JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. SALTYKOW

Note sur l'existence des intégrales des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 271-280.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__271_0>

Note sur l'existence des intégrales des équations différentielles;

PAR N. SALTYKOW.

1. On connaît les démonstrations devenues classiques de Cauchy, Lipschitz et de M. E. Picard, concernant l'existence des intégrales des équations différentielles.

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, résolues par rapport aux dérivées. On suppose ordinairement que leurs seconds membres sont des fonctions continues des variables réelles, vérifiant de plus les conditions dites de Lipschitz, dans un certain domaine de variation des variables.

M. Ch. de la Vallée Poussin avait étendu la démonstration en question sur le cas où les seconds membres des équations en question n'étaient plus continus par rapport à la variable indépendante.

M. Arzelà leva, ensuite, la restriction introduite par Lipschitz, en étudiant les propriétés de certaines séries des fonctions.

Il s'agit dans les lignes suivantes de donner une nouvelle démonstration de l'existence des intégrales requises. J'applique dans ce but les considérations analogues à celles dont avait profité M. P. Painlevé dans la théorie des intégrales définies (¹). La méthode développée présente l'avantage de donner une nouvelle formule générale pour l'intégrale requise, sans avoir recours à la condition mentionnée de Lipschitz.

Cette dernière formule permet de représenter l'intégrale des équa-

(¹) *Voir* G. HUMBERT, *Cours d'Analyse*, t. I, Paris, 1903. Chap. III, p. 262 et suivantes.

tions étudiées moyennant une série des quadratures, d'ailleurs d'une manière différente à celle de la méthode des approximations successives de M. E. Picard.

2. Considérons, pour fixer les idées, une équation différentielle ordinaire

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

dont le second membre représente une fonction continue des variables réelles x et y, lorsque x varie de x_0 à $x_0 + a$ et que y varie de $y_0 - b$ à $y_0 + b$, en supposant $a > 0$, $b > 0$.

Désignons par M la limite supérieure de $|f(x, y)|$, dans le domaine considéré, et par h le plus petit des deux nombres a et $\frac{b}{M}$.

Soit x la valeur de la variable indépendante appartenant à l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$.

Intercalons entre x_0 et x un nombre quelconque des valeurs intermédiaires

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}, \tag{2}$$

allant en croissant de x_0 à x.

Pour démontrer l'existence de l'intégrale requise, nous allons construire une courbe polygonale de la manière suivante : Traçons, par rapport à un système des coordonnées rectangulaires XOY (*fig.* 1), en suivant M. E. Goursat (¹), deux droites BC et BD, admettant respectivement les coefficients angulaires M et — M et passant, toutes les deux, par le même point initial B (x_0, y_0).

Tirons, ensuite, parallèlement à l'axe des y, les lignes droites D_1C_1, D_2C_2, ..., $D_{k-1}C_{k-1}$, D_kC_k, ..., D_nC_n, dont les distances à l'axe des y égalent respectivement les abscisses (2) et la dernière abscisse x. Les figures obtenues, le triangle ABD_1C_1 et les trapèzes $C_1D_1D_2C_2$, ..., $C_{k-1}D_{k-1}D_kC_k$, ... appartiennent toutes au domaine

(¹) E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II (3ᵉ édition), Paris, 1918, p. 383.

(x_0, x_0+h), (y_0-b, y_0+b) de variation des variables x et y, que l'on dira *domaine de régularité de l'équation* (1).

Cela étant, dessinons, en partant du sommet B, les côtés d'un polygone, dont les coefficients angulaires soient respectivement $m_0, m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_{n-1}$. Plaçons les sommets de notre polygone $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1} B_k, \ldots, B_n$ respectivement sur les droites, que nous venons de tracer parallèlement à l'axe des y. Soit m_0 la valeur minimum de $f(x, y)$, dans le triangle ΔBD_1C_1, et toute autre valeur m_{k-1} soit le minimum de $f(x, y)$ dans le trapèze $C_{k-1}D_{k-1}D_kC_k$.

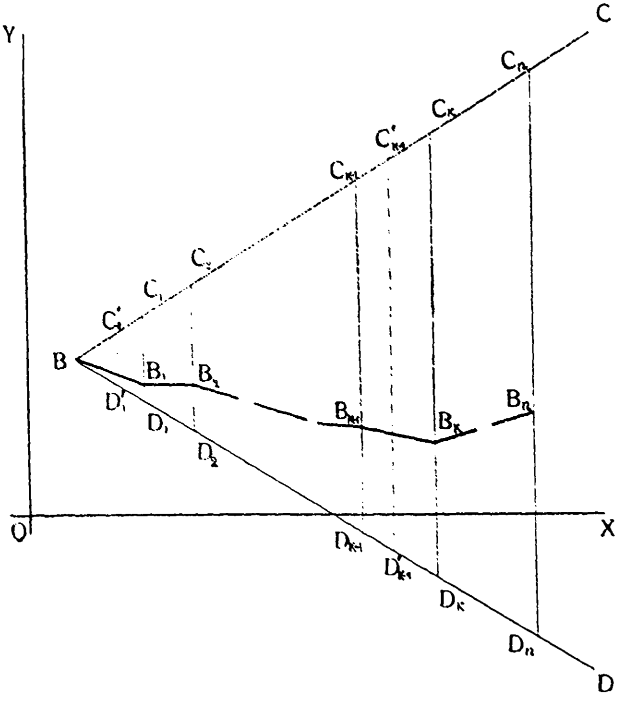

Fig. 1.

Il va sans dire que les sommets $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, B_n$ sont situés à l'intérieur de l'angle $\angle$ DBC, car le coefficient angulaire de chaque côté du polygone considéré est contenu entre les deux limites $-M$ et M.

On calcule aisément les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ des sommets en question, moyennant les formules suivantes :

$$
(3) \qquad \begin{cases}
y_1 = y_0 + m_0 (x_1 - x_0), \\
y_2 = y_1 + m_1 (x_2 - x_1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_k = y_{k-1} + m_{k-1}(x_k - x_{k-1}), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n = y_{n-1} + m_{n-1}(x - x_{n-1}).
\end{cases}
$$

Il résulte de ces dernières égalités la même conclusion que l'on avait obtenue plus haut, grâce aux considérations géométriques. En effet, la somme de k premières égalités (3) nous donne

$$y_k = y_0 + m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \ldots + m_{k-1}(x_k - x_{k-1}).$$

On a, par conséquent, la formule

$$|y_k - y_0| < M(x_k - x_0);$$

démontrant que le sommet B_k se trouve, effectivement, à l'intérieur du segment D_kC_k.

En supposant $x = x_n$, on obtient la somme des égalités (3),

$$(4) \qquad y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k).$$

On va voir, d'abord, que la valeur obtenue (4) de y_n tend vers une limite finie et déterminée quand le nombre n des côtés de notre polygone augmente indéfiniment, *suivant une loi quelconque*, de manière que tous les intervalles (x_k, x_{k+1}) tendent vers zéro.

Supposons en effet que, par une division quelconque, l'intervalle $x_1 - x_0$ soit partagé en deux autres par une valeur intermédiaire quelconque x'_0, l'intervalle $x_k - x_{k-1}$ soit partagé par x'_{k-1} et ainsi de suite.

Il en résulte que le second terme de la somme y_n devient remplacé, dans la nouvelle somme que nous allons désigner par y'_n, par deux termes suivants :

$$(5) \qquad \mu_0(x'_0 - x_0) + \mu_0(x_1 - x'_0),$$

le $k+1^{\text{ième}}$ terme de la formule (4) sera remplacé par deux termes suivants :

$$(6)\qquad \mu_{k-1}(x'_{k-1}-x_{k-1})+\mu'_{k-1}(x_k-x'_{k-1}),\quad \ldots\ldots$$

....

Pour calculer les nouveaux coefficients μ_0, μ'_0, ..., μ_{k-1}, μ'_{k-1}, ..., menons des droites parallèles à l'axe des y, dont les distances à cet axe soient respectivement égales à x'_0, ..., x'_{k-1}, ...

Désignons par D'_1, ..., D'_{k-1}, ..., C_1, ..., C'_{k-1}, ... les points d'intersection de ces dernières droites parallèles avec les côtés de l'angle primitif $\angle CBD$.

D'après l'hypothèse introduite, μ_0 représente la valeur minimum de $f(x,y)$ pour le triangle $\Delta BD'_1C'_1$ et μ'_0 le minimum de $f(x,y)$ pour le trapèze $C'_1D'_1D_1C_1$. Par conséquent, le coefficient m_0 étant le minimum de $f(x,y)$ pour le triangle ΔBD_1C_1, un des nombres μ_0, μ'_0 est égal à m_0, l'autre lui est supérieur ou au moins égal. Cela étant, la somme (5) est donc supérieure ou au moins égale au premier terme de la somme dans l'égalité (4). Le même raisonnement s'applique à la somme (6), remplaçant le $k^{\text{ième}}$ terme du second membre de la formule (4), dans la nouvelle somme y'_n, et à tous les termes de y_n. On voit donc que la nouvelle somme y'_n est supérieure ou au moins égale à y_n.

Or, il est évident que les sommes y_n restent inférieures à un nombre fini

$$M(x-x_0).$$

Par conséquent, y_n, ne décroissant jamais, tend donc vers une limite, que nous allons désigner par $y(x)$.

Il est de plus évident que, pour $x=x_0$, la fonction $y(x)$ devient égale à y_0.

5. Démontrons maintenant que la fonction $y(x)$ est continue et dérivable et qu'elle représente l'intégrale de l'équation différentielle étudiée (1).

On déduit ordinairement la dernière démonstration de la condition de Lipschitz. Or C. Jordan avait démontré, dans son *Cours d'Ana-*

lyse (¹), que cette dernière restriction n'était point nécessaire.

Donnons, en effet, l'accroissement l à la variable indépendante x et appliquons les formules (3) à l'intervalle $(x, x+l)$ contenu dans le domaine de la régularité de l'équation (1). Considérant l comme infiniment petit, bornons-nous à l'équation unique

$$y(x+l)-y(x)=f(x', y').l,$$

x' et y' désignant les valeurs des variables x et y correspondant au minimum de $f(x, y)$ pour le triangle initial de la méthode étudiée.

La fonction $f(x, y)$ étant continue dans le domaine considéré, la formule que l'on vient d'obtenir peut être mise sous la forme suivante :

$$y(x+l)-y(x)=[f(x, y)+\varepsilon]\,l,$$

où ε s'annule en même temps que l. Il en résulte

$$\frac{y(x+l)-y(x)}{l}=f(x, y)+\varepsilon.$$

Les deux dernières formules démontrent que $y(x)$ est une fonction continue, vérifiant de plus l'équation donnée (1).

4. La formule (4), introduite pour définir l'intégrale requise, peut être généralisée de la manière suivante :

Désignons respectivement par

$$\xi_0, \eta_0, \quad \xi_1, \eta_1, \quad \ldots, \quad \xi_k, \eta_k, \quad \ldots, \quad \xi_{n-1}, \eta_{n-1}$$

les valeurs des variables x et y vérifiant les conditions

$$m_0\equiv f(\xi_0, \eta_0), \qquad m_1\equiv f(\xi_1, \eta_1), \qquad \ldots,$$
$$m_k\equiv f(\xi_k, \eta_k), \qquad \ldots, \qquad m_{n-1}\equiv f(\xi_{n-1}, \eta_{n-1}),$$

dans nos formules (3).

Sur l'axe des x, dans chaque intervalle (x_k, x_{k+1}), prenons un point *arbitraire* ξ'_k.

(¹) T. III, 2ᵉ édition, Paris, 1896, p. 92.

Considérons la somme

$$(7) \qquad y''_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} m'_k (x_{k+1} - x_k),$$

où l'on a posé

$$x_n = x, \qquad m'_k \equiv f(\xi'_k, \eta_k).$$

Multiplions à présent le nombre des points de division suivant une loi quelconque, de manière que tous les intervalles (x_k, x_{k+1}) tendent vers zéro. La fonction $f(x, y)$ étant continue dans le domaine considéré, on a

$$f(\xi'_k, \eta_k) = f(\xi_k, \eta_k) + \varepsilon_k,$$

ε_k étant un reste qui tendra vers zéro avec la différence $\xi'_k - \xi_k$. On a donc les égalités

$$m'_k = m_k + \varepsilon_k,$$

pour toutes les valeurs de l'indice k, à partir de zéro jusqu'à $n - 1$.

Cela posé, la formule (7) devient, en vertu de l'égalité (4),

$$(8) \qquad y''_n = y_n + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k (x_{k+1} - x_k).$$

Désignons par ε' la valeur absolue du plus grand coefficient parmi tous les ε_k. Il résulte alors de l'égalité (8)

$$|y''_n - y_n| < \varepsilon'(x - x_0).$$

D'après l'hypothèse introduite, ε tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On a par conséquent à la limite

$$\lim y''_n = \lim y_n.$$

La formule (7) *définit donc la forme généralisée de l'intégrale de l'équation* (1).

5. La définition de l'intégrale qui vient d'être établie permet de la présenter sous une forme nouvelle.

Profitons, en effet, des notations du n° **4**, en désignant par ξ_k, η_k les valeurs des x et y, correspondant au minimum de $f(x, y)$, pour la tranche trapézoïdale $C_{k-1} D_{k-1} D_k C_k$ (*voir* figure 1).

Définissons, ensuite, les ordonnées des points situés sur les bases parallèles des trapèzes en question, moyennant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_0 \quad + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \eta_0)\,dx, \\ Y_2 &= Y_1 \quad + \int_{x_1}^{x_2} f(x, \eta_1)\,dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n &= Y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x, \eta_{n-1})\,dx. \end{aligned}$$

La somme de ces dernières égalités nous donne

$$(9)\qquad Y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \eta_0)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x, \eta_1)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x, \eta_{n-1})\,dx.$$

La fonction $f(x, y)$ étant continue, dans le domaine considéré, il résulte du théorème de la moyenne

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, \eta_k)\,dx = f(\xi''_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k),$$

ξ''_k désignant une valeur comprise entre x_k et x_{k+1}.

Cela étant, l'égalité (9) devient

$$(10)\qquad \begin{aligned} Y_n = y_0 &+ f(\xi''_0, \eta_0)(x_1 - x_0) \\ &+ f(\xi''_1, \eta_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi''_{n-1}, \eta_{n-1})(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

La formule (10) ayant la forme de l'intégrale généralisée étudiée (7), il s'ensuit que la somme Y_n de la série (9) converge vers l'intégrale $y(x)$ de l'équation différentielle donnée (1).

6. Passons, à présent, à un système d'équations différentielles ordinaires. Considérons, pour fixer les idées, deux équations

$$(11)\qquad y' = f(x, y, z), \qquad z' = \varphi(x, y, z),$$

où y et z désignent deux fonctions d'une variable indépendante x, f et φ étant deux fonctions continues lorsque x varie de x_0 à $x_0 + a$ et que y et z varient respectivement entre les limites $(y_0 - b, y_0 + b)$, $(z_0 - c, z_0 + c)$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Soit M la limite supérieure de $|f(x, y)|$ et de $|\varphi(x, y)|$, dans le domaine considéré, et soit h le plus petit des trois nombres a, $\frac{b}{\mathrm{M}}$, $\frac{c}{\mathrm{M}}$.

Supposons que x appartienne à l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$. Intercalons entre x_0 et x un nombre quelconque des valeurs intermédiaires (2) et faisons pour chacune des variables fonctionnelles y et z une figure analogue à la figure précédente.

Désignons respectivement par m_k et n_k les valeurs minima des fonctions $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ pour les $(k+1)^{\text{ièmes}}$ régions trapézoïdales correspondant à l'intervalle (x_k, x_{k+1}).

Il est alors aisé de démontrer, en posant $x_n \equiv x$, que les expressions

$$y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n=1} m_k(x_{k+1} - x_k),$$

$$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n=1} n_k(x_{k+1} - x_k)$$

tendent respectivement vers des limites bien déterminées, quand le nombre n des côtés des courbes polygonales correspondantes augmente indéfiniment, suivant une loi quelconque, de manière que tous les intervalles (x_k, x_{k+1}) tendent vers zéro.

Les fonctions obtenues $y(x)$ et $z(x)$ représentent un système d'intégrales des équations (11) continues dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$ et prenant respectivement les valeurs y_0 et z_0, pour $x = x_0$.

Désignons respectivement par ξ_k, η_k, ζ_k et $\overline{\xi_k}$, $\overline{\eta_k}$, $\overline{\zeta_k}$ les valeurs des variables x, y, z, vérifiant les conditions

$$m_k = f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \qquad n_k = \varphi(\overline{\xi_k}, \overline{\eta_k}, \overline{\zeta_k}).$$

On démontre aisément que les intégrales requises du système (11) admettent la forme généralisée représentant respectivement les limites des expressions suivantes, en posant $x_n \equiv x$:

$$y''_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi'_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k),$$

$$z''_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\overline{\xi'_k}, \overline{\eta_k}, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k),$$

ξ'_k et $\overline{\xi'_k}$ désignant les abscisses des points arbitraires quelconques de l'intervalle (x_k, x_{k+1}).

Enfin, généralisant les considérations du n° 5, il est aisé de représenter respectivement les intégrales en question comme limites des sommes suivantes :

$$\begin{aligned} Y_n = y_0 &+ \int_{x_0}^{x_1} f(x, \eta_0, \zeta_0)\, dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} f(x, \eta_1, \zeta_1)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x, \eta_{n-1}, \zeta_{n-1})\, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_n = z_0 &+ \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, \overline{\eta_0}, \overline{\zeta_0})\, dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, \overline{\eta_1}, \overline{\zeta_1})\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x} \varphi(x, \overline{\eta_{n-1}}, \overline{\zeta_{n-1}})\, dx. \end{aligned}$$