JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TRYGVE NAGELL

Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 209-270.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__209_0>

Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées;

PAR M. TRYGVE NAGELL,

à Oslo (Norvège).

INTRODUCTION.

1. D'après le résultat fondamental d'Axel Thue ([1]) sur les équations à deux indéterminées, l'équation

$$Ax^3 + By^3 = C,$$

où A, B et C sont des entiers donnés, n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers x, y ([2]).

Pour l'équation spéciale

$$x^3 + Dy^3 = 1, \tag{1}$$

nous avons le théorème très beau de M. Boris Delaunay ([3]) :

1° *L'équation indéterminée* (1) *possède au plus une seule solution en nombres entiers* x, y *avec* $y \neq 0$. 2° *Si* $x = x_1$, $y = y_1$ *est une solution, le nombre*

$$x_1 + y_1 \sqrt[3]{D}$$

([1]) *Voir* Axel THUE, *Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen* (*Journal f. Mathematik*, Bd. **135**, 1909, p. 284).

([2]) M. Delaunay vient d'annoncer qu'il a démontré, dans le cas de $C = 1$, que le nombre de solutions ne dépasse pas 5 (voir les *Comptes rendus*, t. **171**, 1920, et t. **172**, 1921.

([3]) La démonstration fut publiée (en russe) dans les publications de la Société mathématique à Charkov, 1915. Voir aussi les *Comptes rendus*, t. **162**, 1916, p. 150.

est l'unité fondamentale de l'anneau $|1, \sqrt[3]{D}, (\sqrt[3]{D})^2|$ *du corps cubique* $K(\sqrt[3]{D})$.

Indépendamment de M. Delaunay, j'ai donné une autre démonstration pour la première partie de ce théorème [1].

D'abord, dans le paragraphe II, nous allons donner une précision du théorème de M. Delaunay. Nous allons en effet démontrer : *Si* $x = x_1$, $y = y_1$ *est une solution de l'équation* (1), *le nombre*

$$x_1 + y_1\sqrt[3]{D}$$

est l'unité fondamentale du corps cubique $K(\sqrt[3]{D})$ *ou bien il est le carré de l'unité fondamentale; le dernier cas ne peut se présenter que pour un nombre fini de cas.*

Notre méthode est une précision de la méthode de M. Delaunay. Dans le paragraphe III, nous allons nous occuper de l'équation plus générale

$$Ax^3 + By^3 = C, \tag{2}$$

où C a une des valeurs 1 ou 3. Sans rien perdre de la généralité, nous pouvons faire les suppositions suivantes : Les entiers A et B sont positifs et $A > B$. AB n'est pas divisible par le cube d'un nombre premier. AB n'est pas divisible par 3, quand $C = 3$. Lorsque les deux corps cubiques $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ et $K\left(\sqrt[3]{\frac{A_1}{B_1}}\right)$ sont identiques, je dis que les deux équations

$$Ax^3 + By^3 = C$$

et

$$A_1x^3 + B_1y^3 = C_1$$

appartiennent à la même classe, à la classe du corps $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$.

Cela posé, le résultat principal de ce Mémoire est le théorème :

1° *L'équation* (2) *possède au plus une seule solution en nombres*

---

[1] *Voir* T. NAGELL, *Ueber die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern* (*Videnskapsselskapets Skrifter*, Kristiania, 1923, n° 11); voir aussi *Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades* (*Videnskapsselskapets Skrifter*, n° 14, Kristiana, 1922). Dans une Note, à la fin de ce Mémoire, nous allons donner une simplification de cette démonstration.

entiers x, y, différents de zéro. Il y a l'unique exception pour l'équation

$$2x^3 + y^3 = 3,$$

qui possède exactement deux solutions, savoir $x = y = 1$ et $x = 4$, $y = -5$.

2° *Parmi toutes les équations de la même classe, il y en a au plus une seule qui est possible en nombres entiers, sauf pour les classes des corps* $K(\sqrt[3]{2})$ et $K(\sqrt[3]{20})$. *Dans la classe du corps* $K(\sqrt[3]{2})$ *il y a trois équations possibles, savoir :*

$$2x^3 + y^3 = 1, \qquad 2x^3 + y^3 = 3 \qquad \text{et} \qquad 4x^3 + y^3 = 3.$$

Dans la classe du corps $K(\sqrt[3]{20})$ *il y a deux équations possibles, savoir :*

$$20x^3 + y^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 5x^3 + 2y^3 = 3.$$

Enfin, dans le paragraphe IV, nous allons donner une méthode pour déterminer la solution de l'équation (2) dans tous les cas où elle est possible.

2. Soient donnés les deux nombres entiers positifs f et g, tels que fg ne soit pas divisible par le carré d'un nombre premier, et soit $fg > 1$. Posons $D = fg^2$, $\overline{D} = f^2 g$, $\theta = |\sqrt[3]{D}|$ et $\overline{\theta} = |\sqrt[3]{\overline{D}}|$. Alors, d'après Dedekind (¹), on appelle le corps cubique $K(\theta)$ corps de première espèce, si $f^2 - g^2$ n'est pas divisible par 9; si, au contraire, $f^2 - g^2$ est divisible par 9, le corps est dit de seconde espèce. On peut évidemment formuler cette définition comme il suit : $K(\theta)$ est de première espèce lorsque $D \equiv 0, \equiv \pm 2, \equiv \pm 3$ ou $\equiv \pm 4 \pmod 9$; il est de seconde espèce lorsque $D \equiv \pm 1 \pmod 9$. Dans un corps de première espèce, une base des nombres entiers est donnée par $1, \theta, \overline{\theta}$. Dans un corps de seconde espèce, une base des nombres entiers est donnée par $\frac{1}{3}(1 + f\theta + g\overline{\theta}), \theta, \overline{\theta}$. Les corps $K(\theta)$ et $K(\overline{\theta})$ sont naturellement identiques. Quand α

(¹) *Voir* R. DEDEKIND, *Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Körpern* (*Journal f. Mathematik*, Bd. **121**, 1900, p. 40).

est un nombre de $K(\theta)$, nous désignons comme habituellement par α' et α'' les nombres conjugués; comme α' et α'' sont imaginairement conjugués, le produit $\alpha'\alpha''$ est évidemment positif. Ainsi, si α est positif, la norme de α est aussi positive.

Soit $\alpha = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta})$ un nombre entier, avec des coefficients x, y et z entiers, rationnels. Si le corps est de première espèce, tous les nombres x, y et z sont divisibles par 3. Si le corps est de seconde espèce, et si l'un des nombres x, y, z est divisible par 3, les deux autres le sont aussi; car nous avons

$$\alpha = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}) = \frac{u}{3}(1 + f\theta + g\bar{\theta}) + v\theta + w\bar{\theta},$$

où u, v et w sont des nombres entiers (rationnels); si xyz est divisible par 3, il faut donc que fgu le soit, ou, comme fg n'est pas divisible par 3, que u le soit. Spécialement, si le nombre $x + y\theta$ est entier et si x et y sont rationnels, ils sont aussi entiers. Pour que le nombre η d'un corps de première espèce,

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta},$$

où x, y et z sont des entiers (rationnels), soit une unité, il faut et il suffit qu'on ait $N(\eta) = \eta\eta'\eta'' = \pm 1$, c'est-à-dire

$$x^3 + fg^2y^3 + f^2gz^3 - 3fgxyz = \pm 1. \tag{3}$$

Pour que le nombre η d'un corps de seconde espèce,

$$\eta = \frac{u}{3}(1 + f\theta + g\bar{\theta}) + v\theta + w\bar{\theta},$$

où u, v et w sont des entiers (rationnels), soit une unité, il faut et il suffit qu'on ait

$$x^3 + fg^2y^3 + f^2gz^3 - 3fgxyz = \pm 27, \tag{4}$$

où nous avons posé $u = x$, $fu + 3v = y$ et $gu + 3w = z$.

Si η est positif, il faut prendre le signe supérieur dans les équations (3) et (4), puisque $\eta'\eta''$ est positif.

On sait qu'il existe une unité fondamentale ξ, $0 < \xi < 1$, telle que chaque unité η puisse se mettre sous la forme

$$\eta = \pm \xi^n,$$

où n est un nombre entier positif ou négatif.

Une unité positive de la forme $\eta = x + y\theta$, où x et y sont des entiers, est toujours < 1. Car, à cause de $x^3 + Dy^3 = 1$, on a

$$\frac{1}{\eta} = \eta'\eta'' = x^2 - xy\theta + y^2\theta^2 \geqq 1 + \theta + \theta^2 > 3,$$

puisque xy est négatif. Par conséquent, si ξ est une unité telle que $0 < \xi < 1$, et si

$$\eta = x + y\theta = \xi^m,$$

le nombre m doit être positif. On trouve naturellement les mêmes choses pour une unité de la forme $\eta = x + z\bar{\theta}$. Dans la suite, les lettres latines désignent toujours des nombres rationnels. Le nombre ρ désigne une racine de l'équation $\rho^2 + \rho + 1 = 0$. De plus, nous comprenons toujours par $\sqrt[3]{A}$ la valeur réelle de ce nombre.

Dans le paragraphe I, nous allons démontrer quelques lemmes sur les nombres de la forme

$$(x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B})^N,$$

où N est un nombre entier positif.

I. — Démonstration de quelques lemmes.

5. Soit m un nombre entier positif; et posons

$$S_0 = \binom{m}{0} + \binom{m}{3} + \binom{m}{6} + \ldots,$$
$$S_1 = \binom{m}{1} + \binom{m}{4} + \binom{m}{7} + \ldots,$$
$$S_2 = \binom{m}{2} + \binom{m}{5} + \binom{m}{8} + \ldots.$$

Alors, nous avons :

$$S_0 + S_1 + S_2 = 2^m \equiv (-1)^m \pmod 3,$$

et

$$s_2 = \binom{m}{1}\frac{m-1}{2} + \binom{m}{4}\frac{m-4}{5} + \ldots \equiv -m s_1 + s_1 \pmod 3,$$

$$s_1 = \binom{m}{0}\frac{m}{1} + \binom{m}{3}\frac{m-3}{4} + \ldots \equiv m s_0 \pmod 3;$$

donc

$$(1 + 2m - m^2)s_0 \equiv (-1)^m \pmod 3.$$

Le nombre s_0 n'est, par suite, jamais divisible par 3.

4. Lemme I. — *Soit* D *un nombre entier rationnel* > 1, *qui n'est pas divisible par le cube d'un nombre premier. Alors, si* x *et* y *sont des nombres entiers rationnels, tels que* x *et* yD *soient premiers entre eux, et si nous avons*

$$(x + y\sqrt[3]{D})^n = X + Y\sqrt[3]{D} + Z(\sqrt[3]{D})^2$$

avec des coefficients X, Y, Z *rationnels et avec* n *entier* > 1, *tous les coefficients* X, Y, Z *sont différents de zéro, sauf dans les deux cas suivants :*

$$(\sqrt[3]{10} - 1)^5 = 99 - 45\sqrt[3]{10},$$
$$(\sqrt[3]{4} - 1)^4 = -15 + 12\sqrt[3]{2}.$$

Démonstration. — Comme x est premier à D, il est évident que X est différent de zéro. Supposons que $Z = 0$; dans ce cas nous aurons l'équation

$$(1) \qquad \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 D + \binom{n}{8}x^{n-8}y^8 D^2 + \ldots = 0.$$

Il faut évidemment que x et y soient de signes opposés. En divisant par $\frac{1}{2}n(n-1)y^2$, il vient

$$(2) \qquad -x^{n-2} = \binom{n-2}{3}\frac{2x^{n-5}y^3 D}{4.5} + \sum_{k \geqq 2}\binom{n-2}{3k}\frac{2x^{n-3k-2}y^{3k}D^k}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Soit y divisible par le nombre premier q. Alors, comme $q^{3k} \geqq 2^{3k} > 3k+2$ pour tous les $k \geqq 1$, la plus haute puissance de q, qui divise le numérateur de la fraction

$$(3) \qquad \frac{2x^{n-3k-2}y^{3k}D^k}{(3k+1)(3k+2)},$$

est plus grande que la plus haute puissance de q, qui divise le dénominateur. Tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$. Mais c'est impossible, puisque le terme à gauche, $-x^{n-2}$, n'est pas divisible par q, x étant premier à y. Par conséquent, nous avons $y = \pm 1$.

Soit ensuite D divisible par q^α, q étant un nombre premier (α est ou $= 1$ ou $= 2$). Lorsque $q^\alpha > 2$, la fraction (3) est $\equiv 0 \pmod q$, pour tous les $k \geqq 2$. Car, $q^{\alpha k} \geqq 3^k > 3k + 2$, si $k \geqq 2$. C'est aussi le cas pour $k = 1$, pourvu que q^α soit différent de 2 et de 5. Dans ce cas, tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$. Mais c'est impossible, car x est premier à D. Par conséquent, il faut que $q^\alpha = 2$ ou $= 5$, et il reste pour D seulement les possibilités suivantes : $D = 2$, $= 5$ ou $= 10$.

Lorsque $n \equiv 0 \pmod 3$, l'équation (1) peut s'écrire :

$$-y^{n-3} D^{\frac{n}{3}-1} = \sum_{k \geqq 1} \binom{n-1}{3k} \frac{x^{3k} y^{n-3k-3} D^{\frac{n-3}{3}-k}}{3k+1},$$

et lorsque $n \equiv 1 \pmod 3$

$$-y^{n-4} D^{\frac{n-4}{3}} = \sum_{k \geqq 1} \binom{n-2}{3k} \frac{2 x^{3k} y^{n-3k-4} D^{\frac{n-4}{3}-k}}{(3k+1)(3k+2)},$$

et lorsque $n \equiv 2 \pmod 3$

$$-y^{n-2} D^{\frac{n-2}{3}} = \sum_{k \geqq 1} \binom{n}{3k} x^{3k} y^{n-3k-2} D^{\frac{n-2}{3}-k}.$$

Si x est divisible par le nombre premier q, il suit, comme plus haut, que toutes les trois sommes ici sont divisibles par q, puisque $q^{3k} > 3k + 2$ pour tous les $k \geqq 1$. Mais c'est impossible, car yD n'est pas divisible par q. Par conséquent, nous avons $x = \mp 1$.

Alors l'équation (2) peut s'écrire :

$$(4) \qquad 1 - \binom{n-2}{3} \frac{2D}{4.5} + \binom{n-2}{6} \frac{2D^2}{7.8} - + \ldots = 0.$$

Ici D a une des valeurs 2, 5 ou 10. Si $D = 10$, nous aurons

$$\binom{n-2}{3} - 1 = \frac{1}{6}(n-5)(n^2-4n+6) = \sum_{k \geqq 2} (-1)^k \binom{n-2}{3k} \frac{2.10^k}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Cette équation est satisfaite pour $n = 5$. Nous avons ainsi la solution suivante de notre question

$$(\sqrt[3]{10} - 1)^5 = -45\sqrt[3]{10} + 99.$$

En divisant par $\frac{1}{6}(n-5)$ nous aurons

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} n^2 - 4n + 6 &= \binom{n-6}{2} \frac{(n-2)(n-3)(n-4).12.10^2}{3.4.5.6.7.8} \\ &\quad - \sum_{k \geq 2} (-1)^k \binom{n-6}{3k-1} \frac{(n-2)(n-3)(n-4).12.10^{k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)(3k+5)}. \end{aligned} \right.$$

Ici, le numérateur du terme général de la somme est au moins divisible par 5^{k+1}. La plus haute puissance de 5, qui divise le dénominateur $3k(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)(3k+5)$ est évidemment $\leq 5(3k+5)$. Alors, comme $5^{k+1} > 5(3k+5)$ pour tous les $k \geq 2$, la somme est $\equiv 0 \pmod 5$. Par conséquent, nous aurons

$$n^2 - 4n + 6 \equiv (n-2)^2 + 2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 5),$$

ce qui est impossible.

Lorsque $D = 2$ ou $= 5$, nous aurons de l'équation (4) (mod 3) :

$$1 + \binom{n-2}{3} + \binom{n-2}{6} + \ldots \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 3).$$

Or, cette congruence est impossible d'après le n° **5**.

Supposons ensuite que $Y = 0$; dans ce cas nous aurons l'équation

$$(6)\qquad \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{4} x^{n-4} y^4 D + \binom{n}{7} x^{n-7} y^7 D^2 + \ldots = 0.$$

Il faut que x et y soient de signes opposés. En divisant par ny, il vient

$$(7)\qquad -x^{n-1} = \binom{n-1}{3} \frac{x^{n-4} y^3 D}{4} + \sum_{k \geq 2} \binom{n-1}{3k} \frac{x^{n-3k-1} y^{3k} D^k}{3k+1}.$$

Soit y divisible par le nombre premier q. Alors, comme

$$q^{3k} \geq 2^{3k} > 3k + 1$$

pour tous les $k \geqq 1$, la plus haute puissance de q, qui divise le numérateur de la fraction

$$\frac{x^{n-3k-1}y^{3k}D^k}{3k+1}, \tag{8}$$

est plus grande que la plus haute puissance de q, qui divise le dénominateur. Tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod{q}$. Mais c'est impossible, puisque le terme à gauche, $-x^{n-1}$, n'est pas divisible par q, x étant premier à y. Par conséquent, nous avons $y = \pm 1$.

Soit ensuite D divisible par le nombre premier $q > 2$. Alors, comme $q^k \geqq 3^k > 3k+1$ pour tous les $k \geqq 2$, la fraction (8) est $\equiv 0 \pmod{q}$. Tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod{q}$. Mais c'est impossible, car x est premier à D. Il faut donc que $D = 2$ ou $= 4$.

Lorsque $n \equiv 0 \pmod 3$, l'équation (6) peut s'écrire :

$$-y^{n-3}D^{\frac{n}{3}-1} = \sum_{k \geqq 1} \binom{n-2}{3k} \frac{2x^{3k}y^{n-3k-3}D^{\frac{n}{3}-k-1}}{(3k+1)(3k+2)},$$

et lorsque $n \equiv 1 \pmod 3$

$$-y^{n-1}D^{\frac{n-1}{3}} = \sum_{k \geqq 1} \binom{n}{3k} x^{3k}y^{n-3k-1}D^{\frac{n-1}{3}-k},$$

et lorsque $n \equiv 2 \pmod 3$

$$-y^{n-2}D^{\frac{n-2}{3}} = \sum_{k \geqq 1} \binom{n-1}{3k} \frac{x^{3k}y^{n-3k-2}D^{\frac{n-2}{3}-k}}{3k+1}.$$

De la même manière que plus haut, on conclut de ces équations que $x = \mp 1$.

Lorsque $D = 4$, nous aurons par suite de l'équation (7)

$$\binom{n-1}{3} - 1 = \frac{1}{6}(n-4)(n^2-2n+3) = \sum_{k \geqq 2} (-1)^k \binom{n-1}{3k} \frac{4^{2k}}{3k+1}.$$

Cette équation est satisfaite pour $n = 4$, ce qui donne

$$(\sqrt[3]{4} - 1)^4 = 12\sqrt[3]{2} - 15.$$

En divisant par $\frac{1}{6}(n-4)$, nous aurons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} n^2-2n+3 &= \binom{n-5}{2}\binom{n-1}{3}\frac{36.2^4}{3.4.5.6.7} \\ &-\sum_{k\geq 2}(-1)^k\binom{n-5}{3k-1}\binom{n-1}{3}\frac{36.2^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)}. \end{aligned}\right.$$

Ici le numérateur du terme général de la somme est au moins divisible par 2^{3k+4}. La plus haute puissance de 2, qui divise le dénominateur $3k(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)$ est évidemment $\leq 8(3k+4)$. Alors, comme $2^{3k+3} > 8(3k+4)$ pour tous les $k \geq 2$, la somme est $\equiv 0 \pmod 4$. Par conséquent, nous aurons

$$n^2-2n+3 = (n-1)^2+2 \equiv 0 \pmod 4,$$

ce qui est impossible.

Lorsque $D=2$, il suit de l'équation (7) (mod 3) :

$$1+\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{6}+\ldots\equiv 0 \pmod 3,$$

congruence impossible d'après le n° 5.

Le lemme I se trouve ainsi démontré.

5. Lemme II. — *Soient* D_1 *et* D_2 *deux nombres entiers rationnels, tous les deux* >1, *qui ne sont pas divisibles par le cube d'un nombre premier. Soient encore* x *et* y *deux nombres entiers rationnels. Alors, si* xD_1 *et* xD_2 *sont premiers entre eux, et si*

$$(x\sqrt[3]{D_1}+y\sqrt[3]{D_2})^{3n} = X + Y\sqrt[3]{D_1D_2^2} + Z\sqrt[3]{D_1^2D_2},$$

avec des coefficients X, Y, Z *rationnels et avec* n *entier positif, tous les coefficients* X, Y, Z *sont différents de zéro, sauf dans le cas suivant :*

$$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})^6 = -171+63\sqrt[3]{20}.$$

Démonstration. — Comme $D_1D_2 > 1$, le nombre X n'est jamais égal à zéro. Il suffit donc d'examiner le cas de $Z=0$. Dans ce cas nous aurons l'équation

$$(10)\quad \binom{3n}{1}x^{3n-1}yD_1^{n-1}+\binom{3n}{4}x^{3n-4}y^4D_1^{n-2}D_2+\ldots+\binom{3n}{3n-2}x^2y^{3n-2}D_2^{n-1}=0.$$

Il faut évidemment que x et y soient de signes opposés. En divisant par $3nx^2y$, nous aurons

$$(11)\quad -x^{3n-3}D_1^{n-1}=\binom{3n-1}{3}\frac{x^{3n-6}y^3D_1^{n-2}D_2}{4}+\sum_{k\geqq 2}\binom{3n-1}{3k}\frac{x^{3n-3k-3}y^{3k}D_1^{n-k-1}D_2^k}{3k+1}.$$

Soit y divisible par le nombre premier q. Alors, comme $q^{3k}\geqq 2^{3k}>3k+1$ pour tous les $k\geqq 1$, la plus haute puissance de q, qui divise le numérateur de la fraction

$$(12)\quad \frac{x^{3n-3k-3}y^{3k}D_1^{n-k-1}D_2^k}{3k+1}$$

est plus grande que la plus haute puissance de q, qui divise le dénominateur. Tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$. Mais c'est impossible puisque le terme à gauche, $-x^{3n-3}D_1^{n-1}$, n'est pas divisible par q, xD_1 étant premier à y. Par conséquent, nous avons $y=\pm 1$.

Soit ensuite D_2 divisible par le nombre premier $q>2$. Alors, comme $q^k\geqq 3^k>3k+1$ pour tous les $k\geqq 2$, la fraction (12) est $\equiv 0 \pmod q$. Tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$. Mais c'est impossible, car xD_1 est premier à D_2. Il faut donc que $D_2=2$ ou $=4$.

En divisant par $\frac{1}{2}3n(3n-1)x^2y$, l'équation (10) peut s'écrire :

$$(13)\quad -y^{3n-3}D_2^{n-1}=\binom{3n-2}{3}\frac{2y^{3n-6}x^3D_2^{n-2}D_1}{4.5}+\sum_{k\geqq 2}\binom{3n-2}{3k}\frac{2y^{3n-3k-3}x^{3k}D_2^{n-k-1}D_1^k}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Soit x divisible par le nombre premier q. Alors, comme

$$q^{3k}\geqq 2^{3k}>3k+2$$

pour tous les $k \geqq 1$, la fraction

$$(14) \qquad \frac{2 y^{3n-3k-3} x^{3k} D_2^{n-k-1} D_1^k}{(3k+1)(3k+2)}$$

est $\equiv 0 \pmod q$ pour tous les $k \geqq 1$. Tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$. Mais c'est impossible, puisque le terme gauche, $y^{3n-3} D_2^{n-1}$, n'est pas divisible par q, $y D_2$ étant premier à x. Par conséquent, nous avons $x = \mp 1$.

Soit ensuite D_1 divisible par q^α, q étant un nombre premier (α est ou $= 1$ ou $= 2$). Lorsque $q^\alpha > 2$, la fraction (14) est $\equiv 0 \pmod q$ pour tous les $k \geqq 2$. Car $q^{\alpha k} \geqq 3^k > 3k + 2$, si $k \geqq 2$. C'est aussi le cas pour $k = 1$, pourvu que q^α soit différent de 2 et de 5. Dans ce cas, tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$. Mais c'est impossible, puisque $y D_2$ est premier à D_1. Par conséquent, il faut que $q^\alpha = 2$ ou $= 5$, et il reste pour D_1 seulement les possibilités suivantes : $D_1 = 2$, $= 5$ ou $= 10$.

D_1 et D_2 étant premiers entre eux, il ne reste que les deux cas : $D_1 = 5$ et $D_2 = 2$ ou $D_2 = 4$. Quand $D_2 = 4$, il suit de (11) (mod 3)

$$1 + \binom{3n-1}{3} + \binom{3n-1}{6} + \ldots \equiv 0 \pmod 3,$$

congruence impossible d'après le n° 5.

Quand $D_2 = 2$, il suit de (13)

$$2^{n-1} = \binom{3n-2}{3} \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{4 \cdot 5} - \sum_{k \geqq 2} \binom{3n-2}{3k} \frac{(-5)^k \cdot 2^{n-k}}{(3k+1)(3k+2)},$$

ou

$$(n-2)(9n^2 - 9n + 8) = \sum_{k \geqq 2} \binom{3n-2}{3k} \frac{(-5)^k \cdot 2^{3-k}}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Cette équation est satisfaite pour $n = 2$, ce qui donne

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^6 = -171 + 63 \sqrt[3]{20}.$$

En divisant par $(n-2)$, nous aurons

$$9n^2 - 9n + 8$$
$$= \sum_{k \geqq 2} \binom{3n-7}{3k-5} \frac{3(3n-5)(3n-4)(3n-3)(3n-2)(-5)^k 2^{3-k}}{(3k-4)(3k-3)(3k-2)(3k-1)(3k+1)3k(3k+2)}.$$

Ici le numérateur du terme général de la somme est au moins divisible par 5^k. La plus haute puissance de 5, qui divise le dénominateur

$$(3k-4)(3k-3)(3k-2)(3k-1)3k(3k+1)(3k+2).$$

est évidemment $\leqq 5(3k+2)$. Or, nous avons $5^k > 5(3k+2)$ pour tous les $k \geqq 3$; et pour $k=2$ le dénominateur est seulement divisible par 5. La somme est ainsi $\equiv 0 \pmod 5$. Mais c'est impossible, car le nombre

$$9n^2-9n+8=\left(3n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}$$

n'est jamais divisible par 5.

Le lemme II se trouve ainsi démontré.

6. Lemme III. — *Soient D_1 et D_2 deux nombres entiers rationnels, tous les deux >1, qui ne sont pas divisibles par le cube d'un nombre premier. Soient encore x et y deux nombres entiers rationnels. Alors, si xD_1 et yD_2 sont premiers entre eux, et si*

$$(x\sqrt[3]{D_1}+y\sqrt[3]{D_2})^{3n-1}=X(\sqrt[3]{D_1})^2+Y(\sqrt[3]{D_2})^2+Z\sqrt[3]{D_1D_2},$$

avec des coefficients X, Y, Z rationnels et avec n entier positif, tous les coefficients X, Y, Z sont différents de zéro.

Démonstration. — Comme D_1 et D_2 sont >1, il est évident que X et Y sont différents de zéro. Si $Z=0$, nous aurons

$$(15)\quad 0=\binom{3n-1}{1}x^{3n-2}yD_1^{n-1} +\binom{3n-1}{4}x^{3n-5}y^4D_1^{n-2}D_2+\ldots+\binom{3n-1}{3n-2}xy^{3n-2}D_2^{n-1}=0.$$

Or cette équation est évidemment symétrique par rapport à x, D_1 et y, D_2. En divisant par $(3n-1)xy$, nous aurons

$$-x^{3n-3}D_1^{n-1}=\binom{3n-2}{3}\frac{x^{3n-6}y^3D_1^{n-2}D_2}{4}+\sum_{k\geqq 2}\binom{3n-2}{3k}\frac{x^{3n-3k-3}y^{3k}D_1^{n-k-1}D_2^k}{3k+1}.$$

Soit D_2 divisible par le nombre premier $q>2$. Alors, comme $q^k \geqq 3^k > 3k+1$ pour tous les $k \geqq 2$, tous les termes à droite sont $\equiv 0 \pmod{q}$. Mais c'est impossible, puisque $x^{3n-3}D_1^{n-2}$ n'est pas divisible par q. Il reste, par suite, seulement les possibilités $D_2 = 2$ et $D_2 = 4$. Or, à cause de la symétrie de l'équation (15), nous avons forcément $D_1 = 2$ ou $D_1 = 4$. Mais cela ne va pas, parce que D_1 et D_2 sont premiers entre eux

Le lemme III se trouve ainsi démontré.

7. Lemme IV. — *Soient* D_1 *et* D_2 *deux nombres entiers rationnels, tous les deux* > 1, *qui ne sont pas divisibles par le cube d'un nombre premier. Soient encore* x *et* y *deux nombres entiers rationnels. Alors, si* xD_1 *et* yD_2 *sont premiers entre eux, et si*

$$(x\sqrt[3]{D_1} + y\sqrt[3]{D_2})^{3n+1} = X\sqrt[3]{D_1} + Y\sqrt[3]{D_2} + Z(\sqrt[3]{D_1 D_2})^2,$$

avec des coefficients X, Y, Z *rationnels, et avec* n *entier positif, tous les coefficients* X, Y, Z *sont différents de zéro.*

Démonstration. — Comme D_1 et D_2 sont > 1, il est évident que X et Y sont différents de zéro. Si $Z = 0$, nous aurons

$$(16) \qquad \binom{3n+1}{2} x^{3n-1} y^2 D_1^{n-1} + \binom{3n+1}{5} x^{3n-4} y^5 D_1^{n-2} D_2 + \ldots \\ + \binom{3n+1}{3n-1} x^2 y^{3n-1} D_2^{n-1} = 0.$$

Or, cette équation est évidemment symétrique par rapport à x, D_1 et y, D_2. Il faut que x et y soient de signes opposés. En divisant par $\frac{3}{2}n(3n+1)x^2y^2$, nous aurons

$$-x^{3n-3}D_1^{n-1} = \binom{3n-1}{3}\frac{2x^{3n-6}y^3 D_1^{n-2} D_2}{4.5} \\ + \sum_{k \geqq 2} \binom{3n-1}{3k} \frac{2x^{3n-3-3k} y^{3k} D_1^{n-k-1} D_2^k}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Soit y divisible par le nombre premier q. Comme $q^{3k} \geqq 2^{3k} > 3k+2$ pour tous $k \geqq 1$, tous les termes à droite sont $\equiv 0 \pmod{q}$. Comme plus haut, nous tirons de là la conclusion que y est nécessairement égal à ± 1. Soit ensuite D_2 divisible par q^α, q étant un nombre premier, $\alpha = 1$ ou $= 2$. Lorsque $q^\alpha > 2$, tous les termes de la somme sont $\equiv 0 \pmod q$. Car, $q^{\alpha k} \geqq 3^k > 3k + 2$ pour tous les $k \geqq 2$. Le premier terme à droite, correspondant à $k = 1$, est aussi $\equiv 0 \pmod q$, pourvu que q^α soit différent de 2 et de 5. Dans ce cas, tous les termes à droite sont ainsi $\equiv 0 \pmod q$.

Mais c'est impossible, car $x D_1$ est premier à D_2. Par conséquent, il faut que $q^\alpha = 2$ ou $= 5$; et il reste pour D_2 seulement les possibilités $D_2 = 2$, $= 5$ ou $= 10$.

A cause de la symétrie de l'équation (16), nous aurons aussi $D_1 = 2$, $= 5$ ou $= 10$, et $x = \mp 1$. Comme D_1 et D_2 sont premiers entre eux, il suffit donc d'examiner le cas de $D_1 = 5$ et $D_2 = 2$. Il s'agit ainsi de trouver tous les entiers positifs n, tels que

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^{3n+1} = X\sqrt[3]{5} + Y\sqrt[3]{2},$$

ou bien tels que

$$\left[\frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right]^{3n+1} = \frac{A\sqrt[3]{5} + B\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}, \tag{17}$$

où A et B sont des nombres rationnels.

Supposons d'abord que n soit impair, et posons $3n + 1 = 2m$.

Comme $m \equiv 2 \pmod 3$, nous pouvons poser $m = 3p + 2$. Alors, puisque

$$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^3 = 1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50},$$

nous avons

$$\left[\frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right]^m = (1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50})^p \left[\frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right]^2 = \frac{x\sqrt[3]{25} + y\sqrt[3]{4} + z\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}},$$

où x, y et z sont des nombres entiers rationnels, tels que

$$25x^3 + 4y^3 + 10z^3 - 30xyz = 9. \tag{18}$$

Par suite, nous avons

$$\left[\frac{x\sqrt[3]{25} + y\sqrt[3]{4} + z\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}\right]^2 = \frac{A\sqrt[3]{5} + B\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}},$$

d'où il suit, comme le coefficient de $\sqrt[3]{100}$ doit être égal à zéro,

$$z^2 = -2xy. \tag{19}$$

Si δ est le plus grand commun diviseur de x et y, il résulte de là que δ divise z. Or, il résulte de l'équation (18) que le plus grand commun diviseur des nombres x, y et z est égal à 1. Il faut donc que $\delta = 1$. Puisque, à cause de l'équation (18), x est impair, l'équation (19) entraîne donc

$$x = \pm u^2, \qquad y = \mp 2v^2, \qquad z = 2uv,$$

où u et v sont des nombres entiers premiers entre eux.

Or, nous avons d'après l'équation (18) la congruence

$$4y^3 \equiv 9 \qquad (\mathrm{mod}\ 5),$$

donc

$$4y^3 \equiv \mp 32v^6 \equiv \mp 2v^6 \equiv 9 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ 5),$$

ce qui est impossible, parce que ± 2 est reste non quadratique de 5.

Supposons ensuite que $n = 2m$. Alors, comme

$$\left[\frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\right]^6 = -19 + 7\sqrt[3]{20},$$

l'équation (17) peut s'écrire

$$(-19 + 7\sqrt[3]{20})^m \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{A\sqrt[3]{5} + B\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}.$$

En égalant le coefficient de $\sqrt[3]{100}$ à zéro, nous aurons l'équation

$$\begin{aligned}\binom{m}{1}(-19)^{m-1}.7 + \binom{m}{4}(-19)^{m-4}.7^4.20 \\ + \binom{m}{7}(-19)^{m-7}.7^7.\ 20^2 + \ldots \\ = \binom{m}{2}(-19)^{m-2}.7^2.2 + \binom{m}{5}(-19)^{m-5}.7^5.2.20 \\ + \binom{m}{8}(-19)^{m-8}.7^8.2.20^2 + \ldots.\end{aligned}$$

En divisant par $7m$, cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}(-19)^{m-1} + \sum_{k \geqq 1} \binom{m-1}{3k} \frac{(-19)^{m-k-1}.7^{3k}.20^k}{3k+1} \\ = \sum_{k \geqq 0} \binom{m-1}{3k+1} \frac{(-19)^{m-k-2}.7^{3k+1}.2.20^k}{3k+2}.\end{aligned}$$

Comme $7^{3k} > 3k + 1$ pour tous les $k \geq 1$, la première somme est évidemment $\equiv 0 \pmod 7$. La deuxième somme est aussi $\equiv 0 \pmod 7$. Car nous avons $7^{3k+1} > 3k + 2$ pour tous les $k \geq 0$. Mais c'est impossible, car le premier membre, $(-19)^{m-1}$, n'est pas divisible par 7.

L'équation (17) est, par suite, impossible pour $n > 0$.

Le lemme IV se trouve ainsi démontré.

II. — Sur l'équation $x^3 + Dy^3 = 1$.

8. Nous voyons que le problème de résoudre l'équation

$$x^3 + Dy^3 = 1,$$

où D est un nombre entier > 1, en nombres entiers x, y, revient au même que de déterminer dans le corps cubique $K(\sqrt[3]{D})$ toutes les unités de la forme $x + y\sqrt[3]{D}$, où x et y sont des entiers (rationnels). Nous pouvons supposer que D ne soit pas divisible par le cube d'un nombre premier; nous avons donc $D = fg^2$, où fg n'est divisible par aucun carré > 1. $\bar{D}$, θ et $\bar{\theta}$ ont les mêmes significations que dans le n° **2**.

Soit ε une unité positive < 1,

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(X + Y\theta + Z\bar{\theta}) \quad (^1),$$

et posons

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{3}(X' + Y'\theta + Z'\bar{\theta}).$$

Alors, nous avons évidemment

$$\begin{aligned} 3X' &= X^2 - fgYZ, \\ 3Y' &= fZ^2 - XY, \\ 3Z' &= gY^2 - XZ, \end{aligned}$$

ce qu'on vérifie sans difficulté, en profitant de l'équation

$$X^3 + DY^3 + \bar{D}Z^3 - 3fgXYZ = 27.$$

(1) Lorsque le corps $K(\sqrt[3]{D})$ est de première espèce, tous les nombres X, Y et Z sont divisibles par 3, d'après le n° **2**.

Comme $\frac{1}{\varepsilon} > 1$, d'après le n° **2**, les coefficients Y' et Z' sont différents de zéro. Les équations

$$fZ^2 - XY = 0 \qquad \text{et} \qquad gY^2 - XZ = 0$$

sont ainsi impossibles.

Si ξ est l'unité fondamentale, $0 < \xi < 1$, nous aurons alors à examiner l'équation

$$x + y\theta = \xi^m,$$

où, d'après le n° **2**, il faut que m soit positif.

9. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Le carré d'une unité de la forme

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta},$$

avec des coefficients x, y, z entiers (rationnels), n'est de la forme $X + Y\theta$ que dans le cas de

$$\eta = 1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}.$$

Le carré d'une unité de la forme

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}),$$

avec des coefficients x, y, z entiers (rationnels), n'est de la forme $X + Y\theta$ que dans un nombre limité de cas.

Démonstration. — Soit η une unité positive,

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta},$$

où x, y et z sont entiers, et par suite

(1) $$x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = 1,$$

et

$$\eta^2 = (x^2 + 2fgyz) + (2xy + fz^2)\theta + (2xz + gy^2)\bar{\theta}.$$

Si le coefficient de $\overline{\theta}$ est égal à zéro, nous aurons

$$z = -\frac{gy^2}{2x}.$$

En introduisant cette valeur de z dans l'équation (1), il vient

$$x^3 + Dy^3 - D^2\frac{y^6}{8x^3} + 3D\frac{y^3}{2} = 1,$$

ou

$$D^2y^6 - 20Dy^3x^3 = 8x^6 - 8x^3;$$

donc

(2) $$Dy^3 = 10x^3 \pm 2x\sqrt{27x^4 - 2x}.$$

Par suite, le nombre $27x^4 - 2x$ doit être égal à un carré, ou

(3) $$27x^4 - 2x = u^2.$$

Si x est pair, il suit de cette équation

$$27x^3 - 2 = \pm 2u^2, \qquad x = \pm 2v^2.$$

Le nombre $u^2 + 1$ étant indivisible par 3, il faut y prendre le signe inférieur; donc, en éliminant x,

$$108v^6 + 1 = u^2,$$

d'où

$$u \pm 1 = 54c^6, \qquad u \mp 1 = 2b^6,$$

et par suite

$$27c^6 - d^6 = \pm 1.$$

Or, à cause de l'impossibilité de l'équation $X^3 + Y^3 = Z^3$ pour $XYZ \neq 0$, cette équation entraîne $c = 0$, ce qui donne $v = 0$ et $x = 0$, valeur impossible.

Si x est impair, il suit de l'équation (3)

$$27x^3 - 2 = \pm u^2, \qquad x = \pm v^2.$$

Comme il faut évidemment prendre le signe supérieur, il vient

$$27x^3 = (3x)^3 = u^2 + 2.$$

Or, il est bien connu que cette équation n'admet que la solution $u = 5$,

$x = 1$ (1). Alors il suit de (2), $Dy^3 = 10 \pm 10$, c'est-à-dire $D = 20$ et $y = 1$. La seule solution de notre problème est donc

$$(1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50})^2 = -19 + 7\sqrt[3]{20}.$$

Soit ensuite η une unité positive de la forme

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}),$$

où x, y et z sont entiers, et par suite

$$(4) \qquad x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = 27,$$

et

$$(5) \qquad \eta^2 = \frac{1}{9}(x^2 + 2fgyz) + \frac{1}{9}(2xy + fz^2)\theta + \frac{1}{9}(2xz + gy^2)\bar{\theta}.$$

Si x est divisible par 3, les nombres y et z le sont aussi d'après le nº **2**. Or, nous venons de traiter ce cas. Supposons que x est indivisible par 3. Si le coefficient de $\bar{\theta}$ dans (5) est égal à zéro, nous aurons

$$(6) \qquad z = -\frac{gy^2}{2x}.$$

En introduisant cette valeur de z dans l'équation (4), il vient

$$x^3 + Dy^3 - D^2\frac{y^6}{8x^3} + 3D\frac{y^3}{2} = 27,$$

ou

$$D^2y^6 - 20Dy^3x^3 = 8x^6 - 108x^3;$$

donc

$$(7) \qquad Dy^3 = 10x^3 \pm 6x\sqrt{3x^4 - 6x}.$$

Il faut donc que le nombre $3x^4 - 6x$ soit égal à un carré :

$$(8) \qquad 3x^4 - 6x = a^2.$$

Si x est pair, cette équation entraîne, puisque x est indivisible par 3,

$$x^3 - 2 = \pm 6u^2, \qquad x = \pm 2v^2;$$

(1) *Voir* par exemple L.-E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. II, p. 533.

donc

$$\pm 4v^6 - 1 = \pm 3u^2.$$

Il faut y prendre le signe supérieur, puisque $4v^6 + 1$ n'est pas divisible par 3. Alors, cette équation peut s'écrire

$$(u+1)^3 - (u-1)^3 = (2v^2)^3,$$

ce qui entraîne nécessairement $u = v = 1$. Par suite, nous aurons $x = 2$ et, d'après l'équation (7), $Dy^3 = 80 \pm 72$, c'est-à-dire $D = 19$ et $y = 2$ et $z = -1$. La seule solution dans ce cas est donc

$$\left[\frac{2 + 2\sqrt[3]{19} - (\sqrt[3]{19})^2}{3}\right]^2 = -8 + 3\sqrt[3]{19}.$$

Si x est impair, l'équation (8) entraîne

$$x^3 - 2 = \pm 3u^2, \qquad x = \pm v^2;$$

donc

$$\pm v^6 - 2 = \pm 3u^2.$$

Il faut y prendre le signe inférieur, puisque $v^6 - 2$ n'est pas divisible par 3; par suite

$$3u^2 = 2 + v^6, \tag{9}$$

avec $x = -v^2$. D'après un théorème d'Axel Thue ([1]) cette équation n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers u, v. Une solution est $u = v = 1$, ce qui donne $x = -1$ et $Dy^3 = -10 \pm 18$, c'est-à-dire $D = 28$ et $y = -1$ et $z = 1$. Nous aurons ainsi

$$\left[\frac{-1 - \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{98}}{3}\right]^2 = -3 + \sqrt[3]{28}.$$

Je ne sais pas si c'est la seule solution.

10. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Le bicarré d'une unité n'est jamais de la forme $X + Y\theta$.

([1]) *Voir* A. Thue, *Ueber die Unlösbarkeit der Gleichung* $ax^2 + bx + c = dy^n$ *in grossen ganzen Zahlen* x *und* y (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, Bind 34, n° 16, Kristiana, 1917).

Démonstration. — Soit ε une unité positive < 1,

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(x_1 + y_1\theta + z_1\bar{\theta})$$

et soit

$$\varepsilon^4 = X + Y\theta.$$

Alors, il faut que

$$(10) \qquad 6x_1^2y_1^2g + 4x_1^3z_1 + 4fg^2y_1^3z_1 + 12fgx_1y_1z_1^2 + f^2gz_1^4 = 0$$

En posant

$$\eta = \varepsilon^2 = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}),$$

nous avons

$$x = \frac{1}{3}(x_1^2 + 2fgy_1z_1),$$

$$y = \frac{1}{3}(2x_1y_1 + fz_1^2),$$

$$z = \frac{1}{3}(2x_1z_1 + gy_1^2).$$

Or, comme $\eta^2 = X + Y\theta$, nous pouvons appliquer le résultat du numéro précédent. Le cas de $D = 20$, $x = y = 3$, $z = -3$ est évidemment impossible, ainsi que le cas de $D = 19$, $x = y = 2$, $z = -1$. Il faut donc que $x = -v^2$, où v est impair, c'est-à-dire

$$3v^2 + x_1^2 = -2fgy_1z_1.$$

Comme v est impair, $3v^2 + x_1^2 \equiv 4 \pmod 8$. Par conséquent, un des nombres f, g, y_1 ou z_1 doit être pair, tandis que les autres sont impairs. Or, il suit de l'équation (10) que $f^2gz_1^4$ est pair; le nombre y_1 est donc impair. Si z_1 est pair, il résulte de (10) que $6x_1^2y_1^2g \equiv 0 \pmod 8$, ce qui est impossible. Si g est pair, il suit $f^2gz_1^4 \equiv 0 \pmod 4$, ce qui est impossible, puisque g n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier. Si f est pair, il suit $6x_1^2y_1^2g \equiv 0 \pmod 4$, ce qui est aussi impossible.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

11. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Le cube d'une unité n'est jamais de la forme $X + Y\theta$.

Démonstration. — Soit η une unité positive,

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}).$$

Le coefficient de $\bar{\theta}$ dans η^3 est égal à

$$\frac{1}{9}(gxy^2 + x^2z + fgyz^2).$$

Comme x est premier à g, il faut, dans

$$(11) \qquad gxy^2 + x^2z + fgyz^2 = 0,$$

que z soit divisible par g. A cause de l'équation

$$(12) \qquad x^3 + Dy^3 + Dz^3 - 3fgxyz = 27,$$

le plus grand commun diviseur δ de x, y et z est égal à 1 ou à 3. Nous pouvons évidemment poser

$$(13) \qquad x = \delta d_1 d_2 x_1, \qquad y = \delta d_2 d_3 y_1 \qquad z = \delta g d_1 d_3 z_1,$$

où $|d_1|$ est le plus grand commun diviseur de $\frac{x}{\delta}$ et $\frac{z}{\delta g}$, et où $|d_2|$ est le plus grand commun diviseur de $\frac{x}{\delta}$ et $\frac{y}{\delta}$, et où $|d_3|$ est le plus grand commun diviseur de $\frac{y}{\delta}$ et $\frac{z}{\delta g}$. Les nombres $d_1 x_1$, $d_2 y_1$ et $d_3 z_1$ sont premiers entre eux deux à deux. En introduisant les valeurs (13) dans l'équation (11) et en divisant par $\delta^3 g d_1 d_2 d_3$, il vient

$$d_2^2 d_3 x_1 y_1^2 + d_1^2 d_2 x_1^2 z_1 + D d_1 d_3^2 y_1 z_1^2 = 0.$$

Il suit de là que x_1 est divisible par d_1, que y_1 est divisible par d_2, et que z_1 est divisible par d_3. En posant alors

$$x_1 = d_1 x_2, \qquad y_1 = d_2 y_2, \qquad z_1 = d_3 z_2,$$

où x_2, y_2 et z_2 peuvent être supposés positifs, et en divisant par $d_1 d_2 d_3$, il vient

$$d_2^3 x_2 y_2^2 + d_1^3 x_2^2 z_2 + D d_3^3 y_2 z_2^2 = 0.$$

Il suit de là que $D d_3^3 y_2 z_2^2$ est divisible par x_2, ce qui n'est possible que pour $x_2 = 1$. On aura de même $y_2 = 1$ et $z_2 = 1$. Donc

$$d_1^3 + d_2^3 + D d_3^3 = 0, \tag{14}$$

et

$$x = \delta d_1^2 d_2, \qquad y = \delta d_2^2 d_3, \qquad z = \delta g d_1 d_3^2. \tag{15}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (12), on aura

$$d_1^6 d_2^3 + D d_2^6 d_3^3 + D^2 d_1^3 d_3^6 - 3 D d_1^3 d_2^3 d_3^3 = \frac{27}{\delta^3}.$$

En éliminant de cette équation $D d_3^3$ à l'aide de (14), il vient

$$d_1^9 + 6 d_1^6 d_2^3 + 3 d_1^3 d_2^6 - d_2^9 = \left(\frac{3}{\delta}\right)^3. \tag{16}$$

Or, l'équation

$$u^3 + 3u^2 v - 6uv^2 + v^3 = w^3$$

est possible en nombres entiers u, v, w seulement pour $u = v = -w$. Cela se voit par l'identité suivante :

$$(u^3 - 3uv^2 + v^3)^3 - (3u^2 v - 3uv^2)^3 = (u^3 + 3u^2 v - 6uv^2 + v^3)(u^2 - uv + v^2)^3.$$

Par suite, l'équation (16) est seulement possible pour $d_1 = -1$ et $d_2 = 1$, ce qui conduit aux valeurs impossibles $x = 3$, $y = -3$, $z = 0$. Notre théorème est donc démontré.

12. Nous allons ensuite démontrer le théorème :

Si p est un nombre premier > 3, la $p^{\text{ième}}$ puissance d'une unité n'est jamais de la forme $X + Y\theta$.

Démonstration. — Soit η une unité positive < 1,

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\theta').$$

Si $\eta^p = X + Y\theta$, nous aurons évidemment

$$\left[\frac{x + y\theta + z\theta'}{3}\right]^p + \rho\left[\frac{x + y\rho\theta + z\rho^2\theta'}{3}\right]^p + \rho^2\left[\frac{x + y\rho^2\theta + z\rho\theta'}{3}\right]^p = 0,$$

où ρ satisfait à l'équation $\rho^2 + \rho + 1 = 0$. D'après le lemme I du n° 4 il faut que y et z soient différents de zéro.

Supposons d'abord que p soit de la forme $3n+1$; alors, l'équation (17) peut s'écrire

$$\left[\frac{x\rho + y\rho^2\theta + z\bar\theta}{3}\right]^p + \left[\frac{x\rho^2 + y\rho\theta + z\bar\theta}{3}\right]^p = -\left[\frac{x + y\theta + z\bar\theta}{3}\right]^p.$$

Or, comme p est impair, le membre gauche est divisible par le nombre

$$\frac{1}{3}(x\rho + y\rho^2\theta + z\bar\theta) + \frac{1}{3}(x\rho^2 + y\rho\theta + z\bar\theta) = \frac{1}{3}(-x - y\theta + 2z\bar\theta),$$

qui est évidemment un nombre entier. Par suite, ce nombre est une unité, puisqu'il divise η_1^p. Il faut donc que

$$-x^3 - Dy^3 - 8Dz^3 - 6fgxyz = \pm 27.$$

Or nous avons aussi

$$x^3 + Dy^3 + Dz^3 - 3fgxyz = 27;$$

donc par addition

$$9f^2gz^3 - 9fgxyz = 54 \text{ ou } = 0.$$

Dans le premier cas, nous aurons

$$fgz(fz^2 - xy) = 6,$$

d'où résulte que les nombres x, y, z ne sont pas tous divisibles par 3; alors le corps $K(\theta)$ est de seconde espèce, ce qui est impossible lorsque fg divise 6.

Dans le deuxième cas, nous aurons

$$z(fz^2 - xy) = 0.$$

Comme $z \neq 0$, il faut que $fz^2 - xy$ soit égal à zéro. Or ce nombre, étant le coefficient de θ dans $\frac{3}{\eta}$, n'est jamais égal à zéro d'après le n° **8**; car η_1 est supposé < 1.

Supposons ensuite que p soit de la forme $3n+2$; alors, l'équation (17) peut s'écrire

$$\left[\frac{x\rho^2 + y\theta + z\rho\bar\theta}{3}\right]^p + \left[\frac{x\rho + y\theta + z\rho^2\bar\theta}{3}\right]^p = -\left[\frac{x + y\theta + z\bar\theta}{3}\right]^p.$$

Or, comme p est impair, le membre gauche est divisible par le nombre

$$\frac{1}{3}(x\rho^2 + y\theta + z\theta\rho) + \frac{1}{3}(x\rho + y\theta + z\theta\rho^2) = \frac{1}{3}(-x + 2y\theta - z\theta),$$

qui est évidemment un nombre entier. Par suite, ce nombre est une unité, puisque c'est le membre droit; donc

$$-x^3 + 8Dy^3 - Dz^3 - 6fgxyz = \pm 27.$$

Or, nous avons aussi

$$x^3 + Dy^3 + Dz^3 - 3fgxyz = 27;$$

donc, par addition,

$$9fg^2y^3 - 9fgxyz = 54 \text{ ou } 0.$$

Dans le premier cas, nous aurons

$$fgy(gy^2 - xz) = 6,$$

d'où résulte que les nombres x, y, z ne sont pas tous divisibles par 3; alors le corps $K(\sqrt[3]{D})$ est de seconde espèce, ce qui est impossible lorsque fg divise 6. Le deuxième cas nous donne

$$fgy(gy^2 - xz) = 0.$$

Or, le nombre $gy^2 - xz$, étant le coefficient de θ dans $\frac{\xi}{\eta}$, n'est jamais égal à zéro d'après le n° **8**.

13. Des numéros précédents, **8**, **9**, **10**, **11** et **12**, il résulte le théorème : *L'équation indéterminée*

$$x^3 + Dy^3 = 1$$

possède au plus une solution en nombres entiers x, y avec $y \neq 0$.

Si $x = x_1$, $y = y_1$ est une solution, le nombre

$$x_1 + y_1\sqrt[3]{D}$$

est l'unité fondamentale du corps $K(\sqrt[3]{D})$ ou bien il est le carré de l'unité fondamentale; le dernier cas ne peut se présenter que pour *un nombre fini de cas; ainsi, lorsque* D *n'est pas* $\equiv \pm 1 \pmod 9$, *ce cas d'exception se présente seulement pour* $D = 20$, *où* $x = -19$, $y = 7$ *est une solution, tandis que*

$$-19 + 7\sqrt[3]{20} = (1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50})^2,$$

où $1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}$ *est l'unité fondamentale.*

III. — Sur les équations $Ax^3 + By^3 = 1$ et $Ax^3 + By^3 = 3$.

14. Le problème de résoudre en nombres entiers x, y, l'équation

$$Ax^3 + By^3 = C,$$

où A, B, C sont des entiers, et où C a une des valeurs 1 ou 3, est évidemment équivalent au problème suivant : *Trouver toutes les unités de la forme*

$$\frac{1}{C}\left|x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right|^3 = 1 + \frac{3}{C}x^2y\sqrt[3]{A^2B} + \frac{3}{C}xy^2\sqrt[3]{AB^2}$$

dans le corps cubique $K(\sqrt[3]{AB^2})$, x *et* y *étant des nombres entiers.*

Nous pouvons supposer que les nombres A et B soient indivisibles par le cube d'un nombre premier, qu'ils soient premiers entre eux, et que $A > B \geqq 1$. Lorsque $C = 3$, AB est supposé indivisible par 3. Lorsque $C = 1$, nous pouvons supposer que $B > 1$, comme nous venons de traiter le cas de $B = 1$ dans le paragraphe précédent. Posons $A = ac^2$ et $B = bd^2$, où a, b, c et d sont des nombres entiers positifs, tels que $abcd$ ne soit divisible par aucun carré > 1; les nombres a, b, c et d sont évidemment premiers entre eux deux à deux. Posons $D = ac^2b^2d$ et $\theta = \sqrt[3]{D}$. Lorsque $C = 3$, le corps cubique $K(\theta)$ est de première espèce; car, dans ce cas, nous avons

$$Ax^3 + By^3 \equiv \pm A \pm B \equiv 3 \pmod 9;$$

car, si x était divisible par 3, y le serait forcément aussi, ce qui est évidemment impossible. Or, cette congruence est impossible, si le corps est de seconde espèce; car, dans ce cas, on a $A \equiv \pm B \pmod 9$.

Il est évident que x et y sont de signes opposés, sauf dans le cas de $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$ et $x = y = 1$. Alors si η est une unité positive de la forme

$$\eta = \frac{1}{C}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3,$$

elle est < 1, sauf dans le cas de $\eta = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{2} + 1\right]^3$. Car, nous avons

$$\frac{1}{\eta} = \eta'\eta'' = \frac{1}{C^2}\left[x^2(\sqrt[3]{A})^2 - xy\sqrt[3]{AB} + y^2(\sqrt[3]{B})^2\right]^3 > \frac{3^3}{C^2} \geq 3,$$

puisque xy est négatif.

Si ξ est une unité positive < 1 et si

$$\eta = \frac{1}{C}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3 = \xi^m,$$

il faut donc que m soit positif. Nous allons démontrer que cette équation est impossible lorsque m est impair > 1.

15. Supposons d'abord que $C = 1$. Nous avons supposé que $ac^2 > bd^2 > 1$. Soit alors η une unité positive < 1 dans le corps $K(\theta)$ et soit

$$(1) \qquad (x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2})^3 = \eta^p,$$

où p est un nombre premier impair. Si $p = 3$, nous aurons

$$x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2} = \eta = \frac{1}{3}(u + v\sqrt[3]{ac^2b^2d} + w\sqrt[3]{a^2cbd^2}),$$

ce qui est évidemment impossible, puisque le membre gauche est un nombre algébrique du neuvième degré, tandis que le membre droit est un nombre algébrique du troisième degré.

Supposons que $p = 3m + 1$; alors il vient

$$x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2} = \eta^m\sqrt[3]{\eta};$$

donc

$$\sqrt[3]{\eta} = (x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}) \cdot \frac{1}{3}(X + Y\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\sqrt[3]{a^2cbd^2}),$$

et, par suite,

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\eta} = \frac{1}{3}(x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\sqrt[3]{bd^2} + z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d}),$$

où X, Y, Z et x_1, y_1, z_1 sont des nombres entiers (rationnels) qui sont tous divisibles par 3, si le corps $K(\theta)$ est de première espèce. Il est évident que ε est un nombre entier du corps du neuvième degré

$$\Omega(\sqrt[3]{ac^2}, \sqrt[3]{bd^2}),$$

parce que le nombre $\varepsilon^3 = \eta$ est un nombre entier du corps cubique $K(\theta)$. De plus, ε est une unité du corps Ω, comme $\varepsilon^3 = \eta$ est une unité du corps $K(\theta)$; et nous avons $0 < \varepsilon < 1$.

La norme de η dans $K(\theta)$ est évidemment égale à

$$\frac{1}{3^9}(x_1^3 ac^2 + y_1^3 bd^2 + z_1^3 a^2cb^2d - 3x_1y_1z_1abcd)^3 = 1,$$

donc

$$(2)\qquad x_1^3 ac^2 + y_1^3 bd^2 + z_1^3 a^2cb^2d - 3x_1y_1z_1abcd = 27.$$

Nous aurons donc à traiter l'équation suivante :

$$(3)\qquad \varepsilon^p = \left[\frac{1}{3}(x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\sqrt[3]{bd^2} + z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d})\right]^p = x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}.$$

Lorsque ρ satisfait à l'équation $\rho^2 + \rho + 1 = 0$, cette équation entraîne

$$\rho\left[\frac{1}{3}(x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\,\rho\sqrt[3]{bd^2} + z_1\rho^2\sqrt[3]{a^2cb^2d})\right]^p = \rho(x\sqrt[3]{ac^2} + y\,\rho\sqrt[3]{bd^2})$$

et

$$\rho^2\left[\frac{1}{3}(x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\rho^2\sqrt[3]{bd^2} + z_1\,\rho\sqrt[3]{a^2cb^2d})\right]^p = \rho^2(x\sqrt[3]{ac^2} + y\rho^2\sqrt[3]{bd^2}).$$

Nous tirons de là par addition

$$-\varepsilon^p = \rho\left[\frac{x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\,\rho\sqrt[3]{bd^2} + z_1\rho^2\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3}\right]^p + \rho^2\left[\frac{x_1\sqrt[3]{ac^2} + y_1\rho^2\sqrt[3]{bd^2} + z_1\,\rho\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3}\right]^p,$$

ou bien

$$-\varepsilon^p = \left[\frac{x_1\rho\sqrt[3]{ac^2} + y_1\rho^2\sqrt[3]{bd^2} + z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3}\right]^p + \left[\frac{x_1\rho^2\sqrt[3]{ac^2} + y_1\rho\sqrt[3]{bd^2} + z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3}\right]^p.$$

Il résulte de cette équation que ε^p est divisible par le nombre

$$\varepsilon_1 = \frac{x_1\rho\sqrt[3]{ac^2}+y_1\rho^2\sqrt[3]{bd^2}+z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3} + \frac{x_1\rho^2\sqrt[3]{ac^2}+y_1\rho\sqrt[3]{bd^2}+z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3}$$
$$= \frac{-x_1\sqrt[3]{ac^2}-y_1\sqrt[3]{bd^2}+2z_1\sqrt[3]{a^2cb^2d}}{3},$$

qui est entier, puisqu'il est la somme de deux nombres entiers. Le nombre ε_1 est donc une unité dans le corps Ω. Par suite, nous aurons, en prenant la norme de ε_1, l'équation suivante:

$$-x_1^3ac^2-y_1^3bd^2+8z_1^3a^2cb^2d-6x_1y_1z_1abcd = \pm 27.$$

De cette équation et de l'équation (2) on tire par addition

$$9z_1^3a^2cb^2d-9x_1y_1z_1abcd = 54 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Dans le premier cas, nous aurons

$$abcd\, z_1(ab\, z_1^2 - x_1y_1) = 6,$$

d'où il résulte que les nombres x_1, y_1, z_1 ne sont pas tous divisibles par 3; le corps $K(\theta)$ est donc de seconde espèce, ce qui est pourtant impossible, lorsque $abcd$ divise 6. Le deuxième cas conduit à

$$z_1(ab\, z_1^2 - x_1y_1) = 0.$$

Supposons que $z_1 = 0$. Alors l'équation (3) devient

$$\left[\frac{1}{3}x_1\sqrt[3]{ac^2}+\frac{1}{3}y_1\sqrt[3]{bd^2}\right]^p = x\sqrt[3]{ac^2}+y\sqrt[3]{bd^2}.$$

Cette équation est impossible d'après le lemme IV du n° **8**. Car, les nombres $\frac{1}{3}x_1$ et $\frac{1}{3}y_1$ sont entiers. C'est évident lorsque $K(\theta)$ est de première espèce. Lorsque $K(\theta)$ est de seconde espèce, le nombre

$$\sqrt[3]{a^2c}\left(\frac{1}{3}x_1\sqrt[3]{ac^2}+\frac{1}{3}y_1\sqrt[3]{bd^2}\right) = \frac{1}{3}x_1ac + \frac{1}{3}y_1\sqrt[3]{a^2cbd^2}$$

est un nombre entier du corps Ω, et par suite aussi un nombre entier du corps $K(\theta)$; d'après le n° **2**, il faut donc que $\frac{1}{3}x_1ac$ et $\frac{1}{3}y_1$ soient entiers; et comme ac est indivisible par 3, le nombre $\frac{1}{3}x_1$ est entier.

Enfin, à cause de l'équation

$$\left(\frac{1}{3}x_1\right)^3 ac^2 + \left(\frac{1}{3}y_1\right)^3 bd^2 = 1,$$

les nombres $\frac{1}{3}x_1 ac$ et $\frac{1}{3}y_1 bd$ sont premiers entre eux. Ainsi, le lemme IV s'applique. $z_1 = 0$ est donc impossible.

Supposons que $abz_1^2 - x_1 y_1 = 0$. Si nous posons

$$\frac{1}{\varepsilon} = x_2\sqrt[3]{a^2c} + y_2\sqrt[3]{b^2d} + z_2\sqrt[3]{ac^2bd^2},$$

où x_2, y_2, z_2 sont rationnels, il est facile de vérifier qu'on a

$$z_2 = \frac{1}{9}(abz_1^2 - x_1 y_1).$$

Si $z_2 = 0$, les nombres x_2 et y_2 sont entiers. C'est évident lorsque $K(\theta)$ est de première espèce, les nombres x_1, y_1, z_1 étant dans ce cas tous divisibles par 3. Lorsque $K(\theta)$ est de seconde espèce, les nombres

$$\sqrt[3]{ac^2}(x_2\sqrt[3]{a^2c} + y_2\sqrt[3]{b^2d}) = x_2 ac + y_2\sqrt[3]{ac^2b^2d}$$

et

$$\sqrt[3]{bd^2}(x_2\sqrt[3]{a^2c} + y_2\sqrt[3]{b^2d}) = x_2\sqrt[3]{a^2cbd^2} + y_2 bd$$

sont des nombres entiers du corps Ω, et par suite aussi du corps $K(\theta)$; d'après le n° **2** il faut donc que y_2 et x_2 soient entiers. A cause de l'équation $\left(\frac{1}{\varepsilon}\text{ est une unité}\right)$

$$x_2^3 a^2c + y_2^3 b^2d = 1,$$

les nombres x_2 et y_2 sont de signes opposés; nous aurons donc

$$\varepsilon = x_2^2\sqrt[3]{a^4c^2} - x_2y_2\sqrt[3]{a^2cb^2d} + y_2^2\sqrt[3]{b^4d^2} > 3.$$

Or, nous avons $\varepsilon < 1$. Le nombre z_2 est donc différent de zéro. L'équation (3) est donc impossible pour p premier > 2.

Supposons ensuite que $p = 3m - 1$; alors il vient

$$x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2} = \eta^m(\sqrt[3]{\eta})^{-1}:$$

donc

$$\sqrt[3]{\eta} = \frac{\frac{1}{3}(X + Y\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\sqrt[3]{a^2cbd^2})}{x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}}$$

et par suite

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\eta} = \frac{1}{3}(x_1\sqrt[3]{a^2c} + y_1\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2}).$$

où X, Y, Z et x_1, y_1, z_1 sont des nombres entiers (rationnels) qui sont tous divisibles par 3, si le corps $K(\theta)$ est de première espèce. Il est évident que ε est un nombre entier du corps du neuvième degré $\Omega(\sqrt[3]{ac^2}, \sqrt[3]{bd^2})$, parce que le nombre $\varepsilon^3 = \eta$ est un nombre entier du corps $K(\theta)$. De plus, ε est une unité du corps Ω, puisque $\varepsilon^3 = \eta$ est une unité du corps $K(\theta)$; et nous avons $0 < \varepsilon < 1$. Par conséquent, nous aurons l'équation

$$(4) \qquad x_1^3a^2c + y_1^3b^2d + z_1^3ac^2bd^2 - 3x_1y_1z_1abcd = 27.$$

Nous aurons donc à traiter l'équation suivante :

$$(5) \qquad \varepsilon^p = \left[\frac{1}{3}(x_1\sqrt[3]{a^2c} + y_1\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2})\right]^p = x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}.$$

De la même façon que plus haut, nous tirons de cette équation

$$-\varepsilon^p = \rho^2\left[\frac{x_1\sqrt[3]{a^2c} + y_1\rho\sqrt[3]{b^2d} + z_1\rho^2\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3}\right]^p + \rho\left[\frac{x_1\sqrt[3]{a^2c} + y_1\rho^2\sqrt[3]{b^2d} + z_1\rho\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3}\right]^p,$$

ou bien

$$-\varepsilon^p = \left[\frac{x_1\rho\sqrt[3]{a^2c} + y_1\rho^2\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3}\right]^p + \left[\frac{x_1\rho^2\sqrt[3]{a^2c} + y_1\rho\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3}\right]^p.$$

Il résulte de cette équation que ε^p est divisible par le nombre

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{x_1\rho\sqrt[3]{a^2c} + y_1\rho^2\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3} + \frac{x_1\rho^2\sqrt[3]{a^2c} + y_1\rho\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3}\\ &= \frac{-x_1\sqrt[3]{a^2c} - y_1\sqrt[3]{b^2d} + 2z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2}}{3},\end{aligned}$$

qui est entier, puisqu'il est la somme de deux nombres entiers. Le nombre ε_1 est donc une unité dans le corps Ω. Par suite, nous aurons

$$-x_1^3 a^2 c - y_1^3 b^2 d + 8 z_1^3 ac^2 bd^2 - 6 x_1 y_1 z_1 abcd = \pm 27.$$

De cette équation et de l'équation (4) on tire par addition

$$9 z_1^3 ac^2 bd^2 - 9 x_1 y_1 z_1 abcd = 54 \text{ ou } = 0.$$

Dans le premier cas, nous aurons

$$abcd\, z_1 (cd\, z_1^2 - x_1 y_1) = 6,$$

d'où il résulte que les nombres x_1, y_1, z_1 ne sont pas tous divisibles par 3; le corps $K(\theta)$ est donc de seconde espèce, ce qui est impossible, lorsque $abcd$ divise 6. Le deuxième cas conduit à

$$z_1 (cd\, z_1^2 - x_1 y_1) = 0.$$

Si nous supposons que $z_1 = 0$, l'équation (5) devient

$$\left[\frac{1}{3} x_1 \sqrt[3]{a^2 c} + \frac{1}{3} y_1 \sqrt[3]{b^2 d}\right]^p = x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}.$$

Or, cette équation est impossible d'après le lemme III du n° **7**. Car nous pouvons, de la même façon que plus haut, démontrer que $\frac{1}{3} x_1$ et $\frac{1}{3} y_1$ sont entiers, et que $\frac{1}{3} x_1 ac$ et $\frac{1}{3} y_1 bd$ sont premiers entre eux. Si nous supposons que $cd\, z_1^2 - x_1 y_1 = 0$, et si nous posons

$$\frac{1}{\varepsilon} = x_2 \sqrt[3]{ac^2} + y_2 \sqrt[3]{bd^2} + z_2 \sqrt[3]{a^2 c b^2 d},$$

où x_2, y_2, z_2 sont rationnels, il est facile de vérifier qu'on a

$$z_2 = \frac{1}{9}(cd z_1^2 - x_1 y_1) = 0.$$

Or, nous pouvons évidemment de la même façon que plus haut démontrer que c'est impossible, puisque $\varepsilon < 1$.

L'équation (5) est donc impossible pour p premier > 2.

Par conséquent, l'équation (1) est impossible pour p premier > 2.

16. Supposons ensuite que $C = 3$. Nous avons $ac^2 > bd^2 \geq 1$. Soit alors η une unité positive < 1 dans le corps $K(\theta)$ et soit

$$\frac{1}{3}(x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2})^3 = \eta^p, \tag{6}$$

où p est un nombre premier impair. Si $p = 3$, nous aurons

$$x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} = \eta = u + v\sqrt[3]{ac^2b^2d} + w\sqrt[3]{a^2cbd^2},$$

ce qui est évidemment impossible, puisque le membre gauche est un nombre algébrique du neuvième degré, tandis que le membre droit est un nombre algébrique du troisième degré.

Supposons que $p = 3m + 1$; alors il vient

$$x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} = \eta^m\sqrt[3]{\eta},$$

donc

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\eta} = x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}},$$

où x_1, y_1, z_1 sont des nombres entiers (rationnels). Il est évident que le nombre ε est un nombre entier du corps du neuvième degré

$$\Omega(\sqrt[3]{3ac^2}, \sqrt[3]{3bd^2}),$$

parce que le nombre $\varepsilon^3 = \eta$ est un nombre entier du corps cubique $K(\theta)$. Comme $\varepsilon^3 = \eta$ est une unité du corps $K(\theta)$, ε est une unité du corps Ω; et nous avons de plus $0 < \varepsilon < 1$. Par conséquent, nous aurons l'équation

$$x_1^3ac^2 + y_1^3bd^2 + z_1^3a^2cb^2d - 3x_1y_1z_1abcd = 3. \tag{7}$$

Nous aurons donc à traiter l'équation suivante :

$$\varepsilon^p = \left[x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right]^p = x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}. \tag{8}$$

Comme dans le numéro précédent, nous tirons de là

$$-\varepsilon^p = \rho\left[x_1\rho\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right]^p$$
$$+ \rho^2\left[x_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\rho\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right]^p,$$

ou bien

$$-\varepsilon^p = \left[x_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\rho\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right]^p$$
$$+\left[x_1\rho\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right]^p.$$

Il résulte de cette équation que ε^p est divisible par le nombre

$$\varepsilon_1 = \left(x_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\rho\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right)$$
$$+\left(x_1\rho\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}}\right)$$
$$= -x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} - y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + 2z_1\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}},$$

qui enst etier comme la somme de deux nombres entiers. Le nombre ε_1 est donc une unité du corps Ω. Par suite, nous aurons

$$-x_1^3ac^2 - y_1^3bd^2 + 8z_1^3a^2cb^2d - 6x_1y_1z_1abcd = \pm 3.$$

De cette équation et de l'équation (7) on tire par addition

$$9z_1^3a^2cb^2d - 9x_1y_1z_1abcd = 6 \quad \text{ou} \quad = 0;$$

donc

$$z_1(abz_1^2 - x_1y_1) = 0.$$

Supposons que $z_1 = 0$. Alors, l'équation (8) devient

$$\left[x_1\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_1\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}\right]^p = x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}.$$

Or, cette équation est impossible d'après les lemmes I et IV du paragraphe I. Car, à cause de l'équation

$$x_1^3ac^2 + y^3bd^2 = 3,$$

les nombres x_1ac et y_1bd sont premiers entre eux.

Supposons que $abz_1^2 - x_1y_1 = 0$. Si nous posons

$$\frac{1}{\varepsilon} = x_2\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_2\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_2\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}},$$

où x_2, y_2, z_2 sont rationnels, il est facile de vérifier qu'on a

$$\begin{aligned} z_2 &= ab z_1^2 - x_1 y_1, \\ y_2 &= dy_1^2 \quad - ac x_1 z_1 \\ x_2 &= c x_1^2 \quad - bd y_1 z_1. \end{aligned}$$

Si $z_2 = 0$, nous aurons, comme $\frac{1}{\varepsilon}$ est une unité,

$$x_2^3 a^2 c + y_2^3 b^2 d = 9.$$

$abcd$ n'est pas divisible par 3, et il est évident que $x_2 y_2$ ne peut l'être non plus. Nous aurons donc (mod 9)

$$\pm a^2 c \pm b^2 d \equiv 0 \qquad (\text{mod } 9),$$

ce qui est impossible comme le corps $K(\theta)$ est de première espèce. (*Voir* le n° **14**.)

L'équation (8) est donc impossible pour p premier > 2.

Supposons ensuite que $p = 3m - 1$; alors il vient

$$x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} = \eta^m (\sqrt[3]{\eta})^{-1};$$

donc

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\eta} = x_1\sqrt[3]{\frac{a^2 c}{9}} + y_1\sqrt[3]{\frac{b^2 d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2 bd^2}{9}},$$

où x_1, y_1, z_1 sont des nombres entiers (rationnels). Il est évident que ε est un nombre entier du corps du neuvième degré $\Omega(\sqrt[3]{3ac^2}, \sqrt[3]{3bd^2})$, parce que le nombre $\varepsilon^3 = \eta$ est une unité du corps $K(\theta)$. De plus, comme $\varepsilon^3 = \eta$ est une unité du corps $K(\theta)$, ε est une unité du corps Ω; et nous avons aussi $0 < \varepsilon < 1$. Par conséquent, nous aurons l'équation

$$(9) \qquad x_1^3 a^2 c + y_1^3 b^2 d + z_1^3 ac^2 bd^2 - 3 x_1 y_1 z_1 abcd = 9.$$

Nous aurons donc à traiter l'équation suivante :

$$(10) \quad \varepsilon^p = \left[x_1\sqrt[3]{\frac{a^2 c}{9}} + y_1\sqrt[3]{\frac{b^2 d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2 bd^2}{9}}\right]^p = x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}.$$

Comme plus haut, nous tirons de là

$$-\varepsilon^p = \rho^2\left[x_1\rho\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right]^p$$
$$+\rho\left[x_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\rho\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right]^p,$$

ou bien

$$-\varepsilon^p = \left[x_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\rho\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right]^p$$
$$+\left[x_1\rho\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right]^p.$$

Il résulte de cette équation que ε^p est divisible par le nombre

$$\varepsilon_1 = \left(x_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\rho\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right)$$
$$+\left(x_1\rho\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\rho^2\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right)$$
$$= -x_1\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} - y_1\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + 2z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}},$$

qui est entier comme la somme de deux nombres entiers. Le nombre ε_1 est donc une unité du corps Ω. Par suite, nous aurons

$$-x_1^3a^2c - y_1^3b^2d + 8z_1^3ac^2bd^2 - 6x_1y_1z_1abcd = \pm 9.$$

De cette équation et de l'équation (9) on tire par addition

$$9z_1^3ac^2bd^2 - 9x_1y_1z_1abcd = 18 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Dans le premier cas, il vient

$$abcd\,z_1(cdz_1^2 - x_1y_1) = 2,$$

d'où

$$ac = 2, \qquad b = d = 1, \qquad z_1 = \pm 1, \qquad c - x_1y_1 = \pm 1.$$

Si $a = 2$ et $c = 1$, nous aurons $x_1y_1 = 0$ ou $= 2$ et, d'après (9),

$$4x_1^3 + y_1^3 + 2z_1^3 - 6x_1y_1z_1 = 9,$$

il faut que y_1 soit impair. $x_1 = 0$ donne $y_1^3 + 2z_1^3 = 9$, impossible mod 9. $x_1 = \pm 2$ et $y_1 = \pm 1$ est évidemment aussi impossible.

Si $a = 1$ et $c = 2$, nous aurons $x_1 y_1 = 1$ ou $= 3$ et, d'après (9),

$$2x_1^3 + y_1^3 + 4z_1^3 - 6x_1 y_1 z_1 = 9.$$

Or, cette équation est impossible pour $x_1 = y_1 = \pm 1$, $z_1 = +1$ et pour $|x_1| = 3$, $|y_1| = |z_1| = 1$ et pour $|x_1| = |z_1| = 1$, $|y_1| = 3$.

Dans le deuxième cas, il vient

$$z_1(cdz_1^2 - x_1 y_1) = 0.$$

Supposons que $z_1 = 0$. Alors l'équation (9) devient

$$x_1^3 a^2 c + y_1^3 b^2 d = 9.$$

$abcd$ n'est pas divisible par 3, et il est évident que $x_1 y_1$ ne le peut être non plus. Nous aurons donc (mod 9)

$$\pm a^2 c \pm b^2 d \equiv 0 \pmod{9},$$

ce qui est impossible comme le corps $K(\theta)$ est de première espèce.

Supposons que $cdz_1^2 - x_1 y_1 = 0$. Si nous posons

$$\frac{1}{\varepsilon} = x_2 \sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_2 \sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_2 \sqrt[3]{\frac{a^2 c b^2 d}{3}},$$

où x_2, y_2, z_2 sont rationnels, il est facile de vérifier qu'on a

$$z_2 = \frac{1}{3}(cdz_1^2 - x_1 y_1).$$

Nous avons ainsi $z_2 = 0$. Les nombres x_2, y_2 sont entiers; car les nombres

$$\frac{\sqrt[3]{3a^2c}}{\varepsilon} = x_2 ac + y_2 \sqrt[3]{a^2 c b d^2}$$

et

$$\frac{\sqrt[3]{3b^2d}}{\varepsilon} = x_2 \sqrt[3]{ac^2 b^2 d} + y_2 bd$$

sont des nombres entiers du corps Ω, et par suite aussi du corps $K(\theta)$; d'après le n° **2** il faut donc que y_2 et x_2 soient entiers.

Comme $\frac{1}{\varepsilon}$ est une unité, nous avons

$$x_2^3 ac^2 + y_2^3 bd^2 = 3.$$

Par suite, les nombres x_2 et y_2 sont de signes opposés, sauf dans le cas de $x_2 = y_2 = 1$, $a = 2$, $c = b = d = 1$; avec cette exception, nous aurons donc

$$\varepsilon = x_2^2 \sqrt[3]{\frac{a^2 c^4}{9}} - x_2 y_2 \sqrt[3]{\frac{ac^2 bd^2}{9}} + y_2^2 \sqrt[3]{\frac{b^2 d^4}{9}} > \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3},$$

ce qui est impossible, comme $\varepsilon < 1$. Dans le cas de $x_2 = y_2 = 1$, $a = 2$, $b = c = d = 1$, nous aurons

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}}.$$

Il reste donc seulement à examiner l'équation

$$\left[\sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right]^p = x\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \tag{11}$$

où p est un nombre premier de la forme $6m - 1$.

Posons $p = 2\mu + 1$. Alors comme $\varepsilon^2 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, l'équation (11) peut s'écrire

$$\left[\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]^\mu \cdot \left[\sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right] = x\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Comme le coefficient de $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ disparaît, nous aurons de là

$$\begin{aligned} 0 = 1 &- \binom{\mu}{3}\cdot 4 + \binom{\mu}{6}\cdot 4^2 - + \ldots \\ &- 2\binom{\mu}{2} + 2\binom{\mu}{5}\cdot 4 - + \ldots \\ &- \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{4}\cdot 4 - + \ldots, \end{aligned}$$

d'où il suit que μ est impair. De plus, comme $1 - 2\binom{\mu}{2} - \binom{\mu}{1} = 1 - \mu^2$, il suit (mod 8)

$$-\binom{\mu}{3}\cdot 4 + \binom{\mu}{4}\cdot 4 \equiv 0 \pmod 8,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-7) \equiv 0 \pmod 8;$$

donc

$$\mu \equiv +1 \quad \text{ou} \quad \equiv -1 \pmod 8.$$

Si nous posons $\mu = 1 + 8n$ nous aurons $p = 16n + 3$; comme $p \equiv -1 \pmod 3$, il faut que $2n \equiv 1 \pmod 3$.

Alors, comme $\varepsilon^3 = \sqrt[3]{2} - 1$ et $\varepsilon^8 = 4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, l'équation (11) peut s'écrire

$$\left[4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]^{2n} . (\sqrt[3]{2} - 1) = x\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Il suit de là

$$4^{\frac{2n+2}{3}} + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \binom{2n}{3k} . 5^{3k} . 4^{\frac{2n+2}{3}-k}$$
$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{2n}{3k+2} . 5^{3k+2} . 4^{\frac{2n+2}{3}-k},$$

équation impossible (mod 5).

Si nous posons $\mu = -1 + 8n$, nous aurons $p = 16n - 1$; comme $p \equiv -1 \pmod 3$, il faut que $n \equiv 0 \pmod 3$. Alors, comme

$$\varepsilon^{-1} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3}},$$

l'équation (11) peut s'écrire

$$\left[4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]^{2n} . (\sqrt[3]{2} + 1) = x\sqrt[3]{2} + y.$$

Il suit de là

$$-\binom{2n}{1} . 5 . 4^{\frac{2n}{3}} - \sum_{k\geq 1} (-1)^k \binom{2n}{3k+1} . 5^{3k+1} . 4^{\frac{2n}{3}-k}$$
$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{2n}{3k+2} . 5^{3k+2} . 4^{\frac{2n}{3}-k}.$$

En divisant par $10n$, il suit de cette équation

$$-4^{\frac{2n}{3}} - \sum_{k\geq 1} (-1)^k \binom{2n-1}{3k} \frac{5^{3k} . 4^{\frac{2n}{3}-k}}{3k+1}$$
$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{2n-1}{3k+1} \frac{5^{3k+1} . 4^{\frac{2n}{3}-k}}{3k+2}.$$

Ici la première somme est $\equiv 0 \pmod 5$, comme $5^{3k} > 3k+1$ pour tous les $k \geqq 1$: et la dernière somme est aussi $\equiv 0 \pmod 5$, puisque $5^{3k+1} > 3k+2$ pour tous les $k \geqq 0$. L'équation est donc impossible, puisque $4^{\frac{2n}{3}}$ n'est pas divisible par 5. L'équation (10) est ainsi toujours impossible.

Par conséquent, l'équation (6) est impossible pour p premier > 2.

17. Des deux numéros précédents, il suit le théorème suivant :

Si ξ est l'unité fondamentale du corps $K(\theta)$, $0 < \xi < 1$, *et si*

$$\eta = \frac{1}{C}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3 = \xi^m,$$

on a forcément $m = 2^n$, *avec* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Il y a une seule exception pour

$$\eta = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{2} + 1\right]^3 = \left[\sqrt[3]{2} - 1\right]^{-1},$$

où $\sqrt[3]{2} - 1$ est l'unité fondamentale du corps $K(\sqrt[3]{2})$.

(Il faut observer que le théorème n'est pas valable pour $B = C = 1$.)

Soit maintenant η_1 une autre unité (positive) dans le même corps

$$\eta_1 = \frac{1}{C_1}\left[x_1\sqrt[3]{A_1} + y_1\sqrt[3]{B_1}\right]^3 = \xi^{m_1},$$

où l'on a par suite $m_1 = 2^{n_1}$. Si nous supposons $\eta > \eta_1$, nous aurons

$$\eta_1 = \eta^{2^{n_1 - n}};$$

donc

$$\left[x\sqrt[3]{\frac{A}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{B}{C}}\right]^{2^{n_1-n}} = x_1\sqrt[3]{\frac{A_1}{C_1}} + y_1\sqrt[3]{\frac{B_1}{C_1}}.$$

Comme $x^3A + y^3B = C$, les nombres xA et yB sont premiers entre eux.

Par suite, d'après les lemmes I, III et IV du paragraphe I, cette équation n'est possible que dans le cas suivant :

$$\left[\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]^4 = 4\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 5\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Supposons maintenant qu'il y ait en même temps que η une unité (positive) $\varepsilon = x_1 + y_1 \sqrt[3]{D}$ dans le corps; alors, nous avons d'après le paragraphe II ou $\varepsilon = \xi$ ou $\varepsilon = \xi^2$. Supposons d'abord $\varepsilon > \eta$. Alors, nous aurons

$$\eta = \left[x\sqrt[3]{\frac{A}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{B}{C}}\right]^3 = \xi^{2^n} = (x_1 + y_1\sqrt[3]{D})^\mu,$$

où μ a une des valeurs 2^n ou 2^{n-1} suivant que $\varepsilon = \xi$ ou $= \xi^2$. (Comme $\varepsilon > \eta$, on a $n \geqq 2$.) Il vient donc

$$\frac{x^3A + y^3B}{C} = 1 = x_1^\mu + \binom{\mu}{3} x_1^{\mu-3} y_1^3 D + \ldots,$$

où tous les termes à droite sont divisibles par x_1, puisque μ n'est pas divisible par 3. Il faut donc que $x_1 = \pm 1$, ce qui donne $D = 2$ et $\varepsilon = \sqrt[3]{2} - 1$. Si $\eta > \varepsilon$, nous avons $\eta = \xi$ et $\varepsilon = \xi^2$; donc

$$\left[x\sqrt[3]{\frac{A}{C}} + y\sqrt[3]{\frac{B}{C}}\right]^6 = x_1 + y_1\sqrt[3]{D}.$$

Or, d'après le lemme II du paragraphe I, cette équation ne peut subsister que dans le cas suivant :

$$\left[\sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right]^6 = -19 + 7\sqrt[3]{20}.$$

Enfin, nous voyons aisément qu'il ne peut exister dans le même corps à la fois deux unités (positives) des formes suivantes :

$$\varepsilon = x + y\sqrt[3]{D} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = x_1 + y_1\sqrt[3]{D}.$$

Car les équations $\varepsilon = \varepsilon_1^2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$ sont évidemment impossibles. (D'après le paragraphe II il ne subsiste pour ε et ε_1 que les valeurs ξ et ξ^2.)

Nous avons ainsi le résultat suivant :

Il y a au plus une seule unité positive dans le corps $K(\sqrt[3]{D})$, *qui est de l'une des formes suivantes :*

(α) $\qquad x + y\sqrt[3]{D},$

(β) $\qquad [x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}]^3,$

(γ) $\qquad \frac{1}{3}[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}]^3.$

Ici tous les nombres x, y, A, B, D sont entiers. A, B, D *sont positifs et non divisibles par le cube d'un nombre premier.* $D > 1$ *et* $A > B > 0$. *Dans le cas* (β), *nous avons* $B > 1$; *dans le cas* (γ) AB *est non divisible par* 3. *Cependant il y a les exceptions suivantes:*

Dans le corps $K(\sqrt[3]{2})$ *il y a exactement quatre unités des formes* (α), (β), (γ), *savoir:*

$$\sqrt[3]{2} - 1, \quad \frac{1}{3}(\sqrt[3]{4} - 1)^3, \quad \frac{1}{3}(4\sqrt[3]{2} - 5)^3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}(\sqrt[3]{2} + 1)^3.$$

Dans le corps $K(\sqrt[3]{20})$ *il y a deux unités de ces formes, savoir*

$$19\sqrt[3]{20} - 7 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^3.$$

On peut l'énoncer aussi comme il suit :

L'équation indéterminée

$$Ax^3 + By^3 = C,$$

où $C = 1$ *ou* $C = 3$, *possède au plus une seule solution en nombres entiers* x, y *différents de zéro, sauf l'équation*

$$2x^3 + y^3 = 3,$$

qui possède exactement les deux solutions $x = y = 1$, $x = 4$, $y = -5$.

Parmi toutes les équations qui appartiennent à la même classe, il y en a au plus une seule qui est possible en nombres entiers, sauf dans les cas suivants : Dans la classe du corps $K(\sqrt[3]{2})$ *il y a trois équations possibles, savoir*

$$2x^3 + y^3 = 1, \qquad 2x^3 + y^3 = 3 \qquad \text{et} \qquad 4x^3 + y^3 = 3.$$

Dans la classe du corps $K(\sqrt[3]{20})$ *il y a deux équations possibles, savoir :*

$$20x^3 + y^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 5x^3 + 2y^3 = 3.$$

IV. — Solution complète du problème.

18. D'après les résultats du paragraphe II nous savons résoudre complètement l'équation

$$x^3 + Dy^3 = 1.$$

En effet, nous avons seulement à déterminer l'unité fondamentale ξ du corps $K(\sqrt[3]{D})$ et à examiner si ξ ou ξ^2 est de la forme $x + y\sqrt[3]{D}$. Dans ce paragraphe nous allons exposer une méthode qui donne la solution en nombres entiers x, y de l'équation

$$(1) \qquad Ax^3 + By^3 = C,$$

avec $C = 1$ ou $C = 3$, dans tous les cas où elle est possible.

Comme plus haut nous posons $A = ac^2$, $B = bd^2$, où le nombre $abcd$ n'est divisible par aucun carré > 1, et de plus

$$\vartheta = \sqrt[3]{ac^2b^2d} \qquad \text{et} \qquad \theta = \sqrt[3]{a^2cbd^2}.$$

Nous supprimons ici la supposition faite plus haut que $A > B$.

D'après la théorie générale des anneaux [1] il existe une unité fondamentale de l'anneau $R(1, 0, 0)$, soit ζ, telle que toute unité de l'anneau est de la forme $\pm\zeta^m$, m entier. Nous prenons ζ positive et < 1. Dans un corps $K(\vartheta)$ de première espèce, on a évidemment $\zeta = \xi$, où ξ est l'unité fondamentale du corps. Dans un corps de seconde espèce on a $\zeta = \xi$ ou $\zeta = \xi^2$ (*voir* la Note I à la fin de ce travail).

Si l'équation (1) subsiste, le nombre

$$\varepsilon = \frac{1}{C}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3 = 1 + \frac{3}{C}xy^2d\vartheta + \frac{3}{C}x^2yc\theta$$

est une unité de l'anneau R. Donc, d'après le numéro précédent, on a

$$\varepsilon = \zeta^m = \zeta^{2^n}.$$

Il faut ainsi que $m = 2^l$, où l est un nombre entier $\geqq 0$.

---

[1] *Voir* D. HILBERT, *Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper* (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 4, 1897, p. 244).

19. Supposons d'abord que $C = 1$, et $ac^2 > 1$ et $bd^2 > 1$.

Nous allons établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$(2)\qquad [x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}]^3 = \eta^2,$$

où η est une unité de l'anneau R, et $0 < \eta < 1$. Il suit de cette équation

$$x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B} = \eta(\sqrt[3]{\eta})^{-1},$$

donc

$$\sqrt[3]{\eta} = \frac{X + Y\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\sqrt[3]{a^2cbd^2}}{x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}},$$

et par suite

$$\sqrt[3]{\eta} = x_1\sqrt[3]{a^2c} + y_1\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2},$$

où X, Y, Z et x_1, y_1, z_1 sont des nombres entiers (rationnels).

La norme de η est égale à

$$(x_1^3a^2c + y_1^3b^2d + z_1^3ac^2bd^2 - 3x_1y_1z_1abcd)^3,$$

donc

$$(3)\qquad x_1^3a^2c + y_1^3b^2d + z_1^3ac^2bd^2 - 3x_1y_1z_1abcd = 1.$$

Nous avons à examiner l'équation suivante :

$$(x_1\sqrt[3]{a^2c} + y_1\sqrt[3]{b^2d} + z_1\sqrt[3]{ac^2bd^2})^2 = x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}.$$

Elle entraîne

$$(4)\qquad z_1^2cd = -2x_1y_1.$$

A cause de l'équation (3), les nombres x_1 et d, ainsi que les nombres y_1 et c, sont premiers entre eux. Donc, si δ est le plus grand commun diviseur de x_1 et y_1, il résulte de (4) que δ divise z_1. Or, à cause de l'équation (3), le plus grand commun diviseur de x_1, y_1, z_1 est égal à 1 ; donc $\delta = 1$.

Par suite, il résulte de (4), ou

$$\frac{2x_1}{c} = \pm N^2, \qquad \frac{y_1}{d} = \mp M^2, \qquad z_1 = NM$$

ou

$$\frac{x_1}{c} = \pm N^2, \qquad \frac{2y_1}{d} = \mp M^2, \qquad z_1 = NM.$$

N et M étant des nombres entiers premiers entre eux. Il suffit évidemment de prendre le premier système. En introduisant ces valeurs dans l'équation (3), nous aurons

$$\mp \frac{1}{8} a^2 c^4 N^6 \pm b^2 d^4 M^6 + \frac{5}{2} ac^2 bd^2 N^3 M^3 = 1,$$

ou

$$\pm \left(bd^2 M^3 \pm \frac{5}{4} ac^2 N^3\right)^2 \mp 27 \left(\frac{ac^2 N^3}{4}\right)^2 = 1.$$

Comme $R^2 + 1$ n'est pas divisible par 3, il faut prendre le signe supérieur; donc

$$(5) \qquad \left(bd^2 M^3 + \frac{5}{4} ac^2 N^3\right)^2 - 27 \left(\frac{ac^2 N^3}{4}\right)^2 = 1.$$

Cette équation peut s'écrire aussi

$$(6) \qquad -\left(\frac{1}{2} ac^2 N^3 - 5 bd^2 M^3\right)^2 + 27 (bd^2 M^3)^2 = 2.$$

Pour résoudre complètement l'équation (2), nous avons ainsi à résoudre l'équation de Fermat

$$(7) \qquad X^2 - 27 Y^2 = 1.$$

Si X, Y est un système de solutions de cette équation, les nombres a, b, c, d, N et M sont uniformément déterminés par les équations

$$4Y = ac^2 N^3, \qquad X - 5Y = bd^2 M^3.$$

Car il est évident que tout nombre entier x (différent de zéro) peut se mettre sous la forme $x = uv^2 w^3$, où uv n'est divisible par aucun carré > 1, et d'une seule manière, quand u et v sont positifs. Les nombres $4Y$ et $X - 5Y$ sont évidemment premiers entre eux. Car, à cause de (7), les nombres X et Y sont premiers entre eux, l'un est pair et l'autre impair.

Le cas de $ac^2 = 1$ ne se présente jamais. Car, si $Y = \frac{1}{4} N^3 = 2 N_1^3$, l'équation (7) devient

$$X^2 - 108 N_1^6 = 1,$$

d'où

$$|X| \pm 1 = 54 N_2^6, \qquad |X| \mp 1 = 2 N_3^6;$$

donc

$$\pm 1 = 27 N_2^6 - N_3^6,$$

équation impossible, puisque $u^3 = v^3 - w^3$ est impossible.

Le cas de $bd^2 = 1$ se présente seulement pour $X = \pm 26$, $Y = \pm 5$. Car, si nous posons $bd^2 = 1$ dans (6), il vient

$$27 M^6 = 2 + M_1^2.$$

Cette équation n'est possible que pour $|M| = 1$, $|M_1| = 5$ (*cf.* le n° **9**); donc

$$X = \pm 26, \qquad Y = \pm 5 \qquad \text{et} \qquad ac^2 N^3 = \pm 20.$$

Quand on a déterminé les nombres a, b, c, d, N et M, les nombres x_1, y_1, z_1 sont donnés par les équations

$$x_1 = -\frac{1}{2} c N^2, \qquad y_1 = d M^2, \qquad z_1 = NM.$$

Chaque système de solutions de (7) donne ainsi une solution de l'équation (2). Le système X, Y donne la même solution que le système $-X$, $-Y$. Il suffit donc de supposer Y positif. Le système $-X$, Y donne une autre solution que le système X, Y.

Comme la valeur de Y croît, on ne peut jamais tomber deux fois sur le même système a, b, c, d, N, M. Ainsi chaque système X, Y donne une nouvelle solution de (2). D'après le n° **17** il existe au plus une solution de (2) dans un corps donné. *Donc, il y a une infinité de corps* K(θ) *dans lesquels l'équation* (2) *subsiste.*

20. Si nous supposons dans (2) que

$$\eta = \eta_1^2,$$

où η_1 est une unité positive de l'anneau R, il vient

$$x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B} = \eta_1^{\frac{2}{3}} = \eta_1 \sqrt[3]{\frac{1}{\eta_1}},$$

ou

$$\sqrt[3]{\eta_1} = (x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2})(X_1 + Y_1\sqrt[3]{ac^2 b^2 d} + Z_1\sqrt[3]{a^2 cbd^2}),$$

où X_1, Y_1, Z_1 sont entiers. Car $\frac{1}{\eta_1}$ appartient aussi à l'anneau R, puisque, d'après le n° **8**, les coefficients u, v, w dans $\frac{1}{\eta_1} = u + v\theta + w\bar{\theta}$ sont entiers. Donc il résulte

$$\sqrt[3]{\eta_1} = x_2\sqrt[3]{ac^2} + y_2\sqrt[3]{bd^2} + z_2\sqrt[3]{a^2cb^2d},$$

où x_2, y_2, z_2 sont des nombres entiers, qui sont reliés avec x_1, y_1, z_1 par les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} abz_2^2 + 2x_2y_2 = z_1 = \text{NM}, \\ dy_2^2 + 2x_2z_2ac = y_1 = d\text{M}^2, \\ cx_2^2 + 2y_2z_2bd = x_1 = -\frac{1}{2}c\text{N}^2. \end{cases}$$

Si c est impair, il faut que N soit pair, comme $x_1 = -\frac{1}{2}c\text{N}^2$. Si c est pair, x_1 est pair, comme $x_1 = cx_2^2 + 2y_2z_2\,bd$. Alors, puisque $x_1 = -\frac{1}{2}c\text{N}^2$ et $\frac{c}{2}$ est impair, N doit être pair. *Ainsi* N *est toujours pair.*

En posant $\text{N} = 2\text{H}$, l'équation (5) peut s'écrire

$$\text{X}^2 - 1 = 108a^2c^4\text{H}^6.$$

Cette équation entraîne

$$|\text{X}| \pm 1 = 2f^2\text{N}_1^6, \qquad |\text{X}| \mp 1 = 54g^2\text{N}_2^6,$$

où les nombres $f\text{N}_1$ et $g\text{N}_2$ sont premiers entre eux, $fg = ac^2$ et $\text{N}_1\text{N}_2 = \text{H}$, et par suite

$$(9)\qquad \pm 1 = f^2\text{N}_1^6 - 27g^2\text{N}_2^6.$$

Ici il faut évidemment prendre le signe supérieur.

21. Il résulte des deux numéros précédents que nous pouvons résoudre complètement l'équation

$$(10)\qquad \text{A}x^3 + \text{B}y^3 = 1,$$

$(\text{A} > 1$ et $\text{B} > 1)$, si nous savons résoudre complètement les équations

$$(11)\qquad \text{A}_1x^3 + \text{B}_1y^3 = 1,$$

où tous les facteurs premiers de A_1B_1 divisent A ou bien divisent B. (A_1B_1 est supposé sans facteurs cubiques > 1.)

En effet, pour résoudre (10), nous avons à déterminer l'unité fondamentale de l'anneau $R(1, \theta, \overline{\theta})$, soit ζ, et examiner si ζ ou ζ^2 est de la forme

$$[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}]^3.$$

Dans ce cas le problème est résolu. Dans le cas contraire, il faut chercher s'il existe une unité η_1 de l'anneau R telle que

$$\eta_1^3 = [x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}]^3. \tag{12}$$

Or, d'après le numéro précédent, cette équation entraîne

$$1 = f^2 N_1^6 - 27 g^2 N_2^6, \tag{13}$$

où $fg = A$ ou bien $fg = B$. Nous aurons ainsi à résoudre un nombre fini d'équations de la forme (13). Si nous savons résoudre toutes les équations (11), nous savons aussi résoudre les équations (13). Si l'équation (12) subsiste, il existe toujours une des équations (13), qui est possible. Alors les nombres N et M sont déterminés par les équations

$$|N| = |bd^2 M^3 + \frac{5}{4} ac^2 N^3| = f^2 N_1^6 + 27 g^2 N_2^6$$

et

$$\frac{1}{4} N = ac^2 N^3 = 8 fg N_1^3 N_2^3,$$

et enfin les nombres x_2, y_2, z_2 par les équations (8).

Le problème de résoudre l'équation (10) est ainsi réduit à celui de résoudre les équations (11). Or, si μ désigne le nombre de facteurs premiers différents de AB, et si μ_1 désigne le nombre de facteurs premiers différents de $A_1 B_1$, nous avons $\mu > \mu_1$. De la même manière chacune des équations (11) (pour $A_1 > 1$ et $B_1 > 1$) conduit à un système d'équations $A_2 x^3 + B_2 y^3 = 1$, où le nombre de facteurs premiers différents de $A_2 B_2$ est encore plus petit que μ_1. En continuant de la même manière, on tombe enfin sur un nombre fini d'équations de la forme $x^3 + P y^3 = 1$, où P est un nombre premier ou le carré d'un nombre premier. Or, nous savons résoudre toutes les équations de cette forme.

22. Pour que l'équation (6) soit possible, il faut que tous les facteurs premiers de bd soient de la forme $8t + 1$ ou de la forme $8t + 3$.

Nous aurons ainsi les résultats spéciaux :

Si ac est pair, si bd est divisible par un nombre premier de la forme $8t-1$ *ou de la forme* $8t+5$, *et si l'équation*

$$ac^2x^3+bd^2y^3=1 \tag{14}$$

subsiste, l'unité fondamentale de l'anneau $R(1,\theta,\bar{\theta})$ *est égale à*

$$|x\sqrt[3]{ac^2}+y\sqrt[3]{bd^2}|^3.$$

Lorsque ac et bd sont tous les deux divisibles par un nombre premier de la forme $8t-1$ *ou de la forme* $8t+5$, *on a le même résultat.*

Ainsi il résulte des équations : $5-4=1$, $26-25=1$, $6-5=1$, $16-15=1$, $49-48=1$, que les nombres

$$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4})^3,\quad (\sqrt[3]{26}-\sqrt[3]{25})^3,\quad (\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5})^3,\quad (\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{15})^3 \quad \text{et} \quad (\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{48})^3$$

sont les unités fondamentales de l'anneau R dans les corps

$$K(\sqrt[3]{10}),\quad K(\sqrt[3]{130}),\quad K(\sqrt[3]{150}),\quad K(\sqrt[3]{160}) \quad \text{et} \quad K(\sqrt[3]{12}).$$

Il existe ainsi un nombre infini de corps $K(\theta)$, *où l'unité fondamentale de l'anneau* $R(1,\theta,\bar{\theta})$ *est de la forme*

$$|x\sqrt[3]{ac^2}+y\sqrt[3]{bd^2}|^3.$$

Car nous pouvons choisir dans (14) le nombre bd^2 impair et divisible par un nombre premier de la forme $8t-1$ (ou de la forme $8t+5$). Alors, si nous choisissons le nombre impair y tel que $bd^2y^3-1=ac^2x^3$ ne soit pas divisible par 8, le nombre ac^2 est pair.

Nous pouvons aussi démontrer le théorème :

Il existe un nombre infini de corps $K(\theta)$, *où l'unité fondamentale de l'anneau* $R(1,\theta,\bar{\theta})$ *est de la forme*

$$|x\sqrt[3]{ac^2}+y\sqrt[3]{bd^2}|^{\frac{3}{2}}.$$

En effet, d'après le n° **20**, nous avons seulement à choisir N impair, ce qui est toujours le cas lorsque Y est impair, puisque $4Y=ac^2N^3$.

Les solutions de l'équation (7) sont données par

$$|X_n| + \sqrt{37}\,|Y_n| = (26 + 5\sqrt{37})^n.$$

Si n est impair, le nombre Y_n est toujours impair, comme

$$|Y_n| = 5^n.37^{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{2} 5^{n-2}.37^{\frac{n-3}{2}}.26^2 + \dots.$$

Pour $n = 1$, nous aurons

$$X_1 = \pm 26, \qquad Y_1 = 5 \qquad \text{et} \qquad ac^2 N^3 = 20, \qquad bd^2 M^3 + \frac{5}{4} ac^2 N^3 = \pm 26;$$

donc $ac^2 = 20$, $N = 1$ et $bd^2 M^3 = 1$ ou $= -51$. Dans le dernier cas on aura

$$bd^2 = 51, \qquad M = -1.$$

Donc $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$ et

$$(-\sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{2601} - \sqrt[3]{1020})^2 = 71.\sqrt[3]{51} - 97.\sqrt[3]{20}.$$

Le nombre

$$(71.\sqrt[3]{51} - 97.\sqrt[3]{20})^{\frac{3}{2}} = 4591 + 123.\sqrt[3]{2550} - 168.\sqrt[3]{52020}$$

est donc l'unité fondamentale de l'anneau R dans le corps $K(\sqrt[3]{2550})$.

25. Supposons maintenant dans (1) que $C = 3$. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$\frac{1}{3}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3 = \eta^2, \tag{15}$$

où η est une unité du corps $K(\theta)$, et $0 < \eta < 1$. Cette équation entraîne

$$x\sqrt[3]{\frac{A}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{B}{3}} = \eta(\sqrt[3]{\eta})^{-1};$$

donc

$$\sqrt[3]{\eta} = \frac{X + Y\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z\sqrt[3]{a^2cbd^2}}{x\sqrt[3]{\frac{A}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{B}{3}}},$$

et par suite

$$\sqrt[3]{\eta} = x_1\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}},$$

où X, X, Z et x_1, y_1, z_1 sont des nombres entiers (rationnels).

La norme de η est égale à

$$\frac{1}{9}(x_1^3a^2c + y_1^3b^2d + z_1^3ac^2bd^2 - 3abcdx_1y_1z_1)^3;$$

donc

$$x_1^3a^2c + y_1^3b^2d + z_1^3ac^2bd^2 - 3x_1y_1z_1abcd = 9. \tag{16}$$

Nous avons à examiner l'équation suivante :

$$\left(x_1\sqrt[3]{\frac{a^2c}{9}} + y_1\sqrt[3]{\frac{b^2d}{9}} + z_1\sqrt[3]{\frac{ac^2bd^2}{9}}\right)^2 = x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}.$$

Elle entraîne

$$z_1^2cd = -2x_1y_1. \tag{17}$$

A cause de l'équation (16) les nombres x_1 et d, ainsi que les nombres y_1 et c, sont premiers entre eux (cd n'est pas divisible par 3). Donc si δ est le plus grand commun diviseur de x_1 et y_1, il résulte de (17) que δ divise z_1. Or, à cause de l'équation (16), le plus grand commun diviseur de x_1, y_1, z_1 est égal à 1; donc $\delta = 1$. Par suite, l'équation (17) entraîne ou

$$\frac{2x_1}{c} = \pm N^2, \qquad \frac{y_1}{d} = \mp M^2, \qquad z_1 = NM,$$

ou

$$\frac{x_1}{c} = \pm N^2, \qquad \frac{2y_1}{d} = \mp M^2, \qquad z_1 = NM,$$

N et M étant des nombres entiers premiers entre eux. Il suffit évidemment de prendre le premier système. En introduisant ces valeurs dans l'équation (16), nous aurons

$$\pm\frac{1}{8}a^2c^4N^6 \pm b^2d^4M^6 + \frac{5}{2}ac^2bd^2N^3M^3 = 9,$$

ou

$$\pm\frac{1}{9}\left(bd^2M^3 \pm \frac{5}{4}ac^2N^3\right)^2 \mp 3\left(\frac{ac^2N^3}{4}\right)^2 = 1.$$

Comme $R^2 + 1$ est indivisible par 3, il faut prendre le signe supérieur ; donc

$$\frac{1}{9}\left(bd^2M^3 + \frac{5}{4}ac^2N^3\right)^2 - 3\left(\frac{ac^2N^3}{4}\right)^2 = 1. \tag{18}$$

Pour résoudre complètement l'équation (15) nous avons ainsi à résoudre l'équation de Fermat :

$$X^2 - 3Y^2 = 1. \tag{19}$$

Si X, Y est un système de solutions de cette équation, les nombres a, b, c, d, N et M sont uniformément déterminés par les équations

$$4Y = ac^2N^3, \qquad 3X - 5Y = bd^2M^3.$$

Comme plus haut, on voit que $4Y$ et $3X - 5Y$ sont premiers entre eux. Le cas de $ac^2 = 1$ ne se présente jamais. Car, si $Y = \frac{1}{4}N^3 = 2N_1^3$, l'équation (19) devient

$$X^2 - 12N_1^6 = 1,$$

d'où

$$|X| \pm 1 = 6N_2^6, \qquad |X| \mp 1 = 2N_3^6;$$

donc

$$\pm 1 = 3N_2^6 - N_3^6,$$

équation impossible, puisque $u^3 = 3v^3 - w^3$ est impossible.

Quand on a déterminé les nombres a, b, c, d, N et M, les nombres x_1, y_1, z_1 sont donnés par les équations

$$x_1 = -\frac{1}{2}cN^2, \qquad y_1 = dM^2, \qquad z_1 = NM.$$

Chaque système de solutions de (19) donne ainsi une solution de l'équation (15). Le système X, Y donne la même solution que le système $-X$, $-Y$. Il suffit donc de prendre Y positif. Le système $-X$, Y donne une autre solution que le système X, Y. Comme la valeur de Y croît, on ne peut jamais tomber deux fois sur le même système a, b, c, d, N, M. Ainsi chaque système X, Y donne une nouvelle solution de (15). D'après le n° **17** il existe au plus une seule solution de (15) dans un corps donné.

Donc, il y a une infinité de corps K(θ) *dans lesquels l'équation* (15) *subsiste.*

24. Si nous supposons dans (15) que

$$\eta = \eta_1^2,$$

où η_1 est une unité positive du corps, il vient

$$x\sqrt[3]{\frac{A}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{B}{3}} = \eta_1^{\frac{3}{2}} = \eta_1\sqrt[3]{\eta_1},$$

ou

$$\sqrt[3]{\eta_1} = \left(x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}\right)(X_1 + Y_1\sqrt[3]{ac^2b^2d} + Z_1\sqrt[3]{a^2cbd^2}),$$

où X_1, Y_1, Z_1 sont entiers. Donc il résulte

$$\sqrt[3]{\eta_1} = x_2\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y_2\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}} + z_2\sqrt[3]{\frac{a^2cb^2d}{3}},$$

où x_2, y_2, z_2 sont des nombres entiers, qui sont reliés avec x_1, y_1, z_1 par les équations

$$(20) \qquad \begin{cases} abz_2^2 + 2x_2y_2 = z_1 = NM, \\ dy_2^2 + 2x_2z_2ac = y_1 = dM^2, \\ cx_2^2 + 2y_2z_2bd = x_1 = -\frac{1}{2}cN^2. \end{cases}$$

Si c est impair, il faut que N soit pair, comme $x_1 = -\frac{1}{2}cN^2$.

Si c est pair, x_1 est aussi pair, comme $x_1 = cx_2^2 + 2y_2z_2bd$. Alors, puisque $x_1 = -\frac{1}{2}cN^2$ et $\frac{c}{2}$ est impair, N doit être pair. *Ainsi, N est toujours pair.*

En posant $N = 2H$, l'équation (18) peut s'écrire

$$X^2 - 1 = 12a^2c^4H^6.$$

Cette équation entraîne

$$|X| \pm 1 = 2f^2N_1^6, \qquad |X| \mp 1 = 6g^2N_2^6,$$

où les nombres fN_1 et gN_2 sont premiers entre eux, $fg = ac^2$ et $N_1N_2 = H$, et par suite

$$(21) \qquad \pm 1 = f^2N_1^6 - 3g^2N_2^6.$$

Ici il faut évidemment prendre le signe supérieur.

25. Il résulte des deux numéros précédents que le problème de résoudre complètement l'équation

$$A x^3 + B y^3 = 3 \tag{22}$$

est réduit à celui de résoudre l'équation

$$A_1 x^3 + B_1 y^3 = 1.$$

En effet, nous aurons le procédé suivant pour résoudre l'équation (22). Nous déterminons l'unité fondamentale du corps K (θ), soit ξ, et nous examinons si ξ ou ξ^2 est de la forme

$$\frac{1}{3}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3.$$

Dans ce cas le problème est résolu. Dans le cas contraire, il faut chercher s'il existe une unité η_1 telle que

$$\eta_1^3 = \frac{1}{3}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3. \tag{23}$$

Or, d'après le numéro précédent, cette équation entraîne

$$1 = f^2 N_1^6 - 3 g^2 N_2^6, \tag{24}$$

où $fg = A$ ou bien $fg = B$. Nous aurons ainsi à résoudre un nombre fini d'équations de la forme (24). Si l'équation (23) subsiste, il existe toujours un système de nombres f, g tels que l'équation (24) soit possible. Alors les nombres N et M sont déterminés par les équations

$$|N| = \left|\frac{1}{3} b d^2 M^3 + \frac{5}{12} a c^2 N^3\right| = f^2 N_1^6 + 3 g^2 N_2^6,$$
$$4 N = a c^2 N^3 = 8 f g N_1^3 N_2^3.$$

et enfin les nombres x_2, y_2, z_2 par les équations (20).

26. L'équation (18) peut s'écrire aussi

$$3(b d^2 M^3)^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2} a c^2 N^3 - 5 b d^2 M^3\right)^2 = 2.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut que tous les facteurs premiers de bd soient de la forme $8t + 1$ ou de la forme $8t + 3$. Nous avons ainsi les théorèmes spéciaux :

Si ac est pair, si bd est divisible par un nombre premier de la forme $8t-1$ ou de la forme $8t+5$, et si l'équation

$$ac^2x^3 + bd^2y^3 = 3$$

subsiste, l'unité fondamentale du corps $K(\theta)$ est égale à

$$\frac{1}{3}\left[x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}\right]^3.$$

Lorsque ac et bd sont tous les deux divisibles par un nombre premier de la forme $8t-1$ ou de la forme $8t+5$, on a le même résultat.

Ainsi il résulte des équations

$$5-2=3, \quad 7-4=3, \quad 25-22=3, \quad 28-25=3, \quad 16-13=3,$$

que les nombres

$$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})^3, \quad \frac{1}{3}(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})^3, \quad \frac{1}{3}(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{22})^3,$$

$$\frac{1}{3}(\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{25})^3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{13})^3$$

sont les unités fondamentales dans les corps

$$K(\sqrt[3]{20}), \quad K(\sqrt[3]{14}), \quad K(\sqrt[3]{110}), \quad K(\sqrt[3]{140}) \quad \text{et} \quad K(\sqrt[3]{52}).$$

Comme dans le n° **22**, on voit qu'*il existe un nombre infini de corps $K(\theta)$ où l'unité fondamentale est de la forme*

$$\frac{1}{3}\left[x\sqrt[3]{ac^2} + y\sqrt[3]{bd^2}\right]^3.$$

Nous pouvons aussi démontrer le théorème suivant :

Il existe un nombre infini de corps $K(\theta)$ où l'unité fondamentale est de la forme

$$\left[x\sqrt[3]{\frac{ac^2}{3}} + y\sqrt[3]{\frac{bd^2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

En effet, d'après le n° **24**, nous avons seulement à choisir N impair, ce qui est toujours le cas lorsque Y est impair, puisque $4Y = ac^2N^3$.

Les solutions de l'équation (19) sont données par

$$|X_n| + \sqrt{3}\,|Y_n| = (2+\sqrt{3})^n.$$

Si n est impair, le nombre Y_n est aussi pair, comme

$$|Y_n| = 3^{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{2}.3^{\frac{n-3}{2}}.2^2 + \ldots.$$

Pour $n=1$, nous aurons $X_1 = \pm 2$, $Y_1 = 1$ et $ac^2N^3 = 4$ et $bd^2M^3 + 5 = \pm 6$. En prenant le signe supérieur, nous aurons $bd^2 = 1$ et $M = 1$, et enfin $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$ et

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Le nombre

$$\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} - 1$$

est donc l'unité fondamentale dans le corps $K(\sqrt[3]{2})$.

En prenant le signe inférieur, nous aurons $bd^2 = 11$, $M = -1$, et enfin $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $z_1 = -1$ et

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{121}{9}} - \sqrt[3]{\frac{44}{9}}\right)^2 = 5\sqrt[3]{\frac{11}{3}} - 7\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Le nombre

$$\left(5\sqrt[3]{\frac{11}{3}} - 7\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1 + 4906\vartheta - 1759\vartheta^2} = 23 + 3\sqrt[3]{22} - 4(\sqrt[3]{22})^2$$

est donc l'unité fondamentale dans le corps $K(\sqrt[3]{22})$.

NOTE I.

1. *Méthode pour déterminer l'unité fondamentale de l'anneau* R. — On peut toujours trouver une solution x, y, z de l'équation

$$x^3 + fg^2y^3 + f^2gz^3 - 3fgxyz = 1$$

par des essais ([1]). Ainsi on aura une unité η de l'anneau $R(1, \theta, \bar{\theta})$ dans le corps $K(\theta)$, où $\theta^3 = fg^2$. Alors on peut déterminer l'unité fondamentale ζ de l'anneau de la manière suivante. Nous pouvons supposer que $0 < \eta < 1$ et $0 < \zeta < 1$. Si η n'est pas égal à ζ, nous avons

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 < \eta = \zeta^m \leqq \zeta^2 < 1, \\ 1 < |\zeta'|^2 = |\zeta''|^2 \leqq |\eta'| = |\eta''|. \end{cases}$$

De plus, nous avons

$$\frac{1}{\eta} = \eta'\eta'' = |\eta'|^2.$$

Posons

$$\zeta = x + y\theta + z\bar{\theta},$$

x, y et z étant entiers. Alors, si ρ est une racine de l'équation $\rho^2 + \rho + 1 = 0$, on a

$$\zeta' = x + y\rho\,\theta + z\rho^2\bar{\theta},$$
$$\zeta'' = x + y\rho^2\theta + z\rho\,\bar{\theta}.$$

Il suit de là

$$x = \frac{1}{3}(\zeta + \zeta' + \zeta''),$$

$$y = \frac{1}{3\theta}(\zeta + \zeta'\rho^2 + \zeta''\rho),$$

$$z = \frac{1}{3\bar{\theta}}(\zeta + \zeta'\rho + \zeta''\rho^2),$$

d'où il résulte, en vertu des inégalités (1),

$$|x| < \frac{1}{3}(1 + 2|\sqrt{\eta'}|),$$

$$|y| < \frac{1}{3\theta}(1 + 2|\sqrt{\eta'}|),$$

$$|z| < \frac{1}{3\bar{\theta}}(1 + 2|\sqrt{\eta'}|).$$

Il est évident que ζ est complètement déterminée par ces inégalités.

2. *La relation entre l'unité fondamentale du corps et l'unité fondamentale de l'anneau* $R(1, \theta, \bar{\theta})$. — Soit ξ l'unité fondamentale

([1]) Cf. aussi R. DEDEKIND, *loc. cit.*, p. 118-120.

du corps, $0 < \xi < 1$. Dans un corps de première espèce on a évidemment $\zeta = \xi$. Dans un corps de seconde espèce on a $\zeta = \xi$ ou $\zeta = \xi^2$. Nous allons le démontrer. Soit

$$\zeta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\vartheta) = \xi^m,$$

donc

$$x = \xi^m + (\xi')^m + (\xi'')^m, \tag{2}$$

où ξ' et ξ'' sont les conjugués de ξ. Les trois nombres ξ, ξ', ξ'' sont contenus dans le corps du sixième degré $\Omega(\sqrt{-3}, \theta)$. Dans le corps $K(\theta)$ nous avons [1]

$$(3) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^2,$$

où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$ sont des idéaux premiers différents et du premier degré. Donc nous avons dans le corps $\Omega(\sqrt{-3}, \theta)$

$$(\sqrt{-3})^2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^2,$$

ce qui entraîne

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^2,$$

où $\mathfrak{P}$ est un idéal premier du premier degré dans Ω. (Comme Ω est un corps de Galois, il résulte de là que (3) est égal au produit de six idéaux premiers dans Ω.) Alors tout nombre α de Ω indivisible par $\mathfrak{P}$ satisfait à la congruence

$$\alpha^{N(\mathfrak{P})-1} = \alpha^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Si l'on choisit dans (2) $m = 2$, on aura donc

$$x \equiv 3 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}},$$

ou

$$x \equiv 0 \pmod{3}.$$

Lorsque x est divisible par 3, les nombres y et z le sont aussi, d'après le n° **2**. Ainsi il suffit de prendre $m = 2$.

3. *La relation entre l'unité fondamentale du corps et l'unité fondamentale de l'anneau* $R_1(1, \theta, \theta^2)$. — Soit ξ l'unité fondamen-

---

[1] *Voir* R. DEDEKIND, *loc. cit.*

tale du corps ($0 < \xi < 1$) et

$$\xi = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\theta).$$

Dans l'équation

$$(x + y\theta + z\theta)^n = X + Y\theta + Z\theta,$$

n entier positif, le nombre Z a la valeur suivante :

$$\begin{aligned} & g\left[\binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 D + \dots\right] \\ + \binom{n}{1}z & \left[x^{n-1} + \binom{n-1}{3}x^{n-4}y^3 D + \dots\right] \\ + \binom{n}{2}z^2 fg & \left[\binom{n-2}{1}x^{n-3}y + \binom{n-2}{4}x^{n-6}y^4 D + \dots\right. \\ + \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a donc

$$Z \equiv nz \pmod{g}.$$

Soit μ le plus grand commun diviseur de z et g. Alors $n = \frac{g}{\mu}$ est le plus petit nombre positif tel que $(x + y\theta + z\theta)^n$ appartienne à l'anneau $R_1(1, \theta, \theta^2)$. Par suite, quand m est le plus petit nombre (positif) tel que ξ^m appartienne à l'anneau $R_1(1, \theta, \theta^2)$, on a ou $m = \frac{g}{\mu}$ ou $m = \frac{2g}{\mu}$. Alors, le nombre ξ^m est évidemment l'unité fondamentale de cet anneau.

NOTE II.

Démonstration simplifiée du théorème : Il n'y a au plus qu'une seule unité (positive et $\neq 1$) de la forme $c + a\sqrt[3]{D}$ dans le corps cubique K$(\sqrt[3]{D})$. — Soit ζ_1 l'unité fondamentale de l'anneau $R_1(1, \theta, \theta^2)$. Pour trouver les unités (positives) de la forme $c + a\theta$, (a et c entiers rationnels), on a à examiner la suite

$$\zeta_1, \quad \zeta_1^2, \quad \zeta_1^3, \quad \zeta_1^4, \quad \dots$$

(*cf.* le n° **8**). Soit

$$\eta = c + a\theta = \zeta_1^m$$

le premier terme de la suite ayant cette forme, et soit

$$\varepsilon_1^M = C + A\theta$$

une autre unité de la même forme; donc $M > m \geq 1$. Soit encore $M = nm + r$, avec $0 < r \leq m - 1$. Car, à cause du lemme I, le cas $r = 0$ est impossible. Posons

$$\varepsilon = \varepsilon_1^r = x + y\theta + z\theta^2,$$

où x, y et z sont entiers; z est différent de zéro.

Alors de l'équation

$$\varepsilon_1^M = C + A\theta = (c + a\theta)^n (x + y\theta + z\theta^2)$$

il suit, en comparant les coefficients de θ^2,

$$\begin{aligned} &x\left[\binom{n}{2}c^{n-2}a^2 + \binom{n}{5}c^{n-5}a^5 D + \ldots\right] \\ &+ y\left[\binom{n}{1}c^{n-1}a + \binom{n}{4}c^{n-4}a^4 D + \ldots\right] \\ &+ z\left[c^n + \binom{n}{3}c^{n-3}a^3 D + \ldots\right] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation entraîne

$$(1) \qquad z \equiv 0 \pmod{a}.$$

Or, nous avons évidemment

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\eta < \varepsilon < 1, \\ &1 < |\varepsilon'| = |\varepsilon''| < |\eta'| = |\eta''|, \\ &|\eta'| = \left|\sqrt{c^2 - ac\theta + a^2\theta^2}\right| < \sqrt{3}(1 + |a|\theta), \end{aligned} \right.$$

puisque

$$|c| = |\eta - a\theta| < 1 + |a|\theta.$$

Nous avons de plus

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y\theta + z\theta^2, \\ \varepsilon' &= x + y\theta\rho + z\theta^2\rho^2, \\ \varepsilon'' &= x + y\theta\rho^2 + z\theta^2\rho, \end{aligned}$$

ρ étant une racine de l'équation $\rho^2 + \rho + 1 = 0$. Donc

$$3z\theta^2 = \varepsilon + \varepsilon'\rho + \varepsilon''\rho^2.$$

et à cause de (1)

$$3|\alpha|\vartheta^2 = 3|\varepsilon|\vartheta^2 < 1 + 2|\varepsilon'|,$$

d'où, en profitant des inégalités (2),

$$3|\alpha|\vartheta^2 < 1 + 2\sqrt{3}\,(1 + |\alpha|\vartheta).$$

Or, pour $|\alpha| \geqq 1$ et $D \geqq 8$, nous avons

$$3|\alpha|\vartheta^2 > 1 + 2\sqrt{3}\,(1 + |\alpha|\vartheta).$$

Le seul cas avec $D < 8$ et $|\alpha| = 1$ est $D = 2^3 - 1 = 7$.

Cette inégalité subsiste encore pour $|\alpha| \geqq 2$ et $D \geqq 5$.

Le théorème est ainsi démontré pour toutes les valeurs de D, sauf pour $D = 2, 3, 4, 7$. Or, on démontre facilement que les unités fondamentales des corps $K(\sqrt[3]{2})$, $K(\sqrt[3]{3})$ et $K(\sqrt[3]{7})$ sont $\sqrt[3]{2} - 1$, $\sqrt[3]{9} - 2$, $2 - \sqrt[3]{7}$. Ainsi, en appliquant le lemme I, on voit que le théorème est aussi vrai pour ces dernières valeurs de D.

Cette méthode est beaucoup plus courte que celle du paragraphe II. Cependant, elle ne donne pas un résultat aussi précis.

Originalement, c'est en généralisant cette méthode que j'ai démontré les théorèmes du n° **17**. Dans un travail ultérieur j'exposerai cette première démonstration qui est d'ailleurs beaucoup plus longue que celle que je viens de donner ici.