vérifiant les conditions $(\mathrm{C})'$ où n est remplacé par un nombre $N > 5$.

Si $n' > 5$, v_1, qui est au plus d'ordre $n' - 1$, est au plus d'ordre 3; il en est de même de $\vartheta'_{n'-1}$; les termes du quatrième ordre $\sigma_{n,1}$ doivent disparaître, ce qui exige que C_2 soit nul.

Si $n' = 5$, il existe un nombre v d'ordre 4 tel que

$$F_4(v) = \lambda_{5,1}, \qquad G_4(v) = \vartheta_4 + v\mu_{5,1} + c\,\sigma_{N,1}\,\psi_4,$$

c'est-à-dire tel que

$$\frac{dv}{dx} = v(5A + B) + c\,\sigma_{N,1}\,\psi_4.$$

En posant $v = e^{l}\psi_1$, on en tire

$$\frac{dl}{dx} = A\,l + \sigma_{N,1}, \tag{Γ'}$$

l étant d'ordre au plus égal à 5. Cette relation conduit au système (Γ') et l'on a encore $C_2 = 0$, sauf si l est égal à 5.

10. Nous avons donc démontré dans tous les cas le théorème fondamental énoncé au début de ce travail. Il entraîne évidemment les conséquences suivantes :

Si une équation aux dérivées partielles du second ordre, n'admettant, pour un système de caractéristiques, aucune involution d'ordre inférieur ou égal à 3, admet un invariant, ce système de caractéristiques admet des multiplicités caractéristiques du premier ordre.

Si une équation, qui n'admet aucune involution d'ordre inférieur ou égal à 3, admet un invariant pour chaque système de caractéristiques, c'est une équation de Monge-Ampère.

En particulier, *une équation de la première classe, qui n'admet aucune involution d'ordre inférieur ou égal à 3, est une équation de Monge-Ampère.*

Nos conclusions ne peuvent être en défaut que si, en gardant toutes nos hypothèses, il existe en outre : 1° une involution d'ordre 4 et 2° une fonction l d'ordre 5 vérifiant la condition (Γ').