JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. ANGELESCO

Sur les zéros de certaines fonctions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 403-412.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__403_0>

Sur les zéros de certaines fonctions;

PAR A. ANGELESCO.

Dans ce travail, nous nous proposons de démontrer une proposition générale, en ce qui concerne les zéros de certaines fonctions continues. Nous utiliserons cette proposition pour déterminer une classe de fonctions biorthogonales, et ensuite nous indiquerons des exemples et des applications.

1. Soit $\varphi(x, \lambda)$ une fonction de x et du paramètre λ satisfaisant aux conditions suivantes :

Toute équation en x de la forme

$$\varphi(x, \lambda_0) + A_1\varphi(x, \lambda_1) + \ldots + A_s\varphi(x, \lambda_s) = 0, \tag{1}$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont des constantes et les nombres de la suite

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots \tag{2}$$

étant tous différents et compris dans un intervalle (α, β), ne peut avoir plus de s racines dans un intervalle (a, b); et de plus, si l'équation (1) a s racines distinctes dans cet intervalle, son premier membre change de signe quand x passe par la valeur d'une de ces racines.

Nous appellerons ces conditions *les conditions* L.

Il résulte, en particulier, de ces conditions, que l'équation

$$\varphi(x, \lambda_0) = 0$$

n'a aucune racine dans l'intervalle (a, b).

Désignons alors par $K(x)$ une fonction positive pour x dans l'intervalle (a, b) et démontrons que :

Si une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), satisfait aux n conditions

$$(3) \qquad \int_a^b K(x)\varphi(x, \lambda_i) f(x)\,dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

l'équation $f(x) = 0$ a au moins n racines réelles et distinctes dans l'intervalle (a, b) (1).

En effet, $\varphi(x, \lambda_0)$ gardant un signe constant dans l'intervalle d'intégration, il résulte de la condition (3), pour $i = 0$, que $f(x)$ change de signe dans l'intervalle (a, b); $f(x)$ a donc une racine que nous désignons par r_1. Déterminons alors la constante C de manière que l'équation

$$\varphi(x, \lambda_0) + C\varphi(x, \lambda_1) = 0$$

ait pour racine r_1. Comme

$$\int_a^b K(x)[\varphi(x, \lambda_0) + C\varphi(x, \lambda_1)] f(x)\,dx = 0,$$

il résulte des conditions L que $f(x)$ doit changer de signe au voisinage d'une autre racine r_2. De proche en proche, on établit la proposition énoncée (2).

2. Considérons l'équation intégrale de première espèce

$$\int_a^b K(x)\varphi(x, y) X(x)\,dx = \Phi(y),$$

la fonction $\varphi(x, y)$ satisfaisant aux conditions L. Il résulte de notre proposition que, si la fonction $\Phi(y)$ a n zéros dans l'intervalle (α, β), la fonction $X(x)$ aura au moins n zéros dans l'intervalle (a, b).

3. *Fonctions biorthogonales.* — Soit $\psi(x, \mu)$ une autre fonction

(1) Nous avons démontré cette proposition quand $\varphi(x, \lambda) = x^\lambda$ dans une Note des *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 273.

(2) Le principe de cette démonstration est le même que celui employé par Legendre pour prouver la réalité des racines de ses polynomes.

satisfaisant aux conditions L pour x dans le même intervalle (a, b) et pour les valeurs distinctes

$$\mu_0, \quad \mu_1, \quad \ldots, \quad \mu_n, \quad \ldots$$

du paramètre μ.

On peut déterminer les n constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et d'une seule manière, telles que si

$$P_n = \psi(x, \mu_n) + a_1\psi(x, \mu_{n-1}) + \ldots + a_n\psi(x, \mu_0) \tag{4}$$

on ait

$$\int_a^b K(x)\varphi(x, \lambda_i) P_n \, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

En effet, il ne peut y avoir indétermination, en ce qui concerne la détermination des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$; car si l'on avait deux fonctions de la forme (4) satisfaisant aux conditions (5), on déduirait qu'une fonction de la forme

$$R = C_1\psi(x, \mu_{n-1}) + C_2\psi(x, \mu_{n-2}) + \ldots + C_n\psi(x, \mu_0)$$

y satisfait aussi. Donc, d'après notre proposition, l'équation $R = 0$ aurait n racines dans l'intervalle (a, b), ce qui est impossible d'après les conditions L.

Déterminons de même la fonction de la forme

$$Q_n = \varphi(x, \lambda_n) + b_1\varphi(x, \lambda_{n-1}) + \ldots + b_n\varphi(x, \lambda_0)$$

par les n conditions

$$\int_a^b K(x)\psi(x, \mu_i) Q_n \, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On voit alors immédiatement que

$$\int_a^b K(x) P_m Q_n \, dx = 0$$

si m est différent de n et que l'intégrale

$$\int_a^b K(x) P_m Q_m \, dx$$

est différente de zéro.

Exemples des fonctions satisfaisant aux conditions L.

4. *Premier exemple.* — Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, positive et monotone pour x dans l'intervalle (a, b). Alors la fonction

$$[\varphi(x)]^\lambda$$

satisfait aux conditions L, quel que soit l'intervalle (α, β).

En effet, l'équation (1) est dans ce cas de la forme

$$[\varphi(x)]^{\lambda_0}+A_1[\varphi(x)]^{\lambda_1}+\ldots+A_s[\varphi(x)]^{\lambda_s}=0$$

et devient, en posant $\varphi(x)=u$,

$$u^{\lambda_0}+A_1 u^{\lambda_1}+\ldots+A_s u^{\lambda_s}=0.$$

Mais cette dernière équation ne peut avoir plus de s racines positives et, si elle a s racines positives distinctes, son premier membre change de signe quand x traverse une racine. On le voit pour $s=1$. Supposons-le pour $s=p$ et démontrons-le pour $s=p+1$.

En divisant le premier membre de l'équation considérée $\mathcal{E}$ (l'équation précédente où $s=p+1$) par $u^{\lambda_{p+1}}$ et en dérivant ensuite, on obtient une équation $\mathcal{E}'$ qui ne peut avoir que p racines positives, donc $\mathcal{E}$ ne peut avoir tout au plus que $p+1$ racines positives. Si $\mathcal{E}$ a $p+1$ racines positives distinctes, son premier membre change de signe quand x traverse une de ces racines; car si, pour la racine r, il n'y avait pas de changement de signe, le premier membre de $\mathcal{E}$ est un maximum ou un minimum pour $x=r$, et par conséquent $\mathcal{E}'$ devrait avoir $p+1$ racines positives, ce qui est impossible.

5. *Deuxième exemple.* — Soit

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

une série entière en x dans laquelle tous les coefficients sont positifs ou nuls, a_0 étant différent de zéro. Soit R le rayon de convergence de cette série. Nous prendrons $a\geqq 0$ et $b>0$; pour l'intervalle (α, β), l'intervalle $\left(0, \frac{R}{b}\right)$.

Dans ces conditions, la fonction $\varphi(\lambda x)$ satisfait aux conditions L. En effet, les équations de la forme

$$\varphi(\lambda_0 x)+A_1\varphi(\lambda_1 x)+\ldots+A_s\varphi(\lambda_s x)=0 \tag{6}$$

ont été étudiées par Laguerre ([1]) et il résulte de son étude que l'équation (6) a au plus s racines positives. Si cette équation a s racines positives distinctes, comme son premier membre est une série entière en x, on a les mêmes changements de signes que pour un polynome qui admet le nombre maximum de racines positives distinctes.

Remarque. — La fonction simple $(\lambda-x)^t$, où t est un nombre négatif, satisfait aux conditions L pour x positif et inférieur à un nombre l, l'intervalle (α, β) étant l'intervalle $(l, l+m)$, m étant un nombre positif. On le voit en posant $\lambda=\frac{1}{\mu}$; on est ainsi ramené aux fonctions précédentes.

On voit de même que la fonction $(x+\lambda)^m$ satisfait aux conditions L, pour m entier positif, x et λ étant positifs.

6. *Applications.* — Soient l'intégrale

$$I(y)=\int_0^1 x^{y-1}A(x)\,dx,$$

où $y>0$, et

$$A(x)=a_0x^{\lambda_0}+a_1x^{\lambda_1}+\ldots+a_nx^{\lambda_n},$$

les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant tous positifs. On voit immédiatement que

$$I(y)=\frac{a_0}{y+\lambda_0}+\frac{a_1}{y+\lambda_1}+\ldots+\frac{a_n}{y+\lambda_n},$$

d'où la proposition suivante :

Les nombres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant tous positifs, si l'équation

$$\frac{a_0}{x+\lambda_0}+\frac{a_1}{x+\lambda_1}+\ldots+\frac{a_n}{x+\lambda_n}=0$$

([1]) *Œuvres*, t. I, p. 26.

a p racines positives distinctes, l'équation

$$a_0 x^{\lambda_0} + a_1 x^{\lambda_1} + \ldots + a_n x^{\lambda_n} = 0$$

aura au moins p racines distinctes dans l'intervalle (0, 1).

7. Partons de l'intégrale

$$I(y) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} x^y A(x)\,dx,$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $y > 0$ et

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Le terme contenant a_i dans $I(y)$ est

$$a_i \frac{\Gamma(\alpha+y+i)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+y+i+1)},$$

donc

$$I(y) = \frac{\Gamma(\alpha+y)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+y)}\left[\sum_{i=0}^{i=n} a_i \frac{(\alpha+y)(\alpha+y+1)\ldots(\alpha+y+i-1)}{(\alpha+\beta+y)(\alpha+\beta+y+1)\ldots(\alpha+\beta+y+i)}\right].$$

Par suite, la proposition suivante :

α et β étant deux nombres positifs, si l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \frac{(x+\alpha)(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+i-1)}{(x+\alpha+\beta)(x+\alpha+\beta+1)\ldots(x+\alpha+\beta+i)} = 0$$

a p racines positives distinctes, l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

aura au moins p racines distinctes dans l'intervalle (0, 1).

8. Considérons l'intégrale

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{k}} x^{y-1} A(x)\,dx, \tag{7}$$

où $y > 0$, k un nombre positif et

$$A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n.$$

Changeons dans l'intégrale (7) x en kx. Alors, à l'aide de l'intégrale qui définit la fonction Γ, on trouve

$$\mathrm{I}(y) = k^y \Gamma(y) \left[\sum_{i=0}^{i=n} k^i \alpha_i y(y+1)\ldots(y+i-1) \right].$$

Et par suite :

k étant un nombre positif, si l'équation

$$k^n \alpha_n x(x+1)\ldots(x+n-1) + k^{n-1}\alpha_{n-1} x(x+1)\ldots(x+n-2) + \ldots + \alpha_0 = 0$$

a p racines positives distinctes, l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

aura au moins p racines positives distinctes.

9. Considérons encore l'intégrale

$$(8) \qquad \mathrm{I}(x) = \int_a^b k(u)(x-u)^n f(u)\,du,$$

où $b > a$, $k(u)$ restant positif dans l'intervalle d'intégration et $f(u)$ étant une fonction continue dans l'intervalle (a, b), n étant un entier positif. Démontrons que :

Si l'équation $\mathrm{I}(x) = 0$ a p racines réelles et distinctes toutes supérieures à b, ou toutes inférieures à a, la fonction $f(u)$ aura p zéros dans l'intervalle (a, b) (¹).

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les p racines de $\mathrm{I}(x) = 0$ supposées toutes supérieures à b. Faisons dans l'intégrale (8) le changement $u = b - v$; on aura alors

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^{b-a} k(b-v)(x-b+v)^n f(b-v)\,dv.$$

En posant $\lambda_i = r_i - b$, il résulte que

$$\int_0^{b-a} k(b-v)(\lambda_i + v)^n f(b-v)\,dv = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

(¹) Nous avons démontré une proposition analogue dans les *Comptes rendus*, t. **172**, 1921, p. 1153.

Mais $b - a > 0$ et les nombres λ_i sont tous positifs. Nous avons vu (*remarque*, n° 5) que, dans ces conditions, la fonction $(v + \lambda)^n$ satisfait, dans l'intervalle d'intégration, aux conditions L.

Par suite, $f(b - v)$ a n zéros dans l'intervalle $(0, b - a)$. Donc notre proposition est démontrée dans le cas des racines toutes supérieures à b.

Pour le cas des racines $r_1, r_2, \ldots, r_p$ toutes inférieures à a, la démonstration se fait de même, en faisant le changement $u = a + v$.

10. *Exemple de fonctions biorthogonales.* — Proposons-nous de déterminer le polynome P_n

$$P_n = \frac{x^n}{n!} + A_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + A_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + A_n \tag{9}$$

par les n conditions

$$\int_0^\infty e^{-kx} P_n \, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

En tenant compte que

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^p \, dx = \left(\frac{1}{k}\right)^{p+1} p!,$$

les n conditions (10) nous conduisent aux n relations

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{n+1} + A_1 \left(\frac{1}{k}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} + \ldots + A_n \frac{1}{k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

On aura donc

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = (x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{n}\right), \tag{12}$$

d'où les valeurs des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On trouve ainsi :

$$P_1 = x - 1,$$

$$P_2 = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2},$$

$$P_3 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{12} + x - \frac{1}{6},$$

. . . .

Cherchons une relation entre deux polynomes consécutifs P_n et P_{n+1}. En multipliant la relation (12) par $\left(x - \frac{1}{n+1}\right)$, on déduit que

$$P_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \left(A_1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{x^n}{n!} + \left(A_2 - \frac{1}{n+1}A_1\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \left(-\frac{A_n}{n+1}\right),$$

de sorte que

$$P_{n+1} = \int_0^x P_n\,dx - \frac{P_n}{n+1}.$$

Le polynome P_n peut être représenté à l'aide d'un déterminant que l'on déduit des relations (9) et (11). Indiquons une expression par intégrale de ce polynome. Écrivons, pour cela, la relation (9) sous la forme

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z}\left[\left(\frac{x}{z}\right)^n + A_1\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} + \ldots + A_n\right]dz,$$

l'intégrale étant prise suivant un cercle C entourant l'origine.

Si nous posons

$$\Pi_n(x) = (x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right),$$

il résulte que

$$P_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z}\Pi_n\left(\frac{x}{z}\right)dz.$$

Déterminons à présent une fonction de la forme

$$Q_n = B_0 e^{-x} + B_1 e^{-2x} + \ldots + B_n e^{-(n+1)x} \tag{13}$$

par les n conditions

$$\int_0^\infty x^i Q_n\,dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{14}$$

Il résulte de ce que nous avons vu antérieurement que ces conditions déterminent la fonction Q_n, à un facteur constant près. Mais il est facile de voir que l'on satisfait aux conditions (14) en prenant

$$Q_n = (-1)^n \frac{d^{n+1}(1-e^{-x})^{n+1}}{dx^{n+1}}, \tag{15}$$

et cette expression est bien de la forme (13), car

$$(-1)^n \frac{d^{n+1}(1-e^{-x})^{n+1}}{dx^{n+1}} = C_{n+1}^1 e^{-x} - 2^{n+1} C_{n+1}^2 e^{-2x} + \ldots \pm (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)x}.$$

Alors, avec la valeur (15) de Q_n,

$$\int_0^\infty P_m Q_n \, dx = 0$$

si m est différent de n.

L'intégrale

$$I = \int_0^\infty P_m Q_m \, dx,$$

qui se réduit à

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m}{m!} Q_m \, dx,$$

d'après les conditions (14), se calcule immédiatement en remplaçant Q_m par son expression (15) et l'on trouve $I = 1$.

Comme application, on vérifie sans difficulté que l'on a

$$e^{-x} = \sum \frac{(-1)^n}{n+2} P_n,$$

où $P_0 = 1$.