JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MILLOUX

Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 345-401.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__345_0>

Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières.

PAR H. MILLOUX.

Les théorèmes que M. Picard a découverts en 1879, le premier sur les valeurs d'une fonction entière, le second sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel, ont fait naître une foule de travaux.

M. Borel a donné, en 1896, une démonstration élémentaire du premier théorème. Une méthode analogue a été employée par M. Schottky, en 1904, pour démontrer le second théorème. De nombreux travaux se sont groupés autour de la propriété que M. Landau a établie en 1904, et qui complète le premier théorème de M. Picard.

La théorie des familles normales de fonctions, édifiée par M. Montel, a permis de faire une étude d'ensemble des fonctions analytiques à valeurs exceptionnelles, et elle s'est montrée très féconde. MM. Montel et Julia en ont déduit, entre autres, de nombreuses propriétés des fonctions uniformes au voisinage d'un point essentiel ; ils remplacent le domaine qui entoure ce point par une infinité de domaines partiels qui s'en rapprochent peu à peu, et substituent, à la fonction étudiée, la famille des fonctions obtenues en faisant la représentation conforme de ces domaines partiels sur un domaine fixe.

Ces domaines partiels sont de forme connue *à priori* ; ils ne dépendent pas de la fonction considérée. Ce sont, par exemple, les cercles homothétiques, par rapport à l'origine, d'un cercle fixe, les rapports d'homothétie étant $\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^n, \ldots$, et σ un nombre fixe supérieur à l'unité. Il y a intérêt à réduire les dimensions de ces domaines partiels; la théorie des familles normales de fonctions n'a pas permis jusqu'à présent de le faire.

Dans le Chapitre II, j'applique *directement* le théorème de M. Schottky à l'étude, dans un domaine partiel D, d'une fonction méromorphe $\varphi(z)$ à valeur asymptotique. Les dimensions du domaine partiel D sont plus petites que celles des domaines envisagés par MM. Montel et Julia, et elles dépendent de la fonction $\varphi(z)$. J'obtiens des propriétés de la fonction $\varphi(z)$ dans certains domaines D, au lieu de propriétés valables dans un ensemble de domaines partiels se rapprochant indéfiniment du point essentiel. Ces propriétés de la fonction, et les dimensions du domaine D, dépendent simplement de la manière dont la fonction $\varphi(z)$ tend vers sa valeur asymptotique sur le chemin de détermination, et, dans le cas d'une fonction entière, du maximum $M(r)$ du module de la fonction sur le cercle de centre origine et de rayon r. Les théorèmes de M. Julia, qui présentent un caractère qualitatif, se déduisent en particulier des résultats quantitatifs auxquels j'aboutis.

Une inégalité découverte par M. Carleman m'a été particulièrement précieuse. Je l'applique, en outre, dans le premier Chapitre, à l'étude de certaines suites de fonctions holomorphes non bornées.

Dans le troisième Chapitre, je m'occupe plus particulièrement des fonctions entières d'ordre fini. J'établis une propriété nouvelle de la croissance de ces fonctions dans des angles. Je retrouve et précise un important complément apporté récemment par M. Bieberbach au théorème de M. Picard. J'applique brièvement ces diverses propositions à quelques fonctions particulières.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans deux Notes insérées aux *Compte rendus de l'Académie des Sciences*, le 5 mars et le 28 mai 1923.

Je tiens à remercier particulièrement ici M. Borel, qui a contribué pour une large part à l'orientation de mes recherches, et M. Montel, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et près de qui j'ai toujours trouvé le plus bienveillant accueil et une aide constante. Qu'il me soit

permis d'exprimer toute la reconnaissance que j'ai contractée envers MM. les professeurs de l'Université de Lille, pendant et après la dure occupation allemande, et envers MM. les professeurs de l'Université de Paris, qui, en réservant une bourse à un étudiant venu d'une autre université, lui ont permis de réaliser son but.

CHAPITRE I.

CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS HOLOMORPHES NON BORNÉES.

1. Je rappelle d'abord une inégalité établie par M. Carleman :

Soit un domaine limité par deux segments de droite AB *et* AC, *faisant entre eux l'angle* $\alpha\pi$, *et un arc de courbe de Jordan* BC, *dont tous les points sont situés à une distance de* A *inférieure à* R. *Soit, d'autre part,* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans ce domaine, continue sur la frontière du domaine, et dont le module est inférieur à* M *sur* AB *et* AC, *et à* m *sur l'arc de courbe* BC. *En un point* ζ *de la bissectrice de l'angle* A, *intérieur au domaine, et situé à la distance* r *de* A, *la fonction* $f(z)$ *vérifie l'inégalité*

$$|f(\zeta)| < M^{1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} m^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

2. Signalons deux applications de cette inégalité, que nous utiliserons souvent :

1° Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle Γ de centre O et de rayon 1, et dont le module est inférieur à une quantité M supérieure à 1 dans le cercle, et à une quantité m inférieure à 1 dans un cercle Γ' tangent intérieurement au premier, et passant par le point O. En appliquant l'inégalité de M. Carleman à un triangle ayant un sommet sur la circonférence Γ et les deux autres sur Γ', on obtient l'inégalité

$$|f(z)| < M^{1-e^{-s}} m^{e^{-s}}, \tag{1}$$

valable dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ (¹).

(¹) On peut préciser le raisonnement de M. Carleman dans le cas où l'arc de

2° Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle de centre O et de rayon 1, et dont le module est inférieur à une quantité M supérieure à 1 dans le cercle, et à une quantité m inférieure à 1 sur un arc de courbe continu, intérieur à la circonférence, et joignant le point O à un point B de cette circonférence. Quitte à remplacer m par $2m$, nous pouvons supposer, en raison de la continuité de la fonction $f(z)$ dans le cercle, que cet arc de courbe est une ligne brisée sans point double. Choisissons les deux axes de coordonnées Ox et Oy de façon que le point B ait pour affixe $z=1$. Parcourons la ligne BO dans le même sens à partir de B, et désignons par C le premier point d'abscisse $\frac{1}{4}$ rencontré sur cette ligne. Nous pouvons supposer que son ordonnée est positive ou nulle.

Soient ζ un point quelconque du cercle de centre $-\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{4}$, et A un point situé sur la circonférence de centre $-\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$, choisi de façon que Aζ soit la bissectrice de l'angle BAC. Appliquons l'inégalité de M. Carleman : la fonction $f(z)$ vérifie, au point ζ, l'inégalité

$$|f(\zeta)| < M^{1-8^{-13,4}} m^{8^{-13,4}}.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de M. Carleman on obtient, pour le module de la fonction $f(z)$ à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, la limitation

$$(2) \qquad |f(z)| < M^{1-e^{-40}} m^{e^{-40}}.$$

3. Je vais appliquer l'inégalité de M. Carleman à l'étude de certaines suites de fonctions holomorphes non bornées.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine connexe borné D, et dont le module est inférieur à une quantité M supérieure

courbe BC est un arc de cercle tangent aux deux côtés AB et AC, et tournant sa convexité vers le point A ; l'inégalité de M. Carleman est encore vérifiée lorsqu'on désigne par R non plus la distance maxima, mais la distance minima de l'arc de cercle BC au point A. En partant de cette propriété, on obtient l'inégalité

$$|f(z)| < M^{1-e^{-3,21}} m^{e^{-3,21}},$$

valable dans les mêmes conditions que l'inégalité (1), et plus avantageuse.

à 1 dans D, et à une quantité m inférieure à 1 sur un arc de courbe continu C intérieur au domaine D. Traçons une circonférence intérieure à ce domaine, et dont le centre est un point de l'arc de courbe C. L'inégalité (2) est vérifiée dans la circonférence concentrique et de rayon moitié; en appliquant l'inégalité de M. Carleman, nous voyons que dans tout domaine fermé D′ intérieur au domaine D, le module de $f(z)$ est inférieur à $M^{1-\lambda}m^{\lambda}$; λ ne dépend que de la configuration des domaines D et D′, et de l'arc de courbe C.

On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Soit $f_1(z) f_2(z) \ldots f_n(z), \ldots$ une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine connexe borné D, *et qui converge uniformément, sur un arc de courbe continu* C *intérieur au domaine* D, *vers une fonction $f(z)$ holomorphe dans* D. *On pose*

$$|f(z) - f_n(z)| < m_n$$

sur l'arc de courbe C. *Soit* M_n *la borne supérieure de* $|f(z) - f_n(z)|$ *dans* D. *Si, quelque petit que soit le nombre positif* ε, *l'inégalité* $M_n < m_n^{-\varepsilon}$ *est vérifiée à partir d'une certaine valeur de* n, *la suite de fonctions considérées converge uniformément dans le domaine ouvert* D.

Dans tout domaine fermé D′ *intérieur au domaine* D, *l'inegalité*

$$|f(z) - f_n(z)| < m_n^{\lambda}$$

est vérifiée à partir d'une certaine valeur de n; λ *ne dépend que de la configuration des domaines* D *et* D′ *et de l'arc de courbe* C.

On peut supposer que l'arc de courbe C est un morceau de la frontière du domaine D, à condition que les fonctions considérées soient continues sur cette partie de la frontière.

Ce théorème généralise un théorème récent de M. Ostrowski [1], dont on obtient l'énoncé en remplaçant, dans l'énoncé précédent « arc de courbe C » par « domaine intérieur à D ».

---

[1] ALEXANDER OSTROWSKI, *Ueber vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen* (*Abhandlungen aus dem Math. Seminär der Hamburgischen Universität*, Band 1, Heft 3-4, 1922, p. 327).

4. Dans le théorème précédent, nous avons supposé que la suite des fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ converge sur un arc de courbe. Nous allons voir que la convergence uniforme est assurée dans le domaine D, lorsque la suite de fonctions considérée converge en une suite discontinue de points, satisfaisant à certaines conditions simples. M. Montel considérait comme probable l'existence d'un résultat de cette nature.

Soit une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ rangés par ordre de modules décroissants. Une telle suite sera dite *exponentiellement compacte, d'ordre supérieur à 2, autour de son point limite* O, si l'on a

$$(3) \qquad \log\log\left|\frac{z_k}{z_{k+1}-z_k}\right| = \frac{1}{F(|z_k|)},$$

où $F(u)$ est une fonction du même signe que u, tendant vers zéro avec u, de même que $\frac{F(u)}{u}$. Nous désignerons par $\Phi(v)$ la fonction inverse de $F(u)$, considérée pour v petit. C'est une fonction du même signe que v, tendant vers zéro avec v, de même que $\frac{v}{\Phi(v)}$.

Nous allons établir une propriété simple de la suite de points considérée.

D'après l'égalité (3), $\left|\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k}\right|$ tend vers zéro avec z_k. Les points de la suite sont assez rapprochés et se succèdent régulièrement. Quitte à supprimer un nombre fini de ces points, nous pouvons supposer $|z_k|$ supérieur à la moitié de $|z_{k-1}|$ à partir de $k=1$.

Proposons-nous de rechercher jusqu'à quelle distance du point limite O l'expression $\left|\frac{z_k}{z_{k+1}-z_k}\right|$ est supérieure ou égale à une quantité positive assez grande μ. En d'autres termes, recherchons le minimum i de k satisfaisant à l'inégalité

$$(4) \qquad \left|\frac{z_k}{z_{k+1}-z_k}\right| \geqq \mu.$$

Cette inégalité n'est plus vérifiée pour $k=i-1$, de sorte que

$$\left|\frac{z_{i-1}}{z_i-z_{i-1}}\right| < \mu.$$

En utilisant l'égalité (3), on obtient

$$2|z_i| > |z_{i-1}| > \Phi\left(\frac{1}{\log\log\mu}\right)$$

ou

(5) $$|z_i| > \frac{\psi(\mu)}{\log\log\mu}.$$

La fonction $\psi(\mu)$ croît indéfiniment avec μ, plus lentement que $\log\log\mu$. Elle est déterminée lorsque la fonction $F(u)$ est déterminée.

En résumé, l'inégalité

$$\left|\frac{z_k}{z_{k+1}-z_k}\right| \geqq \mu$$

est vérifiée pour tous les points z_k de la suite considérée, distants du point limite O *de moins de*

$$\frac{\psi(\mu)}{\log\log\mu}.$$

5. Soit maintenant $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine connexe borné D, et dont le module est limité par M dans ce domaine. Soit z_0 un point intérieur à D, et situé à une distance de la frontière de ce domaine supérieure à d. Par application de l'intégrale de Cauchy, on sait que si z est un point distant de z_0 de moins de $\frac{d}{2}$, on a l'inégalité

(6) $$|f(z)-f(z_0)| < \frac{2M}{d}|z-z_0|.$$

Supposons le module de la fonction $f(z)$ inférieur à m en une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, exponentiellement compacte, d'ordre supérieur à 2, autour d'un point limite O intérieur au domaine D ou situé sur la frontière de ce domaine; dans ce dernier cas, supposons en outre que la suite de points considérée est comprise dans un angle A intérieur à un angle A′ intérieur au domaine D. En désignant par d_k la distance du point z_k à la frontière de D, nous avons $d_k > \frac{|z_k|}{h}$, h étant une constante dépendant des angles A et A′.

D'après les conditions imposées à la suite de points, le cercle de centre z_k et de rayon $\frac{d_k}{2} > \frac{|z_k|}{2h}$ contient à son intérieur le point z_{k+1}. Cette propriété est du moins vérifiée lorsque k est assez grand. En supprimant un nombre fini de points de la suite, nous pouvons la supposer vérifiée à partir de $k = 1$.

Appliquons l'inégalité (6) en prenant pour point z_0 le point z_k et pour point z un point quelconque du segment de droite $z_k\,z_{k+1}$. Nous obtenons l'inégalité

$$|f(z) - f(z_k)| < 2Mh\left|\frac{z_{k+1} - z_k}{z_k}\right|.$$

Par hypothèse $|f(z_k)|$ est inférieur à m. Si l'inégalité

$$\left|\frac{z_k}{z_{k+1} - z_k}\right| > \frac{2Mh}{m} = \mu \tag{7}$$

est vérifiée, le module de $f(z)$ est inférieur à $2m$ sur tout le segment de droite $z_k\,z_{k+1}$. D'après le résultat obtenu au paragraphe précédent, l'inégalité (7) a lieu pour tous les points z_k situés à une distance du point limite O inférieure à $\frac{\psi(\mu)}{\log\log\mu}$. Soit z_i le point le plus éloigné de O, pour lequel l'inégalité (7) est vérifiée. Traçons un cercle de centre z_i et de rayon $\frac{|z_i|}{h}$. Ce cercle est intérieur au domaine D. Sur une ligne brisée partant du centre z_i et aboutissant à la circonférence, le module de $f(z)$ est inférieur à $2m$. En vertu de la deuxième application du théorème de M. Carleman, que nous avons faite au n° 2, nous avons, dans le cercle de centre z_i et de rayon $\frac{|z_i|}{2h}$, l'inégalité

$$|f(z)| < M^{1-e^{-10}}(2m)^{e^{-10}} < M\,m^{e^{-10}},$$

dès que M dépasse une certaine valeur numérique.

Traçons, dans le domaine D, un domaine convexe D_1 contenant à son intérieur tous les cercles de centres z_k et de rayons $\frac{|z_k|}{2h}$; supposons ce domaine D_1 assez petit pour que ses dimensions soient inférieures à 1, et construisons, à l'intérieur de D_1, une circonférence fixe C; ce sera par exemple la circonférence concentrique à la plus grande circonférence contenue dans D_1, et de rayon moitié. $|f(z)|$ est inférieur à M dans D_1 et à $M m^{e^{-\omega}}$ dans la circonférence de centre z_i et de rayon $\frac{|z_i|}{2h}$. En appliquant l'inégalité de M. Carleman, nous voyons que l'inégalité

$$|f(z)| < M m^{e^{-3\omega-\frac{a}{|z_i|}}}$$

est vérifiée à l'intérieur de la circonférence C; a est une constante ne dépendant que de la configuration du domaine D_1, et par suite du domaine D et de la suite de points.

De la circonférence C, on passe aisément à un domaine fermé D' intérieur au domaine D. Dans un tel domaine, la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$|f(z)| < M m^{e^{-\lambda-\frac{a}{|z_i|}}},$$

où λ ne dépend que de la configuration des domaines D et D'.

D'après les résultats du numéro précédent, $|z_i|$ est supérieur à

$$\frac{\psi(\mu)}{\log\log\mu} = \frac{\psi\left(\frac{2Mh}{m}\right)}{\log\log\frac{2Mh}{m}}.$$

Dans le domaine D', on a donc l'inégalité

$$\log|f(z)| < \log M + e^{-\lambda - a\frac{\log\log\frac{M}{m}}{\psi\left(\frac{2Mh}{m}\right)}} \log m.$$

Supposons maintenant que la borne supérieure M de la fonction $f(z)$ dans le domaine D ne soit pas trop grande par rapport à $\frac{1}{m}$. Plus précisément, supposons qu'entre ces deux quantités nous ayons l'inégalité

$$\log M < \left[\log\frac{1}{m}\right]^{1-\alpha},$$

α étant une constante positive.

Dans le domaine D', la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$\log|f(z)| < \left[\log\frac{1}{m}\right]^{1-\alpha} - e^{-\lambda}\left[\log\frac{1}{m}\right]^{1-\frac{a}{\psi\left(\frac{1}{m}\right)}}$$

ou

$$\log|f(z)| < -\lambda' \left[\log\frac{1}{m}\right]^{1-\frac{a}{\psi\left(\frac{1}{m}\right)}}.$$

Pourvu que m soit assez grand, la fonction $f(z)$ est très petite en module dans le domaine D'.

6. Du résultat précédent, on déduit le théorème suivant :

Soit $f_1(z) f_2(z) \ldots f_n(z) \ldots$ une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine connexe borné D, *et qui converge uniformément vers une fonction $f(z)$, holomorphe dans* D, *en une suite de points exponentiellement compacte, d'ordre supérieur à* 2, *autour d'un point* O *intérieur à* D, *ou situé sur la frontière de ce domaine : dans ce cas, on suppose en outre que les points de la suite sont compris dans un angle intérieur à un angle intérieur au domaine* D. *En ces points*

$$|f(z) - f_n(z)| < m_n.$$

Soit M_n la borne supérieure de $|f(z) - f_n(z)|$ dans le domaine D. *Si l'on a*

$$\log M_n < \left[\log\frac{1}{m_n}\right]^{1-\alpha},$$

α étant une constante positive, la suite de fonctions considérées converge uniformément vers $f(z)$ dans le domaine ouvert D.

Dans un domaine fermé D' *intérieur au domaine* D, *on a l'inégalité*

$$\log|f(z) - f_n(z)| < -\lambda \left[\log\frac{1}{m_n}\right]^{1-\varepsilon(m_n)},$$

où λ ne dépend que de la configuration des domaines D *et* D' ; *$\varepsilon(m_n)$ est une fonction tendant vers zéro avec m_n ; elle est déterminée par la suite de points exponentiellement compacte, d'ordre supérieur à* 2, *autour du point limite* O.

Ce théorème donne une extension du théorème suivant de M. Vitali [1] :

---

[1] Remarquons que le théorème de M. Vitali ne suppose pas la limite $f(z)$ holomorphe dans le domaine D.

Si une suite de fonctions holomorphes *bornées* dans un domaine connexe D converge en une infinité de points ayant au moins un point limite A intérieur au domaine D, elle converge uniformément dans tout domaine fermé D' intérieur au domaine D.

M. Blaschke a montré que ce résultat subsiste si le point limite A est situé sur la frontière du domaine D, sous certaines conditions que doit remplir la suite de points. Par exemple, si le domaine D est un cercle de rayon 1, en désignant par $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les points où la suite de fonctions converge *a priori*, le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$ doit diverger (1).

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS MÉROMORPHES A VALEUR ASYMPTOTIQUE, LES FONCTIONS ENTIÈRES ET LE THÉORÈME DE M. PICARD.

7. J'utiliserai dans la suite le théorème suivant, dû à M. Schottky : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe, ne prenant pas les valeurs 0 et 1, dans le cercle de centre O et de rayon 1, et dont la valeur en O est a_0. Soit χ le plus petit des nombres

$$|\log(1-a_0)|, \quad |\log a_0|, \quad \left|\log\left(1-\frac{1}{a_0}\right)\right|,$$

les logarithmes étant pris avec leur valeur réduite (2). Dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$\log|f(z)| < \frac{2^{28}}{\sqrt{\chi}} \qquad (3).$$

M. Landau a démontré qu'une fonction holomorphe, ne prenant

(1) W. BLASCHKE, *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen* (*Berichte der Math.-Phys. Klasse der Sächsischen Gesellschaft der Wiss. Zu Leipzig*, Bd LXVII, 1915, p. 194).

(2) C'est-à-dire avec une partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

(3) SCHOTTKY, *Ueber den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen* (*Sitz. der Kg. Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1244).

pas les valeurs o et 1 dans le cercle de centre O et de rayon 1, et dont la valeur a_0 en O est inférieure en module à α, est, dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, limitée en module par un nombre fonction seulement de α. Cette propriété résulte aussi de la théorie bien connue des familles normales de fonctions, due à M. Montel ([1]).

En rapprochant le théorème de M. Landau de celui de M. Schottky, on obtient la proposition suivante :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe, ne prenant pas les valeurs o et 1, dans le cercle de centre O et de rayon 1, et dont la valeur a_0 en O est inférieure en module à un nombre α qui dépasse une certaine constante k. Dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$(8) \qquad \log|f(z)| < \frac{2^{28}}{\sqrt{\left|\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right|}}$$

et *a fortiori*

$$\log|f(z)| < 2^{28}\sqrt{\alpha}.$$

On peut prendre 165 comme valeur de la constante k.

Donnons de brèves indications sur une méthode de démonstration qui conduit au calcul de k. L'inégalité (8) est évidemment vérifiée lorsque le nombre χ est égal à $\left|\log\left(1-\frac{1}{a_0}\right)\right|$; il suffit donc de considérer les valeurs de a_0 pour lesquelles χ est égal soit à $|\log(1-a_0)|$ soit à $|\log a_0|$, donc inférieur à $\left|\log\left(1-\frac{1}{|a_0|}\right)\right|$. Un calcul simple établit que ces valeurs de a_0 sont situées dans le cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{3}{2}$. Considérons par exemple le domaine d des valeurs de a_0 pour lesquelles χ est égal à $|\log(1-a_0)|$. Ce domaine d entoure l'origine. Posons

$$g(z) = \frac{1+\sqrt{f(z)}}{2}.$$

([1]) *Voir* P. Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 487; *voir* p. 500 et 517).

Cette fonction est holomorphe et ne prend pas les valeurs o et 1 dans le cercle de centre O et de rayon 1. Il est aisé de voir que le domaine d' des valeurs g (o) correspondant au domaine d laisse à son extérieur les points o et 1. Il est donc possible d'appliquer l'inégalité de M. Schottky à la fonction $g(z)$, et l'on en déduit une limitation pour le module de $f(z)$.

Un calcul analogue est encore valable si χ est égal à $|\log a_0|$.

8. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe, ne prenant pas les valeurs a et b, dans le cercle C de centre O et de rayon 1, et dont la valeur en O est a_0. La fonction $g(z) = \frac{f(z)-a}{b-a}$, égale à $\frac{a_0-a}{b-a}$ au point O, ne prend, dans le cercle C, ni la valeur o ni la valeur 1.

Si les modules de a_0, a, b et $\frac{1}{b-a}$ sont inférieurs à un nombre A qui dépasse 10, on a, d'après les résultats du numéro précédent, l'inégalité

$$|f(z)| < A + \frac{1}{A} e^{2^{28}\sqrt{2}A},$$

et *a fortiori* l'inégalité

$$\log|f(z)| < 2^{28,5} A, \tag{9}$$

valable dans le cercle C' de centre O de rayon $\frac{1}{2}$.

On déduit de l'inégalité (9) le théorème suivant :

Soit $Z = f(z)$ *une fonction holomorphe dans le cercle* C *de centre* O *et de rayon* 1, *et dont la valeur en* O *est inférieure en module à une quantité* A *qui dépasse* 10. *Si, dans le cercle* C' *concentrique au cercle* C *et de rayon moitié, le maximum de* $\log|f(z)|$ *dépasse* $2^{28.5}$ A, *on peut affirmer que la fonction* $f(z)$ *prend dans le cercle* C *toutes les valeurs inférieures en module à* A, *sauf peut-être celles placées dans le voisinage d'une valeur* a; *ce voisinage est certainement intérieur au cercle* $|Z - a| = \frac{1}{A}$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction $f(z)$ aurait deux valeurs exceptionnelles, réalisant les conditions requises pour que l'inégalité (9) s'applique, et cette inégalité est contraire à l'hypothèse.

9. Considérons, d'une manière plus générale, une fonction $\varphi(z)$ méromorphe dans le cercle C de centre O et de rayon 1, ne prenant pas, dans ce cercle, deux valeurs a et b satisfaisant aux inégalités

$$|a| < A, \qquad |b| < A, \qquad |a - b| > \frac{2}{A},$$

et dont la valeur $\varphi(0) = a_0$ au point O est inférieure en module à $\frac{1}{2A}\cdot$ Supposons encore que A dépasse 10. Représentons, dans le plan des Z, les valeurs de $\varphi(z)$ et traçons deux cercles de centres a et b et de rayon $\frac{1}{A}\cdot$ Ces cercles sont extérieurs l'un à l'autre. Supposons $\left|\frac{b - a_0}{a - a_0}\right| < 1$; en d'autres termes, a est plus éloigné que b du point a_0. La distance de a à a_0 est donc supérieure à $\frac{1}{A}$, et le module de a est supérieur à $\frac{1}{2A}\cdot$

Si la fonction $\varphi(z)$ a, dans le cercle C, une troisième valeur exceptionnelle c extérieure aux petits cercles de centres a et b, cette fonction vérifie, dans le cercle C' de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\varphi(z) - a} + \frac{1}{a} \right| < e^{2^9 A}. \tag{10}$$

En effet, la fonction

$$f(z) = \left[\frac{1}{\varphi(z) - a} + \frac{1}{a} - \frac{b}{a(b - a)}\right] : \frac{b - c}{(c - a)(b - a)} = \frac{\varphi(z) - b}{\varphi(z) - a} : \frac{c - b}{c - a}$$

holomorphe dans le cercle C, ne prend, dans ce cercle, ni la valeur 0, ni la valeur 1. Sa valeur en O est égale à $\frac{b - a_0}{a - a_0} \cdot \frac{c - a}{c - b}$, dont le module est inférieur à $\left|\frac{c - a}{c - b}\right|$ Faisons varier c extérieurement aux cercles de centres a et b et de rayon $\frac{1}{A}\cdot$ Le maximum de $\left|\frac{c - a}{c - b}\right|$, obtenu lorsque c est situé sur la droite joignant a et b, est égal à $1 + A\,|b - a|$ et par conséquent inférieur à $1 + 2A^2$, quantité supérieure à 165 (puisque A dépasse 10). La fonction $f(z)$ vérifie donc, dans le cercle C', l'inégalité

$$|f(z)| < e^{2^{25}\sqrt{1+2A^2}}.$$

Par suite :

$$\left|\frac{1}{\varphi(z)-a}+\frac{1}{a}\right| < \left|\frac{b}{a(b-a)}\right| + \left|\frac{c-b}{c-a}\right| \frac{1}{|b-a|} e^{2^{25}\sqrt{1+2A^2}}.$$

D'après les conditions imposées à a, b et c, le maximum de $\frac{b}{a(b-a)}$ est égal à $\frac{5}{2}A$; celui de $\left|\frac{c-b}{c-a}\right| \cdot \left|\frac{1}{b-a}\right|$ est égal à $\left|\frac{1+A(b-a)}{b-a}\right|$ et par suite inférieur à $\frac{3}{2}A$. Il en résulte que dans le cercle C'

$$\left|\frac{1}{\varphi(z)-a}+\frac{1}{a}\right| < \frac{5}{2}A + \frac{3}{2}A e^{2^{25}\sqrt{1+2A^2}}$$

A dépassant 10, *a fortiori* l'inégalité (10) se trouve vérifiée. On déduit immédiatement de là le théorème suivant :

Soit $Z = \varphi(z)$ *une fonction méromorphe dans le cercle* C *de centre* O *et de rayon* 1, *et prenant en* O *une valeur* a_0 *de module inférieur à* $\frac{1}{2A}$ (A *étant supposé supérieur à* 10). *Elle vérifie nécessairement l'une des trois propriétés suivantes :*

1° *Les valeurs que ne prend pas la fonction* $\varphi(z)$ *dans le cercle* C *sont extérieures à la région du plan des* Z *comprise entre le cercle* Γ *de centre origine et de rayon* A *et un petit cercle de rayon* $\frac{2}{A}$, *intérieur au cercle* Γ.

2° *Ces valeurs sont toutes situées dans deux petits cercles de rayon* $\frac{1}{A}$ *extérieurs l'un à l'autre, et intérieurs au cercle* Γ (¹).

3° *En désignant par* a *la valeur exceptionnelle, inférieure en module à* A, *la plus éloignée de* a_0, *la fonction* $\varphi(z)$ *vérifie, dans*

(¹) Les propriétés 1° et 2° ne sont pas distinctes lorsqu'on fait la représentation, par inversion, du plan des Z sur une sphère. On peut dire encore que lorsque la fonction $f(z)$ vérifie ces propriétés, il est impossible d'extraire des valeurs que cette fonction ne prend pas dans le cercle C, trois valeurs a, b, c formant un triangle dont les côtés sont respectivement supérieurs à $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A}$ et $\frac{2}{A}$.

le cercle C′ *de centre* O *et de rayon* $\frac{1}{2}$, *l'inégalité*

$$(10) \qquad \left| \frac{1}{\varphi(z) - a} + \frac{1}{a} \right| < e^{2^{29} A}.$$

10. Ces préliminaires une fois posés, nous allons aborder l'étude des valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes pourvues d'une valeur asymptotique. Nous distinguerons les deux cas d'une valeur infinie ou d'une valeur finie que nous pourrons supposer nulle.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

I. *Soit* $Z = \varphi(z)$ *une fonction méromorphe ayant une valeur asymptotique nulle. Soit* $\mu(r)$ *une fonction du module* $r = |z|$ *croissant indéfiniment, en restant inférieure à* $\frac{1}{|\varphi(z)|}$ *sur le chemin de détermination zéro. Posons :*

$$A(r) = [\log \mu(r)]^{1-\varepsilon}, \qquad q(r) = \frac{\varepsilon}{6} \log \log \mu(r),$$

ε étant une constante positive, inférieure à 1, *et aussi petite que l'on veut. Lorsque* $|z|$ *est assez grand pour que* $\mu(r)$ *dépasse une certaine constante dépendant uniquement de* ε (¹), *la fonction* $\varphi(z)$ *vérifie nécessairement l'une des deux propriétés suivantes :*

1° *Dans la couronne circulaire d'épaisseur* $\frac{\pi r}{q(r)}$, *dont la circonférence médiane est* $|z| = r$, *on a l'inégalité*

$$(11) \qquad \log |\varphi(z)| < -[\log \mu(r)]^{1-\varepsilon}.$$

2° *Il existe au moins un cercle* $C(r)$ *dont le centre est sur la circonférence* $|z| = r$, *et dont le rayon est égal à* $\frac{8\pi r}{q(r)}$, *dans lequel la fonction* $\varphi(z)$ *prend :*

ou bien toutes les valeurs inférieures en module à $A(r)$, *sauf peut-être dans le voisinage d'une valeur* $a(r)$; *ce voisinage est certainement intérieur au cercle* $|Z - a| = \frac{2}{A(r)}$;

(¹) Par exemple lorsque $\log \mu(r)$ dépasse $e^{\frac{343}{\varepsilon}}$.

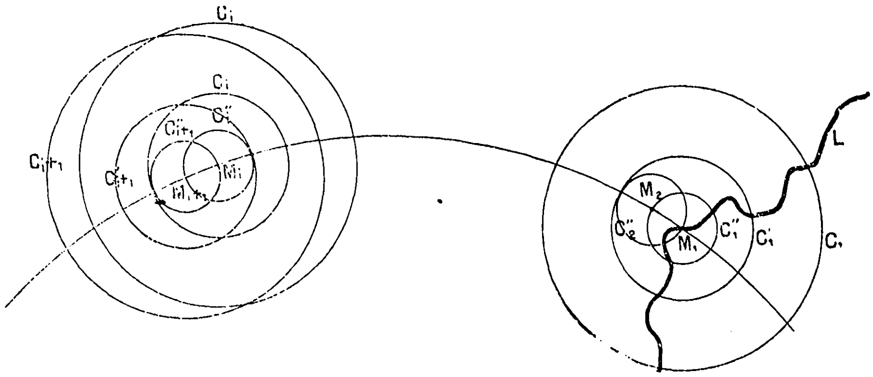
Ou bien toutes les valeurs, infinie et finies, sauf peut-être dans le voisinage de deux valeurs $a(r)$ et $b(r)$ de modules inférieurs à $A(r)$. Ces voisinages sont intérieurs respectivement aux cercles

$$|Z-a|=\frac{1}{A(r)}, \qquad |Z-b|=\frac{1}{A(r)}.$$

II. *Si la fonction $Z=\varphi(z)$ a une valeur asymptotique infinie, ce qui précède subsiste, en désignant par $\mu(r)$ une fonction croissant indéfiniment, en restant inférieure à $|\varphi(z)|$ sur le chemin de détermination infinie. L'inégalité* (11) *doit être remplacée dans ce cas par l'inégalité*

$$(12) \qquad \log|\varphi(z)|>[\log\mu(r)]^{1-\varepsilon}.$$

11. Examinons d'abord le cas où la fonction méromorphe $\varphi(z)$ possède un chemin L de détermination zéro. Soit M_1 l'un des points



du chemin L situés à la distance r de l'origine. Traçons un cercle de centre M_1 et de rayon $8r\sin\frac{\pi}{q(r)}$, puis les cercles déduits de celui-ci par des rotations égales à $\frac{2\pi k}{q(r)}$ $(k=1, 2, \ldots, q)$ autour de l'origine [1]. Nous obtenons ainsi une suite de q cercles $C_1 C_2 \ldots C_q$, de centres respectifs $M_1 M_2 \ldots M_q$, dans lesquels nous allons étudier la fonction méromorphe $\varphi(z)$. Construisons aussi les cercles C_1', C_2', ..., C_q' et

[1] On supposera dans le raisonnement q entier. Dans le cas où q n'est pas entier, on peut encore désigner par $q(r)$ le plus grand entier contenu dans $\frac{\varepsilon}{6}\log\log\mu(r)$.

$C''_1, C''_2, \ldots, C''_q$ concentriques aux premiers et de rayons moitié et quart. Chacune des circonférences C''_i passe par les centres des circonférences voisines C''_{i-1} et C''_{i+1}.

Nous allons supposer que la fonction $\varphi(z)$ ne vérifie pas les propriétés 2° du théorème précédent, et montrer qu'elle vérifie nécessairement les propriétés 1°.

Dans ce cas, en effet, soit a_i l'une des valeurs exceptionnelles, inférieure en module à $A(r)$, de la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle C_i. Il est clair qu'il existe une deuxième valeur exceptionnelle b_i, extérieure au cercle de centre a_i et de rayon $\frac{2}{A(r)}$, et de module inférieur à $A(r)$; et une troisième valeur exceptionnelle c_i distante de chacune des deux premières de plus de $\frac{1}{A(r)}$.

Nous désignerons par α_i la valeur de $\varphi(z)$ au centre M_i du cercle C_i; d'après ce qui précède, il existe certainement une valeur exceptionnelle distante de α_i de plus de $\frac{1}{A(r)}$: nous désignerons par a_i une telle valeur (¹). Si $|\alpha_i|$ est inférieur à $\frac{1}{2A(r)}$, $|a_i|$ est supérieur à $\frac{1}{2A(r)}$.

Étudions d'abord la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle C_1. La fonction $\frac{1}{\varphi(z)-a_1}+\frac{1}{a_1}$ est holomorphe dans ce cercle; la valeur α_1 de $\varphi(z)$ au centre de C_1 est inférieure en module $\frac{1}{\mu(r)}$ et *a fortiori* à $\frac{1}{2A(r)}$, lorsque $\mu(r)$ dépasse 2, d'après la valeur de $A(r)$. Utilisons les résultats du n° **9** : la fonction $\varphi(z)$ vérifie, dans le cercle C'_1, l'inégalité

$$(12)' \qquad \left|\frac{1}{\varphi(z)-a_1}+\frac{1}{a_1}\right| < e^{2^{29}A(r)}.$$

Le long de la partie du chemin asymptotique L issue de M_1, la fonction $\frac{1}{\varphi(z)-a_1}+\frac{1}{a_1}$ est voisine de zéro. Son module est en effet inférieur à

$$\frac{1}{\mu(r)} : \frac{1}{2A(r)}\left[\frac{1}{2A(r)}-\frac{1}{\mu(r)}\right]$$

et *a fortiori* à $\frac{5A^2(r)}{\mu(r)}$ lorsque $\mu(r)$ dépasse e^4.

(¹) Nous supposerons aussi $|a_i-\alpha_i|$ supérieur à $|b_i-\alpha_i|$.

La fonction $\frac{1}{\varphi(z) - a_1} + \frac{1}{a_1}$ est donc bornée dans le cercle C'_1, et sa borne supérieure est fournie par l'inégalité $(12)'$. Elle est très petite d'autre part sur une ligne issue du centre de C'_1 et aboutissant à la circonférence. C'est le moment d'utiliser la deuxième application que nous avons faite, au n° **2**, de l'inégalité de M. Carleman : dans le cercle C''_1, la fonction $\varphi(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\varphi(z) - a_1} + \frac{1}{a_1} \right| < e^{2^{29} A(r)} \left[\frac{2 A^2(r)}{\mu(r)} \right]^{e^{-40}} < e^{2^{29,1} A(r) - e^{-40} \log \mu(r)}$$

et *a fortiori :*

$$(13) \qquad \left| \frac{1}{\varphi(z) - a_1} + \frac{1}{a_1} \right| < e^{-e^{-41} \log \mu(r)}$$

lorsque $\mu(r)$ dépasse une constante convenable, qu'on peut prendre égale à

$$e^{e^{\frac{61}{\varepsilon}}}.$$

De l'inégalité (13) et de l'inégalité $|a_1| > \frac{1}{2A(r)}$, on déduit la limitation suivante :

$$(14) \qquad \log |\varphi(z)| < - e^{-42} \log \mu(r) = - \log \mu_1(r).$$

En résumé, l'inégalité (14) est vérifiée si $\mu(r)$ dépasse une constante convenable dépendant de ε. Nous sommes en possession d'une limite supérieure de $|\varphi(z)|$ dans le cercle C''_1. Nous allons en déduire de proche en proche, en supposant $\mu(r)$ assez grand, une limitation pour $|\varphi(z)|$ dans la suite des cercles $C''_1, C''_2, \ldots, C''_i, \ldots, C''_q$.

Supposons la limitation $|\varphi(z)| < \frac{1}{\mu_i(r)}$ acquise à l'intérieur du cercle C''_i et précisons la relation entre $\mu_i(r)$ et $\mu_{i+1}(r)$. Dans le cercle C_{i+1} la fonction $\varphi(z)$ admet trois valeurs exceptionnelles a_i, b_i, c_i. Lorsque l'inégalité

$$(15) \qquad \mu_i(r) > 2A(r)$$

est vérifiée, la valeur α_{i+1} de $\varphi(z)$ au centre M_{i+1} de C_{i+1} est inférieure à $\left|\frac{1}{2A(r)}\right|$, et la fonction $\varphi(z)$ vérifie dans le cercle C'_{i+1}, d'après les résultats du n° **9**, l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\varphi(z)-a_{i+1}}+\frac{1}{a_{i+1}}\right|<e^{2^{29}A(r)}.$$

La fonction $\varphi(z)$ est petite dans le cercle C''_i. Si l'on a

$$\mu_i(r)>5\,A^2(r),\tag{15'}$$

le module de la fonction $\dfrac{1}{\varphi(z)-a_{i+1}}+\dfrac{1}{a_{i+1}}$ est inférieur à $\dfrac{5A^2(r)}{\mu_i(r)}$ dans le cercle C''_i ; utilisons la première application que nous avons faite, au n° **2**, de l'inégalité de M. Carleman : nous obtenons l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\varphi(z)-a_{i+1}}+\frac{1}{a_{i+1}}\right|<e^{2^{29,1}A(r)\,(1-e^{-5})-e^{-5}\log\mu_i(r)},$$

valable dans le cercle C''_{i+1}. Supposons le deuxième membre de l'inégalité précédente inférieur à $\dfrac{1}{2A(r)}$, ce qui a lieu lorsque l'inégalité

$$\mu_i(r)>e^{e^5.2^{29,1}A(r)}\tag{15''}$$

est vérifiée. Nous en déduisons, pour le module de la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle C''_{i+1}, la limitation

$$\log|\varphi(z)|<2^{29,2}(1-e^{-5})\,A(r)-e^{-5}\log\mu_i(r)=-\log\mu_{i+1}(r).\tag{16}$$

Cette limitation a été obtenue en supposant vérifiées les inégalités (15), (15') et (15''). La dernière entraîne d'ailleurs les deux premières. Nous sommes donc en possession d'une relation entre $\mu_{i+1}(r)$ et $\mu_i(r)$. Le calcul de $\mu_i(r)$ par récurrence donne

$$\log\mu_i(r)=e^{-5(i-1)}\log\mu_1(r)-2^{29,2}[1-e^{-5(i-1)}]\,A(r).$$

Portons dans cette égalité la valeur de $\mu_1(r)$ fournie par le deuxième membre de l'inégalité (14), et remplaçons $A(r)$ par sa valeur en fonction de $\mu(r)$. Nous obtenons

$$\log\mu_i(r)=e^{-37-5i}\log\mu(r)-2^{29,2}[1-e^{-5(i-1)}][\log\mu(r)]^{1-\varepsilon}.$$

$\mu_i(r)$ décroît lorsque i croît. L'inégalité (15'') sera donc vérifiée pour toutes les valeurs de i inférieures à q si elle l'est pour

$$i = q = \frac{\varepsilon}{6} \log\log \mu(r).$$

D'après cette valeur de q, on a

$$\log \mu_q(r) > e^{37} [\log \mu(r)]^{1-\frac{5\varepsilon}{6}} - 2^{29,2} [\log \mu(r)]^{1-\varepsilon},$$

et un calcul simple montre que l'inégalité (15″) est vérifiée si $\log \mu(r)$ dépasse $e^{\frac{343}{\varepsilon}}$. *A fortiori*, lorsque $\log \mu(r)$ dépasse cette valeur, on a

$$\log \mu_i(r) > [\log \mu(r)]^{1-\varepsilon} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Dans tous les cercles C''_i, et par suite dans toute la couronne circulaire balayée par ces cercles, la fonction $\varphi(z)$ a son module limité par

$$\frac{1}{\mu_i(r)} < e^{-[\log \mu(r)]^{1-\varepsilon}}.$$

Le théorème I du n° **10** est donc démontré [1].

12. Dans le numéro précédent, nous nous sommes servi de diverses inégalités vérifiées par les fonctions $\frac{1}{\varphi(z) - a_i} + \frac{1}{a_i}$; ces inégalités sont dues soit à l'existence de trois valeurs exceptionnelles a_i, b_i, c_i, de la fonction $\varphi(z)$ dans chaque cercle C_i, soit à la petitesse des modules de ces fonctions sur le chemin L (dans le cas où $i = 1$) ou dans les cercles C''_{i-1} ($i = 2, 3, \ldots, q$).

Dans le cas d'une fonction $\varphi(z)$ à valeur asymptotique infinie, les fonctions $\frac{1}{\varphi(z) - a_i}$ jouent le même rôle, et le raisonnement du numéro précédent s'applique *mutatis mutandis*.

13. Considérons une valeur a différente de la valeur asymptotique ω de la fonction méromorphe $\varphi(z)$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de points de modules $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$

---

[1] Au lieu de faire dans le même sens le tour du cercle $|z| = r$ avec les cercles C_i, nous aurions pu faire un demi-tour dans un sens, et un demi-tour dans l'autre sens ; q aurait été diminué de moitié.

indéfiniment croissants, en lesquels la fonction $\varphi(z)$ s'approche indéfiniment de a. Il est clair que pour les valeurs de r égales à $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, la fonction $\varphi(z)$ ne peut vérifier l'inégalité (11) si la valeur asymptotique ω est égale à zéro, ou l'inégalité (12) si cette valeur est infinie. La fonction $\varphi(z)$ vérifie nécessairement les propriétés 2° du théorème sur les valeurs exceptionnelles, établi au n° **10** ; il existe une suite de cercles $C(r_1)$, $C(r_2)$, ..., $C(r_n)$, ..., dans chacun desquels $\varphi(z)$ *remplit* des régions de plus en plus étendues du plan des Z. On peut dire que *le cercle* $C(r_n)$ *est un cercle de remplissage soit pour le cercle* Γ, *du plan des* Z, *de centre origine et de rayon* $\Lambda(r_n)$, *sauf peut-être pour une région exceptionnelle intérieure à un cercle* γ *de rayon* $\frac{2}{\Lambda(r_n)}$, *soit pour tout le plan des* Z, *sauf peut-être pour deux régions exceptionnelles intérieures respectivement à deux cercles* γ_1 *et* γ_2 *de rayon* $\frac{1}{\Lambda(r_n)}$, *intérieurs au cercle* Γ.

Supposons, pour fixer les idées, que la valeur asymptotique ω soit égale à zéro. Il résulte de la démonstration du n° **11** que si l'inégalité

$$(11) \qquad \log|\varphi(z)| < -\log\mu(r)]^{1-\varepsilon}$$

n'est pas vérifiée sur le cercle $|z| = r$, *il existe un cercle de remplissage* $C(r)$ *possédant à son intérieur soit un chemin sur lequel* $|\varphi(z)|$ *est inférieur à* $\frac{1}{\mu(r)}$, *soit une circonférence dont le rayon est le quart de celui de* $C(r_r)$, *et qui passe par le centre de* $C(r)$, *à l'intérieur de laquelle l'inégalité* (11) *est vérifiée.*

Ce dernier cas se présente lorsque le cercle C_1, dont il est question au n° **11**, n'est pas un cercle de remplissage. En désignant par C_i le premier cercle de remplissage rencontré, l'inégalité (11) est valable pour les cercles C''_1, C''_2, ..., C''_{i-1}. En particulier cette inégalité est vérifiée sur un chemin issu du centre M_i du cercle de remplissage C_i et aboutissant à la circonférence. Nous utilisons plus loin cette remarque.

14. $\Lambda(r)$ est une fonction croissant indéfiniment avec r. *Dans une suite de cercles de remplissage, s'éloignant indéfiniment, la fonction* $\varphi(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus.* Il n'y a réellement deux valeurs exceptionnelles que si les régions exceptionnelles qui correspondent à chacun des cercles de remplissage, et qui se rétrécissent à mesure qu'on s'éloigne indéfiniment, enveloppent deux points fixes, dont l'un peut être l'infini.

Récemment, M. Julia a démontré, dans de beaux Mémoires [1], des théorèmes généraux sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières ou des fonctions méromorphes pourvues de valeur asymptotique. Ces théorèmes, dont la démonstration est basée sur les propriétés des familles normales de fonctions, peuvent être résumés par la proposition suivante :

Soit un domaine Δ ayant l'une des formes suivantes :

1° Forme Δ_1, constituée par un angle d'ouverture arbitrairement petite, et plus généralement, par un domaine balayé par une courbe fixe s'éloignant indéfiniment, dans une rotation arbitrairement petite autour de l'origine.

2° Forme Δ_2, constituée par l'ensemble des circonférences déduites d'une circonférence fixe, de rayon arbitrairement petit, n'enveloppant pas l'origine, au moyen des transformations z, $z\sigma$, ..., $z\sigma^n$, ..., σ étant un nombre complexe de module supérieur à 1.

3° Forme Δ_3, constituée par l'ensemble des circonférences déduites d'une circonférence fixe, de rayon arbitrairement petit, n'enveloppant pas l'origine, au moyen des transformations z, $z\sigma_1$, $z\sigma_2$, ..., $z\sigma_n$, ..., où la suite σ_1, σ_2, ..., σ_n, ... est une suite quelconque de nombres complexes dont les modules croissent indéfiniment de façon que

$$1 < \left|\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right| < Q,$$

Q étant un nombre fixe indépendant de n. La forme Δ_2 est un cas particulier de la forme Δ_3.

Ceci posé, *il existe un domaine* Δ, *du plan des* z, *dans lequel une fonction méromorphe* $\varphi(z)$ *possédant une valeur asymptotique prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus.*

Il est aisé de déduire, comme cas particuliers du théorème *quantitatif* établi au n° **10**, les théorèmes *qualitatifs* de M. Julia.

---

[1] G. JULIA, *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (*Annales de l'École Normale*, 1919, 1920 et 1921).

Remarquons que *le rapport, égal à* $\frac{8\pi}{q(r)}$, *du rayon d'un cercle de remplissage* $C(r)$ *à la distance de son centre à l'origine tend vers zéro lorsque* r *grandit indéfiniment.*

Considérons d'abord la demi-droite issue de l'origine, dont l'argument est égal à l'un des arguments limites des centres $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$ des cercles de remplissage. En vertu de la remarque précédente, un angle d'ouverture arbitrairement petite ayant cette demi-droite pour bissectrice contient à son intérieur une infinité de cercles de remplissage; et, par suite, dans cet angle la fonction $\varphi(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus. Le théorème de M. Julia se trouve démontré lorsque le domaine Δ est constitué par un angle arbitrairement petit. Il se démontre de la même manière pour un domaine Δ_1 général.

Désignons maintenant par $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ les points $\frac{z_k}{\sigma^n}$ assujettis à être situés entre les cercles de centre origine et de rayons respectifs 1 et $|\sigma|$. Soit $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ une suite infinie extraite de la suite précédente, et convergeant vers un point x_0. Construisons une circonférence δ_0 de centre x_0 et de rayon arbitrairement petit, puis les circonférences déduites de celle-ci par les transformations $z, z\sigma, \ldots, z\sigma^n, \ldots$. Le rapport du rayon de l'une de ces circonférences à la distance de son centre à l'origine est un nombre fixe indépendant de n. A partir de n assez grand, on peut extraire de cette suite de circonférences une suite infinie de circonférences dont chacune contient à son intérieur un cercle de remplissage: ce sont elles qui contiennent les points $z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}, \ldots$ correspondant aux points $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. On en déduit le théorème de M. Julia pour un domaine de forme Δ_2. Une démonstration analogue est valable pour un domaine de forme Δ_3.

13. Il peut y avoir intérêt à réduire les rayons des cercles de remplissage. Nous verrons, sur l'exemple de e^z, qu'on ne peut songer à les réduire à $\frac{r}{\log\mu(r)}$, du moins pour *toutes* les fonctions méromorphes à valeur asymptotique. Nous donnerons, dans le cas des fonctions entières (la généralisation aux fonctions méromorphes étant immédiate), une nouvelle valeur, plus précise que celle du n° **10**, du rayon d'un cercle de remplissage.

16. Abordons maintenant l'étude des valeurs exceptionnelles des fonctions entières.

D'après un théorème de M. Iversen, toute fonction entière possède un chemin de détermination infinie. Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante : toute fonction entière $f(z)$ possède un chemin sur lequel elle croît plus rapidement que $|z|^n$, aussi grand que soit l'entier n; il suffit, pour le démontrer, d'appliquer le théorème de M. Iversen à la fonction entière

$$\frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_n z^n}{z^{n+1}},$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ désignant les $n+1$ premiers coefficients de la série de Taylor représentant $f(z)$.

Toute fonction entière $f(z)$ peut donc être considérée comme fonction méromorphe à valeur asymptotique infinie, et l'on peut appliquer le théorème II du n° **10**, en faisant $\mu(r) = r^n$.

On ne connaît pas de relation entre le maximum $M(r)$ de la fonction $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$, et la fonction $\mu(r)$ caractérisant la vitesse de la croissance de cette fonction sur un chemin de détermination infinie. Cependant nous allons voir que *le théorème* II *du n°* **10** *est encore valable si l'on remplace* $\mu(r)$ *par* $M(r)$.

En effet, la seule hypothèse introduite dans la démonstration de ce théorème est la suivante : sur un chemin L issu d'un point M situé à la distance r de l'origine, et traversant une couronne circulaire d'épaisseur convenable, on a $|\varphi(z)| > \mu(r)$; r est supposé fixe; pour ne pas prêter à confusion, remplaçons r par r_0.

Soit $f(z)$ une fonction entière dont le maximum $M(r_0)$ sur le cercle $|z| = r_0$ est atteint en un point P. L'ensemble des points où le module de $f(z)$ est supérieur à $M(r_0)$ comprend un domaine ouvert D, non borné, sur la frontière duquel se trouve le point P. Nous pouvons tracer dans ce domaine une ligne brisée L issue de P et s'éloignant indéfiniment [1]. Sur cette ligne, l'inégalité $|f(z)| > M(r_0)$ est véri-

[1] On peut même tracer les lignes L sur lesquelles le module de $f(z)$ augmente indéfiniment. C'est ce que M. G. Valiron a démontré dans une récente Note : *Démonstration de l'existence, pour les fonctions entières, de chemins de détermination infinie* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 166, p. 382).

fiée, et la démonstration du n° **11** s'applique lorsqu'on remplace $\mu(r_0)$ par $M(r_0)$.

Nous obtenons donc le théorème suivant sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières :

Soit $Z = f(z)$ une fonction entière dont le module maximum sur le cercle $|z| = r$ est $M(r)$. Posons

$$A(r) = [\log M(r)]^{1-\varepsilon}; \qquad q(r) = \frac{\varepsilon}{6} \log \log M(r),$$

ε étant une constante positive, inférieure à 1 et aussi petite que l'on veut. Lorsque r est assez grand pour que $\log \log M(r)$ dépasse $\frac{343}{\varepsilon}$, la fonction $f(z)$ vérifie nécessairement l'une des deux propriétés suivantes :

1° *Dans la couronne circulaire d'épaisseur $\frac{\pi r}{q(r)}$, dont la circonférence médiane est la circonférence $|z| = r$, on a l'inégalité*

$$\log|f(z)| > [\log M(r)]^{1-\varepsilon}; \tag{17}$$

2° *Il existe au moins un cercle $C(r)$ (cercle de remplissage) dont le centre est sur la circonférence $|z| = r$, et dont le rayon est égal à $\frac{8\pi r}{q(r)}$, dans lequel la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs inférieures en module à $A(r)$, sauf peut-être dans le voisinage d'une valeur $a(r)$. Ce voisinage est intérieur au cercle*

$$|Z - a| = \frac{2}{A(r)}.$$

17. On établit, comme pour les fonctions méromorphes à valeur asymptotique, l'existence d'une famille de cercles $C(r)$ s'éloignant indéfiniment. Le cercle $C(r)$ est un *cercle de remplissage* pour le cercle Γ, du plan des Z, de centre origine et de rayon $A(r)$, sauf pour une région exceptionnelle intérieure à un cercle γ du rayon $\frac{2}{A(r)}$. Cette région exceptionnelle existe réellement si le cercle $C(r)$ est intérieur à un domaine où la fonction $f(z)$ ne prend pas une certaine valeur a. Tel est le cas, par exemple, des fonctions entières $f(z) = e^{g(z)}$ dépourvues de zéros. Si l'on désigne par $M_1(r)$ le maximum de la fonction $g(z)$ sur le cercle $|z| = r$, il est clair que la région exceptionnelle relative au cercle de remplissage $C(r)$ de la fonction $f(z)$, comprend à son intérieur tous les points de module inférieur à $e^{-M_1(r)}$.

Dans une suite infinie de cercles de remplissage, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur finie, sauf une au plus. Il n'y a réellement une valeur exceptionnelle a que si à chacun des cercles de remplissage correspond une région exceptionnelle enveloppant le point a.

18. Un cas particulièrement intéressant est celui où *la fonction $f(z)$ a une valeur asymptotique finie* [1] ou, plus généralement, possède un chemin sur lequel elle reste bornée. Dans ce cas, l'inégalité (17) ne peut être vérifiée sur la circonférence $|z| = r$: *à chaque valeur de r correspond un cercle de remplissage.*

Le rayon d'un cercle de remplissage est égal à $\frac{1}{q(r)}$; $q(r)$ étant une fonction croissante de r, le nombre des cercles de remplissage, extérieurs les uns aux autres, qui sont compris dans l'anneau Γ_n délimité par les circonférences $|z| = 2^n$, $|z| = 2^{n+1}$, est supérieur à $\frac{q(2^n)}{4}$. Le nombre des racines des équations $f(z) - a = 0$ situées dans l'anneau Γ_n est donc supérieur à $\frac{q(2^n)}{8}$, pour toutes les valeurs de a inférieures en module à $A(2^n)$, sauf peut-être au voisinage d'une valeur exceptionnelle a_1 de a; ce voisinage est intérieur au cercle

$$|Z - a_1| = \frac{2}{A(2^n)}.$$

Nous retrouvons et précisons ainsi un théorème récent que M. Montel a déduit de l'étude des familles quasi normales de fonctions [2], et qui s'énonce ainsi : Si l'on considère une infinité d'anneaux Γ_n, le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ contenues dans

---

(1) C'est le cas, en particulier, d'une fonction entière dépourvue de zéros.

(2) P. Montel, *Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. VI, p. 40).

chaque anneau n'est pas borné, sauf peut-être pour une valeur exceptionnelle de a.

M. Montel démontre également le théorème suivant : Il existe une infinité de cercles γ_n homothétiques par rapport à l'origine d'un cercle γ_0 de rayon arbitrairement petit, tels que les fonctions $f(z) - a$ aient, dans chaque cercle, un nombre de zéros qui ne reste pas borné, sauf pour une valeur exceptionnelle au plus. Ce théorème peut être précisé de la même façon que le théorème précédent.

Soit en effet α un nombre positif arbitrairement petit; n étant assez grand, on peut couvrir l'anneau Γ_n avec $\frac{4\pi}{\alpha^2}$ cercles de rayons $2^n\alpha$, de façon que chaque point de Γ_n soit intérieur à l'un au moins de ces cercles. Soient $c_1, \ldots, c_{\frac{4\pi}{\alpha^2}}$ ces cercles et $c'_1, \ldots, c'_{\frac{4\pi}{\alpha^2}}$ les cercles concentriques et de rayons doubles. Lorsque n est assez grand, le rayon d'un cercle de remplissage situé dans l'anneau Γ_n est inférieur à $2^n\alpha$. Plus précisément, il existe au moins un cercle c' (appelons-le γ'_n) qui contient à son intérieur au moins $\frac{\alpha^2 q(2^n)}{16\pi}$ cercles de remplissage extérieurs les uns aux autres. Ceci posé, pour démontrer et préciser le théorème de M. Montel, il suffit de considérer les points P_n homothétiques par rapport à l'origine des centres des cercles γ'_n et situés dans l'anneau Γ_0; puis de tracer un cercle γ_0 ayant pour centre un point limite des P_n et pour rayon 4α. Les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \ldots$, homothétiques du cercle γ_0 par rapport à l'origine, les rapports d'homothétie étant 2, $2^2, \ldots, 2^k, \ldots$ jouissent de la propriété signalée par M. Montel, puisqu'on peut extraire de ces cercles une suite infinie de cercles contenant à leur intérieur des cercles γ'_n et, par suite, les cercles de remplissage qui sont intérieurs aux γ'_n. Dans chacun des cercles γ'_n l'équation $f(z) - a = 0$ a $\frac{\alpha^2 q(2^n)}{32\pi}$ racines au moins, sauf peut-être pour une valeur de a au plus, à partir de n assez grand.

19. Les fonctions considérées au numéro précédent possèdent un cercle de remplissage $C(r)$ pour toute valeur de r. Lorsque cette propriété n'est pas vérifiée pour une fonction entière $f(z)$, l'inégalité

$$\log|f(z)| > [\log M(r)]^{1-\varepsilon} \tag{17}$$

est vérifiée pour une suite $r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$ de valeurs de r, augmentant indéfiniment. D'après un théorème connu de la théorie des fonctions, les équations $f(z) - a = 0$, où $|a|$ est inférieur à $[\log M(r_n)]^{1-\varepsilon}$, ont le même nombre de racines à l'intérieur de la circonférence $|z| = r_n$. Nous avons le droit de supposer qu'entre les circonférences $|z| = r_{n-1}$ et $|z| = r_n$, le minimum du module de $f(z)$ est borné (lorsque n varie). Le plan des z se trouve partagé en une infinité d'anneaux concentriques. A l'intérieur de l'anneau délimité par les circonférences $|z| = r_{n-1}$ et $|z| = r_n$, la fonction $f(z)$ prend un nombre égal de fois toute valeur de module inférieur à $[\log M(r_{n-1})]^{1-\varepsilon}$.

20. Soit $f(z)$ une fonction entière dont le maximum sur le cercle $|z| = r$ est $M(r)$. Supposons r assez grand pour que $\log\log M(r)$ soit supérieur à $\frac{343}{\varepsilon}$. Nous avons établi l'existence de cercles de remplissage. Ces cercles renseignent sur la position des racines de l'équation $f(z) - a = 0$. Il y a intérêt à *réduire leurs rayons;* nous allons développer une méthode permettant d'aboutir à ce résultat.

Considérons une valeur de r pour laquelle l'inégalité (17) n'est pas vérifiée sur tout le cercle $|z| = r$. Soit $C(r)$ le premier cercle de remplissage (pris parmi les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_q$) rencontré sur le cercle $|z| = r$ à partir d'un point où $|f(z)|$ est maximum. Nous avons vu au n° **15** qu'il existe un chemin partant du centre de ce cercle et aboutissant à la circonférence, sur lequel l'inégalité (17) est vérifiée.

Nous allons étudier la fonction entière $f(z)$ dans le cercle $C(r)$, de la même façon que précédemment, dans le cercle $|z| = r$, pour établir l'existence du cercle de remplissage $C(r)$. La fonction $f(z)$ prend, à l'intérieur de $C(r)$, l'une au moins des valeurs 0 et 1, par exemple la valeur zéro. Considérons le cercle γ_1, concentrique à $C(r)$, intérieur à ce cercle, et passant par une racine de l'équation $f(z) = 0$. Le rayon ρ_1 de γ_1 est inférieur à $\frac{r}{q(r)}$. Soit M_1 le maximum de $|f(z)|$ dans γ_1. On a

$$\log M_1 > [\log M(r)]^{1-\varepsilon},$$

si $\log\log M_1$ est supérieur à $\frac{343}{\varepsilon}$, ce qui a lieu lorsque

$$\log\log M(r) > \frac{343}{\varepsilon(1-\varepsilon)},$$

le théorème du n° **16** est encore applicable. $A(r)$ et $q(r)$ doivent être remplacés respectivement par

$$A_1 = [\log M_1]^{1-\varepsilon}, \qquad q_1 = \frac{\varepsilon}{6} \log \log M_1$$

et l'inégalité (17) par l'inégalité

$$\log|f(z)| > [\log M_1]^{1-\varepsilon}.$$

Une telle inégalité ne pouvant être vérifiée sur tout le cercle γ_1 de rayon ρ_1, lequel passe par un zéro de $f(z)$, on établit ainsi l'existence d'un nouveau cercle de remplissage Γ_1 dont le centre est sur γ_1 et dont le rayon est égal à $\frac{8\pi\rho_1}{q_1} < \frac{(8\pi)^2 r}{q q_1}$.

Sur un chemin issu du centre du cercle Γ_1 et aboutissant à la frontière de ce cercle, la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$\log|f(z)| > [\log M_1]^{1-\varepsilon}.$$

Ce cercle Γ_1 étant un cercle de remplissage, la fonction $f(z)$ y prend l'une au moins des valeurs 0 et 1, par exemple la valeur zéro. On considère le cercle γ_2 passant par une racine de l'équation $f(z) = 0$, intérieur et concentrique au cercle Γ_1, et l'on opère de la même façon que pour γ_1.

Opérons ainsi de proche en proche, et admettons l'existence d'un cercle γ_i de rayon ρ_i, passant par une racine de l'équation $f(z) = 0$, et sur lequel le maximum de $f(z)$ est égal à M_i. Si l'inégalité

$$\log \log M_i > \frac{343}{\varepsilon} \tag{18}$$

est vérifiée, le théorème du n° **16** est applicable. On remplace $M(r)$ par M_i; r par ρ_i; $A(r)$ par A_i et $q(r)$ par q_i. Dans le cercle de remplissage Γ_i dont l'existence est établie par ce théorème, la fonction $f(z)$ prend l'une au moins des valeurs 0 et 1, par exemple la valeur zéro [1]. Sur un chemin issu du centre de Γ_i et aboutissant à la circonférence, la fonction $f(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\log|f(z)| > [\log M_i]^{1-\varepsilon}.$$

(1) La fonction $f(z)$ peut prendre tantôt la valeur zéro, tantôt la valeur un, suivant la valeur de i. La démonstration s'applique encore à ce cas.

On peut donc tracer un cercle γ_{i+1} de rayon ρ_{i+1}, concentrique et intérieur au cercle Γ_i, et passant par une racine de l'équation $f(z) = 0$. Le maximum M_{i+1} de $|f(z)|$ sur le cercle γ_{i+1} vérifie l'inégalité

$$\log M_{i+1} > [\log M_i]^{1-\varepsilon}.$$

Le rayon ρ_{i+1} du cercle γ_{i+1} est inférieur au rayon de Γ_i, c'est-à-dire à $\frac{8\pi\rho_i}{q_i}$. Les inégalités et égalités suivantes

$$\log M_{i+1} > [\log M_i]^{1-\varepsilon}, \qquad \rho_{i+1} < \frac{8\pi\rho_i}{q_i},$$

$$A_i = [\log M_i]^{1-\varepsilon}, \qquad q_i = \frac{\varepsilon}{6}\log\log M_i$$

permettent de calculer par récurrence les quantités M_i, ρ_i, q_i et A_i. On trouve ainsi

$$\log M_i > [\log M(r)]^{(1-\varepsilon)^i}, \qquad \rho_i < r\left[\frac{48\pi}{\varepsilon(1-\varepsilon)^{\frac{i-1}{2}}\log\log M(r)}\right]^i,$$

$$A_i > [\log M(r)]^{(1-\varepsilon)^{i+1}}, \qquad q_i > \frac{\varepsilon}{6}(1-\varepsilon)^i \log\log M(r)$$

(toujours en supposant l'inégalité (18) vérifiée pour 1, 2, ... i). Si l'on donne à i la valeur de l'entier n égal ou immédiatement inférieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, en supposant ε inférieur à $\frac{1}{2}$, on obtient les inégalités

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} &\log M_n > [\log M(r)]^{\frac{1}{4}}, \qquad \rho_n < r\left[\frac{176}{\varepsilon\log\log M(r)}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}-1}, \\ &A_n > [\log M(r)]^{\frac{1}{4}}, \qquad q_n > \frac{\varepsilon}{24}\log\log M(r). \end{aligned}\right.$$

Ce groupe d'inégalités n'est d'ailleurs valable que si l'inégalité (18) est vérifiée pour $i \leqq n$. Comme M_i diminue lorsque i croît, il suffit que l'inégalité (18) soit vérifiée pour $i = n$, et, d'après la première inégalité (19), cela a lieu si r est assez grand pour que l'on ait

$$(20) \qquad \log\log M(r) \geqq \frac{1372}{\varepsilon}.$$

Le rayon du cercle de remplissage Γ_n intérieur à γ_n est égal à $\frac{8\pi\rho_n}{q_n}$;

il est donc inférieur à

$$\frac{12\pi}{11} r \left[\frac{176}{\varepsilon \log \log M(r)}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

21. Nous avons supposé jusqu'ici que ε était une constante. Nous pouvons faire dépendre ε de r, à condition que l'inégalité (20) soit vérifiée à partir d'une certaine valeur de r. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Soit $Z = f(z)$ *une fonction entière dont le module maximum sur le cercle* $|z| = r$ *est* $M(r)$. *Posons*

$$B(r) = [\log M(r)]^{1-\varepsilon(r)}, \qquad p(r) = \frac{\varepsilon(r)}{6} \log \log M(r),$$

$\varepsilon(r)$ *étant une fonction de* r *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{r}$, *de façon que l'inégalité*

$$\log \log M(r) \geq \frac{1372}{\varepsilon(r)} \tag{20}$$

soit vérifiée à partir d'une certaine valeur r_0 *de* r.

Lorsque r *est supérieur à* r_0, *la fonction* $f(z)$ *vérifie nécessairement l'une des deux propriétés suivantes :*

1° *Dans la couronne circulaire d'épaisseur* $\frac{\pi r}{p(r)}$, *dont la circonférence médiane est la circonférence* $|z| = r$, *on a l'inégalité*

$$\log |f(z)| > [\log M(r)]^{1-\varepsilon(r)}.$$

2° *Dans la couronne circulaire d'épaisseur* $\frac{8\pi r}{p(r)}$, *dont la circonférence médiane est la circonférence* $|z| = r$, *il existe au moins un cercle* $C'(r)$ *de rayon*

$$\frac{12\pi}{11} r \left[\frac{176}{\varepsilon(r) \log \log M(r)}\right]^{\frac{1}{\varepsilon(r)}},$$

dans lequel la fonction $f(z)$ *prend toutes les valeurs inférieures en module à* $B(r)$, *sauf peut-être dans le voisinage d'une certaine valeur* $a(r)$; *ce voisinage est intérieur au cercle* $|Z - a| = \frac{1}{B(r)}$ (¹).

(¹) Un énoncé analogue est valable pour les fonctions méromorphes à valeur asymptotique.

22. On peut fixer la forme de la fonction $\varepsilon(r)$. A chaque forme de cette fonction correspond un énoncé particulier du théorème précédent. Si l'on diminue la fonction $\varepsilon(r)$, on diminue le rayon du cercle $C'(r)$; par contre, on augmente l'épaisseur de la couronne circulaire qui contient ce cercle. En d'autres termes, si l'on gagne en précision sur le rayon du cercle de remplissage, on perd sur la position de ce cercle.

Examinons en particulier le cas limite, où

$$\varepsilon(r) = \frac{1372}{\log\log M(r)}$$

en supposant naturellement r assez grand pour que $\varepsilon(r)$ soit inférieur à 1. Le rayon du cercle de remplissage $C'(r)$ est égal à

$$\frac{12\pi}{11} r \left[\frac{176}{1372}\right]^{\frac{1}{1372}\log\log M(r)} < r[\log M(r)]^{-k},$$

k étant une constante numérique; on peut prendre $k = \frac{1}{670}$. On peut, en serrant les calculs, obtenir une valeur de k supérieure à $\frac{1}{670}$. Mais, quelle que soit la méthode employée, on ne pourra jamais avoir, du moins pour *toutes* les fonctions entières, une valeur de k supérieure ou égale à 1. Il est facile de voir en effet, dans l'exemple de e^z, que le rayon du cercle de remplissage est supérieur à $r[\log M(r)]^{-1}$: cette expression est égale à 1. Les valeurs de e^z dans le cercle C de centre $x_0 + iy_0$ et de rayon 1 ont leurs modules compris entre e^{x_0-1} et e^{x_0+1}. Le cercle C ne peut être un cercle de remplissage au sens que nous avons attaché à ce mot : les valeurs de e^z dans le cercle C ne peuvent, pour aucune position du point $x_0 + iy_0$, recouvrir dans le plan des Z des régions très étendues.

23. Dans certains cas on peut, des propriétés particulières de la fonction envisagée, déduire des renseignements précis sur les cercles de remplissage et les régions correspondantes du plan des Z. C'est ce que nous allons voir rapidement sur les fonctions entières e^z et $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

1° Soit d'abord la fonction e^z. Choisissons une fonction positive $p(r)$

croissant indéfiniment avec r, et construisons les cercles $C(r)$ de centres ir et de rayons $p(r)$. Dans chaque cercle $C(r)$ la fonction e^z prend toute valeur comprise dans le plan des Z entre les cercles de centre origine et de rayons respectifs $e^{\sqrt{p^2(r)-\pi^2}}$ et $e^{-\sqrt{p^2(r)-\pi^2}}$ (1). Le domaine du plan des z extérieur aux cercles $C(r)$ est partagé par cette famille de cercles en deux régions : dans l'une la fonction e^z converge uniformément vers l'infini, lorsque $|z|$ augmente indéfiniment; dans l'autre, elle converge vers zéro. Il ne peut donc y avoir, dans ces régions, de nouveaux cercles de remplissage.

2° Soit maintenant la fonction

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

où C désigne la constante d'Euler. De la formule bien connue

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

on tire immédiatement

$$\frac{1}{\Gamma(z-n)} = \frac{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}{\Gamma(z)}.$$

Si z n'est pas un entier négatif, $\left|\frac{1}{\Gamma(z-n)}\right|$ tend vers l'infini avec n. Lorsque z tend vers zéro, $\frac{1}{z\Gamma(z)}$ tend vers un. Soit une suite de points $z_1 z_2 \ldots z_n \ldots$, tendant vers zéro de façon que

$$|z_n(z_n - 1)\ldots(z_n - n)|$$

reste supérieur à une fonction croissant indéfiniment avec n. Par exemple prenons $z_n = \frac{1}{(n-2)!}$; $\frac{1}{\Gamma(z_n - n)}$ est supérieur en module à $n-1$. Les cercles C_n de centres $z = -n$ et de rayons $\frac{1}{(n-2)!}$ sont des cercles de remplissage. A l'intérieur de C_n, la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ s'annule une fois, et sur la circonférence C_n, la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ a son module

(1) La fonction e^z vérifie la même propriété dans le rectangle, inscrit dans le cercle $C(r)$, dont les sommets sont les points $z = \pm\sqrt{p^2(r) - \pi^2} + ir \pm i\pi$.

supérieur à $n-1$. Cette fonction prend donc une fois, à l'intérieur de C_n, toute valeur inférieure en module à $n-1$.

L'étude de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ aux environs de l'axe imaginaire montre l'existence d'une autre famille de cercles de remplissage. Posons $z = x + iy$. D'après le développement en produit infini de la fonction envisagée, on a

$$\left|\frac{1}{\Gamma(iy)}\right| = \sqrt{\frac{y}{2\pi}(e^{\pi y} - e^{-\pi y})};$$

de cette formule, et de la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on déduit facilement que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ tend vers zéro sur la courbe $y = \pm\frac{x}{2}\log x$. Considérons le cercle $C'(y)$ dont le centre est le point $z = iy$ et qui coupe la courbe $y = \pm\frac{x}{4}\log x$. La valeur de $\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right|$ au centre de ce cercle augmente indéfiniment avec y, et le minimum de $\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right|$ dans le cercle concentrique et de rayon moitié tend vers zéro. Le cercle $C'(y)$ est donc un cercle de remplissage, et l'application du théorème de Schottky donne aisément l'étendue de la région correspondante occupée par la fonction. Dans chaque cercle $C'(y)$, cette fonction a une valeur exceptionnelle : la valeur zéro.

Dans la région des x positifs, extérieure aux cercles $C'(y)$, la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ converge uniformément vers zéro; dans la région des x négatifs, extérieure aux cercles $C'(y)$ et aux cercles C_n, elle converge uniformément vers l'infini avec z. Ces résultats se déduisent immédiatement des formules écrites plus haut. En dehors des cercles C_n et $C'(y)$, il ne peut donc y avoir de cercles de remplissage.

CHAPITRE III.

SUR LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET LEURS VALEURS EXCEPTIONNELLES DANS LES ANGLES.

24. Je donnerai dans ce qui suit quelques propriétés nouvelles des fonctions entières d'ordre fini, et en particulier je retrouverai et préciserai un important complément apporté récemment par M. Bieberbach au théorème de M. Picard. Je commencerai par établir une propriété simple de la croissance des fonctions entières d'ordre fini, dans des angles.

Rappelons d'abord et précisons quelques définitions : une fonction $f(z)$ holomorphe dans un angle A est dite d'ordre ρ dans cet angle si, étant donnée une constante positive ε arbitrairement petite, les deux inégalités

$$|f(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}, \qquad |f(z)| > e^{|z|^{\rho-\varepsilon}}$$

sont vérifiées, la première à partir d'une certaine valeur de $|z|$, la deuxième pour une suite de points z tendant vers l'infini à l'intérieur de l'angle A. La définition s'étend à l'ordre d'une fonction sur une demi-droite, ou sur une courbe.

Je dirai qu'une fonction est *effectivement* d'ordre ρ dans l'angle A si, outre les conditions imposées plus haut, cette fonction est d'ordre ρ dans un angle de même sommet, intérieur à l'angle A.

MM. Phragmén et Lindelöf ont déduit de leur principe bien connu [1] le théorème suivant :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe et d'ordre au plus égal à ρ

---

[1] PHRAGMÉN et LINDELÖF, *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse* (*Acta math.*, t. 31, p. 381). Le principe s'énonce ainsi : Une fonction $f(z)$ monogène, régulière à l'intérieur d'un domaine T, a son module uniforme dans T et vérifie la condition $|f(z)| < C + \varepsilon$ (ε étant une constante positive arbitrairement petite, et C une autre constante) dès que z, restant à l'intérieur du domaine T, est suffisamment rapproché d'un point ξ du contour T, en exceptant les points d'un certain ensemble E. Supposons qu'il existe une fonction monogène $\omega(z)$ régulière et différente de zéro dans T, et jouissant des propriétés suivantes :

a. A l'intérieur de T, le module de $\omega(z)$ est uniforme et inférieur ou égal à 1.

b. En désignant par σ et ε des nombres positifs arbitrairement petits, et ξ un point quelconque de l'ensemble E, on a $|\omega^{\sigma}(z) f(z)| < C + \varepsilon$ dès que z, restant à l'intérieur de T, est suffisamment rapproché du point ξ.

Dans ces conditions, l'inégalité $|f(z)| \leq C$ reste valable pour tout point z intérieur à T; l'égalité est exclue si $f(z)$ ne se réduit pas à une constante.

dans un angle A *d'ouverture* $\frac{\pi}{\rho}$, *et si elle est bornée sur les côtés de l'angle* A, *elle est bornée à l'intérieur de* A.

Soient r et φ les coordonnées polaires de z. Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe et d'ordre ρ dans un angle A d'ouverture θ inférieure à $\frac{\pi}{\rho}$, défini par les inégalités $-\frac{\theta}{2} \leqq \varphi \leqq +\frac{\theta}{2}$. Nous allons montrer que *la fonction* $f(z)$ *ne peut être d'ordre inférieur à* ρ *sur les côtés de l'angle* A.

Considérons en effet la fonction auxiliaire

$$F(z) = e^{-z^{\rho-\varepsilon}} f(z), \qquad \text{où} \qquad z^{\rho-\varepsilon} = r^{\rho-\varepsilon}\, e^{i\varphi(\rho-\varepsilon)};$$

elle est holomorphe dans l'angle A et sur ses côtés L. Choisissons la quantité positive ε assez petite pour que $\rho - \varepsilon$ soit supérieur à l'ordre (supposé inférieur à ρ) de la fonction $f(z)$ sur les côtés de l'angle A. Lorsque φ varie de $-\frac{\theta}{2}$ à $+\frac{\theta}{2}$, $\cos\varphi(\rho-\varepsilon)$ reste supérieur à la constante positive $\cos\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{\rho}\right)$. La fonction auxiliaire $F(z)$ tend donc vers zéro sur les côtés de l'angle A. Or, elle est d'ordre ρ dans cet angle. Ce résultat est en contradiction avec le théorème cité plus haut de MM. Phragmèn et Lindelöf. On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Si une fonction est holomorphe et d'ordre ρ *dans un angle* A, *e d'ordre inférieur à* ρ *sur les côtés de cet angle, l'ouverture de l'angle* A *est supérieure ou égale à* $\frac{\pi}{\rho}$ (1).

---

(1) Ce théorème s'étend aisément à un ordre plus général défini par M. Lindelöf de la façon suivante : une fonction $f(z)$ holomorphe dans un angle est dite d'ordre $(\rho\rho_1\ldots\rho_p)$ dans cet angle si, étant donnée une constante positive ε arbitrairement petite, les inégalités

$$|f(z)| < e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}\cdots(\log^{(p)} r)^{\rho_p+\varepsilon}},$$
$$|f(z)| > e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}\cdots(\log^{(p)} r)^{\rho_p-\varepsilon}},$$

où r désigne le module de z, sont vérifiées, la première à partir d'une certaine valeur de r, la deuxième pour une suite de points z tendant vers l'infini. Ceci

23. Le théorème précédent s'étend au cas où l'on remplace l'angle A par un domaine T balayé par une courbe C issue de l'origine et tendant vers l'infini, dans une rotation autour de l'origine; le cas précédent se présente lorsque la courbe C est une demi-droite.

Soit donc C une courbe tendant vers l'infini, issue de l'origine, et qui n'est rencontrée qu'en un point par toute circonférence $|z| = r$. Faisons-la tourner d'un angle égal à $\frac{\pi}{\rho+\alpha}$ autour de l'origine, α étant une constante positive quelconque, et soit C′ la courbe obtenue après cette rotation. Désignons par T le domaine balayé par C dans sa rotation. M. G. Valiron a construit une fonction $G(z)$ satisfaisant aux inégalités

$$h_1 r^{\rho+\frac{\alpha}{2}} < \log|G(z)| < h_2 r^{\rho+\frac{\alpha}{2}}$$

(h_1 et h_2 étant deux constantes positives) à l'intérieur du domaine T, et à l'extérieur de petits cercles ayant pour centres certains points des courbes C et C′ et pour rayons des fonctions de r tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$ (1).

Écartons légèrement les courbes C et C′ par de petites rotations autour de l'origine, de façon à leur faire occuper des positions C_1 et C'_1 extérieures au domaine T, et faisant entre elles l'angle $\frac{\pi}{\rho+\frac{\alpha}{2}}$. Nous pouvons, avec M. G. Valiron, construire une fonction $H(z)$ satisfaisant aux inégalités

$$k_1 r^{\rho+\frac{\alpha}{4}} < \log|H(z)| < k_2 r^{\rho+\frac{\alpha}{4}}$$

---

posé, en considérant la fonction auxiliaire

$$F(z) = f(z)\, e^{-z^{\rho}(\log z)^{\rho_1}\ldots(\log^{(p)} z)^{\rho_p-\varepsilon}},$$

et en suivant la marche exposée plus haut, on obtient la proposition suivante :

Si une fonction est holomorphe et d'ordre $(\rho\rho_1\ldots\rho_p)$ *dans un angle* A, *et d'ordre inférieur à* $(\rho\rho_1\ldots\rho_p)$ *sur les côtés de cet angle, l'ouverture de l'angle* A *est supérieure ou égale à* $\frac{\pi}{\rho}$.

(1) G. Valiron, *Sur les chemins de détermination des fonctions entières* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 45, 1917, p. 153).

(k_1 et k_2 étant deux constantes positives), à l'intérieur du domaine T_1 compris entre C_1 et C'_1, et à l'extérieur de petits cercles qui n'empiètent pas sur le domaine T.

Ceci posé, soit $f(z)$ une fonction holomorphe et d'ordre ρ dans le domaine T. D'après le principe de MM. Phragmèn et Lindelöf, il est impossible que cette fonction soit bornée sur les courbes C et C' limitant le domaine T. Reprenons en effet les notations de la note 1, page 36. L'ensemble E se réduit au point à l'infini. La fonction $\frac{1}{\omega(z)}$ est la fonction $H(z)$ dont il vient d'être question. Si la fonction $f(z)$ était bornée sur C et C', elle serait bornée dans tout le domaine T, et ne serait pas d'ordre ρ dans ce domaine.

Plus généralement, il est impossible que la fonction $f(z)$ soit d'ordre inférieur à ρ sur les courbes C et C'. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et choisissons une constante positive ε arbitrairement petite. Écartons légèrement les courbes C et C' par des rotations autour de l'origine, de façon à leur faire occuper des positions C_2 et C'_2 extérieures au domaine T, et faisant entre elles l'angle $\frac{\pi}{\rho}$, qu'on peut écrire $\frac{\pi}{\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}}$. Nous pouvons, avec M. G. Valiron, construire une fonction $G(z)$ satisfaisant aux inégalités

$$h_1 r^{\rho-\frac{\varepsilon}{4}} < \log|G(z)| < h_2 r^{\rho-\frac{\varepsilon}{4}}$$

(h_1 et h_2 étant deux constantes positives) à l'intérieur du domaine T_2 compris entre C_2 et C'_2, et à l'extérieur de petits cercles n'empiétant pas sur le domaine T.

Ceci posé, choisissons la constante ε assez petite pour que $\rho-\frac{\varepsilon}{4}$ soit supérieur à l'ordre de la fonction $f(z)$ sur les courbes C et C'. La fonction auxiliaire

$$F(z)=\frac{f(z)}{G(z)}$$

est bornée sur ces courbes, et d'ordre ρ dans le domaine T. Nous avons vu plus haut que de telles conclusions sont incompatibles : la fonction $f(z)$ ne peut donc être d'ordre inférieur à ρ sur les courbes C et C'.

On déduit le théorème suivant :

Soit un angle curviligne A formé par deux courbes tendant vers l'infini, se déduisant l'une de l'autre par une rotation θ autour de l'origine. Si une fonction est holomorphe et d'ordre ρ dans l'angle A, et d'ordre inférieur à ρ sur les côtés de l'angle, l'ouverture θ de l'angle A est supérieure ou égale à $\frac{\pi}{\rho}$.

26. Appliquons le théorème obtenu au n° **24** à la théorie des fonctions entières d'ordre fini. Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ρ. Si ρ est inférieur à $\frac{1}{2}$, nous savons, d'après un théorème de M. Wiman, que sur une suite de cercles s'éloignant indéfiniment, la fonction $f(z)$ satisfait l'inégalité

$$|f(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

ε étant une constante positive arbitrairement petite.

Examinons le cas d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Nous dirons que cette *fonction est d'ordre ρ en une suite $z_1\, z_2 \ldots z_n \ldots$ tendant vers l'infini, si elle satisfait en ces points aux inégalités*

$$\log|f(z_1)| > |z_1|^{\rho-\varepsilon_1}, \qquad \ldots, \qquad \log|f(z_n)| > |z_n|^{\rho-\varepsilon_n},$$

$\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$ *étant une suite de quantités positives tendant vers zéro.*

Les points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ont au moins un argument limite ω. Traçons le rayon Δ issu de l'origine, d'argument ω. Dans un angle d'ouverture arbitrairement petite, ayant pour bissectrice Δ, la fonction $f(z)$ est évidemment d'ordre ρ.

Considérons l'ensemble E (s'il existe) des rayons issus de l'origine sur lesquels la fonction $f(z)$ est d'ordre inférieur à ρ, et de leurs rayons limités (sur ces rayons limites la fonction $f(z)$ peut être d'ordre ρ). Supposons que Δ ne fasse pas partie de l'ensemble E, et désignons par Δ' le rayon d'argument $\theta > \omega$, appartenant à E, et tel que l'angle $\widehat{\Delta O \Delta'}$ ne contienne pas de rayon de E. Sur tous les rayons intérieurs à cet angle, la fonction $f(z)$ est d'ordre ρ. Soit Δ'' le rayon d'argument immédiatement inférieur à θ, et appartenant à E.

L'angle $\widehat{\Delta' O \Delta''}$ ne peut être inférieur à $\frac{\pi}{\rho}$. Supposons en effet, pour fixer les idées, que sur les rayons Δ' et Δ'' la fonction $f(z)$ soit d'ordre inférieur à ρ (s'il n'en était pas ainsi, on prendrait deux rayons très voisins de Δ' et Δ'', sur lesquels $f(z)$ serait d'ordre inférieur à ρ). Dans l'angle $\widehat{\Delta' O \Delta''}$, la fonction $f(z)$ est d'ordre ρ. Sur Δ' et sur Δ'', elle est d'ordre inférieur à ρ. D'après le théorème du n° **24**, l'ouverture de l'angle $\widehat{\Delta' O \Delta''}$ est supérieure ou égale à $\frac{\pi}{\rho}$.

Le cas où les rayons Δ' et Δ sont confondus ($\theta = \omega$) se traite d'une façon analogue, et l'on aboutit au théorème suivant :

Soit une fonction entière $f(z)$ dont l'ordre fini ρ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Désignons par ω un argument limite de points en lesquels la fonction est d'ordre ρ. La fonction $f(z)$ est d'ordre ρ sur toute demi-droite issue de l'origine O, et intérieure à un certain angle α, de sommet O et d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$, comprenant à son intérieur ou sur sa frontière le rayon d'argument ω.

En particulier, il existe au moins un tel angle α pour toute fonction entière.

Le théorème du n° **25** fournit une proposition analogue pour les angles curvilignes. En particulier :

Soit C une courbe tendant vers l'infini ; et soit $C(\beta)$ la courbe qu'on obtient en faisant tourner C de l'angle β autour du point O. Il existe un nombre β_0 tel que, pour les valeurs de β comprises entre β_0 et $\beta_0 + \frac{\pi}{\rho}$, la fonction $f(z)$ est d'ordre ρ sur toute courbe $C(\beta)$.

27. On peut apporter, dans certains cas, les précisions suivantes :

1° Lorsque la fonction $f(z)$ est d'ordre inférieur à ρ sur un rayon issu de O, aussi voisin que l'on veut de l'un des côtés de l'angle α dont l'existence est démontrée au numéro précédent, cette fonction est, d'après le principe de MM. Phragmèn et Lindelöf, d'ordre ρ sur toute courbe intérieure à tout angle intérieur à l'angle α.

2° Lorsque la fonction $f(z)$ est d'ordre inférieur à ρ sur les deux côtés de l'angle α, cette fonction est à croissance régulière. Plus généralement, elle est d'ordre ρ sur tout arc de courbe Γ joignant deux points des côtés de l'angle α, et s'éloignant indéfiniment.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi : nous pourrions trouver une suite infinie d'arcs de courbe Γ, s'éloignant indéfiniment, sur lesquels la fonction $f(z)$ serait d'ordre inférieur à $\rho - \varepsilon$, ε étant une constante positive suffisamment petite, et choisie de façon que $\rho - \varepsilon$ soit supérieur à l'ordre de la fonction $f(z)$ sur les deux côtés de l'angle α. La fonction auxiliaire $f(z)e^{-z^{\rho-\varepsilon}}$, bornée sur les côtés de l'angle α et sur les arcs de courbe Γ, serait bornée dans tout l'angle α, et la fonction $f(z)$ ne serait pas d'ordre ρ dans cet angle.

La fonction $f(z)$ est encore à croissance régulière lorsqu'elle est d'ordre inférieur à un nombre inférieur à ρ sur des rayons aussi voisins que l'on veut des côtés de l'angle α.

28. Il est facile deformer des fonctions entières d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$, qui sont d'ordre ρ sur tout rayon issu de l'origine : il suffit de construire un produit canonique dont les zéros se reproduisent lorsque l'argument augmente d'un angle θ et des multiples de l'angle θ, en supposant θ inférieur à $\frac{\pi}{\rho}$ (et sous-multiple de 2π) : il est clair que l'angle α engendrera, par rotations, des angles analogues empiétant les uns sur les autres.

Il existe également des fonctions entières où l'angle α est unique. Il en est ainsi de la fonction considérée par M. Lindelöf dans son *Calcul des Résidus*, page 119 :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}} \right)^n,$$

où ρ est supérieur à $\frac{1}{2}$. C'est une fonction entière d'ordre ρ. Elle converge uniformément vers l'infini, quelque petite que soit la constante positive ε, dans l'angle

$$-\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\rho}-\varepsilon$$

et converge uniformément vers zéro dans l'angle

$$\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi-\left(\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon\right).$$

L'angle α est précisément l'angle

$$-\frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2\rho}.$$

Un autre exemple d'une fonction où l'angle α est unique est la fonction de M. Mittag-Leffler :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}\right)};$$

ce qui précède s'applique à cette fonction ([1]).

29. L'existence de l'angle α, démontrée au n° **26**, permet d'apporter une précision au théorème de M. Picard dans le cas des fonctions entières d'ordre fini ρ supérieur à $\frac{1}{2}$.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et *effectivement* d'ordre ρ dans un

---

([1]) On pourra consulter, sur ce sujet, le Mémoire de M. Bieberbach : *Ueber eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung* (*Math. Zeitschrift*, Band 3, 1919, p. 175). Dans le cas de la fonction de M. Mittag-Leffler, voici le principe de la démonstration : lorsque le point x est situé dans l'angle

$$\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi-\left(\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon\right),$$

la fonction $f(x)$ est égale, à un facteur constant près, à l'intégrale $\int_\gamma \frac{z^\rho\, dz}{z-x}$, le contour γ étant constitué par un arc de courbe voisin de l'origine, et les côtés de l'angle considéré, jusqu'à leur intersection avec l'arc de courbe. Lorsque x est situé hors de cet angle, il suffit de prolonger analytiquement l'intégrale. L'étude de l'intégrale établit les propriétés signalées.

angle A. M. G. Valiron a démontré (¹) que si l'ouverture θ de l'angle A est supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.

Appliquons ce théorème aux fonctions entières : dans tout angle de sommet O ayant une partie commune avec l'angle α, la fonction $f(z)$ est effectivement d'ordre ρ. Nous en déduisons le théorème suivant :

Dans tout angle A d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, de sommet O, et ayant une partie commune avec l'angle α, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.

L'ouverture de l'angle α est égale à $\frac{\pi}{\rho}$. Nous retrouvons ainsi et précisons le théorème suivant de M. Bieberbach (²) :

Dans tout angle supérieur au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$, $\pi\left(2-\frac{1}{\rho}\right)$, la fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.

M. Bieberbach a montré que certaines fonctions entières d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ (en particulier les fonctions de M. Mittag-Leffler considérées plus haut) ont deux valeurs exceptionnelles dans des angles d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$ (si ρ est inférieur à 1) ou $\pi\left(2-\frac{1}{\rho}\right)$ (si ρ est supérieur à 1).

50. Nous allons préciser le théorème de M. G. Valiron cité au numéro précédent. D'après ce théorème, une fonction $f(z)$ holomorphe et effectivement d'ordre infini dans un angle A ne peut avoir, dans cet angle, plus d'une valeur exceptionnelle. Supposons que $f(z)$ soit

(¹) G. Valiron, *Remarques sur le théorème de M. Picard* (*Bull. des Sc. math.*, 2ᵉ série, t. XLIV, mai 1920). Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi : *Si une fonction $f(z)$ est homolorphe et d'ordre supérieur à ρ dans un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$, elle prend, dans cet angle, une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.*

(²) *Loc. cit.* (note 1 de la page précédente).

dépourvue de zéro dans l'angle A. Quitte à prendre un angle un peu plus petit, nous pouvons supposer que $f(z)$ ne s'annule pas dans un angle contenant à son intérieur l'angle A.

La fonction $\frac{1}{f(z)}$, holomorphe dans A, ne peut y être bornée, puisque la fonction $f(z)$ ne peut avoir plus d'une valeur exceptionnelle dans cet angle. Nous allons montrer que *la fonction* $\frac{1}{f(z)}$ *est d'ordre infini dans l'angle* A. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et désignons par ρ un nombre supérieur à l'ordre de $\frac{1}{f(z)}$, choisi assez grand pour que $\frac{\pi}{\rho}$ soit inférieur à l'ouverture de l'angle A. Traçons, à l'intérieur de l'angle A, un angle A′ d'ouverture $\frac{\pi}{\rho+\varepsilon}$ (ε étant une constante positive suffisamment petite) dans lequel la fonction $f(z)$ est effectivement d'ordre infini. Nous pouvons supposer que la bissectrice intérieure de l'angle A′ est la partie positive de l'axe réel. La fonction $f(z)\,e^{z^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}$ est holomorphe et d'ordre infini dans l'angle A′. Elle prend donc, dans cet angle, une infinité de fois toute valeur, sauf la valeur zéro. Par conséquent, en une suite de points de l'angle A′ tendant vers l'infini, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ vérifie l'inégalité

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| > e^{r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Elle ne peut être d'ordre inférieur à ρ; on en déduit que, dans l'angle A, cette fonction est bien d'ordre infini.

51. Une propriété analogue est valable pour les fonctions d'ordre fini. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et effectivement d'ordre ρ dans un angle A d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$. D'après le théorème de M. G. Valiron, cette fonction ne peut avoir plus d'une valeur exceptionnelle dans l'angle A. Supposons qu'elle ne s'annule pas dans cet angle; choisissons un nombre positif ε suffisamment petit pour que l'ouverture de l'angle A soit supérieure à $\frac{\pi}{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}$. Dans cet angle, il existe au moins un angle A′ d'ouverture $\frac{\pi}{\rho - \frac{\varepsilon}{2}}$ dans lequel la fonction $f(z)$ est effectivement d'ordre ρ. Nous pouvons supposer que la bissectrice intérieure de l'angle A′ est la partie positive de l'axe réel. La fonction $f(z)\,e^{z^{\rho-\varepsilon}}$ est holomorphe et d'ordre ρ dans l'angle A′. Elle prend donc une infinité de fois toute valeur, sauf la valeur zéro. Par conséquent la fonction $\frac{1}{f(z)}$ vérifie, en une suite de points tendant vers l'infini à l'intérieur de l'angle A′, l'inégalité

$$\log\left|\frac{1}{f(z)}\right| > |z|^{\rho-\varepsilon}\cos\frac{\pi(\rho-\varepsilon)}{2\rho-\varepsilon}.$$

La constante ε étant arbitrairement petite, on en déduit que la fonction $\frac{1}{f(z)}$ est, dans l'angle A′, d'un ordre ρ' (infini ou fini) supérieur ou égal à ρ.

Considérons maintenant la fonction $\frac{1}{f(z)}$ dans l'angle A′. Il existe, à l'intérieur de cet angle, un angle d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho'}$, dans lequel la fonction $\frac{1}{f(z)}$ est effectivement d'ordre ρ'. ρ' ne peut être infini : car, d'après le numéro précédent, l'inverse $f(z)$ de $\frac{1}{f(z)}$ serait d'ordre infini, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. ρ' ne peut être supérieur à ρ : l'inverse $f(z)$ de $\frac{1}{f(z)}$ serait, d'après les résultats qui précèdent, d'un ordre au moins égal à ρ'. Donc $\rho' = \rho$, et nous avons démontré le théorème suivant :

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe et effectivement d'ordre ρ dans un angle A *d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$. Si $f(z)$ ne prend pas, dans l'angle* A, *la valeur a, la fonction $\frac{1}{f(z)-a}$ est effectivement d'ordre ρ dans un angle intérieur à l'angle* A, *et suffisamment voisin de celui-ci.*

52. D'autres précisions peuvent être apportées, dans certains cas, au théorème de M. G. Valiron : supposons qu'une fonction $f(z)$, holomorphe et d'ordre ρ dans un angle A de sommet O et d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\rho}$, tende vers l'infini ou soit bornée sur une courbe intérieure à un angle intérieur à l'angle A. La famille de fonctions

$$f_t(z) = f(zt),$$

où t varie de 1 à l'infini, ne saurait être normale dans la partie de toute couronne circulaire de centre O, comprise entre les côtés de l'angle A : en effet, si dans ce domaine la famille de fonctions $f_t(z)$ était normale, elle convergerait vers l'infini, ou constituerait une famille de fonctions bornées, ce qui n'est pas possible. D'après un théorème de M. G. Julia, il existe, à l'intérieur de l'angle A, un angle d'ouverture arbitrairement petit, dans lequel la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.

Les considérations développées au deuxième Chapitre, indépendamment de la théorie des familles normales, permettent de préciser ces propriétés en établissant l'existence des cercles de remplissage.

55. Appliquons à certaines fonctions entières les propriétés générales démontrées au début de ce Chapitre.

Signalons d'abord une nouvelle démonstration du théorème de M. Bieberbach, dans le cas où l'ordre de la fonction entière est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Cette démonstration ne fait pas intervenir les principes de MM. Phragmèn et Lindelöf. Soit une fonction entière $f(z)$ d'ordre ρ compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Supposons que tous les zéros a_n soient extérieurs à un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$. Plus généralement, supposons que toutes les abscisses de ces zéros soient positives. Sur la partie négative de l'axe réel, l'inégalité

$$\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| > \sqrt{1 + \left|\frac{z}{a_n}\right|^2},$$

montre que la fonction $f(z)$ est d'ordre ρ et converge vers l'infini. Dans un angle A de sommet O et d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$, contenant à son intérieur la partie négative de l'axe réel, la fonction $f(z)$ prend, d'après le théorème de M. G. Valiron, une infinité de fois toute valeur, sauf une en plus.

On peut même appliquer la remarque faite au numéro précédent, grâce au théorème de M. G. Julia : dans l'angle A, la famille de fonctions $f_t(z) = f(zt)$ ne peut être normale, et il existe dans cet angle un angle arbitrairement petit à l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.

Ce qui précède s'applique aux fonctions entières d'ordre 1, de la forme

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Considérons en particulier une telle fonction, dont les zéros a_n n'ont qu'un argument limite, soit zéro. Cette fonction est d'ordre 1 et converge uniformément vers l'infini dans l'angle défini par les inégalités

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon,$$

ε étant une constante positive arbitrairement petite. En effet, pour tout point z situé dans cet angle, l'inégalité

$$\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| > \sqrt{1 + \left|\frac{z}{a_n}\right|^2}$$

est valable à partir d'une certaine valeur de n. D'après le théorème de M. G. Valiron, la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf zéro dans chacun des angles

$$\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2\varepsilon,$$

et par suite dans des angles d'ouverture arbitrairement petite, ayant pour bissectrice l'une ou l'autre partie de l'axe imaginaire.

On peut apporter quelque précision dans le cas où tous les zéros de la fonction $f(z)$ sont positifs : cette fonction prend alors une infinité de fois toute valeur, sauf zéro, dans chacun des angles

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \varphi < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} + \varepsilon.$$

34. La méthode précédente permet de préciser le théorème de M. Bieberbach dans le cas de certaines fonctions entières d'ordre supérieur ou égal à 1. Traitons d'abord le cas d'un produit canonique d'ordre ρ :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{1}{p}\frac{z^p}{a_n^p}} \qquad (p \geq 1),$$

dont tous les zéros sont réels et positifs. Désignons par r et φ les coordonnées polaires de z. Lorsque φ diffère de zéro, on a

$$\begin{aligned} (21) \qquad \log|f(z)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{r}{a_n}} \frac{u^{p+1}\cos p\varphi - u^p \cos(p+1)\varphi}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\, du \\ &= S_1 \cos p\varphi - S_2 \cos(p+1)\varphi, \end{aligned}$$

en posant

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{r}{a_n}} \frac{u^{p+1}}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\, du, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{r}{a_n}} \frac{u^p}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\, du.$$

S_1 et S_2 sont des fonctions croissantes de r.

Il est clair qu'il existe des valeurs de φ (différentes de zéro) pour lesquelles $\cos p\varphi$ est positif et $\cos(p+1)\varphi$ est négatif. Soit φ_0 l'une de ces valeurs. Désignons par k la plus petite des quantités $\cos p\varphi_0$ et $-\cos(p+1)\varphi_0$. En un point z d'argument φ_0 la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité $\log|f(z)| > k(S_1 + S_2)$, d'où l'on déduit que les inégalités

$$S_1 < r^{\rho+\varepsilon}, \qquad S_2 < r^{\rho+\varepsilon}$$

(ε étant une constante positive arbitrairement petite) sont valables dès que r dépasse une certaine valeur dépendant de ε et de l'angle φ (cet angle est différent de zéro).

Soit maintenant σ un nombre inférieur à ρ. Lorsque v est compris entre 1 et 2, le rapport de v^{σ} à l'intégrale définie $\int_0^{v} \frac{u^{p+1}}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\, du$ est compris entre deux constantes positives, dépendant de φ.

La quantité S_1 vérifie donc l'inégalité

$$S_1 > k r^\sigma \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{a_n^\sigma}; \tag{22}$$

k est une constante positive (dépendant de ρ seulement); N_1 et N_2 sont les deux nombres entiers satisfaisant aux inégalités

$$a_{N_1} < r, \quad a_{N_1+1} \geqq r, \quad a_{N_2} \leqq 2r, \quad a_{N_2+1} > 2r.$$

La quantité S_2 vérifie une inégalité analogue à l'inégalité (22).

Ceci posé, nous allons montrer qu'il existe une suite infinie de valeurs de N_1 pour lesquelles $\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{a_n^\sigma}$ tend vers l'infini. S'il n'en était pas ainsi, en effet, cette quantité serait inférieure à un nombre A. Soit r un nombre positif assez grand, et N_m l'entier satisfaisant aux inégalités

$$a_{N_m} \leqq 2^{m-1} r, \qquad a_{N_m+1} > 2^{m-1} r.$$

Choisissons un nombre positif η assez petit pour que $\sigma + \eta$ soit inférieur à ρ. Des inégalités.

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{a_n^{\sigma+\eta}} < \frac{A}{r^\eta}, \quad \ldots, \quad \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} \frac{1}{a_n^{\sigma+\eta}} < \frac{A}{(2^{m-1} r)^\eta}, \quad \ldots,$$

on tire

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\sigma+\eta}} < A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{m-1} r)^\eta}.$$

La série du premier membre est donc convergente, ce qui est absurde, puisque $\sigma + \eta$ est inférieur à l'exposant de convergence ρ de la suite des quantités a_n.

Donc, pour une suite infinie de valeurs de N_1, la quantité $\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{1}{a_n^\sigma}$ tend vers l'infini, et d'après l'inégalité (22), la quantité S_1 satisfait, pour une suite de valeurs de r tendant vers l'infini, à l'inégalité $S_1 > r^{\rho-\varepsilon}$, ε étant une constante positive arbitrairement petite [1]. Une démonstration analogue conduit à la même conclusion pour S_2.

---

[1] La quantité S_1 vérifie en outre, à partir d'une certaine valeur de r, l'inégalité $S_1 > C r^\rho$, aussi grande que soit la constante positive C. En effet, lorsque σ

L'étude des quantités S_1 et S_2 étant faite, reprenons celle de la fonction entière $f(z)$. D'après l'égalité (21), $f(z)$ est d'ordre ρ et converge uniformément vers l'infini dans les secteurs angulaires A_1 définis par les inégalités $\cos p\varphi \geqq 0$; $\cos(p+1)\varphi \geqq 0$. Au contraire $f(z)$ converge uniformément vers zéro $\left(\text{et } \frac{1}{f(z)} \text{ est d'ordre } \rho\right)$ dans les secteurs angulaires A_2 définis par les inégalités $\cos p\varphi \leqq 0$; $\cos(p+1)\varphi \leqq 0$. Lorsque φ croît de 0 à 2π, les secteurs A_1 et A_2 se succèdent alternativement.

Dans un angle A de sommet O ayant une partie commune avec un secteur A_1 et un secteur A_2, la famille de fonctions $f_t(z) = f(zt)$ ne peut être normale (ni quasi normale), sinon elle convergerait dans l'angle A uniformément vers l'infini (à cause du secteur A_1) d'une part, et vers zéro (à cause de A_2) d'autre part. On en déduit, d'après un théorème de M. G. Julia, qu'il existe dans l'angle A un angle d'ouverture arbitrairement petite, dans lequel la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus [1].

53. Soit maintenant une fonction entière $F(z) = e^{Q(z)} f(z)$; $Q(z)$ est un polynome de degré q et $f(z)$ est un produit canonique d'ordre ρ et de genre p, dont les zéros sont réels et positifs.

Supposons l'argument φ différent de zéro. Lorsque q est supérieur

---

est supérieur à 1, r^p et l'intégrale $\int_0^{r} \frac{v^{p+1}}{v^2 - 2v\cos\varphi + 1}\,dv$ ont leur rapport compris entre deux constantes positives ne dépendant que de φ. On en déduit, d'après la valeur de S_1, l'inégalité

$$(23) \qquad S_1 > k r^p \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n^p},$$

où k désigne une constante positive ne dépendant que de φ, et N l'entier satisfaisant aux inégalités $a_N \leqq r$, $a_{N+1} > r$. L'inégalité (23) entraîne l'inégalité $S_1 > Cr^p$ puisque la série $\sum \frac{1}{a_n^p}$ diverge.

(1) L'introduction des cercles de remplissage permettrait de préciser ces propriétés.

ou égal à $p+1$, la fonction $F(z)$ se comporte comme $e^{Q(z)}$ sur les rayons issus de l'origine : on sait en effet que la fonction $f(z)$ vérifie, à partir d'une certaine valeur de r, l'inégalité

$$\log|f(z)| < \varepsilon r^{p+1},$$

ε étant une constante positive arbitrairement petite.

Supposons q inférieur ou égal à p. Dans les secteurs angulaires A_1 définis par les inégalités $\cos p\varphi > 0$; $\cos(p+1)\varphi \leqq 0$, la fonction $f(z)$ converge uniformément vers l'infini, est d'ordre ρ et vérifie l'inégalité $|f(z)| > e^{Cr^\rho}$, C étant une constante positive aussi grande que l'on veut. Il en est donc de même de la fonction $F(z)$. D'une manière analogue, $F(z)$ se comporte comme $f(z)$ dans les secteurs angulaires A_2. Les propriétés démontrées dans le numéro précédent pour $f(z)$ sont valables pour $F(z)$.

36. Le plus petit des secteurs angulaires A_1 et A_2 a pour ouverture $\frac{\pi}{2p(p+1)}$. Considérons un produit canonique $f(z)$ d'ordre ρ, dont les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, d'arguments respectifs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sont localisés dans un angle θ d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{2p(p+1)}$. Lorsque le point z d'argument φ est extérieur à l'angle θ, la fonction $f(z)$ vérifie l'identité

$$(31') \quad \log|f(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{r}{|a_n|}} \frac{u^{p+1}\cos p(\varphi-\varphi_n) - u^p \cos(p+1)(\varphi-\varphi_n)}{u^2 - 2u\cos(\varphi-\varphi_n) + 1}\,du.$$

Il est clair que dans chaque secteur A_1 il existe au moins une demi-droite sur laquelle tous les $\cos p(\varphi-\varphi_n)$ sont positifs et tous les $\cos(p+1)(\varphi-\varphi_n)$ négatifs (ou nuls) : sur cette demi-droite, la fonction $f(z)$ converge vers l'infini et est d'ordre ρ. De même dans chaque secteur A_2 il existe au moins une demi-droite sur laquelle $f(z)$ tend vers zéro, $\frac{1}{f(z)}$ étant d'ordre ρ. D'où l'existence d'angles arbitrairement petits dans lesquels la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf zéro.

Ces propriétés restent valables pour les fonctions entières plus générales obtenues en multipliant le produit canonique précédent $f(z)$ par $e^{Q(z)}$, $Q(z)$ étant un polynome dont le degré est inférieur ou égal au genre p de $f(z)$.

57. Nous allons terminer ces applications par l'étude d'un cas particulier intéressant. Lorsque l'argument φ de z diffère de zéro, le produit canonique $f(z)$, dont les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont réels et positifs, vérifie l'identité

$$(21) \qquad \log|f(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{r}{a_n}} \frac{u^{p+1}\cos p\varphi - u^p \cos(p+1)\varphi}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1}\, du$$
$$= S_1 \cos p\varphi - S_2 \cos(p+1)\varphi,$$

et l'étude de la fonction $f(z)$ se rattache à celle des quantités S_1 et S_2.

Proposons-nous de rechercher s'il existe des produits canoniques pour lesquels le signe du deuxième membre de l'identité (21) est celui de $\cos p\varphi$ (lorsque $\cos p\varphi$ diffère de zéro) ou celui de $\cos(p+1)\varphi$ [lorsque $\cos(p+1)\varphi$ diffère de zéro]. En d'autres termes, existe-t-il des produits canoniques $\mathcal{F}_1(z)$ ou $\mathcal{F}_2(z)$ vérifiant soit l'équation

$$(24) \qquad \log|\mathcal{F}_1(z)| = [1 + \varepsilon(r, \varphi)] S_1 \cos p\varphi \qquad (\cos p\varphi \neq 0),$$

soit l'équation

$$(24') \qquad \log|\mathcal{F}_2(z)| = -[1 + \varepsilon(r, \varphi)] S_2 \cos(p+1)\varphi \qquad [\cos(p+1)\varphi \neq 0],$$

$\varepsilon(r, \varphi)$ étant une fonction tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, lorsque $\cos p\varphi$ ou $\cos(p+1)\varphi$ diffère de zéro?

La fonction $\mathcal{F}_1(z)$ vérifiant l'équation (24) est nécessairement d'un ordre ρ égal à son genre p. En effet, si ρ était supérieur à p, la fonction $\mathcal{F}_1(z)$ convergerait uniformément vers l'infini et serait d'ordre ρ dans des angles d'ouverture $\frac{\pi}{p} > \frac{\pi}{\rho}$ (angles où $\cos p\varphi$ est positif), ce qui n'est pas possible, d'après le théorème de M. G. Valiron cité au n° **29**.

De même *l'ordre ρ de $\mathcal{F}_2(z)$ est égal à $p+1$*. Supposons en effet que ρ soit inférieur à $p+1$. Nous pouvons choisir deux rayons issus de l'origine, faisant entre eux un angle A d'ouverture comprise entre $\frac{\pi}{\rho}$ et $\frac{\pi}{p+1}$, et tels que leurs arguments satisfont à l'inégalité $\cos(p+1)\varphi > 0$.

D'après l'équation (24'), la fonction $\mathfrak{F}_2(z)$ est d'ordre ρ dans l'angle A, et tend vers zéro sur les côtés de cet angle, dont l'ouverture est inférieure à $\frac{\pi}{\rho}$; un tel résultat est en contradiction avec le théorème de MM. Phragmèn et Lindelöf.

Montrons maintenant qu'il existe des fonctions $\mathfrak{F}_1(z)$ et $\mathfrak{F}_2(z)$. Nous démontrons d'abord le théorème suivant :

Soit $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ une suite de quantités réelles et positives tendant vers l'infini. Si la quantité

$$R_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n^p}}{a_{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{p+1}}}$$

tend vers l'infini avec l'entier N, *le produit canonique $f(z)$ dont les zéros sont $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ est une fonction $\mathfrak{F}_1(z)$.*

Soit en effet k un nombre positif très grand, dont nous fixerons plus loin la valeur, et soit N l'entier défini par les inégalités

$$r > ka_N, \qquad r < ka_{N+1}.$$

Il résulte de l'expression de S_1 que cette quantité est supérieure à

$$C_1 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{r}{a_n}\right)^p = C_1 s_1,$$

C_1 étant une constante positive ne dépendant que de l'argument φ supposé différent de zéro (¹).

De même S_2 est inférieur à

$$C_2 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{r}{a_n}\right)^{p-1} + C_2' \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{r}{a_n}\right)^{p+1} = C_2 s_2 + C_2' s_2' ;$$

C_2 et C_2' étant deux constantes positives ne dépendant que de φ (¹).

(¹) On peut prendre

$$C_1 = \frac{1}{(p+2)\sin^2\varphi}; \quad C_2 = \frac{1}{(p-1)\sin^2\varphi}; \quad C_2' = \frac{1}{2(p+1)(1-\cos\varphi)}.$$

Lorsque n est inférieur ou égal à N, $\frac{r}{a_n}$ est supérieur à k. Il en résulte que s_1 est supérieur à ks_2. D'autre part,

$$\frac{s_1}{s'_2} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n^\rho}}{r \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\rho+1}}} = R_N \frac{a_{N+1}}{r} = \frac{R_N}{k}.$$

Choisissons maintenant $\sqrt{R_N}$ pour valeur de k; les inégalités

$$\frac{s_1}{s_2} > \sqrt{R_N} \qquad \text{et} \qquad \frac{s_1}{s'_2} \geqq \sqrt{R_N}$$

entraînent l'inégalité

$$\frac{S_1}{S_2} > C\sqrt{R_N},$$

C étant une constante positive ne dépendant que de ρ. Cette dernière inégalité montre que le produit canonique $f(z)$ vérifie la condition (24). C'est bien une fonction $\mathfrak{F}_1(z)$.

Une démonstration analogue conduirait au résultat suivant :

Si la quantité R_N *tend vers zéro lorsque* N *augmente indéfiniment, le produit canonique* $f(z)$ *est une fonction* $\mathfrak{F}_2(z)$.

Il résulte de ce qui précède que lorsque l'exposant de convergence ρ de la suite $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ n'est pas entier, la quantité R_N ne peut tendre ni vers l'infini ni vers zéro lorsque N augmente indéfiniment : s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions bâtir soit une fonction $\mathfrak{F}_1(z)$, soit une fonction $\mathfrak{F}_2(z)$, de zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, et d'ordre ρ non entier. Nous avons vu plus haut qu'un tel résultat est impossible.

Il est facile de former des exemples de suites $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ telles que R_N tende vers l'infini ou vers zéro. Prenons par exemple $a_n = n^{\frac{1}{\rho}}$; ρ est égal à p; $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n^p}$ et $\log N$ ont leur rapport compris entre deux constantes positives. Il en est de même de $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{p+1}}$ et $N^{-\frac{1}{p}}$ et par suite de R_N et $\log N$; R_N tend donc vers l'infini avec N, comme $\log N$.

Plus généralement, donnons-nous une suite de quantités positives $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ dont l'exposant de convergence est égal à l'entier p, et qui satisfont aux inégalités

$$n(\log n)^{\rho_1-\varepsilon} < a_n^p < n(\log n)^{\rho_1},$$

ρ_1 et la quantité positive ε étant tous deux inférieurs à 1. Un calcul analogue au précédent montre que la quantité R_N correspondante tend vers l'infini avec N, comme $(\log N)^{1-\varepsilon}$.

D'une manière analogue, lorsque la suite de quantités $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ dont l'exposant de convergence est égal à l'entier $p+1$, vérifie les inégalités

$$n(\log n)^{\rho_1} < a_n^{p+1} < n(\log n)^{\rho_1+\varepsilon},$$

où ρ_1 est supérieur à 1 et ε compris entre 0 et 1, la quantité R_N tend vers zéro comme $(\log N)^{\varepsilon-1}$ lorsque N augmente indéfiniment.

38. Toute fonction $\mathcal{F}_1(z)$ d'ordre p se comporte comme la fonction $e^{Q(z)}$, $Q(z)$ étant un polynome de degré p. En effet, la fonction $\mathcal{F}_1(z)$ est d'ordre p et converge uniformément vers l'infini dans tout angle de sommet O intérieur à un secteur où $\cos p\varphi$ est positif. $\mathcal{F}_1(z)$ converge uniformément vers zéro et $\frac{1}{\mathcal{F}_1(z)}$ est d'ordre p dans tout angle de sommet O intérieur à un secteur où $\cos p\varphi$ est négatif. Les rayons d'arguments $\varphi = \frac{\pi}{2p} + k\frac{\pi}{p}$ sont les frontières de ces secteurs, et dans des angles d'ouverture arbitrairement petite ayant pour bissectrices ces rayons, la fonction $\mathcal{F}_1(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf zéro. On peut ajouter une précision : suivant le signe de $\cos(p+1)\varphi$, la fonction $\mathcal{F}_1(z)$ tend vers l'infini ou vers zéro sur le rayon considéré; par exemple, sur le rayon $\varphi = \frac{\pi}{2p}$, $\mathcal{F}_1(z)$ tend vers l'infini, de sorte qne cette fonction prend une infinité de fois toute valeur, sauf zéro, dans l'angle $\frac{\pi}{2p} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2p} + \varepsilon$, aussi petite que soit la constante positive ε.

Toute fonction $\mathcal{F}_2(z)$ possède des propriétés analogues.

Dans un angle d'ouverture arbitrairement petite ayant pour bissectrice la partie positive de l'axe réel, la fonction $\mathcal{F}_1(z)$ prend également une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus.

Ces propriétés restent valables pour les fonctions entières de la forme $e^{Q(z)}\mathcal{F}_1(z)$, le degré du polynome $Q(z)$ ne surpassant pas l'ordre p du produit canonique $\mathcal{F}_1(z)$. Tel est le cas de la fonction bien connue.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

D'après ce qui précède, cette fonction converge uniformément vers zéro dans l'angle $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}-\varepsilon$, et vers l'infini dans les angles $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon$ et $\pi+\varepsilon \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Nous avons donné au deuxième Chapitre des propriétés plus précises de cette fonction.