JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE HUMBERT

Sur des suites de polynômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 355-379.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__355_0>

Sur des suites de polynomes;

Par Pierre HUMBERT.

1. On sait que M. Appell a montré [1] qu'à toute fonction $a(h)$, développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de h,

$$a(h) = a_0 + a_1 \frac{h}{1} + \ldots + a_n \frac{h^n}{n!} + \ldots,$$

on pouvait faire correspondre une suite de polynomes en x,

$$A_0, \quad A_1(x), \quad \ldots, \quad A_n(x), \quad \ldots,$$

définis par le développement

$$e^{hx} a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n(x),$$

et possédant la propriété fondamentale suivante :

$$\frac{dA_n}{dx} = n A_{n-1}.$$

Ces polynomes, dont l'expression générale est

$$A_n(x) = a_0 x^n + C_n^1 a_1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} a_{n-1} x + a_n,$$

forment une classe fort intéressante, dont l'étude a été faite par M. Appell et quelques autres auteurs; en particulier, on lit dans un Mémoire de M. Angelesco [2] que le polynome A_n peut être mis sous la forme

$$A_n(x) = \int_0^1 (x-u)^n \psi(u)\, du,$$

(1) *Annales de l'École Normale*, t. 9, 1880.
(2) *Bulletin de la Société des Sciences de Cluj*, 1921.

où $\psi(u)$ est une fonction liée à $a(h)$ par la relation intégrale

$$a(h) = \int_0^1 e^{-hu}\psi(u)\,du.$$

Le but du présent travail est de généraliser la classe des polynomes de M. Appell, par l'introduction de paramètres supplémentaires; la liaison intime entre ces polynomes et les séries hypergéométriques sera ainsi nettement mise en évidence.

2. Soient donnés deux groupes de constantes

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r, \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots, & \gamma_s \end{matrix}$$

quelconques, à part les deux restrictions suivantes :

a. Le nombre r des constantes α est inférieur ou égal à $s+1$, s étant le nombre des constantes γ.

b. Aucun des γ n'est égal à zéro ou à un entier négatif.

Nous nous proposons de montrer qu'à toute fonction donnée $a(h)$, dépendant ou non des α et des γ, on peut faire correspondre une suite de polynomes en x, contenant les constantes α et γ,

$$\begin{gathered} A_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s), \\ A_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s; x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

tels qu'entre deux polynomes de degrés consécutifs existe la relation

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} A_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s; x) \\ &\quad = n\,\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s} A_{n-1}(\alpha_1+1, \ldots, \alpha_r+1; \gamma_1+1, \ldots, \gamma_s+1; x), \end{aligned}$$

et nous ferons l'étude de cette classe de polynomes.

D'une façon générale, et afin de simplifier l'écriture, nous désignerons le polynome

$$A_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \ldots, \gamma_s; x)$$

contenant r constantes α et s constantes γ, par le symbole

$$A_n^{(r,s)}(x),$$

et nous dirons qu'un tel polynome fait partie de la classe (r, s).

Le cas où les nombres r et s seraient nuls simultanément donne évidemment

$$\frac{d}{dx}A_n^{(0,0)}(x) = n\,A_{n-1}^{(0,0)}(x),$$

de sorte que la classe (o, o) est la classe des polynomes de M. Appell.

3. Nous désignerons toujours, avec les auteurs anglais, la série hypergéométrique générale

$$\sum \frac{(\alpha_1, m)(\alpha_2, m)\ldots(\alpha_r, m)}{(\gamma_1, m)(\gamma_2, m)\ldots(\gamma_s, m)}\,\frac{x^m}{m!}$$

par la notation

$$_rF_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s; x),$$

et nous adopterons, comme d'ordinaire, les symboles suivants pour les fonctions hypergéométriques, complètes ou confluentes, du premier ordre :

$$F(\alpha_1, \alpha_2; \gamma; x) = {}_2F_1 = \sum \frac{(\alpha_1, m)(\alpha_2, m)}{(\gamma, m)}\,\frac{x^m}{m!}$$

pour la fonction de Gauss;

$$\Phi(\alpha, \gamma, x) = {}_1F_1 = \sum \frac{(\alpha, m)}{(\gamma, m)}\,\frac{x^m}{m!}$$

pour la fonction de Kummer;

$$\Xi(\gamma, x) = {}_0F_1 = \sum \frac{x^m}{(\gamma, m)\,m!}$$

pour la fonction de Bessel-Legendre. Nous nous souviendrons d'ailleurs que les fonctions d'ordre zéro sont

$$\begin{aligned} {}_1F_0(\alpha, x) &= (1-x)^{-\alpha}, \\ {}_0F_0(x) &= e^x. \end{aligned}$$

4. Le problème général, tel que nous nous le sommes posé, comporte deux cas tout à fait distincts, suivant que la fonction $a(h)$

donnée dépend ou ne dépend pas des constantes α et γ. Nous examinerons successivement ces deux hypothèses, commençant par la seconde, qui est la plus intéressante. Et, afin de simplifier encore la question et de faire apparaître d'une façon plus tangible l'analogie du problème traité avec celui de M. Appell, nous étudierons spécialement le cas très simple où, où le nombre r étant nul, le nombre s est égal à l'unité, de sorte qu'il ne subsiste, parmi les constantes données, qu'une seule, γ. En d'autres termes, nous ferons l'étude des polynomes de la classe (o, 1) attachés à une fonction donnée

$$a(h) = a_0 + a_1 \frac{h}{1} + \ldots + a_n \frac{h^n}{n!} + \ldots,$$

où les a_i sont des constantes indépendantes de γ.

5. Pour montrer qu'on peut toujours, $a(h)$ étant donné, déterminer une suite (o, 1), considérons le produit de $a(h)$ par la série hypergéométrique confluente $\Xi(\gamma, hx)$, et développons ce produit suivant les puissances croissantes de h. Il est évident que le coefficient de h^n est un polynome en x, d'ordre n, contenant la constante γ; nous écrirons donc le développement sous la forme

$$\Xi(\gamma, hx)\, a(h) = \sum_n \frac{h^n}{n!} X_n(\gamma, x).$$

Or, dérivons les deux membres de cette relation par rapport à x, et souvenons-nous que, d'après la théorie générale des séries hypergéométriques, on a

$$\frac{d}{dx} \Xi(\gamma, x) = \frac{1}{\gamma} \Xi(\gamma + 1, x)$$

de sorte que nous pourrons écrire

$$\frac{h}{\gamma} \Xi(\gamma + 1, hx)\, a(h) = \sum_n \frac{h^n}{n!} \frac{d}{dx} X_n(\gamma, x).$$

Mais le premier membre est

$$\frac{h}{\gamma} \sum_n \frac{h^n}{n!} X_n(\gamma + 1, x)$$

et par conséquent, en comparant les sommes,

$$\frac{d}{dx} X_n(\gamma, x) = \frac{n}{\gamma} X_{n-1}(\gamma+1, x).$$

X_n est donc un polynome de la classe (0, 1); et nous voyons ainsi qu'à toute fonction $a(h)$ on peut faire correspondre une suite (0, 1) par le développement

$$\Xi(\gamma, hx)\, a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)}(x).$$

Nous dirons que $a(h)$ est la *génératrice* des polynomes $A_n^{(0,1)}$.

Ainsi les polynomes de la classe (0, 1) s'obtiennent comme coefficients dans le développement du produit de la génératrice par une série Ξ, c'est-à-dire par une fonction hypergéométrique ${}_0F_1$: de même que les polynomes de la classe (0, 0) ont été obtenus, par M. Appell, comme coefficients dans le développement du produit de la génératrice par une exponentielle, c'est-à-dire par une fonction hypergéométrique ${}_0F_0$.

6. Il est aisé de voir, d'après ce développement, quelle est la forme générale du polynome $A_n^{(0,1)}$. Il suffit d'expliciter les calculs, et d'effectuer le produit

$$\left[1 + \frac{hx}{1.\gamma} + \frac{h^2x^2}{2!(\gamma, 2)} + \ldots\right]\left[a_0 + a_1\frac{h}{1} + a_2\frac{h^2}{2!} + \ldots\right].$$

On trouve ainsi

$$A_0^{(0,1)} = a_0,$$

$$A_1^{(0,1)} = \frac{a_0}{\gamma}x + a_1,$$

$$A_2^{(0,1)} = \frac{a_0}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + 2\frac{a_1}{\gamma}x + a_2,$$

. . . .

et, en général,

$$A_n^{(0,1)} = \frac{a_0}{(\gamma, n)}x^n + C_n^1\frac{a_1}{(\gamma, n-1)}x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1}\frac{a_{n-1}}{(\gamma, 1)}x + a_n,$$

les C étant les coefficients du binome

On voit que l'on a, en particulier,

$$A_n^{(0,1)}(0) = a_n.$$

Le cas le plus simple correspond à $a(h) = 1$: tous les a_i étant alors nuls, sauf a_0 qui est égal à l'unité, on a

$$A_n^{(0,1)} = \frac{x^n}{(\gamma, n)}.$$

La suite

$$1, \quad \frac{x}{\gamma}, \quad \frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}, \quad \ldots$$

est donc évidemment la plus simple des suites de polynomes (0, 1).

7. Comme exemple, considérons le cas où la génératrice donnée est

$$a(h) = e^h,$$

c'est-à-dire où tous les a_i sont égaux à 1. La formule établie plus haut nous donne alors

$$A_n^{(0,1)} = \frac{x^n}{(\gamma, n)} + C_n^1 \frac{x^{n-1}}{(\gamma, n-1)} + \ldots + C_n^{n-1} \frac{x}{\gamma} + 1,$$

ce qui n'est autre que le polynome de Kummer,

$$A_n^{(0,1)} = \Phi(-n, \gamma, -x).$$

On peut d'ailleurs vérifier ce résultat de la façon suivante. Supposons qu'on ait, en général, deux développements de la forme

$$f(hx)\, g(h) = \sum \frac{h^m}{m!} X_m(x),$$

$$g(hx)\, f(h) = \sum \frac{h^m}{m!} Y_m(x).$$

Quelle relation existe-t-il entre X et Y? il suffit, pour le voir, de faire un changement de variable évident dans la seconde formule, afin de rendre son premier membre identique à celui de la première relation, et l'on trouve

$$x^m Y_m\left(\frac{1}{x}\right) = X_m(x).$$

Or, si l'on considère la fonction $\Xi(\gamma, h)$ comme génératrice d'une suite (o, o), on a, comme je l'ai montré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1282), à la suite de M. Félix Vaney,

$$e^{hx}\Xi(\gamma, h) = \sum \frac{h^m}{m!} x^m \Phi\left(-m, \gamma, -\frac{1}{x}\right),$$

et par conséquent, si l'on passe aux polynomes (o, 1) par

$$\Xi(\gamma, hx)\, e^h = \sum \frac{h^m}{m!} A_m^{(0,1)},$$

on aura immédiatement

$$A_m^{(0,1)} = \Phi(-m, \gamma, -x).$$

8. Ceci nous amène au problème général suivant : quels sont les polynomes (o, 1) correspondant à une génératrice hypergéométrique? La réponse est bien aisée si l'on se reporte à la formule générale donnant le produit de deux séries hypergéométriques quelconques (*Annales de la Soc. scient. de Bruxelles*, 1923-1924, 2e fascicule), laquelle, dans le cas particulier où l'une de ces séries est la fonction Ξ, s'écrira

$$\begin{aligned}&\Xi(\gamma, hx)\, {}_pF_q(b_1, \ldots, b_p; c_1, \ldots, c_q; h)\\ &\quad = \sum_m \frac{h^m}{m!} \frac{x^m}{(\gamma, m)}\, {}_{p+2}F_q\left(-m, 1-\gamma-m, b_1, \ldots, b_p; c_1, \ldots, c_q; \frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

de sorte qu'à la génératrice hypergéométrique

$$a(h) = {}_pF_q(b_1, \ldots, b_p; c_1, \ldots, c_q; h)$$

correspondent les polynomes

$$A_n^{(0,1)} = \frac{x^n}{(\gamma, n)}\, {}_{p+2}F_q\left(-n, 1-\gamma-n, b_1, \ldots, b_p; c_1, \ldots, c_q; \frac{1}{x}\right).$$

9. Une génératrice $a(h)$ étant donnée, on en déduit donc une suite (o, 1) par le développement

$$\Xi(\gamma, hx)\, a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)}(x).$$

Mais on en tire aussi une suite (o, o) par

$$e^{hx}a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,0)}(x).$$

Quelle relation existe-t-il entre les polynomes (o, 1) et les polynomes (o, o) ainsi définis par cette même génératrice ? On peut tout d'abord, se souvenant que

$$A_n^{(0,1)} = a_0 \frac{x^n}{(\gamma, n)} + C_n^1 a_1 \frac{x^{n-1}}{(\gamma, n-1)} + \ldots$$

et que

$$A_n^{(0,0)} = a_0 x^n + c_n^1 a_1 x^{n-1} + \ldots$$

écrire la formule évidente

$$\lim_{\gamma \to \infty} A_n^{(0,1)}(\gamma, \gamma x) = A_n^{(0,0)}(x).$$

Mais on peut encore indiquer une relation plus intéressante. On tire en effet des développements fondamentaux, par élimination de $a(h)$,

$$\sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)} = \Xi(\gamma, hx)\, e^{-hx} \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,0)}.$$

Or, d'après la formule générale de multiplication à laquelle il a été fait allusion plus haut, l'on a

$$e^{-hx}\, \Xi(\gamma, hx) = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} h^m x^m \Phi(-m, \gamma, 1),$$

d'où, par identification des coefficients des mêmes puissances de h, le résultat

$$\frac{1}{n!} A_n^{(0,1)}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s x^s}{s!(n-s)!} \Phi(-n, \gamma, 1) A_{n-s}^{(0,0)}(x).$$

10. Recherchons à présent comment certaines propositions données par M. Appell sur les suites (o, o) doivent être modifiées lorsque l'on passe aux suites (o, 1).

L'un de ces résultats a trait aux polynomes ayant pour génératrice la dérivée, par rapport à h, de la fonction $a(h)$. Désignons ces polynomes (o, 1) par la notation $(dA)_n^{(0,1)}$. Comme nous avons

$$\Xi(\gamma,\, hx)\, a(h) = \sum \frac{h_n}{n!} A_n^{(0,1)},$$

nous en tirerons, en dérivant par rapport à h,

$$\frac{x}{\gamma}\Xi(\gamma+1,\, hx)\, a(h) + \Xi(\gamma,\, hx)\frac{d}{dh}a(h) = \sum \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} A_n^{(0,1)}.$$

D'où

$$(dA)_n^{(0,1)} = A_{n+1}^{(0,1)}(\gamma,\, x) - \frac{x}{\gamma} A_n^{(0,1)}(\gamma+1,\, x),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(dA)_n^{(0,1)} = A_{n+1}^{(0,1)}(\gamma,\, x) - \frac{x}{n+1}\frac{d}{dx} A_{n+1}^{(0,1)}(\gamma,\, x).$$

11. Une autre propriété très remarquable des suites (o, o) concerne les polynomes ayant pour génératrice le carré de $a(h)$, ou le produit de deux génératrices différentes. On sait que M. Appell a défini ainsi, pour ses polynomes, des opérations distributives analogues à la multiplication et à l'élévation aux puissances, sur la simplicité et la généralité desquelles MM. Pincherle et Amaldi ont insisté dans leur Ouvrage *Le Operazioni distributive*. On ne peut pas donner pour les suites (o, 1) de propositions aussi simples et aussi élégantes : il est néanmoins possible d'indiquer, dans le même ordre d'idées, quelques propriétés intéressantes.

D'une façon générale, nous ferons, avec M. Appell, usage du symbole suivant : soient $X_m(x)$ un polynome de degré m, $Y_m(x)$ un polynome du même degré, nous désignerons par $(XY)_m$ le polynome obtenu en remplaçant, dans X_m, x^i par Y_i.

Considérons alors une génératrice $a(h)$, donnant naissance, d'une part, à une suite (o, o) de polynomes $A_n^{(0,0)}(x)$, d'autre part à une suite (o, 1) de polynomes $A_n^{(0,1)}(\gamma,\, x)$. Du développement fondamental pour les polynomes (o, 1), nous tirons, en multipliant les deux membres par $a(h)$,

$$\begin{aligned}\Xi(\gamma,\, hx)\, a^2(h) &= \sum \frac{h^n}{n!} a(h)\, A_n^{(0,1)}(x)\\ &= \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)}(x)\left[a_0 + a_1\frac{h}{1} + \ldots + a_p\frac{h^p}{p!} + \ldots\right].\end{aligned}$$

Au second membre, le coefficient de $\frac{h^m}{m!}$ est

$$a_0 A_m^{(0,1)} + m \frac{a_1}{1} A_{m-1}^{(0,1)} + \frac{m(m-1)}{2!} a_2 A_{m-2}^{(0,1)} + \ldots.$$

Mais, comme l'on a

$$A_m^{(0,0)} = a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} a_2 x^{m-2} + \ldots,$$

ce coefficient n'est autre que le polynome $A_m^{(0,0)}$ dans lequel on aura remplacé x^i par $A_i^{(0,1)}$, c'est à dire le polynome

$$[A^{(0,0)} A^{(0,1)}]_m.$$

D'où la formule

$$\Xi(\gamma, hx)\, a^2(h) = \sum \frac{h^n}{n!} [A^{(0,0)} A^{(0,1)}]_n,$$

qui montre, premièrement que les polynomes $[A^{(0,0)} A^{(0,1)}]_n$ forment une suite (0,1), et secondement que leur génératrice est le carré de la génératrice $a(h)$.

D'une manière plus générale, soit une suite (0,1) de polynomes, A, correspondant à la génératrice $a(h)$; et soit une suite (0,0) de polynomes, B, correspondant à une autre génératrice $b(h)$; en sorte que l'on aura

$$\Xi(\gamma, hx)\, a(h) = \sum \frac{h^m}{m!} A_m^{(0,1)}.$$

$$e^{hx} b(h) = \sum \frac{h^m}{m!} B_m^{(0,0)}.$$

Le même raisonnement montrera que la suite (0, 1) correspondant au produit $a(h)\, b(h)$ est formée par les polynomes

$$[B^{(0,0)} A^{(0,1)}]_m,$$

qui sont d'ailleurs identiques aux polynomes

$$[A^{(0,0)} B^{(0,1)}]_m.$$

12. On sait former les polynomes (0, 0) ayant pour fonction génératrice $\frac{1}{a(h)}$: M. Appell les nomme *inverses* des polynomes (0, 0) correspondant à $a(h)$. Si on les désigne par $\left(\frac{1}{A^{(0,0)}}\right)_n$, on a la relation

$$\left[\frac{1}{A^{(0,0)}} A^{(0,0)}\right]_n = x^n.$$

D'après le résultat que nous venons d'établir, nous pouvons écrire le développement

$$\Xi(\gamma, hx)\, a(h) \frac{1}{a(h)} = \sum \frac{h^n}{n!}\left[\frac{1}{A^{(0,0)}} A^{(0,1)}\right]_n.$$

Or le premier membre se réduit à la série Ξ, et par conséquent est égal à

$$\sum \frac{h^n x^n}{n!\,(\gamma, n)},$$

d'où

$$\left[\frac{1}{A^{(0,0)}} A^{(0,1)}\right]_n = \frac{x^n}{(\gamma, n)}.$$

On tire de cette remarque un procédé pour exprimer un polynome quelconque à l'aide des polynomes $A^{(0,1)}$; $a(h)$ étant donné, écrivons en effet les polynomes inverses de la suite $(0, 0)$ correspondante, ils seront de la forme

$$\left[\frac{1}{A^{(0,0)}}\right]_n = \lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots.$$

En vertu de la formule ci-dessus, on aura donc

$$\frac{x^n}{(\gamma, n)} = \lambda_0 A_n^{(0,1)} + \lambda_1 A_{n-1}^{(0,1)} + \ldots,$$

d'où l'expression en polynomes $(0, 1)$ de toute puissance de x et par conséquent d'un polynome quelconque, et même d'une fonction quelconque développée en série de Taylor.

Comme exemples, considérons la génératrice $a(h) = e^h$. Nous savons que la suite $(0, 1)$ qui lui correspond est formée par les polynomes de Kummer $\Phi(-n, \gamma, -x)$. Or, d'après M. Appell, les inverses des polynomes $(0, 0)$ liés à cette génératrice sont

$$\left[\frac{1}{A^{(0,0)}}\right]_n = (x-1)^n.$$

Donc

$$\frac{x^n}{(\gamma, n)} = \Phi(-n, \gamma, -x) - C_n^1 \Phi(-n+1, \gamma, -x) + C_n^2 \Phi(-n+2, \gamma, -x) + \ldots,$$

relation qui permet d'exprimer une fonction quelconque de x par les polynomes de Kummer. On en tirera en particulier le développement

$$\Xi(\gamma, x) = \frac{1}{e} \sum \frac{\Phi(-n, \gamma, -x)}{n!}.$$

Considérons également la génératrice

$$a(h) = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \ldots.$$

Les inverses des polynomes (o, o) qui lui correspondent sont, comme l'a indiqué M. Appell, les polynomes

$$x^n - n x^{n-1}.$$

On a donc, dans ce cas,

$$\frac{x^n}{(\gamma, n)} = A_n^{(0,1)} - n A_{n-1}^{(0,1)},$$

ce qu'il est bien facile de vérifier, car les polynomes (o, 1) correspondant à $a(h) = 1 + h + h^2 + \ldots$ sont évidemment de la forme

$$A_n^{(0,1)} = \frac{x^n}{(\gamma, n)} + n \frac{x^{n-1}}{(\gamma, n-1)} + n(n-1) \frac{x^{n-2}}{(\gamma, n-2)} + \ldots.$$

13. Ainsi que nous l'avons rappelé au début, les polynomes (o, o) peuvent être également représentés par l'intégrale

$$A_n^{(0,0)} = \int_0^1 (x-u)^n \psi(u)\, du$$

où $\psi(u)$ est une fonction liée à la génératrice $a(h)$ par la relation

$$a(h) = \int_0^1 e^{-hu} \psi(u)\, du.$$

Nous allons montrer que tout polynome (o, 1) est susceptible d'une définition analogue, et que l'on a

$$A_n^{(0,1)} = (-1)^n \int_0^1 \Phi\left(-n, \gamma, \frac{x}{u}\right) u^n \psi(u)\, du.$$

En effet, le second membre est bien un polynome en x de degré n, et, si l'on prend sa dérivée par rapport à x, on a

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \Phi\left(-n, \gamma, \frac{x}{u}\right) u^n \psi(u)\, du \\ = (-1)^{n-1} \frac{n}{\gamma} \int_0^1 \Phi\left(-n+1, \gamma+1, \frac{x}{u}\right) u^{n-1} \psi(u)\, du;\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dx} A_n^{(0,1)}(\gamma, x) = \frac{n}{\gamma} A_{n-1}^{(0,1)}(\gamma+1, x),$$

ce que nous devions trouver. D'autre part, un polynome (o, 1) étant donné et sa fonction génératrice connue, on peut déterminer la fonction ψ qui figure sous le signe d'intégration : nous avons en effet, comme on l'a vu plus haut,

$$A_n^{(0,1)}(0) = \alpha_n;$$

donc

$$(-1)^n \int_0^1 u^n \psi(u)\, du = a_n,$$

ce qui ramène la détermination de ψ à la solution d'un problème de moments. D'ailleurs, comme

$$a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} a_n,$$

on aura

$$a(h) = \sum (-1)^n \frac{h^n}{n!} \int_0^1 u^n \psi(u)\, du;$$

donc

$$a(h) = \int_0^1 e^{-hu} \psi(u)\, du.$$

La relation qui lie les deux fonctions $a(h)$ et $\psi(u)$ est donc la même que dans le cas des suites (o, o). Nous dirons, pour simplifier, que la fonction $\psi(u)$ est la *fonction intégrale* des polynomes (o, 1) considérés.

La forme intégrale des polynomes (o, 1) semble, à première vue, assez différente de celle des polynomes (o, o) : l'analogie est cependant très nette : on peut en effet écrire

$$(x-u)^n=(-1)^n(u-x)^n=(-1)^n u^n\left(1-\frac{x}{u}\right)^n$$

et, par conséquent,

$$(x-u)^n=(-1)^n u^n {}_1F_0\left(-n, \frac{x}{u}\right).$$

Donc

$$A_n^{(0,0)}=(-1)^n\int_0^1 {}_1F_0\left(-n, \frac{x}{u}\right) u^n \psi(u)\,du$$

alors que

$$A_n^{(0,1)}=(-1)^n\int_0^1 {}_1F_1\left(-n, \gamma, \frac{x}{u}\right) u_n \psi(u)\,du.$$

14. Considérons, à titre d'exemple, le cas où $\psi(u)$ est égal à $u^{\nu-1}$, ν étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire. Il est aisé alors de déterminer $a(h)$. En effet, dans l'intégrale liant $a(h)$ à $\psi(u)$, faisons le changement de variable $u=\frac{t}{h}$. Il vient

$$a(h)=h^{-\nu}\int_0^h e^{-t}t^{\nu-1}\,dt.$$

L'intégrale qui figure au second membre n'est autre que la fonction gamma-incomplète ou fonction de Prym : on écrira donc, avec la notation consacrée,

$$a(h)=h^{-\nu}P(h, \nu).$$

Nous pouvons alors écrire l'expression des polynomes (o, 1) correspondants. En effet, d'après un développement connu, on a

$$P(h, \nu)=\sum_p(-1)^p\frac{h^{p+\nu}}{(p+\nu)p!}.$$

Donc le coefficient a_p, dans $a(h)$, sera égal à

$$\frac{(-1)^p}{p+\nu}$$

et, par conséquent,

$$A_n^{(0,1)}=\sum_p\frac{(-n, p)x^{n-p}}{p!(p+\nu)(\gamma, n-p)},$$

ce que, par des transformations simples, on pourra mettre sous la forme

$$A_n^{(0,1)} = \frac{(-1)^n}{n+\nu} {}_2F_2(-n, -n-\nu; 1-n-\nu, \gamma; x).$$

Indiquons encore les autres cas suivants, où l'on peut, à la suite de calculs faciles, écrire la valeur de la fonction génératrice correspondant à une fonction intégrale donnée

$$\psi(u) = (1-u)^{\nu-1}, \qquad a(h) = (-1)^\nu h^{-\nu} e^h \mathrm{P}(-h, \nu),$$

P étant la fonction de Prym;

$$\psi(u) = \sin^m \pi u, \qquad a(h) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{h}{2}} f\left(m, -\frac{h}{\pi}\right),$$

f étant la fonction de Pearson (*London Phil. Trans.*, t. 186, 1895).

15. On peut fort aisément donner l'expression des polynomes (0, 1) correspondant à certaines fonctions intégrales liées à $\psi(u)$. Par exemple, cherchons quelle relation existe entre les polynomes $A_n^{(0,1)}$ définis par $\psi(u)$ et les polynomes $B_n^{(0,1)}$, dont la fonction intégrale est $u\psi(u)$. D'après la formule

$$\Phi(-n, \gamma, x) = \Phi(-n+1, \gamma, x) - \frac{x}{\gamma}\Phi(-n+1, \gamma+1, x)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} A_n^{(0,1)} = (-1)^n &\int_0^1 u^n \Phi\left(-n+1, \gamma, \frac{x}{u}\right)\psi(u)\,du \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{x}{\gamma}\int_0^1 u^{n-1}\Phi\left(-n+1, \gamma+1, \frac{x}{u}\right)\psi(u)\,du, \end{aligned}$$

d'où

$$B_{n-1}^{(0,1)}(\gamma, x) = \frac{x}{\gamma} A_{n-1}^{(0,1)}(\gamma+1, x) - A_n^{(0,1)}(\gamma, x).$$

On verrait de même que le polynome $C_n^{(0,1)}(\gamma, x)$ dont la fonction intégrale est $\frac{d\psi}{du}$ est donné par la formule

$$C_n^{(0,1)} = n A_{n-1}^{(0,1)} + (-1)^n \psi(1)\,\Phi(-n, \gamma, x) - \frac{x^n}{(\gamma, n)}\psi(0).$$

16. L'expression par une intégrale du polynome $A_n^{(0,1)}$ va nous conduire à un nouveau développement en série introduisant ces polynomes. Considérons, en effet, la formule bien connue pour les polynomes de Kummer,

$$\frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{(1+t)^{\gamma}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}(\gamma,n)\,\Phi(-n,\gamma,x).$$

Posons $t=u\theta$, remplaçons x par $\frac{x}{u}$, multiplions les deux membres par $\psi(u)$, et intégrons par rapport à u entre o et 1, nous obtenons

$$\int_0^1\frac{e^{\frac{\theta x}{1+\theta u}}}{(1+\theta u)^{\gamma}}\psi(u)\,du=\sum(-1)^n\frac{\theta^n}{n!}(\gamma,n)\int_0^1 u^n\,\Phi\left(-n,\gamma,\frac{x}{u}\right)\psi(u)\,du,$$

d'où l'intéressant développement qui, dans le cas des suites (o, o), se confond avec la formule ordinaire de la génératrice $a(h)$,

$$\int_0^1\frac{e^{\frac{\theta x}{1+\theta u}}}{(1+\theta u)^{\gamma}}\psi(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}(\gamma,n)\,\mathrm{A}^{(0,1)}(x).$$

17. Les divers résultats que nous venons d'établir sur les suites (o, 1) vont nous permettre d'énoncer immédiatement un certain nombre de propositions relatives au problème général que nous avions posé au début, c'est-à-dire aux suites (r, s) correspondant à une fonction $a(h)$ donnée, et supposée toujours du type

$$a(h)=a_0+a_1\frac{h}{1}+\ldots+a_n\frac{h^n}{n!}+\ldots$$

où les a_i sont tous indépendants des constantes $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_s$.

Bornons-nous à indiquer les résultats suivants, dont il est évidemment inutile de donner les démonstrations : elles sont calquées sur celles que nous avons indiquées pour les suites (o, 1).

a. L'expression générale d'un polynome formant une suite (r, s) correspondant à la fonction (dite génératrice) $a(h)$ est

$$\mathrm{A}_n^{(r,s)}(x)=a_0\frac{(\alpha_1,n)\ldots(\alpha_r,n)}{(\gamma_1,n)\ldots(\gamma_s,n)}x^n+\mathrm{C}_n^1a_1\frac{(\alpha_1,n-1)\ldots(\alpha_r,n-1)}{(\gamma_1,n-1)\ldots(\gamma_s,n-1)}x^{n-1}+\ldots$$
$$+\mathrm{C}_n^{n-1}a_{n-1}\frac{\alpha_1\ldots\alpha_r}{\gamma_1\ldots\gamma_s}x+a_n.$$

b. Les suites (r, s) sont engendrées de la façon qu'indique la formule suivante

$$ {}_rF_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \ldots, \gamma_s; hx)a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(r,s)}(x). $$

c. Tout polynome (r, s) peut être mis sous la forme d'une intégrale définie

$$ A_n^{(r,s)}(x) = (-1)^n \int_0^1 {}_{r+1}F_s\left(-n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r; \gamma_1, \ldots, \gamma_s; \frac{x}{u}\right) u^n \psi(u)\, du $$

où $\psi(u)$ est une fonction liée à $a(h)$ par la relation

$$ a(h) = \int_0^1 e^{-hu} \psi(u)\, du. $$

18. En se servant de divers résultats connus sur les fonctions hypergéométriques, on peut établir des relations entre des polynomes particuliers appartenant à des suites différentes, mais ayant même génératrice. Indiquons rapidement quelques formules de ce type.

Considérons d'abord la suite (1, 1) définie par

$$ \Phi(\alpha, \gamma, hx)a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(1,1)}(\alpha, \gamma, x) $$

et la suite (o, o) correspondante :

$$ e^{hx} a(h) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,0)}(x). $$

De la comparaison de ces deux formules, nous tirerons, en éliminant $a(h)$, la relation

$$ \frac{A_n^{(1,1)}(x)}{n!} = \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p x^p}{p!\, q!}\, {}_2F_1(-p, \alpha; \gamma; 1) A_q^{(0,0)}(x) $$

ou, en remplaçant au second membre la fonction de Gauss d'argument 1 par sa valeur, et simplifiant,

$$ A_n^{(1,1)}(x) = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{(\gamma - \alpha, p)}{(\gamma, p)} C_n^p x^p A_{n-p}^{(0,0)}(x). $$

En second lieu, nous servant de la formule bien connue

$$e^{x}\Phi(\gamma-\alpha, \gamma, -x) = \Phi(\alpha, \gamma, x),$$

nous pourrons écrire la relation

$$A_n^{(1,1)}(\alpha, \gamma, x) = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p x^{n-p} A_p^{(1,1)}(\gamma-\alpha, \gamma, -x)$$

ainsi que la suivante

$$[A^{(0,0)} A^{(1,1)}(\alpha, \gamma, x)]_n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p A_{n-p}^{(0,0)}(x) A_p^{(1,1)}(\gamma-\alpha, \gamma, -x).$$

La formule de duplication de la fonction de Kummer (*Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 217) nous permettra d'autre part d'écrire

$$A_n^{(1,1)}(\alpha, \gamma, 2x) = (-1)^\alpha \sum_p \sum_q \frac{(\alpha, p+q)}{p!\,q!} A_n^{(1,1)}(-p-q, \gamma, x).$$

Enfin, considérons les deux développements

$$\Xi(\gamma, hx) = \sum \frac{h^m x^m}{m!\,(\gamma, m)},$$

$$\Xi(\gamma, hx)\,a(h) = \sum \frac{h^m}{m!} A_m^{(0,1)}(\gamma, x)$$

et faisons le produit membre à membre, nous souvenant de la relation (*Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 1092)

$$\Xi^2(\gamma, hx) = {}_1F_2\left(\gamma - \frac{1}{2}; \gamma, 2\gamma-1; 4hx\right),$$

nous obtiendrons la formule

$$A_n^{(1,2)}\left(\gamma - \frac{1}{2}; \gamma, 2\gamma-1; 4x\right) = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \frac{x^p}{(\gamma, p)} A_{n-p}^{(0,1)}(\gamma, x).$$

19. Abordons maintenant la deuxième partie de la question : le cas où la fonction $a(h)$ donnée dépend des constantes α et γ; et, toujours dans un but de simplification, étudions en particulier les suites (0, 1) correspondant à la fonction

$$a(\gamma, h) = f_0(\gamma) + f_1(\gamma)\frac{h}{1} + \ldots + f_n(\gamma)\frac{h^n}{n!} + \ldots$$

que nous appellerons encore génératrice de la suite; les coefficients de h dans cette série étant des fonctions de γ supposées données, arbitrairement d'ailleurs.

Montrons d'abord comment l'on peut rattacher à cette génératrice une suite (o, 1) de polynomes A tels que

$$\frac{d}{dx} A_n^{(0,1)}(\gamma, x) = \frac{n}{\gamma} A_{n-1}^{(0,1)}(\gamma + 1, x).$$

A cet effet, formons l'expression suivante

$$\mathfrak{F}(\gamma, h, x) = a(\gamma, h) + \frac{h}{1 \cdot \gamma} a(\gamma + 1, h) x + \ldots + \frac{h^m}{m!\,(\gamma, m)} a(\gamma + m, h) x^m + \ldots$$

ou, sous forme condensée,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \frac{a(\gamma + m, h)}{(\gamma, m)} x^m$$

et développons-la suivant les puissances croissantes de h, écrivant

$$\mathfrak{F}(\gamma, h, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} X_n(\gamma, x),$$

X_n est évidemment un polynome en x de degré n : je dis qu'il fait partie d'une suite (o, 1). En effet, dérivons par rapport à x les deux membres de l'égalité précédente :

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \sum_m \frac{h^m}{(m-1)!} \frac{a(\gamma + m, h)}{(\gamma, m)} x^{m-1} = \sum_n \frac{h^n}{n!} \frac{d}{dx} X_n(\gamma, x).$$

Mais la premiere somme est égale à

$$\frac{h}{\gamma} \mathfrak{F}(\gamma + 1, h, x),$$

d'où la relation

$$\frac{d}{dx} X_n(\gamma, x) = \frac{n}{\gamma} X_{n-1}(\gamma + 1, x)$$

qui montre que les X sont bien des polynomes (o, 1).

Ainsi la suite (o, 1) correspondant à la génératrice $a(\gamma, h)$ s'obtient en considérant le développement

$$\sum_m \frac{h^m}{m!} \frac{x^m}{(\gamma, m)} a(\gamma + m, h) = \sum_n \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)}(\gamma, x),$$

qui comporte comme cas particulier le développement étudié plus haut, car si les f sont des constantes par rapport à γ, $a(\gamma + m, h)$ est identique à $a(h)$ quel que soit m, et le premier membre se réduit à

$$a(h)\,\Xi(\gamma, hx).$$

La forme générale du polynome $A_n^{(0,1)}$ s'obtient sans difficulté : on trouvera

$$A_n^{(0,1)} = \frac{f_0(\gamma+n)}{(\gamma, n)} x^n + C_n^1 \frac{f_1(\gamma+n-1)}{(\gamma, n-1)} x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} \frac{f_{n-1}(\gamma+1)}{\gamma} x + f_n(\gamma).$$

On voit que l'on aurait pu se poser aussi le problème de la façon suivante : déterminer les polynomes $A_n^{(0,1)}(\gamma, x)$, formant une suite telle que

$$\frac{d}{dx} A_n^{(0,1)}(\gamma, x) = \frac{n}{\gamma} A_{n-1}^{(0,1)}(\gamma + 1, x)$$

avec la condition

$$A_n^{(0,1)}(\gamma, 0) = f_n(\gamma),$$

la suite $f_0(\gamma), f_1(\gamma), \ldots$ étant donnée arbitrairement.

Il est possible d'indiquer une relation, d'ailleurs assez compliquée et peu intéressante, entre les polynomes $(0, 1)$ correspondant à la génératrice $a(\gamma, h)$, et les polynomes $(0, 0)$ liés à la même fonction, où l'on considérerait alors γ comme une constante ordinaire.

20. Donnons quelques exemples de suites du type considéré. Supposons que, pour génératrice $a(\gamma, h)$, on prenne la série $\Xi(\gamma, h)$; en d'autres termes, que l'on ait

$$f_n(\gamma) = \frac{1}{(\gamma, n)}.$$

On aura alors

$$\mathfrak{F}(\gamma, h, x) = \sum \frac{h^m x^m}{m!(\gamma, m)} \Xi(\gamma + m, h).$$

ou

$$\mathfrak{F}(\gamma, h, x) = \sum_m \sum_p \frac{h^{m+p} x^m}{m!\,p!\,(\gamma, m)(\gamma + m, p)} = \sum_m \sum_p \frac{h^{m+p} x^m}{m!\,p!\,(\gamma, m+p)}.$$

Or on sait que

$$\Xi(\gamma, x + y) = \sum \sum \frac{x^m y^n}{m!\,n!\,(\gamma, m+n)}.$$

Donc

$$\mathfrak{F}(\gamma, h, x) = \Xi(\gamma, hx + h).$$

Par conséquent

$$\Xi[\gamma, h(x+1)] = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)};$$

d'où

$$A_n^{(0,1)} = \frac{(x+1)^n}{(\gamma, n)}.$$

Supposons à présent que $a(\gamma, h)$ soit la fonction de Gauss $F(\alpha, \beta; \gamma; h)$, α et β étant des constantes quelconques indépendantes de γ. On aura alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\gamma, h, x) &= \sum \sum \frac{(\alpha, p)(\beta, p)}{(\gamma + m, p)} \frac{h^{m+p} x^m}{(\gamma, m)\, m!\, p!} \\ &= \sum \sum \frac{(\alpha, p)(\beta, p)}{(\gamma, m+p)} \frac{h^{m+p} x^m}{m!\, p!}. \end{aligned}$$

Or ce second membre n'est autre que le développement de l'une des fonctions hypergéométriques confluentes de deux variables, que j'ai étudiées dans *Proceedings Edinburgh Royal Soc.*, 1920-21 : on avait posé en effet

$$\sum \sum \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} = \Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y).$$

Donc, dans notre cas,

$$\mathfrak{F}(\gamma, h, x) = \Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; h, hx)$$

et les polynomes (0, 1) correspondant à la génératrice considérée naissent du développement

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; h, hx) = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(0,1)}(\gamma, x).$$

21. Les polynomes de la suite étudiée peuvent être mis sous la forme

$$A_n^{0,1}(\gamma, x) = (-1)^n \int_0^1 \Phi\left(-n, \gamma, \frac{x}{u}\right) u^n \psi(\gamma + n, u)\, du,$$

où $\psi(\gamma, u)$ est une fonction convenable. Il est aisé de montrer en effet, comme plus haut, que le polynome en x défini par cette intégrale fait bien partie d'une suite (0, 1), et, d'autre part, que la fonction ψ peut être déterminée lorsque l'on connaît $a(\gamma, h)$, c'est-à-dire les quantités $f_0(\gamma)$, $f_1(\gamma)$, ...

La relation intégrale qui lie les fonctions a et γ est alors

$$a(\gamma, h) = \sum_n (-1)^n \frac{h^n}{n!} \int_0^1 u^n \psi(\gamma + n, u)\, du.$$

A titre d'exemple, indiquons que si l'on a

$$\psi(\gamma, u) = u^\gamma,$$

alors

$$a(h) = \sum (-1)^n \frac{h^n}{n!} \int_0^1 u^{2n+\gamma}\, du = \int_0^1 u^\gamma e^{-hu^2}\, du,$$

ce qui s'écrit, en introduisant la fonction gamma-incomplète,

$$a(h) = \frac{h^{-\frac{\gamma+1}{2}}}{2} P\left(h, \frac{\gamma+1}{2}\right).$$

22. Il nous suffit d'indiquer d'un mot l'extension immédiate de ce qui précède à des suites (r, s) quelconques. Par exemple, remarquons que les polynomes formant une suite (1, 0) naîtront du développement

$$\sum_m \frac{h^m x^m}{m!} (\varkappa, m)\, a(\varkappa + m, h) = \sum_n \frac{h^n}{n!} A_n^{1,0}(\varkappa, x).$$

Cette relation va nous permettre de retrouver un résultat intéressant. Supposons que la génératrice soit alors la fonction

$$a(\varkappa, h) = (1 + h^2)^{-\alpha}.$$

Le premier membre de la formule écrite ci-dessus deviendra dans ce cas

$$\sum \frac{h^m x^m}{m!}(\alpha, m)(1+h^2)^{-\alpha-m} = (1+h^2)^{-\alpha} \sum \frac{(\alpha, m)}{m!}\left[\frac{hx}{1+h^2}\right]^m$$

ou

$$(1+h^2)^{-\alpha}\left[1-\frac{hx}{1+h^2}\right]^{-\alpha} = (1-hx+h^2)^{-\alpha}.$$

Les polynomes correspondant à la génératrice envisagée sont donc donnés par

$$(1-hx+h^2)^{-\alpha} = \sum \frac{h^n}{n!} A_n^{(1,0)}(\alpha, x).$$

Mais on connaît par ailleurs le développement

$$(1-2hx+h^2)^{-\alpha} = \sum h^n C_n^\alpha(x),$$

où C_n^α est le polynome de Gegenbauer. Nous voyons donc que l'on a

$$A_n^{(1,0)}(\alpha, x) = n!\, C_n^\alpha\left(\frac{x}{2}\right),$$

et comme nous savons que

$$\frac{d}{dx} A_n^{(1,0)}(\alpha, x) = n\alpha A_{n-1}^{(1,0)}(\alpha+1, x),$$

nous en tirons

$$\frac{d}{dx} C_n^\alpha(x) = 2\alpha C_{n-1}^{\alpha+1}(x),$$

ce qui est en effet une propriété bien connue des fonctions de Gegenbauer. De nombreux résultats relatifs à des polynomes analogues, mais plus généraux, peuvent évidemment être obtenus de la même manière.

23. On pourrait donner diverses extensions de la théorie précédente à des suites de polynomes de deux ou plusieurs variables. Bornons-nous à indiquer en quelques mots la suivante, qui semble la plus rationnelle et la plus simple, mais qui n'est pas la seule que l'on puisse envisager.

Soient données des constantes, au nombre de $\mu + 2\nu + \rho + 2\sigma$, groupées ainsi qu'il suit

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_\mu, \\
\beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_\nu, \\
\beta'_1, & \beta'_2, & \ldots, & \beta'_\nu, \\
\gamma_1, & \gamma_2, & \ldots, & \gamma_\rho, \\
\delta_1, & \delta_2, & \ldots, & \delta_\sigma, \\
\delta'_1, & \delta'_2, & \ldots, & \delta'_\sigma,
\end{array}$$

A toute fonction $a(h, k)$ de deux variables h et k, indépendante des constantes $\alpha_1, \ldots, \delta'_\sigma$, on peut faire correspondre une suite de polynomes en x et en y, contenant les constantes $\alpha_1, \ldots, \delta'_\sigma$, dont nous représenterons le plus général (d'ordre m en x et n en y) par la notation

$$A_{m,n}\begin{bmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_\mu & \\ \beta_1, \beta'_1, & \ldots, & \beta_\nu, \beta'_\nu & \\ \gamma_1, & \ldots, & \gamma_\rho & x, y \\ \delta_1, \delta'_1, & \ldots, & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & \end{bmatrix},$$

de sorte qu'entre des polynomes de degrés consécutifs existent les relations

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{m,n}\begin{bmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_\mu & \\ \beta_1, \beta'_1, & \ldots, & \beta_\nu, \beta'_\nu & \\ \gamma_1, & \ldots, & \gamma_\rho & x, y \\ \delta_1, \delta'_1, & \ldots, & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & \end{bmatrix}$$

$$= m\frac{\alpha_1\ldots\alpha_\mu\beta_1\ldots\beta_\nu}{\gamma_1\ldots\gamma_\rho\delta_1\ldots\delta_\sigma} A_{m-1,n}\begin{bmatrix} \alpha_1+1, & \ldots, & \alpha_\mu+1 & \\ \beta_1+1, \beta'_1, & \ldots, & \beta_\nu+1, \beta'_\nu & \\ \gamma_1+1, & \ldots, & \gamma_\rho+1 & x, y \\ \delta_1+1, \delta'_1 & \ldots, & \delta_\sigma+1, \delta'_\sigma & \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_{m,n}\begin{bmatrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_\mu & \\ \beta_1, \beta'_1, & \ldots, & \beta_\nu, \beta'_\nu & \\ \gamma_1, & \ldots, & \gamma_\rho & x, y \\ \delta_1, \delta'_1, & \ldots, & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & \end{bmatrix}$$

$$= n\frac{\alpha_1\ldots\alpha_\mu\beta'_1\ldots\beta'_\nu}{\gamma_1\ldots\gamma_\rho\delta'_1\ldots\delta'_\sigma} A_{m,n-1}\begin{bmatrix} \alpha_1+1, & \ldots, & a_\mu+1 & \\ \beta_1, \beta'_1+1, & \ldots, & \beta_\nu, \beta'_\nu+1 & \\ \gamma_1+1, & \ldots, & \gamma_\rho+1 & x, y \\ \delta_1, \delta'_1+1, & \ldots, & \delta_\sigma, \delta'_\sigma+1 & \end{bmatrix}.$$

Ces polynomes naissent du développement

$$a(h, k)\,\mathrm{F}\left[\begin{array}{c|cccc|c} \mu & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_\mu & & \\ \nu & \beta_1, \beta'_1, & \ldots, & \beta_\nu, \beta'_\nu & & hx, ky \\ \rho & \gamma_1, & \ldots, & \gamma_\rho & & \\ \sigma & \delta_1, \delta'_1, & \ldots, & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & & \end{array}\right] = \sum_m \sum_n \frac{h^m k^n}{m!\,n!} \Lambda_{m,n},$$

la fonction F étant la série hypergéométrique d'ordre supérieur à deux variables de M. Kampé de Fériet, complète ou confluente suivant le nombre des constantes données; les cas de dégénérescence où cette fonction se ramènerait, soit à une fonction de $x+y$, soit à un produit d'une fonction de x par une fonction de y, n'étant pas exclus *a priori*.

Le polynome $\Lambda_{m,n}$ peut aussi se mettre sous la forme d'une intégrale double, étendue à un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité,

$$\Lambda_{m,n} = (-1)^{m+n} \int\!\!\int \mathrm{F}\left[\begin{array}{c|cccc|c} \mu & \alpha_1, & & \ldots, & \alpha_\mu & \\ \nu+2 & -m, -n, \beta_1, \beta'_1, & & \ldots, & \beta_\nu, \beta'_\nu & \dfrac{x}{u}, \dfrac{y}{v} \\ \rho & \gamma_1, & & \ldots, & \gamma_\rho & \\ \sigma & \delta_1, \delta'_1 & & \ldots, & \delta_\sigma, \delta'_\sigma & \end{array}\right]$$
$$\times\, u^m v^n \psi(u, v)\,du\,dv,$$

$\psi(u, v)$ étant une fonction liée à $a(h, k)$ par la relation

$$a(h, k) = \int\!\!\int e^{-hu-kv} \psi(u, v)\,du\,dv.$$