

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

MAURICE HAMY

**Sur un cas de diffraction des images des astres circulaires**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 8<sup>e</sup> série*, tome 3 (1920), p. 153-243.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1920\\_8\\_3\\_\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1920_8_3__153_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur un cas  
de diffraction des images des astres circulaires;*

PAR MAURICE HAMY.

---

J'ai abordé, dans un Mémoire antérieur <sup>(1)</sup>, l'étude d'un problème de diffraction astronomique qui s'énonce de la façon suivante :

« Un astre circulaire uniformément éclairé, de diamètre angulaire  $2\varepsilon$ , de l'ordre de grandeur de celui du Soleil, étant observé au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente rectiligne de largeur  $a$  et de longueur  $h$ , trouver la valeur de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle au grand côté de la fente, dans une direction faisant l'angle  $\varphi$ , avec la droite allant de l'observateur au centre de l'astre. »

Mes recherches, sur ce sujet, poursuivies en supposant la largeur  $a$  très faible, en raison des simplifications que cette hypothèse introduit dans les raisonnements et les calculs, demandaient à être étendues au cas où la fente possède une largeur finie. Le présent Mémoire a pour objet d'indiquer les premiers résultats auxquels je suis parvenu, en considérant la question dans toute sa généralité.

L'Introduction est consacrée à des remarques concernant l'application de diverses formules résultant de théories générales, exposées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres.

Dans le paragraphe I, je donne l'expression, sous forme d'intégrale double, de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie,

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1917.

*Journ. de Math.* (8<sup>e</sup> série), tome III. — Année 1920.

défini ci-dessus, dans la direction  $\varphi$ . Cette intégrale se décompose en trois autres, successivement étudiées, en vue de leur calcul numérique, aux paragraphes II, III, IV. On est conduit à introduire les paramètres

$$m = \frac{\pi h \sin \varepsilon}{\lambda}, \quad n = \frac{\pi a \sin \varepsilon}{\lambda},$$

qui jouent un rôle capital dans la théorie,  $\lambda$  étant la longueur d'onde des radiations admises dans l'œil, après leur passage à travers un écran monochromatique convenable.

Les formules, résumées au paragraphe V, conviennent pour déterminer la valeur de l'intensité, extérieurement ou intérieurement au bord géométrique de l'image de l'astre (bord que l'on observerait au foyer de la lunette s'il n'y avait pas de diffraction), sauf dans le voisinage immédiat de ce bord ou sur le bord lui-même. Des expressions analytiques, applicables à cette dernière hypothèse et qui se raccordent aux premières, à distance convenable du bord géométrique, sont obtenues au paragraphe VI.

La question de beaucoup la plus importante à élucider, comme application des théories développées dans la première Partie du Mémoire, est celle de la répartition de la lumière au voisinage du bord géométrique, le long de l'axe de symétrie dont il a été question ci-dessus. On y parvient en étudiant l'intensité relative

$$y = \frac{I}{I_0},$$

$I$  désignant l'intensité absolue, en un point voisin du bord géométrique, et  $I_0$  l'intensité absolue au bord géométrique lui-même. On est amené à prendre comme variable indépendante, pour effectuer les calculs numériques, le produit  $x = 2m \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} - 1 \right)$ . Il arrive (§ VII) que la variation de  $y$ , dans le voisinage immédiat du bord géométrique et quand on se déplace le long de l'axe de symétrie déjà défini, est maximum lorsque  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . La courbe représentative de  $y$  possède alors, au point correspondant au bord géométrique, une tangente inclinée au maximum sur la direction

négative de l'axe des abscisses. Si donc, par suite de l'existence de la diffraction, la lumière ne peut en aucun cas être nettement limitée au bord géométrique de l'image, par contre quand on passe d'un point intérieur au disque à un point extérieur, très voisins l'un de l'autre et à distance fixe de ce bord, la chute de l'intensité relative  $y$  est aussi élevée que possible lorsque  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . Le bord géométrique de l'image est, en conséquence, le mieux défini possible, lorsque cette condition est satisfaite.

En raison de cette circonstance, l'étude de la fonction  $y$ , pour  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ , a reçu, au paragraphe VIII, des développements très étendus, qui ont nécessité des calculs numériques considérables. Les résultats ont été représentés graphiquement par une courbe, en prenant comme abscisse le rapport  $\xi = \frac{x}{\lambda}$ . La variable  $\xi$ , positive pour les points de l'image extérieurs au bord géométrique, nulle sur ce bord et négative pour les points intérieurs, prend la valeur 1, lorsqu'on s'éloigne de ce bord à une distance angulaire égale au pouvoir séparateur  $\frac{\lambda}{h}$  d'une lunette d'ouverture circulaire, de diamètre égal à la longueur de la fente. Une courbe unique convient pratiquement à toutes les longueurs de fente, en prenant ce pouvoir séparateur comme unité d'abscisse.

La condition  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$  assujettit la largeur de la fente à ne pas dépasser quelques millimètres, en sorte que sa longueur peut atteindre le diamètre même de l'objectif. En conséquence, il était naturel de comparer l'aspect du contour de l'image, considérée aux extrémités de l'axe de symétrie dirigé dans le sens de la longueur de la fente, à l'aspect du contour de l'image fournie par l'objectif utilisé avec sa surface totale. Or il arrive que cet aspect est plus favorable aux mesures, dans la première hypothèse que dans la seconde. Voici ce qu'il faut entendre par là. Le calcul montre que l'intensité ne subit aucune discontinuité, pas plus dans un cas que dans l'autre, quand on traverse le bord géométrique de l'image. Seulement, comme cette intensité varie avec une rapidité extrême, dans le voisinage immédiat de ce bord, l'observateur a l'illusion que l'image de l'astre est terminée par un contour défini auquel il convient

d'appliquer la dénomination de bord optique. Il n'y a là qu'une impression purement physiologique tenant à l'imperfection de la vision. Cependant, bien qu'il ne soit pas susceptible de définition physique, c'est néanmoins le bord optique qui fait l'objet des pointés exécutés par l'observateur, dans toutes les recherches nécessitant des mesures de position à effectuer sur l'astre. On conçoit que la concordance des pointés est liée à la netteté d'aspect du bord optique. Eh bien ! il arrive que ce bord illusoire est plus tranché, lorsque l'objectif est diaphragmé par la fente que lorsqu'il est utilisé avec sa surface entière.

Les théories développées dans le présent Mémoire ont été poursuivies en regardant l'éclat intrinsèque de la surface de l'astre comme uniforme. Elles ne s'appliquent pas, par suite, exactement au Soleil dont l'éclat décroît nettement du centre au bord. Mais les moyens analytiques mis en œuvre possèdent la souplesse voulue pour permettre d'aborder directement et traiter à fond la question de la diffraction solaire par une fente rectangulaire, en tenant compte des variations d'éclat du centre au bord. Au surplus, si la lunette d'observation est d'ouverture suffisamment grande, des considérations physiques permettent de prévoir que les conclusions énoncées ci-dessus, au sujet de l'aspect du bord optique, ne peuvent être sensiblement altérées. Comme pour un astre dont le disque présente un aspect uniforme, on a intérêt, dans le cas du Soleil, à faire emploi d'une lunette de large ouverture, diaphragmée par une fente afin d'accroître la netteté du bord optique. L'intercalation de la fente, dans le trajet des rayons, a d'ailleurs pour effet d'éliminer, presque en totalité, l'introduction de la chaleur, dans l'instrument d'observation, chaleur dont l'admission serait intolérable, en faisant intervenir la surface entière d'un grand objectif dans la formation de l'image. En raison de son importance, l'étude détaillée de la question fera l'objet d'un Mémoire spécial.

Le paragraphe IX et dernier est consacré à l'étude des propriétés générales des courbes d'intensité, correspondant au cas où le rapport  $\frac{n^2}{m}$  est différent de  $\frac{1}{2}$ , sans dépasser la valeur 10. On pourrait étendre sans grand peine les résultats jusqu'à la

valeur  $\frac{n^2}{m} = 15$ ; mais, passé ce nombre, les calculs deviendraient rapidement inabordables. Il faut alors attaquer le problème par d'autres voies, sur le détail desquelles je n'ai pas cru devoir insister pour le moment.

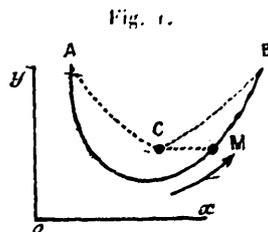
### INTRODUCTION.

Le présent travail repose sur des formules résultant de théories générales, exposées dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres <sup>(1)</sup>. Ces formules ayant été établies antérieurement <sup>(2)</sup>, je me bornerai à les rappeler ici en y joignant les explications indispensables à leur application.

E désignant la base des logarithmes népériens et  $n$  un nombre positif élevé, considérons l'intégrale

$$J_1 = \int f(u) E^{nu} \overline{u}^{-1} du,$$

prise le long d'un chemin AMB (fig. 1), que l'on ne peut défor-



mer, jusqu'à le faire coïncider avec le segment de droite AB joignant ses extrémités, sans rencontrer un point singulier  $u=c$  de  $f(u)$ , d'ordonnée inférieure à celles de A et de B, et dans le voisinage duquel

$$(1) \quad f(u) = (u-c)^{\beta} [B_1 + B_2(u-c) + \dots],$$

$\beta$  n'étant pas un entier positif. Supposons que la variable, en cheminant le long du contour AMB, tourne dans le sens direct, autour

<sup>(1)</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908.

<sup>(2)</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1917.

du point  $c$  et que l'on puisse tracer un contour tel que  $AcB$ , passant par le point  $c$ , dont tous les points ont des ordonnées supérieures à celle de  $c$ , et qui serait équivalent au contour  $AMB$ , si  $u = c$  n'était pas un point singulier de  $f(u)$ . Dans ces conditions on peut écrire

$$(2) \quad J_1 = \frac{2\pi}{\Gamma(-\beta)} E^{-\beta \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}} \frac{E^{n\sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left[ B_1 + \sqrt{-1} \frac{\beta+1}{n} B_2 + \dots \right],$$

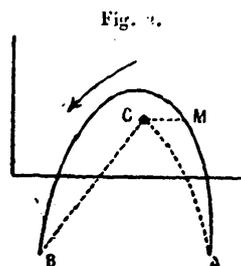
le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment. Dans cette formule, le symbole  $\Gamma$  représente la fonction eulérienne de seconde espèce.

Elle suppose essentiellement que la détermination du binôme  $(u-c)^\beta$  qui figure dans le développement de  $f(u)$  est réelle et positive, au point  $M$  du contour donné où  $u-c$  est réel et positif.

En second lieu, considérons l'intégrale

$$J_2 = \int f(u) E^{-nu\sqrt{-1}} du,$$

prise le long du contour  $AMB$  (*fig. 2*), parcouru dans le sens direct,



autour du point singulier  $u = c$  de  $f(u)$ , dans le voisinage duquel cette fonction est supposée développable sous la forme (1). Admettons que l'ordonnée de  $c$  soit supérieure à celle des extrémités  $A$  et  $B$  du contour, et qu'en le déformant, pour le faire coïncider avec le segment de droite  $AB$ , on rencontre nécessairement le point  $u = c$ . Quand on peut tracer un chemin  $AcB$  passant par  $c$ , dont tous les points possèdent des ordonnées inférieures à celle de  $c$ , et qui serait équivalent au contour  $AMB$ , si la valeur  $u = c$  n'était pas

un point singulier de  $f(u)$ , on a

$$(3) \quad J_2 = -\frac{2\pi}{\Gamma(-\xi)} E^{\beta \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}} \frac{E^{-nc \sqrt{-1}}}{n^{\beta+1}} \left[ B_1 - \sqrt{-1} \frac{\beta+1}{n} B_2 + \dots \right],$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Cette formule suppose essentiellement que les coefficients du développement (1) ont été calculés de façon que la détermination du binôme  $(u-c)^\beta$  qui y figure soit réelle et positive au point M du contour, où  $u-c$  est réel et positif.

Les formules (2) et (3) sont toujours valables lorsque,  $\beta$  étant fixe,  $n$  croît indéfiniment. Mais elles ne sont applicables, pour le calcul approché des intégrales correspondant à des valeurs de  $n$  élevées mais finies, que si  $\beta$  est petit par rapport à  $n$ .

Nous aurons, dans la suite, à faire usage des propriétés principales de la fonction eulérienne de seconde espèce  $\Gamma(a)$  qui a pour valeur le produit des  $a-1$  premiers nombres, lorsque  $a$  est un entier positif :

$$a \Gamma(a) = \Gamma(a+1),$$

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{-2a+1} \Gamma(2a),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## I.

L'image d'un astre circulaire, au foyer d'une lunette dont l'objectif est diaphragmé par une ouverture rectangulaire, possède nécessairement deux axes de symétrie, orientés parallèlement à ses côtés. Dans un précédent Mémoire <sup>(1)</sup>, j'ai obtenu l'expression générale de l'intensité lumineuse I, le long de l'axe

---

(<sup>1</sup>) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1917, p. 182.

parallèle à la longueur de la fente. Cette expression dont j'ai calculé la valeur, dans le cas particulier où la largeur de la fente est de dimension évanouissante, nous servira de point de départ dans les présentes recherches, pour compléter les résultats obtenus antérieurement.

Appelons  $h$  la longueur de la fente,  $a$  sa largeur,  $\varepsilon$  le demi-diamètre angulaire de l'astre,  $\lambda$  la longueur d'onde des radiations admises dans l'œil de l'observateur. Désignons enfin par  $\varphi$  la distance angulaire, au centre, d'un point de l'image choisi sur l'axe de symétrie parallèle au grand côté de la fente et par  $\Lambda^2$  une constante proportionnelle à l'éclat intrinsèque de la surface de l'astre. Posant

$$(4) \quad m = \frac{\pi h \sin \varepsilon}{\lambda}, \quad n = \frac{\pi a \sin \varepsilon}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon},$$

on a

$$I = \Lambda^2 a^2 h^2 K$$

ou

$$(5) \quad I = \Omega m^2 n^2 K.$$

en faisant

$$\Omega = \frac{\Lambda^2 \lambda^4}{\pi^4 \sin^2 \varepsilon}$$

et

$$K = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 \sqrt{1-u^2} du \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin nz \sqrt{1-u^2}}{nz \sqrt{1-u^2}} \right]^2 dz.$$

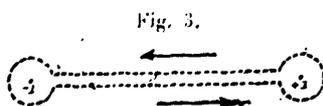
Cette expression étant une fonction paire de  $\alpha$ , nous l'étudierons en supposant  $\alpha > 0$ , dans la suite de ce Mémoire.

On peut mettre  $K$  sous la forme suivante :

$$(6) \quad 2K = \int_C \left[ \frac{\sin m(u-\alpha)}{m(u-\alpha)} \right]^2 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} \left[ \frac{\sin nz}{nz} \right]^2 dz,$$

l'intégrale  $\int_C$  étant prise, dans le sens direct, le long d'un contour fermé  $C$  contenant le segment de l'axe des abscisses, limité par les points  $u = -1$ ,  $u = +1$ ; le sens du radical  $\sqrt{1-u^2}$  étant défini, d'autre part, par la condition d'être purement imaginaire positif, au point où le contour  $C$  rencontre la partie positive de l'axe des abscisses.

La légitimité de cette transformation s'aperçoit aisément : 1° en considérant le double lacet (fig. 3), embrassant le segment indiqué



de l'axe des abscisses, et remarquant que l'élément différentiel de l'intégrale  $\int_C$  reprend sa valeur quand la variable  $u$ , après avoir décrit ce lacet en entier, revient au point de départ ; 2° en observant que les parties de l'intégrale, prises le long des circonférences infiniment petites, décrites autour des points  $u = +1$  et  $u = -1$ , sont nulles ; 3° en s'appuyant sur ce que  $\sqrt{1-u^2}$  est réel positif, le long de la branche rectiligne inférieure du lacet, et réel négatif, sur la branche rectiligne supérieure, par suite des changements de détermination quand la variable décrit les circonférences.

L'élément différentiel étant holomorphe, dans le voisinage du point  $u = \alpha$ , le contour  $C$  peut, à volonté, être assujéti à renfermer ou non le point  $u = \alpha$ . La première hypothèse est celle qui permet de conduire les calculs de la façon la plus symétrique ; c'est celle que nous adopterons dans ce qui va suivre.

De la formule (6) on déduit

$$4m^2n^2K = - \int_C \left[ \frac{d}{du} \frac{1}{u-\alpha} \right] du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left( \frac{\sin nz}{z} \right)^2 dz \\ - \int_C \frac{\cos 2m(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left( \frac{\sin nz}{z} \right)^2 dz,$$

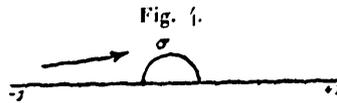
ou, en intégrant par parties la première intégrale et remarquant que la partie intégrée est nulle, comme reprenant sa valeur lorsque la variable  $u$ , après avoir décrit le contour  $C$  en entier, revient au point de départ :

$$4m^2n^2K = -2 \int_C \frac{1}{u-\alpha} \left[ \frac{\sin n\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \right]^2 \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} \\ - \int_C \frac{\cos 2m(u-\alpha)}{(u-\alpha)^2} \sqrt{1-u^2} du \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\sin nz \sqrt{1-u^2}}{z\sqrt{1-u^2}} \right]^2 dz.$$

Il convient, pour faciliter le calcul de l'intégrale double, figurant dans cette expression de  $K$ , de modifier le chemin d'intégration de la variable  $z$  qui actuellement se confond avec le segment de l'axe des abscisses, limité par les points  $z = -1$  et  $z = +1$ , tracé dans le plan de cette variable.

Décrivons de l'origine du plan des  $z$ , comme centre, une demi-circonférence  $O$ , de rayon infiniment petit, du côté des ordonnées positives. La fonction sous le signe  $\int$  étant holomorphe dans tout le plan, on peut remplacer, dans le chemin d'intégration, le diamètre de cette circonférence par la courbe elle-même. Appelons  $\gamma$  le contour d'intégration ainsi obtenu (fig. 4). On a alors

$$4m^2n^2K = -2 \int_C \frac{1}{u-z} \left[ \frac{\sin n\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \right]^2 \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} \\ - \frac{1}{2} \int_C \frac{E^{2mi(u-z)} + E^{-2mi(u-z)}}{(u-z)^2} \sqrt{1-u^2} du \int_{\gamma} \left[ \frac{\sin uz\sqrt{1-u^2}}{z\sqrt{1-u^2}} \right]^2 dz.$$



Dans ce qui va suivre nous supposerons que  $n$  et  $m$  sont deux nombres élevés; mais nous aurons à distinguer le cas où  $n$  est petit, par rapport à  $m$ , de celui où  $n$ , tout en étant inférieur à  $m$ , est une quantité du même ordre de grandeur que  $m$ . Il y a lieu, suivant que l'on se place dans l'une ou l'autre hypothèse, de partir de la première ou de la seconde des expressions suivantes de  $K$ , que l'on obtient en remplaçant, dans la formule précédente, le carré du sinus en fonction du cosinus de l'arc double :

$$(7) \quad 4m^2n^2K = - \int_C \frac{1}{u-z} \frac{u du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{u-z} \frac{E^{i2n\sqrt{1-u^2}} + E^{-i2n\sqrt{1-u^2}}}{(1-u)^{\frac{3}{2}}} u du \\ - \frac{1}{2} \int_C \frac{E^{i2m(u-z)} + E^{-i2m(u-z)}}{(u-z)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2nz\sqrt{1-u^2}}{z^2} dz$$

et

$$\begin{aligned}
 (8) \quad 4m^2 n^2 K = & - \int_C \frac{1}{u-\alpha} \frac{u \, du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{u-\alpha} \frac{E^{i2n\sqrt{1-u^2}} + E^{-i2n\sqrt{1-u^2}}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} u \, du \\
 & + \frac{1}{2} \int_C \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
 & + \frac{1}{8} \int_C \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_{\gamma} \frac{E^{i2nz\sqrt{1-u^2}} + E^{-i2nz\sqrt{1-u^2}}}{z^2} dz.
 \end{aligned}$$

Dans toutes ces intégrales, le contour d'intégration C renferme les points singuliers  $u = +1$ ,  $u = -1$  et le pôle  $u = \alpha$ , comme nous l'avons spécifié plus haut.

## II.

CALCUL DE L'INTÉGRALE  $\int_C \frac{1}{u-\alpha} \frac{u \, du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

Nous allons établir que cette intégrale est nulle. Les points  $u = \alpha$  et  $u = \pm 1$  étant intérieurs au contour d'intégration, on peut le dilater, en effet, de telle sorte que  $\left| \frac{r}{u} \right|$  et  $\left| \frac{1}{u} \right|$  soient inférieurs à 1, tout le long de ce chemin. Dans ces conditions, l'élément différentiel est développable en série convergente procédant, suivant les puissances de  $\frac{1}{u}$ , et le terme de degré moindre a pour exposant 3. A chaque terme du développement correspond, par suite, une intégrale nulle; l'intégrale à évaluer est donc elle-même identiquement nulle.

Ce résultat peut être confirmé comme il suit :

1°  $\alpha = 1$ . — L'intégrale indéfinie a pour valeur

$$\int \frac{1}{u-1} \frac{u \, du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} \left[ \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{(u-1)\sqrt{1-u^2}} \right].$$

Chacune des fonctions, écrites dans le second membre, reprend,

sa valeur quand la variable  $u$ , après avoir décrit le contour  $C$  en entier, revient au point de départ. L'intégrale proposée est donc nulle, pour  $\alpha = 1$ .

2<sup>o</sup>  $\alpha < 1$ . — Dans cette hypothèse, l'intégrale indéfinie peut s'écrire.

$$\int \frac{1}{u-\alpha} \frac{u du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(u-\alpha)\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{1-\alpha^2} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\alpha} - \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} |L(1-u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}) - L(u-\alpha)|.$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, les variations des deux premiers termes du second membre le long du contour  $C$  sont nulles. La variation de  $L(u-\alpha)$  est égale à  $2i\pi$  puisque le point  $u = \alpha$  est intérieur au contour  $C$ . On a donc

$$\int_C \frac{1}{u-\alpha} \frac{u du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \{2i\pi - [L(1-u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2})]_C\}.$$

Pour trouver facilement la valeur du logarithme, il convient de prendre, comme contour  $C$ , le lacet double embrassant le segment de l'axe des  $x$ , limité par les points  $u = +1$  et  $u = -1$ , en déformant infiniment peu les branches confondues avec l'axe des abscisses, dans le voisinage du point  $u = \alpha$  qui est un pôle de l'élément différentiel. La détermination du radical  $\sqrt{1-u^2}$  est d'ail-

Fig. 5.



leurs définie par la condition que  $\sqrt{1-u^2}$  est réel et positif le long de la branche  $AB$  du lacet.

Dans ces conditions on voit que la fonction

$$1 - u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$$

est essentiellement réelle, positive et non nulle le long de la branche  $AB$  du lacet. On peut donc partir d'un point de cette branche avec

la valeur arithmétique du logarithme et remplacer la demi-circonférence décrite du point  $\alpha$  par son diamètre.

La partie de l'intégrale, prise le long de la circonférence décrite autour du point  $u = +1$ , est infiniment petite; mais en suivant ce trajet, la variable ayant tourné de  $2\pi$  autour d'un point singulier de  $\sqrt{1-u^2}$ , ce radical change de signe, en sorte que l'on doit partir du point D, sur la branche DE, avec la valeur réelle et négative de  $\sqrt{1-u^2}$ . Or la fonction

$$1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$$

s'annule pour  $u = \alpha$ . Le point  $u = \alpha$  est donc un point singulier du logarithme. Il est du reste facile de voir qu'à la valeur  $u = \alpha$  correspond un minimum de la fonction; elle est donc positive pour tous les points de l'axe des abscisses d'affixe compris entre  $-1$  et  $+1$ , sauf pour la valeur  $u = \alpha$  pour laquelle elle est nulle.

Le long de DE, le logarithme conserve un sens arithmétique. Cherchons sa variation, le long de la demi-circonférence infiniment petite, décrite sur EF comme diamètre. On a, dans le voisinage du point  $u = \alpha$ ,

$$\begin{aligned} 1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2} \\ = \frac{1}{2(1-\alpha^2)}(u-\alpha)^2 [1 + \text{série entière ayant } u-\alpha \text{ en facteur}]. \end{aligned}$$

On en déduit

$$L(1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}) = 2L(u-\alpha) + \text{fonction holomorphe de } u-\alpha.$$

Quand la variable décrit la demi-circonférence de diamètre EF, dans le sens de l'intégration,  $L(1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2})$  varie donc de  $2i\pi$ . Cette fonction est donc égale à  $2i\pi$  augmenté de sa valeur arithmétique le long de FG. La variation du logarithme, le long de la circonférence décrite autour du point  $u = -1$  est infiniment petite; mais le radical change de signe encore une fois, en sorte que la fonction  $1 - u\alpha - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$  reprend sa valeur de départ  $1 - u\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-u^2}$ , le long de la branche AB du lacet.

De ce qui précède il résulte que

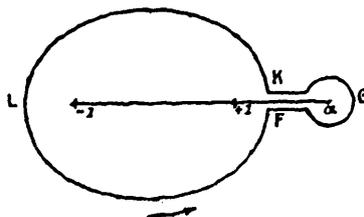
$$[1.(1 - u\alpha + \sqrt{1 - \alpha^2}\sqrt{1 - u^2})]_c = 2i\pi.$$

L'intégrale proposée  $\int_c$  est donc encore nulle quand  $\alpha < 1$ .

3<sup>o</sup> Étudions enfin le cas où  $\alpha > 1$ .

Il convient tout d'abord de décomposer l'intégrale en deux parties, en déformant le contour comme il est indiqué figure 6.

Fig. 6.



La première partie se rapporte au lacet F'GK embrassant le pôle  $u = \alpha$ . Le radical  $\sqrt{1 - u^2}$  étant purement imaginaire positif, pour  $u = \alpha$ , le résidu de la fonction sous le signe  $\int$ , relatif à ce pôle, est, en conséquence,  $\frac{i\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$ . La partie de l'intégrale, prise le long du lacet, a donc pour valeur  $-\frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$ . Par suite,

$$(9) \quad \int_c \frac{1}{u - \alpha} \frac{u du}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} + \int_{c'}.$$

$C'$  représentant le chemin KLF, dans lequel les points K et F sont supposés confondus.

L'intégrale indéfinie de la fonction sous le signe  $\int$  pour  $\alpha > 1$  peut s'écrire

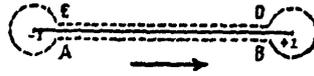
$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{u - \alpha} \frac{u du}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{(u - \alpha)\sqrt{1 - u^2}} + \frac{1}{\alpha^2 - 1} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{u - \alpha} + \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{u - \alpha}{\alpha - u}. \end{aligned}$$

Aux deux premiers termes du second membre correspondent des parties nulles pour l'intégrale  $\int_C$ ; il reste

$$\int_C \frac{1}{u - \alpha} \frac{u du}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[ \text{arc sin } \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u} \right]_C.$$

Pour évaluer le second membre, nous prendrons, comme contour  $C'$ , le lacet double embrassant les points  $u = +1$  et  $u = -1$  (fig. 7).

Fig. 7.



Lorsque  $u$  croît de  $-1$  à  $+1$ ,  $\frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}$  croît de  $-1$  à  $+1$ . Convenons de partir, sur le contour, d'un point de AB avec la détermination de l'arc sin comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ .

Les valeurs  $u = 1$  et  $u = -1$  sont des points singuliers de l'arc sin, intérieurs au contour d'intégration. On trouve d'ailleurs facilement dans le voisinage du point  $u = 1$ , sur AB,

$$(10) \quad \text{arc sin } \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u} \\ = -\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2(\alpha + 1)}{\alpha - 1}} \sqrt{1 - u} \left\{ [1 + \text{série entière de } 1 - u \text{ contenant } 1 - u \text{ en facteur}] \right\}$$

et, dans le voisinage du point  $u = -1$ , sur AB,

$$(11) \quad \text{arc sin } \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u} \\ = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{2(\alpha - 1)}{\alpha + 1}} \sqrt{1 + u} \left\{ [1 + \text{série entière de } 1 + u \text{ contenant } 1 + u \text{ en facteur}] \right\}.$$

On voit, à l'aide de ces développements, qu'en partant d'un point de la branche AB, sur le contour  $C'$ , et marchant dans le sens direct, la fonction  $\text{arc sin } \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}$  a augmenté de  $2\pi$  en revenant au point de départ. En effet, quand on va du point B au point D, en suivant la circonférence décrite autour de  $u = +1$ ,  $\sqrt{1 - u}$  se change en

$-\sqrt{1-u}$ ; en sorte que la valeur de la fonction en D est, d'après le développement (10),

$$\pi - \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u},$$

l'arc sin ayant la détermination définie le long de AB.

Suivant le chemin DE, on arrive en E avec la valeur que prend cette différence, dans laquelle l'arc sin a la détermination bien définie qu'il possède en A. Considérons maintenant le développement (11). Quand on décrit la circonférence ayant pour centre le point  $u = -1$ , de façon à passer du point E au point A, il montre que la fonction  $\arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}$  se change en  $-\pi - \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u}$ , l'arcsin étant pris toujours avec la détermination définie le long de AB. Il s'ensuit que l'on arrive en A avec la valeur

$$2\pi + \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - u},$$

$u$  étant l'affixe de A. Parcourant ensuite AB, on revient en B avec la valeur  $2\pi + \arcsin \frac{u\alpha - 1}{\alpha - 1}$ ;  $u$  étant l'affixe de B. La fonction arcsin a donc bien augmenté de  $2\pi$  quand la variable, après avoir suivi le lacet en entier, revient au point de départ.

De ce qui précède il résulte que l'intégrale  $\int_c$  a pour valeur  $2\pi \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$ . L'intégrale proposée est donc encore nulle, pour  $\alpha > 1$ , d'après la formule (9).

En résumé, l'intégrale

$$(12) \quad \int_c \frac{1}{u - \alpha} \frac{u du}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

quelle que soit la valeur attribuée à  $\alpha$ .

## III.

Le calcul de l'intégrale suivante qui figure dans l'expression (7) de K

$$(13) \quad J = \int_C \frac{1}{u-z} \frac{E_{i2n\sqrt{1-u^2}} + E_{-i2n\sqrt{1-u^2}}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} u du,$$

pour  $n$  très grand, peut se ramener à celui d'intégrales telles que celles qui ont été considérées dans l'Introduction du présent Mémoire.

Nous allons changer de variable d'intégration en posant

$$t = \sqrt{1-u^2},$$

la nouvelle intégrale devant être prise le long du contour correspondant du contour C. Voyons d'abord quel est ce contour correspondant et dans quel sens il est décrit par la variable.

Partons du point où le contour C rencontre la partie positive de l'axe des abscisses.  $t$  a alors une valeur purement imaginaire positive, comme on l'a spécifié en écrivant la formule (6).

Le point correspondant est donc placé sur l'axe des ordonnées positives, dans le plan des  $t$ .

Quand  $u$  suit le contour C, jusqu'à l'axe des ordonnées, dans le plan des  $u$ , l'argument de  $\sqrt{1-u^2}$  augmente de  $\frac{\pi}{2}$  et ce radical devient réel négatif et inférieur à  $-1$ , sur l'axe des ordonnées. Le point  $t$  décrit donc, dans le plan des  $t$ , dans le sens direct, un arc de courbe partant d'un point de l'axe des ordonnées positives et coupant l'axe des abscisses négatives en un point dont l'abscisse est inférieur à  $-1$ .

Quand  $u$  suit le contour C, depuis l'axe des ordonnées positives jusqu'à l'axe des abscisses négatives, la variable  $t$  continue à décrire, dans son plan, un arc correspondant, dans le sens direct, et atteint l'axe des ordonnées négatives, quand il passe au point du contour C rencontrant l'axe des abscisses négatives, dans le plan de  $u$ . La variable  $u$  continuant à cheminer sur le contour C, le point  $t$

atteint l'axe des abscisses positives, du plan des  $t$ , à une distance de l'origine supérieure à  $\alpha$ , quand  $u$  traverse, dans son plan, l'axe des ordonnées négatives. Enfin, le point  $t$  revient au point de départ, après avoir décrit un contour fermé enveloppant l'origine et les points  $t = \alpha$  et  $t = -\alpha$ , quand le point  $u$  revient lui-même au point de départ, sur le contour C.

Le nouveau chemin d'intégration, dans le plan des  $t$ , que nous désignerons par D, est donc fermé et renferme les points  $t = -\alpha$ ,  $t = 0$ ,  $t = \alpha$ .

De  $t = \sqrt{1-u^2}$  on tire

$$u = -\sqrt{1-t^2},$$

à condition de donner au radical une détermination convenable. Or nous avons vu que le point du contour D, situé sur l'axe des abscisses positives, correspond au point  $u$  du contour C situé sur l'axe des ordonnées négatives du plan des  $u$ . En posant

$$u = +\sqrt{1-t^2},$$

nous devons donc prendre la détermination du radical qui est purement imaginaire positive, au point où le contour D rencontre l'axe des abscisses positives. Ce détail réglé, effectuons le changement de variable, dans l'intégrale proposée (13). Elle devient

$$(14) \quad J = \int_{\alpha} \frac{E^{2i\alpha t}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} + \int_{\alpha} \frac{E^{-2i\alpha t}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2}.$$

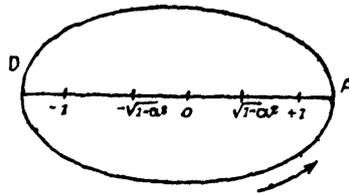
Pour calculer cette somme, plusieurs cas sont à considérer.

1°  $0 < \alpha < 1$ . — Le contour d'intégration D renferme deux points singuliers algébriques  $t = -\alpha$ ,  $t = +\alpha$ , et trois pôles  $t = 0$ ,  $t = -\sqrt{1-\alpha^2}$ ,  $t = +\sqrt{1-\alpha^2}$  de l'élément différentiel.

On voit, de suite, qu'il y a une distinction nécessaire à établir entre ces trois pôles. Si l'on fait tendre, vers l'origine, la partie supérieure ou la partie inférieure du contour, l'élément différentiel, pour les points qui s'approchent de la valeur  $t = 0$ , tend à devenir infini dans l'un et l'autre cas. Or il n'en va pas de même pour les deux autres pôles. Le radical  $\sqrt{1-t^2}$  étant purement imaginaire positif au point A (fig. 8) d'intersection du contour avec l'axe des

abscisses positives, si l'on fait tendre la branche inférieure du contour correspondant aux ordonnées négatives, vers l'axe des abscisses,  $\sqrt{1-t^2}$  tend à devenir réel et positif le long de la nouvelle branche inférieure, pour les abscisses comprises entre  $-1$  et  $+1$  et à

Fig. 8.



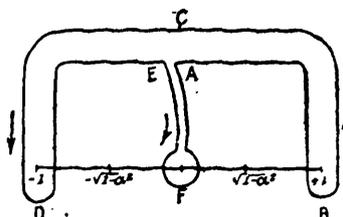
prendre la valeur  $\alpha$  pour  $t = \pm \sqrt{1-\alpha^2}$ . La somme  $\alpha + \sqrt{1-t^2}$  tend donc vers la valeur finie non nulle  $2\alpha$ , lorsque  $t$  se rapproche de ces points. La conclusion à tirer de là est que les points  $t = \pm \sqrt{1-\alpha^2}$  ne sont pas des pôles, pour la branche inférieure du contour D. On peut donc, quand on déforme cette branche, lui faire franchir l'un ou l'autre de ces points ou tous les deux, sans qu'il en résulte aucune erreur. Mais les choses se passent tout différemment pour la branche supérieure du contour, correspondant aux ordonnées positives. Le radical  $\sqrt{1-t^2}$  tend alors à devenir réel et négatif pour les valeurs de  $t$  appartenant à la branche mobile, à mesure qu'elle se rapproche davantage de l'axe des abscisses entre  $t = -1$  et  $t = +1$ . Le radical  $\sqrt{1-t^2}$  tend alors vers  $-\alpha$ , pour les valeurs de  $t$  qui tendent vers  $\pm \sqrt{1-\alpha^2}$ , et la somme  $\alpha + \sqrt{1-t^2}$  tend vers zéro. Il s'ensuit que les points  $t = \pm \sqrt{1-\alpha^2}$  sont des pôles véritables, pour la partie supérieure du contour D, et qu'on n'a pas le droit de les franchir, quand on est amené à déformer cette branche. Nous allons immédiatement faire application de ces remarques.

Considérons d'abord la première intégrale. On peut remplacer le chemin d'intégration D par le chemin marqué figure 9. L'intégrale à évaluer se ramène à la somme de trois autres que nous désignerons par les chemins suivis par la variable, écrits entre parenthèses. On a

$$(15) \quad \int_0^{\infty} \frac{E^{2int}}{z + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} = (ABC) + (CDE) + (EFA).$$

L'intégrale (EFA) se rapporte au pôle  $t=0$  et se calcule immédiatement. Les valeurs asymptotiques des deux autres, pour  $n$  très grand, s'obtiennent comme on va le voir, en se fondant sur

Fig. 9.



les résultats établis dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, rappelés au commencement du présent travail.

Le résidu de la fonction

$$\frac{E^{2nt}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2},$$

pour le pôle  $t=0$ , est égal à  $\frac{2ni}{\alpha+1}$ . Il en résulte

$$(16) \quad (ABC) = -\frac{\frac{1}{2}n\pi}{\alpha+1}.$$

Pour évaluer l'intégrale (ABC), il faut au préalable calculer le développement de  $\frac{1}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2}$ , dans le voisinage du point singulier  $t=1$ , en excluant les puissances entières positives de  $1-t$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{t^2} \left[ -\frac{\sqrt{1-t^2}}{\alpha} - \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3} - \frac{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}{\alpha^5} - \dots \right] \\ &\quad + \text{fonction holomorphe de } 1-t^2 \\ &= -\frac{\sqrt{1-t^2}}{\alpha^2 t^2} \left[ 1 + \frac{1-t^2}{\alpha^2} + \frac{(1-t^2)^2}{\alpha^4} + \dots \right] \\ &\quad + \text{fonction holomorphe,} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2} &= -\sqrt{2} \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2} \left[ 1 + \frac{7\alpha^2+8}{4\alpha^2} (1-t) + \dots \right] \\ &\quad + \text{fonction holomorphe de } (1-t). \end{aligned}$$

Dans cette formule,  $(1-t)^{\frac{1}{2}}$  a une valeur purement imaginaire positive, au point où le contour D rencontre l'axe des abscisses positives. Étant données les applications que nous aurons à faire de ce développement, il convient de l'écrire

$$(17) \quad \frac{1}{z + \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2} = -i\sqrt{2} \frac{(t-1)^{\frac{1}{2}}}{z^2} \left[ 1 - \frac{7z^2+8}{4z^2}(t-1) + \dots \right] \\ + \text{fonction holomorphe de } t-1,$$

le binôme  $(t-1)^{\frac{1}{2}}$  ayant une valeur réelle positive, pour les valeurs réelles de  $t$  supérieures à 1.

On trouve de même, dans le voisinage du point  $t = -1$ ,

$$(18) \quad \frac{1}{z + \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2} = -\sqrt{2} \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{z^2} \left[ 1 + \frac{7z^2+8}{4z^2}(t+1) + \dots \right],$$

le binôme  $(t+1)^{\frac{1}{2}}$  ayant une valeur réelle positive pour les valeurs réelles de  $t$  supérieures à  $-1$ .

Pour avoir la valeur asymptotique de l'intégrale (CDE), il n'y a plus qu'à appliquer la formule (2), rappelée dans l'Introduction, en partant du développement (17). Le sens de l'intégration étant direct, par rapport au point  $t = 1$ , on trouve

$$(19) \quad (\text{ABC}) = \sqrt{\pi} \frac{E^{i(2n+\frac{\pi}{4})}}{(2n)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{z^2} - i \frac{3\sqrt{2}(7z^2+8)}{16z^4} \frac{1}{n} + \dots \right].$$

Partant de la même formule et du développement (18), on obtient de même

$$(20) \quad (\text{CDE}) = \sqrt{\pi} \frac{E^{-i(2n+\frac{\pi}{4})}}{(2n)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{z^2} + i \frac{3\sqrt{2}(7z^2+8)}{16z^4} \frac{1}{n} + \dots \right].$$

Des formules (15) (16) (19) (20) on déduit

$$(21) \quad \int_0 \frac{E^{i2nt}}{z + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} \\ = -\frac{4n\pi}{z+1} + \frac{\sqrt{\pi}}{z^2 n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7z^2+8)}{16z^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right].$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés, entre crochets, restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Cette formule suppose d'ailleurs essentiellement que  $\alpha$  n'est pas nul. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

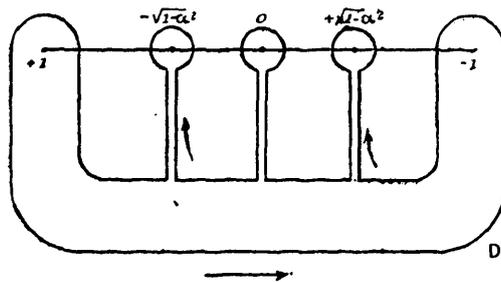
Nous avons maintenant à considérer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{e^{-2it}}{x + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2}$$

qui est le second terme de la somme (14).

Il convient, pour calculer cette intégrale, de déformer le contour D de la figure (8), de façon à faire passer sa branche supérieure presque en entier au-dessous de l'axe des abscisses. Cette déformation est gênée, en vertu de la remarque faite au commencement de ce paragraphe, par les deux points singuliers algébriques  $t = -1$ ,  $t = +1$ , et par les trois pôles  $t = 0$ ,  $t = -\sqrt{1-\alpha^2}$ ,  $t = +\sqrt{1-\alpha^2}$ .

Fig. 10.



C'est une conséquence de ce que le radical  $\sqrt{1-t^2}$  est réel négatif aux points d'intersection de ladite branche avec l'axe des abscisses, entre les abscisses  $-1$  et  $+1$ .

Le chemin d'intégration  $D'$ , tracé figure 10, est équivalent au contour D.

Les trois intégrales partielles, prises le long des lacets, ont pour somme le produit par  $2i\pi$  de la somme des résidus relatifs aux

trois pôles; c'est-à-dire

$$2i\pi \left\{ -\frac{2ni}{z-1} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}} \right\} \left[ \frac{E^{-i2n\sqrt{1-z^2}}}{1-z^2} - \frac{E^{i2n\sqrt{1-z^2}}}{1-z^2} \right]$$

ou

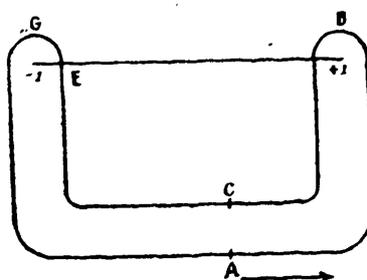
$$\frac{4n\pi}{z-1} + 4\pi \frac{\alpha}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin 2n\sqrt{1-z^2}.$$

Faisant maintenant abstraction des lacets, le contour d'intégration se réduit à celui qui est représenté figure 11; l'intégrale à évaluer se ramène donc à la somme

$$\frac{4n\pi}{z-1} + 4\pi \frac{\alpha}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} \sin 2n\sqrt{1-z^2} + (ABC) + (CGA),$$

A et C étant deux points quelconques pris sur les branches inférieures du contour (fig. 11).

Fig. 11.



Pour évaluer (ABC), il faut encore partir du développement (17) et appliquer la formule (3), donnée dans l'Introduction,

$$(ABC) = \sqrt{\pi} \frac{E^{-i(2n+\frac{\pi}{4})}}{(2n)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{z^2} + i \frac{3\sqrt{2}(7z^2+8)}{16z^4n} + \dots \right],$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Pour évaluer l'intégrale (CGA), il faut remarquer que le radical  $\sqrt{1-z^2}$  a maintenant une valeur réelle négative, au point E où le contour rencontre le segment  $-1$  à  $+1$  de l'axe des abscisses. Nous devons donc partir du développement, suivant les puissances

de  $1 + t$ , de

$$\frac{1}{\alpha - \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2},$$

où  $\sqrt{1-t^2}$  est réel et positif au point E. On trouve

$$\frac{1}{\alpha - \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t^2} = \sqrt{2} \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^2} \left[ 1 + \frac{7\alpha^2 + 8}{4\alpha^2} (t+1) + \dots \right],$$

$(t+1)^{\frac{1}{2}}$  désignant la détermination réelle et positive au point E.

Partant du développement (3), on trouve

$$(CGA) = \sqrt{\pi} \frac{E^{i(2n + \frac{\pi}{4})}}{(2n)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{\alpha^2} - i \frac{3\sqrt{2}(7\alpha^2 + 8)}{16\alpha^4 n} + \dots \right],$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment. On a donc, pour  $0 < \alpha < 1$ ,

$$(22) \quad \int_0^1 \frac{E^{-2nit}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} \\ = \frac{4n\pi}{\alpha - 1} + 4\pi \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \sin 2n \sqrt{1-\alpha^2} \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^2} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2 + 8)}{16\alpha^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right],$$

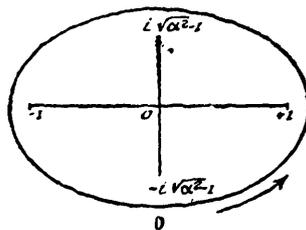
le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

2°  $\alpha > 1$ . — Dans cette hypothèse,  $\sqrt{1-\alpha^2}$  est imaginaire. La somme  $\alpha + \sqrt{1-t^2}$  possède deux racines imaginaires  $t = \pm i \sqrt{\alpha^2 - 1}$  situées, dans le plan, sur l'axe des ordonnées. On peut toujours supposer ces racines intérieures au contour D. En effet : 1° dans le plan de la variable  $u$ , le contour C peut être amené à rencontrer l'axe des abscisses, en deux points d'abscisses égales et de signes contraires, supérieures à 1 en valeurs absolues; 2° à deux valeurs réelles égales et de signes contraires de  $u$ , supérieures à 1 en valeurs absolues, correspondent deux valeurs purement imaginaires de  $t$ , égales et de signes contraires, dont le module croît en même temps que  $|u|$ . Les valeurs de  $t$  correspondant

aux points de rencontre du contour C, avec l'axe des abscisses du plan des  $u$ , ont, en conséquence, un module supérieur au module de  $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$  qui correspond à  $u = z$ , le point  $u = z$  étant compris entre le point  $u = 1$  et le point où le contour C rencontre la partie positive de l'axe des abscisses.

Le chemin d'intégration D, le long duquel sont prises les intégrales figurant dans la somme (14), occupe donc la situation indiquée (fig. 12), par rapport aux points singuliers algé-

Fig. 12.



briques  $t = +1$ ,  $t = -1$  et aux pôles  $t = 0$ ,  $t = i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ ,  $t = -i\sqrt{\alpha^2 - 1}$  de l'élément différentiel.

Il importe d'observer que les valeurs  $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$  n'annulent la somme  $\alpha + \sqrt{1 - t^2}$  que si

$$\sqrt{1 - (i\sqrt{\alpha^2 - 1})^2} = \sqrt{\alpha^2}$$

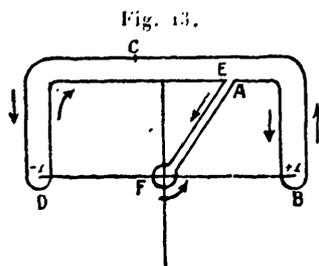
est négatif. Or, au point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la branche inférieure du contour, le radical  $\sqrt{1 - t^2}$  est essentiellement réel et positif, tandis qu'il est réel et négatif au point d'intersection avec la branche supérieure. Ce n'est donc que pour la branche supérieure du contour D que les points  $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$  doivent être considérés comme des pôles. Dans les déformations de ce contour, on peut impunément les laisser traverser la branche inférieure, mais non la branche supérieure qui correspond aux ordonnées positives.

Évaluons d'abord la première des intégrales de la somme (14). A cet effet, marquons, sur l'axe des ordonnées, les deux points  $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ . Nous pouvons déformer le contour D, comme il est indiqué (fig. 13), en nous appuyant sur les remarques précédentes.

On peut écrire

$$\int_0^{\infty} \frac{E^{2nu}}{z + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} = (ABC) + (CDE) + (EFA).$$

L'intégrale (EFA), relative au pôle  $t = 0$ , a pour valeur le produit de  $2i\pi$  par le résidu de l'élément différentiel, relatif à ce pôle.



Tenant compte de ce que le lacet EFA provient de l'extension d'un fragment de la branche inférieure du contour de la figure 12, le radical  $\sqrt{1-t^2}$  se réduit à  $+1$  pour  $t = 0$ . Il en résulte, comme lorsque  $\alpha$  est inférieur à 1,

$$(EFA) = 2i\pi \frac{2ni}{z+1} = -\frac{4n\pi}{z+1}.$$

Quant aux intégrales (ABC) et (CDE), elles s'obtiennent exactement comme dans le cas où  $\alpha$  est inférieur à 1 (fig. 9). Leur somme s'obtient, en ajoutant membre à membre les formules (19) et (20). On a donc

$$(23) \int_0^{\infty} \frac{E^{2nu}}{z + \sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{4n\pi}{z+1} + \frac{\sqrt{\pi}}{z^2 n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2 + 8)}{16z^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right],$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

La seconde intégrale de la somme (14) s'évalue en déformant le contour de la figure 12, comme il est indiqué (fig. 14), en tenant compte de ce que les points  $t = \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$  sont des pôles, pour

les parties du nouveau contour qui proviennent de l'extension de la branche supérieure du contour de la figure 12.

On a

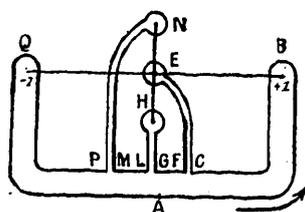
$$\int_{\gamma} \frac{E^{-2nit}}{z + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} \\ = (PQA) + (ABC) + (CEF) + (FG) + (GHL) + (LM) + (MNP).$$

La somme des trois intégrales

$$(CEF) + (GHL) + (MNP)$$

a pour valeur le produit de  $2i\pi$  par la somme des résidus de l'élé-

Fig. 14.



ment différentiel relatifs aux trois pôles  $t = +i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ ,  $t = 0$  et  $t = -i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ . Tenant compte de ce que le radical  $\sqrt{1-t^2}$  est maintenant réel et négatif pour les points de l'axe des ordonnées balayés par la partie supérieure du contour de la figure 12, pendant sa déformation, on a

$$(CEF) + (GHL) + (MNP) = 2i\pi \left[ -\frac{2ni}{\alpha - 1} + \frac{\alpha E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}}}{i(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}}{i(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ = \frac{4n\pi}{\alpha - 1} + \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} (E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}).$$

Quant à la somme des autres intégrales

$$(ABC) + (FG) + (LM) + (PQA),$$

on peut supposer, pour l'évaluer, que les points C, F, G, L, M, P sont confondus, ce qui revient à faire partir les trois lacets d'un même point du contour déformé. On est alors ramené à une ques-

tion déjà traitée, dans le cas où  $\alpha$  est inférieur à 1, en partant de la figure 11. Finalement, on a

$$(24) \quad \int_0^1 \frac{E^{-2nu}}{\alpha + \sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t^2} \\ = \frac{4n\pi}{\alpha-1} + \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}} [E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}] \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right],$$

le produit par  $n^2$  des termes négligés dans le dernier crochet restant fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

3° Le cas correspondant à  $\alpha = 1$  peut être traité directement. Mais on arrive au même résultat, pour la valeur de la somme (14), en faisant tendre  $\alpha$  vers 1 dans l'une ou l'autre des expressions de cette somme, pour  $\alpha < 1$  ou  $\alpha > 1$ .

En résumé, l'intégrale

$$J = \int_C \frac{E^{i2n\sqrt{1-u^2}} + E^{-i2n\sqrt{1-u^2}}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{u du}{u-\alpha}$$

s'exprime de la façon suivante, pour  $n$  très grand :

1°  $0 < \alpha < 1$  [formules (13), (14), (21), (22)] :

$$(25) \quad J = \frac{8n\pi}{\alpha^2-1} + 4\pi\alpha \frac{\sin 2n\sqrt{1-\alpha^2}}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right],$$

en exceptant la valeur  $\alpha = 0$ .

2°  $\alpha > 1$  [formules (13), (14), (23), (24)] :

$$(26) \quad J = \frac{8n\pi}{\alpha^2-1} + \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{\frac{3}{2}}} [E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}} - E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}}] \\ + \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha^2 n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2+8)}{16\alpha^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right].$$

3°  $\alpha = 1$ . Les formules (25) et (26) se réduisent l'une et l'autre à la suivante :

$$(27) \quad J = -4n\pi \frac{3 + 4n^2}{3} + \frac{2\sqrt{\pi}}{n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{45}{16} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right].$$

4° Pour  $\alpha = 0$ , on trouve, comme nous allons l'établir, que

$$(28) \quad J = -8n\pi + 4\sqrt{\frac{\pi}{n}} \left[ \cos\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{16n} \sin\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right].$$

Dans toutes ces formules, le produit par  $n^2$  des termes négligés entre crochets reste fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Il convient, pour appliquer les formules (25) et (26), de poser

$$\nu = \frac{n^2}{m}, \quad x = 2m(\alpha - 1).$$

Les formules (25) et (26) peuvent alors s'écrire

$$(25') \quad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu x}\left(2 + \frac{x}{2m}\right)} \left[ 1 - \left(1 + \frac{x}{2m}\right) \frac{\sin\sqrt{-2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}}{\sqrt{-2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \right] \\ + \frac{1}{8\alpha^2\sqrt{2m}n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2 + 8)}{16\alpha^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right];$$

$$(26') \quad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu x}\left(2 + \frac{x}{2m}\right)} \left[ 1 + \left(1 + \frac{x}{2m}\right) \frac{E^{-\sqrt{2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} - E^{\sqrt{2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}}}{2\sqrt{2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \right] \\ + \frac{1}{8\alpha^2\sqrt{2m}n^{\frac{3}{2}}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3(7\alpha^2 + 8)}{16\alpha^2} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right].$$

Au bord géométrique solaire, on a  $x = 0$ . Les formules (25') et (26') se réduisent alors l'une et l'autre à la suivante :

$$(27') \quad \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{\sqrt{2\nu\pi}}{6} \left[ 1 + \frac{3}{4m} \frac{1}{\nu} \right] \\ + \frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2m}} \left[ \cos\left(2n + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{45}{16} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n} + \dots \right].$$

Les formules (25') et (26') correspondent, la première à  $x < 0$  et la seconde à  $x > 0$ . Elles supposent  $n$  un nombre élevé et  $\alpha$  non voisin de zéro. La formule (25') ne peut donc pas être appliquée au centre du Soleil, point du disque pour lequel  $x = -2m$ . Il faut alors faire usage de la formule (28) que nous allons établir ci-dessous, et qui peut se mettre sous la forme

$$(28') \quad \frac{J}{16n^2 \sqrt{2\pi m}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\gamma} m} + \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\gamma} m} \left[ \cos\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right].$$

Pour  $\alpha = 0$ , l'intégrale proposée devient, après le changement de variable et de contour qui a conduit à la formule (14),

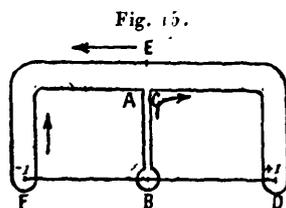
$$J = \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{E^{2nit}}{t^2 \sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{E^{-2nit}}{t^2 \sqrt{1-t^2}} dt$$

$\sqrt{1-t^2}$  étant purement imaginaire positif, pour  $t$  réel et supérieur à 1.

La fonction

$$\frac{E^{2nit}}{t^2 \sqrt{1-t^2}}$$

possède le pôle  $t = 0$ , affecté du résidu  $2ni$ . L'intégrale correspondante se décompose en une somme des trois suivantes, après avoir



déformé le contour comme l'indique la figure 15 :

$$(ABC) + (CDE) + (EFA).$$

On a immédiatement

$$(29) \quad (ABC) = -4n\pi;$$

(CDE) s'obtient en appliquant la formule (2) de l'Introductif, en

partant du développement

$$(30) \quad \frac{1}{t^2 \sqrt{1-t^2}} = \frac{i\sqrt{2}}{2} (t-1)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{9}{4}(t-1) + \dots \right],$$

dans lequel le binôme  $(t-1)^{-\frac{1}{2}}$  est réel et positif, pour les valeurs de  $t$  réelles supérieures à 1. On obtient ainsi

$$(31) \quad (CDE) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} E^{i(2n-\frac{\pi}{4})} \left[ 1 - i\frac{9}{16n} + \dots \right].$$

L'intégrale (EFA) s'obtient en appliquant la même formule et partant du développement

$$(32) \quad \frac{1}{t^2 \sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (t+1)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{9}{4}(t+1) + \dots \right],$$

dans lequel le binôme  $(t+1)^{-\frac{1}{2}}$  a une valeur réelle positive, pour  $t$  réel et supérieur à -1. On arrive à

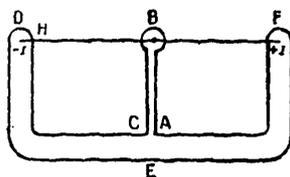
$$(33) \quad (EFA) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} E^{-i(2n-\frac{\pi}{4})} \left[ 1 + i\frac{9}{16n} + \dots \right].$$

L'intégrale  $\int_D \frac{E^{-2nit}}{t^2 \sqrt{1-t^2}}$  s'obtient en donnant au contour D la forme indiquée sur la figure 16. Elle se décompose en une somme de trois autres

$$(ABC) + (EFA) + (CDE).$$

Dans le cas actuel, pour parvenir aux points où le contour ren-

Fig. 16.



contre l'axe des abscisses, près de l'origine, il faut tourner de  $2\pi$  autour du point  $t = +1$ , en partant des points analogues de la figure 15, en sorte que la détermination du radical  $\sqrt{1-t^2}$ , consi-

dérée dans le cas de la figure 15, a changé de signe et il en est de même au point H d'intersection du contour avec l'axe des abscisses. Le résidu relatif au pôle  $t = 0$  de la fonction sous le signe  $\int_u$  est donc encore  $2ni$ , comme tout à l'heure, et l'on a

$$(34) \quad (ABC) = -4\pi n.$$

L'intégrale (EFD) s'obtient en appliquant la formule (3) de l'Introduction, en partant du développement (30), et l'on trouve

$$(35) \quad (EFD) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} E^{-i(2n - \frac{\pi}{4})} \left[ 1 + i \frac{9}{16n} + \dots \right].$$

Quant à l'intégrale (CDE), on la calcule en partant du développement (32), changé de signe, vu le changement de détermination du radical. On arrive, en appliquant la même formule (3), à

$$(36) \quad (CDE) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} E^{i(2n - \frac{\pi}{4})} \left[ 1 - i \frac{9}{16n} + \dots \right].$$

Les formules (29), (31), (33) et (34), (35), (36) donnent

$$\begin{aligned} \int_u \frac{E^{-2nit} dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} &= \int_u \frac{E^{2nit} dt}{t^2 \sqrt{1-t^2}} \\ &= -4n\pi + 2\sqrt{\frac{\pi}{n}} \left[ \cos\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{9}{16n} \sin\left(2n - \frac{\pi}{4}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Il était, du reste, facile de voir, *a priori*, que ces intégrales sont égales, en changeant  $t$  en  $-t$  dans la première et observant que  $\sqrt{1-t^2}$  est alors réel et négatif sur le segment de l'axe des abscisses compris entre les valeurs  $t = +1$  et  $t = -1$ , quand la variable  $t$  y arrive du côté des ordonnées négatives.

On part de là pour écrire l'expression (28).

#### IV.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer l'intégrale

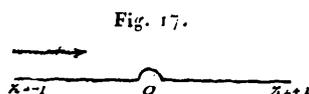
$$(37) \quad L = \int_c \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_\gamma \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz.$$

Nous admettrons, dans le présent Mémoire, que  $n$ , tout en étant grand, est très petit par rapport à  $m$ . On verra, dans la suite, ce qu'il faut entendre par là.

1°  $\alpha = 1$ . — Il convient d'évaluer tout d'abord l'intégrale  $\int_{\gamma}$ .  
Or on a

$$\frac{1 - \cos 2n z \sqrt{1 - u^2}}{z^2} = \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p+1} \frac{(2n)^{2p}}{1 \cdot 2 \dots 2p} (1 - u^2)^p z^{2(p-1)}.$$

Le chemin d'intégration  $\gamma$ , dans le plan de la variable  $z$ , étant

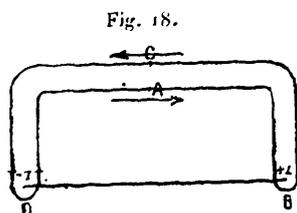


celui représenté sur la figure 17, on tire de la,

$$\int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2n z \sqrt{1 - u^2}}{z^2} dz = 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1 \cdot 2 \dots 2p} \frac{(1 - u^2)^p}{2p - 1} (2n)^{2p}.$$

On peut donc écrire

$$(38) \quad \int_C \frac{E^{2mi(u-1)}}{(u-1)^2 \sqrt{1-u^2}} du \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2n z \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz \\ = 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} \frac{(2n)^{2p}}{1 \cdot 2 \dots 2p} \int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} E^{i2m(u-1)} du.$$



L'intégrale placée sous le signe  $\sum$  peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$(39) \quad \int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} E^{i2m(u-1)} du = E^{-i2m} \int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} E^{i2mu} du.$$

En donnant au contour C la forme indiquée sur la figure 18, on a

$$\int_C \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} E^{i2mu} du = (ABC) + (CDA).$$

Les intégrales désignées, dans le second membre, par les chemins suivis par la variable, écrits entre parenthèses, peuvent être évaluées en appliquant la formule (2) donnée dans l'Introduction. Il faut partir, à cet effet, des développements de la fonction

$$\frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2},$$

dans le voisinage des points  $u = 1$  et  $u = -1$ ,  $(1-u^2)^{\frac{1}{2}}$  étant alors purement imaginaire positif, sur le contour, pour  $u$  réel et supérieur à  $+1$ , et réel et positif pour  $u$  supérieur à  $-1$ . On trouve, dans le voisinage de  $u = 1$ ,

$$(40) \quad \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} = (-1)^{p+1} i 2^{p-\frac{1}{2}} (u-1)^{p-\frac{5}{2}} \left[ 1 + \frac{2p-1}{4} (u-1) + \dots \right],$$

le binôme  $(u-1)^{p-\frac{5}{2}}$  étant réel et positif, sur l'axe des abscisses, pour  $u$  supérieur à  $1$ . On a d'autre part, dans le voisinage de  $u = -1$ ,

$$(41) \quad \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-1)^2} = 2^{p-\frac{3}{2}} (u+1)^{p-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{2p-5}{4} (u+1) + \dots \right].$$

Partant du développement (40) on trouve

$$(ABC) = E^{i2m} \frac{4\pi}{\Gamma\left(-p + \frac{5}{2}\right)} \frac{E^{i\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{m^{p-\frac{3}{2}}} \left[ 1 + i \frac{(2p-1)(2p-3)}{16m} + \dots \right].$$

Utilisant ensuite le développement (41), on constate que l'intégrale (CDA) est de l'ordre du produit  $(ABC) \times \frac{1}{m^2}$ , c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de l'erreur admise sur (ABC). On a donc sim-

plement comme valeur de l'intégrale (39)

$$\frac{4\pi}{\Gamma\left(-\rho + \frac{5}{2}\right)} \frac{E^{i\left(\rho + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{m^{\rho - \frac{3}{2}}} \left[ 1 + i \frac{(2\rho - 1)(2\rho - 3)}{16m} + \dots \right]$$

et l'expression de l'intégrale (38) devient, en admettant une erreur relative de l'ordre de  $\frac{1}{m^2}$ ,

$$8\pi \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} \frac{(-1)^{\rho+1}}{2^{\rho-1}} \frac{E^{i\left(\rho + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(-\rho + \frac{5}{2}\right)} \frac{(2n)^{2\rho}}{1.2 \dots 2\rho} \frac{1}{m^{\rho - \frac{3}{2}}} \left[ 1 + i \frac{(2\rho - 1)(2\rho - 3)}{16m} + \dots \right]$$

ou

$$8\pi m^{\frac{3}{2}} \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} \frac{(-1)^{\rho+1}}{2^{\rho-1}} \frac{E^{i\left(\rho + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(-\rho + \frac{5}{2}\right)} \frac{\left[\frac{(2n)^2}{m}\right]^\rho}{1.2 \dots 2\rho} \left[ 1 + i \frac{(2\rho - 1)(2\rho - 3)}{16m} + \dots \right].$$

Or on a

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\rho + \frac{5}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\rho + \frac{5}{2}\right)\left(-\rho + \frac{5}{2} + 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{\rho-2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-1)^{\rho-2} 1.3 \dots (2\rho - 5)} \end{aligned}$$

ou

$$\Gamma\left(-\rho + \frac{5}{2}\right) = (-1)^\rho \frac{2^{\rho-2} \sqrt{\pi} (2\rho - 3)(2\rho - 1)}{1.3 \dots (2\rho - 1)}.$$

Il en résulte

$$\Gamma\left(-\rho + \frac{5}{2}\right) (2\rho - 1).1.2 \dots 2\rho = (-1)^\rho 2^{2\rho-2} (2\rho - 1)^2 (2\rho - 3).1.2 \dots \rho \sqrt{\pi}.$$

L'expression de l'intégrale (38) devient, en conséquence,

$$(42) \quad 32\sqrt{\pi} m^{\frac{3}{2}} \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} \frac{E^{i\left(\rho - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}{(2\rho - 1)^2 (2\rho - 3)} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^\rho}{1.2 \dots \rho} \left[ 1 + i \frac{(2\rho - 1)(2\rho - 3)}{16m} + \dots \right].$$

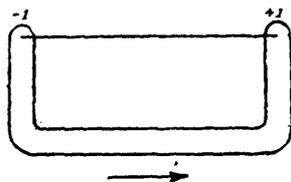
Après avoir déformé le contour C comme l'indique la figure (19),

on trouve d'une façon analogue l'expression asymptotique de l'intégrale

$$(43) \quad \int_C \frac{V^{-2mi-n-1}}{(u-1)^2 \sqrt{1-u^2}} du \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz.$$

La partie fournie par le point singulier  $u = -1$  est négligeable

Fig. 19.



devant celle que donne la considération du point  $u = +1$ , du moment où l'erreur relative admise sur le résultat est de l'ordre de  $\frac{1}{m^2}$ . La valeur de l'intégrale s'obtient en changeant  $i$  en  $-i$  dans l'expression (42). On en déduit

$$L = 64 n^2 \sqrt{\pi m} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)^2 (2p-3)} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \\ \times \left[ \cos\left(p - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} - \frac{(2p-1)(2p-3)}{16m} \sin\left(p - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} + \dots \right],$$

le produit par  $m^2$  des termes négligés entre crochets restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment. On peut aussi écrire

$$(44) \quad L = 32 n^2 \sqrt{2\pi m} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)^2 (2p-3)} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \\ \times \left[ \cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2} + \frac{(2p-1)(2p-3)}{16m} \left( \cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right].$$

Cette formule est, en principe, valable pour toute valeur de  $\frac{n^2}{m}$ . Mais elle n'est pratiquement applicable que lorsque  $\frac{n^2}{m}$  ne dépasse pas l'ordre de grandeur de 15 unités.

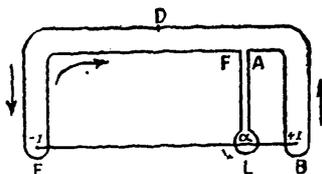
Nous verrons, dans un autre Mémoire, comment la question doit être traitée, dans l'hypothèse contraire.

2°  $\alpha < 1$ . — Le point  $u = \alpha$  est un pôle de la fonction, placée sous le signe  $\int_C$ , intérieur au contour d'intégration C. Considérons d'abord l'intégrale

$$(45) \quad \int_C \frac{V^{2m-1-u^2}}{(u-\alpha)^2 \sqrt{1-u^2}} \int_\gamma \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz.$$

On peut donner au contour C la forme indiquée sur la figure 20,

Fig. 20.



et la décomposer en une somme de trois autres

$$(45') \quad \int_C = (FLA) + (ABD) + (DEF).$$

Pour avoir l'intégrale (FLA), relative au lacet décrit autour du point  $u = \alpha$ , il faut calculer le résidu de la fonction sous le signe  $\int_C$ , pour le pôle  $u = \alpha$ . Il a pour valeur

$$R = \left[ \frac{2mi}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \int_\gamma \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-\alpha^2}}{z^2} dz - 2n \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \int_\gamma \frac{\sin 2nz \sqrt{1-\alpha^2}}{z} dz$$

ou, en intégrant par parties le second terme,

$$(46) \quad R = \frac{2mi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \int_\gamma \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-\alpha^2}}{z^2} dz + \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} (-1 + \cos 2n\sqrt{1-\alpha^2}).$$

On a, par suite,

$$(47) \quad (FLA) = 2i\pi R.$$

Pour calculer les intégrales (ABD) et (DEF), il convient de remplacer  $\int_{\gamma} \frac{\cos 2nz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz$  par son développement obtenu à propos de la formule (38), ce qui donne

$$(48) \quad \int \frac{E^{2mi-u-\alpha}}{(u-\alpha)^2 \sqrt{1-u^2}} du \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz \\ = 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} \frac{(2n)^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2p} \int \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} E^{i2mu-\alpha} du,$$

l'intégrale placée dans le second membre étant prise suivant le chemin ABD ou DEF. Écrivant

$$(49) \quad \int_{\text{ABD}} \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} E^{i2mu-\alpha} = E^{-i2m\alpha} \int_{\text{ABD}} \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} E^{i2mu} du,$$

l'évaluation de l'intégrale, écrite dans le second membre, s'obtient en appliquant la formule (2) de l'Introduction, en partant du développement

$$(50) \quad \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} = i(-1)^{p+1} \frac{2^{p-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)^2} (u-1)^{p-\frac{1}{2}} \\ \times \left[ 1 + \left( \frac{2p-1}{1} - \frac{2}{1-\alpha} \right) (u-1) + \dots \right],$$

dont le champ de convergence, autour du point  $u = 1$ , diminue à mesure que  $\alpha$  se rapproche de la valeur 1 et devient nul lorsque  $\alpha$  atteint la valeur 1. Les résultats auxquels nous allons parvenir, en partant de la formule (50), ne seront donc valables que si  $\alpha$  n'est pas trop voisin de 1.

L'intégrale  $\int_{\text{DEF}}$  se calcule de même, en partant du développement

$$(51) \quad \frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} = \frac{2^{p-\frac{1}{2}}}{(1+\alpha)^2} (u+1)^{p-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{2p-1}{1} - \frac{2}{1+\alpha} \right) (u+1) + \dots \right].$$

Dans ces formules, le binôme  $(u-1)^{p-\frac{1}{2}}$  est réel et positif pour  $u$  réel et supérieur à 1, et le binôme  $(u+1)^{p-\frac{1}{2}}$  réel et positif, pour  $u$  réel et supérieur à  $-1$ .

On obtient

$$(52) \quad (ABD) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{u^2}{m}\right)^p \frac{E \left[ i \left[ 2m(u-\alpha) + \left(p + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] \right]}{(1-\alpha)^2 (2p-1) \Gamma(p+1)} \\ \times \left[ 1 + \left( \frac{2p-1}{4} - \frac{2}{1-\alpha} \right) \frac{2p+1}{4m} i + \dots \right],$$

le produit par  $m^2$  des termes négligés entre crochets restant fini pour  $m$  infini.

On trouve de la même manière

$$(53) \quad (DEF) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{u^2}{m}\right)^p \frac{E \left[ -i \left[ 2m(1+\alpha) + \left(p + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] \right]}{(1+\alpha)^2 (2p-1) \Gamma(p+1)} \\ - \times \left[ 1 - \left( \frac{2p-1}{4} - \frac{2}{1+\alpha} \right) \frac{2p+1}{4m} i + \dots \right].$$

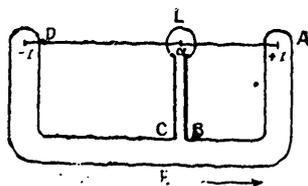
Additionnant membre à membre les trois formules (47), (52) et (53), on obtient finalement la valeur de l'intégrale (45).

L'expression de l'intégrale

$$(54) \quad \int_C \frac{E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2mz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz$$

s'obtient par des considérations analogues, en donnant au contour C la forme représentée (fig. 21). Mais il faut tenir compte de

Fig. 21.



la circonstance que  $\sqrt{1-u^2}$  a maintenant une valeur réelle et négative, aux points où le contour rencontre l'axe des abscisses, entre les valeurs  $u = -1$  et  $u = +1$ . Cela tient à ce que la valeur de  $\sqrt{1-u^2}$ , sur l'axe des abscisses, pour  $u > 1$ , est purement imaginaire positive.

Dans le cas actuel, le résidu  $R'$  analogue à  $R$ , pour le pôle  $u = \alpha$ ,

s'obtient donc en changeant  $m$  en  $-m$  et  $\sqrt{1-\alpha^2}$  en  $-\sqrt{1-\alpha^2}$ , dans l'expression (46) de  $R$ , ce qui conduit à l'égalité

$$(55) \quad R + R' = \frac{4mi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-\alpha^2}}{z^2} dz.$$

On a, en conséquence,

$$(56) \quad \int_C \frac{E^{-i2mu-x}}{(u-\alpha)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-u^2}}{z^2} dz \\ = 2i\pi R' + (\text{EAB}) + (\text{CDE}).$$

L'intégrale (EAB) s'obtient en partant du développement (48), après changement de  $i$  en  $-i$ , et en appliquant la formule (3) de l'introduction au développement (50).

L'intégrale (CDE) s'évalue par la même formule, en partant du développement (51) *changé de signe*, c'est-à-dire

$$\frac{(1-u^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(u-\alpha)^2} = -\frac{2^{p-\frac{1}{2}}}{(1+\alpha)^2} (u+1)^{p-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{2p-1}{4} - \frac{2}{1+\alpha} \right) (u+1) + \dots \right],$$

à condition de regarder le binôme  $(u+1)^{p-\frac{1}{2}}$  comme positif au point D du contour (fig. 21), où  $u$  est réel et supérieur à  $-1$ . Il faut, en effet, tourner de  $-2\pi$ , autour du point  $u = -1$ , pour passer du point E de la figure 20, auquel correspond le développement (51), au point D de la figure 21, en déformant le contour de la figure 20, pour l'amener à coïncider avec le contour de la figure 21.

On trouve

$$(57) \quad (\text{EAB}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{\rho=1}^{p=\infty} \binom{n^2}{m}^{\rho} \frac{E^{-i[2m-1-x+(p+\frac{3}{2})\frac{\pi}{2}]} }{(1-\alpha)^2(2\rho-1)\Gamma(\rho+1)} \\ \times \left[ 1 - \left( \frac{2\rho-1}{4} - \frac{2}{1+\alpha} \right) \frac{2\rho+1}{4m} i + \dots \right];$$

$$(58) \quad (\text{CDE}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{\rho=1}^{p=\infty} \binom{n^2}{m}^{\rho} \frac{E^{i[2m-1+x+(p+\frac{3}{2})\frac{\pi}{2}]} }{(1+\alpha)^2(2\rho-1)\Gamma(\rho+1)} \\ \times \left[ 1 + \left( \frac{2\rho-1}{4} - \frac{2}{1+\alpha} \right) \frac{2\rho+1}{4m} i + \dots \right].$$

Des formules (45), (45'), (47), (52), (53) d'une part et (56), (57), (58) d'autre part, on tire finalement, en tenant compte de la formule (55), la valeur de L, pour  $\alpha < 1$ , à savoir

$$\begin{aligned}
 (59) \quad L = & -\frac{8m\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2nz \sqrt{1-\alpha^2}}{z^2} dz \\
 & + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{n^2}{m} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{\rho-1}}{(2\rho-1)\Gamma(\rho+1)} \\
 & \times \left\{ \cos \left[ 2m(1-\alpha) + \left(\rho + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2\rho+1}{4m} \left( \frac{2\rho-1}{4} - \frac{2}{1-\alpha} \right) \right. \\
 & \quad \left. \times \sin \left[ 2m(1-\alpha) + \left(\rho + \frac{2}{3}\right) \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{m^2} ( \quad ) + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

+ un terme qui s'obtient en changeant  $\alpha$  en  $-\alpha$  dans le terme ci-dessus,

le produit par  $m^2$  des termes négligés dans les grandes parenthèses, restant fini lorsque  $m$  augmente indéfiniment. Cette formule n'est d'ailleurs valable que si  $\alpha$  n'est pas trop voisin de 1, pour le motif invoqué à propos de l'établissement de la formule (50). Elle ne peut être appliquée que si le produit  $m(1-\alpha)$  est suffisamment élevé.

La formule (59) ne devant être employée que pour  $\alpha > 0$ , on voit que si l'on considère une valeur de  $\alpha$  non voisine de 1, le terme non écrit et celui qui le précède sont tous deux d'ordre  $\frac{1}{m^2}$  par rapport

à celui qui dépend de l'intégrale  $\int_{\gamma}$ . Si l'on considère, au contraire, une valeur de  $\alpha$  assez voisine de 1, le terme non écrit est négligeable par rapport à celui dont on le déduit par le changement de  $\alpha$  en  $-\alpha$ . Pour ces motifs, il n'y a pas lieu de tenir compte de ce terme non écrit. Nous en ferons abstraction dans ce qui va suivre. Posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$\frac{n^2}{m} = \nu, \quad 2m(\alpha-1) = x,$$

la formule (59) peut se mettre sous la forme suivante, en ne rete-

nant que les termes principaux :

$$(59') \frac{L}{32n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{-x\left(2+\frac{x}{2m}\right)} \\ \times \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos\sqrt{-2yx\left(2+\frac{x}{2m}\right)}z}{-2yx\left(2+\frac{x}{2m}\right)z^2} dz \\ - \frac{1}{4x^2} [U \cos x - V \sin x] - \frac{W \cos x + Z \sin x}{4x^3} + \frac{1}{x^4} (\dots) + \dots,$$

les termes négligés contenant en facteur  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{m x^2}$  ou  $\frac{1}{m^2}$  et U, V, W, Z, représentant les séries

$$U = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2}}{(2p-1)\Gamma(p+1)} \nu^{p-1}, \\ V = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2}}{(2p-1)\Gamma(p+1)} \nu^{p-1}, \\ W = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1} \frac{\nu^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \left( \cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2} \right), \\ Z = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1} \frac{\nu^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \left( \cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2} \right).$$

4° Au centre de l'image, on a  $\alpha = 0$  ou  $x = -2m$ . Il en résulte

$$\frac{L}{32n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi m} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos\sqrt{4m\nu}z}{4m\nu z^2} dz \\ - \frac{1}{16m^2} (U \cos 2m + V \sin 2m) + \dots$$

ou, d'après la formule (65), que nous allons établir,

$$\frac{L}{32n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi m} \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{m\nu}} - \frac{1}{2m\nu} - \frac{\sin 2\sqrt{m\nu}}{4(m\nu)^2} + \dots \right] \\ - \frac{1}{16m^2} [U \cos 2m + V \sin 2m] + \dots$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de l'identité  $n = \sqrt{\nu m}$ ,

$$(59'') \quad \frac{L}{32n^2\sqrt{2\pi m}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\nu}} \left[ \pi - \frac{1}{n} + \text{des termes contenant } \frac{1}{m} \text{ en facteur} \right].$$

Pour clore la question, nous allons nous occuper de l'intégrale suivante, prise le long du chemin  $\gamma$ , représenté figure 17, et où  $q$  est supposé positif,

$$(60) \quad \int_{\gamma} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz = \int_1^{+1} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz.$$

qui se calcule de deux manières différentes, suivant que  $q$  est ou non un nombre élevé.

Si  $q$  ne dépasse pas quelques unités, le développement en série du cosinus, figurant dans l'élément différentiel, conduit à l'expression suivante :

$$(61) \quad \int_{\gamma} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz = 2q \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \frac{q^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2p+2)}$$

On pourrait, du reste, obtenir des expressions plus avantageuses, au point de vue du calcul numérique, lorsque  $q$  dépasse 3.

Lorsque  $q$  a une valeur un peu élevée, il est tout indiqué de faire usage d'un développement semi-convergent que nous allons établir, du moment où l'on s'en tient à un degré d'approximation convenable.

On a d'abord, après une intégration par parties,

$$(62) \quad \int_{\gamma} \frac{1 - \cos qz}{z^2} dz = -2 + 2 \cos q + q \int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z} dz.$$

On obtient d'ailleurs, à l'aide de deux intégrations par parties successives, l'expression suivante :

$$\int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z^{2p+1}} dz = -\frac{2}{q} \cos q - 2 \frac{2p+1}{q} \sin q - \frac{(2p+1)(2p+2)}{q^2} \int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z^{2p+3}} dz$$

dont on tire de proche en proche

$$(63) \int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z} dz = -\frac{2}{q} \cos q \left[ 1 - \frac{1 \cdot 2}{q^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{q^4} - \dots + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots 2p}{q^{2p}} \right] \\ - \frac{2}{q^2} \sin q \left[ 1 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{q^2} + \dots + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+1)}{q^{2p}} \right] \\ + (-1)^{p+1} \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+2)}{q^{2p+2}} \int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z^{2p+3}} dz.$$

En vue d'exprimer l'intégrale entrant dans le second membre, considérons l'intégrale auxiliaire

$$\int_{\gamma} \frac{\cos qz}{z^{2p+3}} dz.$$

Si l'on développe le cosinus en série et que l'on intègre, on obtient une série de termes tous réels, à l'exception d'un seul, qui a pour valeur

$$(-1)^{p+1} \frac{q^{2p+2}}{1 \cdot 2 \dots (2p+2)} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = (-1)^p i\pi \frac{q^{2p+2}}{1 \cdot 2 \dots (2p+2)}.$$

Il s'ensuit que l'intégrale réelle  $\int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z^{2p+3}} dz$  est le coefficient de  $i$  dans la somme

$$(-1)^{p+1} i\pi \frac{q^{2p+2}}{1 \cdot 2 \dots (2p+2)} + \int_{\gamma} \frac{Eiqz}{z^{2p+3}} dz,$$

E désignant la base des logarithmes népériens. On peut donc mettre la formule (63) sous la forme

$$(64) \int_{\gamma} \frac{\sin qz}{z} dz = \pi - \frac{2}{q} \cos q \left[ 1 - \frac{1 \cdot 2}{q^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{q^4} + \dots + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots 2p}{q^{2p}} \right] \\ - \frac{2}{q^2} \sin q \left[ 1 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{q^2} + \dots + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+1)}{q^{2p}} \right] \\ + r,$$

r désignant le coefficient de  $\sqrt{-1}$  dans l'expression

$$(-1)^{p+1} \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+2)}{q^{2p+2}} \int_{\gamma} \frac{Eiqz}{z^{2p+3}} dz.$$

Or, si l'on remplace, dans le plan de la variable  $z$ , le chemin

d'intégration  $\gamma$  (fig. 17) par la demi-circonférence de rayon 1, tracée du côté des ordonnées positives, on peut écrire <sup>(1)</sup>

$$\int_{\gamma} \frac{E^{iqz}}{z^{2p+3}} dz = \mu\pi E^{iq\xi},$$

$\xi$  désignant l'affixe d'un point de cette demi-circonférence et  $\mu$  un facteur de module inférieur à 1. Mais,  $q$  étant positif,  $|E^{iq\xi}|$  est au plus égal à 1, puisque la partie imaginaire de  $\xi$  n'est pas négative. Il s'ensuit que cette intégrale a un module inférieur à  $\pi$  et par suite

$$r < \pi \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+2)}{q^{2p+2}} \quad (\text{en valeur absolue}).$$

Si donc le second membre de cette inégalité est inférieur à la limite de l'erreur admise dans les approximations, on pourra négliger  $r$  dans la formule (64). Il convient d'ailleurs de choisir  $p$  de façon que  $2p+2$  soit le plus près possible de  $q$  tout en lui étant inférieur.

À la formule (64) correspond, d'après la relation (62), l'expression approchée suivante :

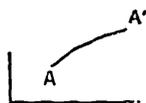
$$(65) \quad \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \cos q \left[ \frac{1 \cdot 2}{q^2} - \dots + (-1)^{p+1} \frac{1 \cdot 2 \dots 2p}{q^{2p}} \right] \\ - \frac{1}{q^2} \sin q \left[ 1 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{q^2} + \dots + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+1)}{q^{2p}} \right],$$

avec une erreur inférieure en valeur absolue à

$$\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 2 \dots (2p+2)}{q^{2p+2}}.$$

(1) Etant donnée l'intégrale  $I = \int f(z) dz$  prise le long d'un chemin  $AA'$ , on

Fig. 17.



sait, en effet, que l'on a  $I = \mu \text{a.c.} AA' f(\xi)$ ,  $\xi$  étant l'affixe d'un point de  $AA'$  et  $\mu$  un facteur de module plus petit que 1.

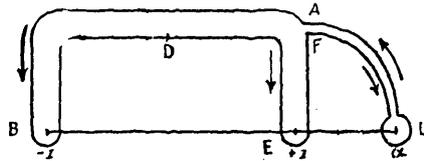
D'après la formule (61), l'intégrale (60) est nulle pour  $q = 0$ ; elle a d'ailleurs pour valeur  $\pi$  pour  $q = \infty$ , d'après la formule (65). Sa dérivée par rapport à  $q$ , savoir  $2 \frac{1 - \cos q}{q^2}$ , est positive. C'est donc une fonction croissante de  $q$ . La dérivée seconde  $2 \frac{q \sin q + 2 \cos q - 2}{q^3}$  a une première série de racines  $q = 2k\pi$ ,  $k$  étant un entier et une seconde série comprise entre  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  et  $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ ,  $k$  étant au moins égal à 1. L'intégrale (60), en grandissant de 0 à  $\pi$ , lorsque  $q$  croît de zéro à l'infini, éprouve donc une infinité d'inflexions. En conséquence, cette intégrale augmente en passant par une infinité de sinuosités.

3° Nous avons encore à calculer l'intégrale  $I$ , dans le cas où  $\alpha > 1$ . Considérons d'abord l'intégrale

$$(66) \quad \int_C \frac{E^{i2\pi u - \alpha}}{(u - z)^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2u z \sqrt{1 - u^2}}{z^2} dz,$$

le contour  $C$  étant toujours celui qui a été défini à propos de la

Fig. 3.



formule (6). Déformons ce chemin, comme il est indiqué (fig. 23).

On a

$$\int_C = (FLA) + (ABD) + (DEF).$$

L'intégrale (FLA) a pour valeur le produit de  $2i\pi$  par le résidu de l'élément différentiel relatif au pôle  $u = \alpha$ . Le radical  $\sqrt{1 - u^2}$  étant purement imaginaire positif, pour  $u = \alpha$ , ce résidu se déduit de la formule (46) en y remplaçant  $\sqrt{1 - \alpha^2}$  par  $i\sqrt{\alpha^2 - 1}$  et en exprimant le cosinus par des exponentielles.

On trouve

$$(67) \quad R = \frac{2m}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \int_{\gamma} \frac{1 - \frac{1}{2} (E^{2n\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} + E^{-2n\alpha\sqrt{\alpha^2-1}})}{z^2} dz + \frac{i\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} (-2 + E^{2n\sqrt{\alpha^2-1}} + E^{-2n\sqrt{\alpha^2-1}}).$$

On en déduit

$$(68) \quad (FLA) = 2i\pi R.$$

Le calcul de la somme (ABD) + (DEF) s'effectue exactement comme dans le cas où  $\alpha$  est inférieur à 1. Cette somme s'obtient en additionnant les formules (52) et (53). Il en résulte pour l'intégrale (66) la valeur

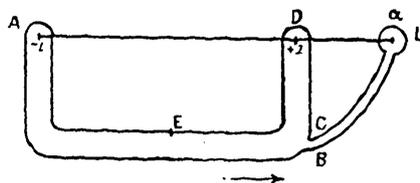
$$(69) \quad 2i\pi R + 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{E^{i[2m\alpha - \alpha + (p + \frac{3}{2})\frac{\pi}{2}]} }{(1 - \alpha)^2 (2p - 1) \Gamma(p + 1)} \times \left[ 1 + \left(\frac{2p - 1}{4} - \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \frac{2p + 1}{4m} i + \dots \right] + 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{E^{-i[2m\alpha + \alpha + (p + \frac{3}{2})\frac{\pi}{2}]} }{(1 + \alpha)^2 (2p - 1) \Gamma(p + 1)} \times \left[ 1 - \left(\frac{2p - 1}{4} - \frac{\alpha}{1 + \alpha}\right) \frac{2p + 1}{4m} i + \dots \right].$$

L'intégrale

$$(70) \quad \int_C \frac{E^{-2mi(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_{\gamma} \frac{1 - \cos 2n\alpha\sqrt{1-u^2}}{z^2} dz,$$

quand  $\alpha$  est supérieur à 1, s'obtient en déformant le contour d'inté-

Fig. 24.



gration, comme il est indiqué (fig. 24). On a

$$\int_C = (BLC) + (CDE) + (EAB).$$

L'intégrale (BLC), relative au pôle  $u = \alpha$ , est égale au produit de  $2i\pi$  par le résidu  $R'$  de l'élément différentiel relatif à ce pôle. Or comme  $\sqrt{1-u^2}$  a la même valeur que dans le cas examiné tout à l'heure, à propos de l'intégrale (66), ce résidu  $R'$  s'obtient simplement en changeant  $m$  en  $-m$  dans la formule (67). Il est donc donné par la formule

$$(71) \quad R + R' = 2 \frac{i\alpha}{(z^2-1)^2} [E^{2n\sqrt{x^2-1}} + E^{-2n\sqrt{x^2-1}}],$$

et l'on a

$$(72) \quad (\text{BLC}) = 2i\pi R'.$$

La somme des deux autres intégrales (CDE) + (EAB) s'évalue exactement comme lorsque  $\alpha$  est inférieur à 1. On a, en conséquence,

$$(73) \quad (\text{CDE}) + (\text{EAB}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{E^{-i[2m(1-\alpha) + (p+\frac{3}{2})\frac{\pi}{2}]}}{(1-\alpha)^2 (2p-1)\Gamma(p+1)} \\ \times \left[1 - \left(\frac{2p-1}{4} - \frac{2}{1-\alpha}\right) \frac{2p+1}{4m} i + \dots\right] \\ + 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{n^2}{m}\right)^p \frac{E^{i[2m(1+\alpha) + (p+\frac{3}{2})\frac{\pi}{2}]}}{(1+\alpha)^2 (2p-1)\Gamma(p+1)} \\ \times \left[1 + \left(\frac{2p-1}{4} - \frac{2}{1+\alpha}\right) \frac{2p+1}{4m} i + \dots\right].$$

En résumé, lorsque  $\alpha > 1$ , la valeur de l'intégrale L, déduite des formules (66), (67), (68), (69), (70), (71), (72), (73) est la suivante :

$$(74) \quad L = -\frac{4\pi\alpha}{(z^2-1)^2} [E^{2n\sqrt{x^2-1}} + E^{-2n\sqrt{x^2-1}} - 2] \\ + \frac{4}{(1-\alpha)^2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{n^2}{m} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)\Gamma(p+1)} \\ \times \left\{ \cos \left[ 2m(1-\alpha) + \left(p + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ \left. - \frac{2p+1}{4m} \left( \frac{2p-1}{4} - \frac{2}{1-\alpha} \right) \sin \left[ 2m(1-\alpha) + \left(p + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ + \text{un terme qui se déduit du précédent en changeant } \alpha \text{ en } -\alpha.$$

Cette expression n'est d'ailleurs pratiquement applicable que si  $\alpha$  diffère assez de 1, pour que le produit  $m(1 - \alpha)$  ait une valeur élevée. Comme dans le cas où  $\alpha < 1$ , le dernier terme non écrit est négligeable vis-à-vis du précédent.

Posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$\frac{n^2}{m} = \nu, \quad 2m(\alpha - 1) = x,$$

la formule (74) devient, en ne retenant que les termes les plus importants,

$$(74') \quad \frac{I}{32n^2\sqrt{2\pi m}} = - \frac{\sqrt{\pi}\left(1 + \frac{x}{2m}\right)}{4\nu\left[x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \\ \times \left[ E\sqrt{2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)} + E^{-\sqrt{2\nu x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} - 2 \right] \\ - \frac{1}{4x^2}(U \cos x - V \sin x) \\ - \frac{1}{4x^4}(W \cos x + Z \sin x) + \frac{1}{x^4}(\dots) + \dots,$$

les termes négligés contenant en facteur  $\frac{1}{x^4}$ ,  $\frac{1}{mx^2}$  ou  $\frac{1}{m^2}$ ; U, V, W et Z représentant d'ailleurs les séries définies à propos de la formule (59').

### V.

#### RÉSUMÉ DES FORMULES EXPRIMANT K.

$m, n, \alpha$  étant les paramètres définis par les formules (4) et K l'intégrale qui figure dans l'expression (5) de l'intensité I, les formules suivantes donnent la valeur de K, avec une faible erreur relative, dans différentes hypothèses.

Posons :

$$(75) \left\{ \begin{array}{l} S_0 = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1)^2 (2p-3) \Gamma(p+1)} \left(\cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2}\right), \\ U = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1) \Gamma(p+1)} \left(\cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2}\right), \\ V = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{(2p-1) \Gamma(p+1)} \left(\cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2}\right)^{(1)}, \\ W = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \left(\cos p \frac{\pi}{2} - \sin p \frac{\pi}{2}\right), \\ Z = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{2p+1}{2p-1} \frac{\left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \left(\cos p \frac{\pi}{2} + \sin p \frac{\pi}{2}\right). \end{array} \right.$$

Les sommes de ces séries sont inscrites dans le Tableau suivant, pour diverses valeurs du rapport  $\frac{n^2}{m}$  :

$\frac{n^2}{m}$	$S_0$	U.	V.	W.	Z.
0,00 .....	-1,0000	+1,0000	-1,0000	-3,000	+3,000
01 .....	1,0006	0,9983	1,0017	3,008	2,992
02 .....	1,0011	0,9966	1,0033	3,017	2,983
03 .....	1,0017	0,9950	1,0050	3,025	2,975
04 .....	1,0022	0,9933	1,0066	3,033	2,967
05 .....	1,0028	0,9916	1,0082	3,041	2,958
06 .....	1,0033	0,9899	1,0099	3,049	2,950
07 .....	1,0039	0,9882	1,0115	3,057	2,941
08 .....	1,0045	0,9864	1,0131	3,066	2,932
09 .....	1,0050	0,9847	1,0147	3,073	2,923
10 .....	1,0056	0,9830	1,0163	3,080	2,915
20 .....	1,0112	0,9654	1,0320	3,158	2,824
30 .....	1,0169	0,9472	1,0469	3,228	2,730
40 .....	1,0226	0,9284	1,0610	3,293	2,633

(1) La série V est identique à la série  $T_s$ , définie par les formules (86) pour  $s = 0$ .

$\frac{n^2}{m}$	S.	U.	V.	W.	Z.
50 .....	1,0283	0,9091	1,0743	3,353	2,533
60 .....	1,0341	0,8894	1,0868	3,405	2,429
70 .....	1,0399	0,8692	1,0985	3,453	2,323
80 .....	1,0458	0,8487	1,1094	3,496	2,214
0,90 .....	1,0517	0,8279	1,1193	3,530	2,106
1,00 .....	1,0576	0,8068	1,1285	3,558	1,996
2,00 .....	1,1185	0,5910	1,1701	3,503	0,929
3,00 .....	1,1813	0,3982	1,1315	2,974	+0,178
4,00 .....	1,2447	0,2593	1,0420	2,307	-0,083
5,00 .....	1,3078	0,1809	0,9390	1,829	+0,027
6,00 .....	1,3696	0,1488	0,8516	1,664	0,214
7,00 .....	1,4299	0,1391	0,7912	1,712	0,340
8,00 .....	1,4880	0,1322	0,7536	1,776	0,246
9,00 .....	1,5444	0,1193	0,7261	1,710	+0,070
10,00 .....	-1,5991	+0,1019	-0,7000	-1,528	-0,034

D'après les formules (7), (12), (13) et (37), on a

$$(76) \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{J}{16n^2\sqrt{2\pi m}} - \frac{L}{32n^2\sqrt{2\pi m}}.$$

Partant de cette expression et posant

$$(77) \quad \nu = \frac{n^2}{m}, \quad x = 2m(z-1),$$

on a :

1° Pour  $\alpha < 1$  et non voisin de zéro ou  $x < 0$  et non voisin de  $-2m$ , d'après les formules (25'), (59)',

$$(78) \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}} \left\{ \frac{1}{x\left(2 + \frac{x}{2m}\right)} \left[ 1 - \left(1 + \frac{x}{2m}\right) \frac{\sin \sqrt{-2\nu x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}}{\sqrt{-2\nu x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{-1}^{z+1} \frac{1 - \cos \sqrt{-2\nu x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)} z}{\sqrt{-2\nu x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)} z^2} dz \right\} + \tau,$$

en posant

$$(78') \quad \tau = \frac{\left[ U + \frac{W}{x} + \frac{1}{x^2} ( \quad ) \right] \cos x - \left[ V - \frac{Z}{x} + \frac{1}{x^2} ( \quad ) \right] \sin x}{4x^2}$$

+ des termes négligeables contenant en facteur  $\frac{1}{mx^2}$ ,  $\frac{1}{m^2}$  ou  $\frac{1}{8n^{\frac{7}{2}} \sqrt{2\pi m}}$ .

2° Pour  $\alpha > 1$  ou  $x > 0$ , d'après les formules (26'), (74'),

$$(79) \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\gamma x \left( 2 + \frac{x}{2m} \right)}} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{x}{2m} \right) \frac{E^{-\sqrt{2\gamma x \left( 2 + \frac{x}{2m} \right)} - 1}}{\sqrt{2\gamma x \left( 2 + \frac{x}{2m} \right)}} \right] + \tau;$$

$m$  étant considérable, le rapport  $\frac{\sqrt{2\gamma(2x)}^{\frac{3}{2}}}{16m}$  peut être petit, même quand  $x$  est assez élevé. Les formules (78) et (79) prennent alors une forme plus avantageuse, pour le calcul numérique, en les développant suivant les puissances de  $\frac{1}{m}$ , la décroissance des termes étant rapide. Tenant compte de la relation (62), on trouve, pour  $\alpha < 1$  ou  $x < 0$ ,

$$(80) \quad \begin{aligned} \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = & \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\gamma}} \left\{ \frac{1}{2x} \left[ 1 - \frac{\sin \sqrt{-4\gamma x}}{\sqrt{-4\gamma x}} \right] + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos \sqrt{-4\gamma x z}}{\sqrt{-4\gamma x z^2}} dz \right. \\ & + \frac{x}{8m} \left[ \frac{1 - \cos \sqrt{-4\gamma x}}{\sqrt{-4\gamma x}} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2x} \left( 2 + \frac{\sin \sqrt{-4\gamma x}}{\sqrt{-4\gamma x}} + \cos \sqrt{-4\gamma x} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{x^2}{128m^2} \left[ \frac{1}{2x} \left( 8 + 9 \frac{\sin \sqrt{-4\gamma x}}{\sqrt{-4\gamma x}} - \cos \sqrt{-4\gamma x} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\gamma \frac{\sin \sqrt{-4\gamma x}}{\sqrt{-4\gamma x}} \right. \\ & \quad \left. + \sin \sqrt{-4\gamma x} - 3 \frac{1 - \cos \sqrt{-4\gamma x}}{\sqrt{-4\gamma x}} \right] + \dots \left. \right\} + \tau, \end{aligned}$$

et, pour  $\alpha > 1$  ou  $x > 0$ ,

$$(80') \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\gamma}} \left\{ \frac{1}{2x} \left[ 1 + \frac{E^{-\sqrt{4\gamma x}} - 1}{\sqrt{4\gamma x}} \right] + \frac{1}{16m} \left[ -2 + \frac{E^{-\sqrt{4\gamma x}} - 1}{\sqrt{4\gamma x}} - E^{-\sqrt{4\gamma x}} \right] + \dots \right\} + \tau,$$

$\tau$  étant donné par la formule (78').

3° D'après les formules (27'), (44), (76) et (86), on a, pour  $\alpha = 1$  ou  $x = 0$ , c'est-à-dire au bord géométrique de l'image,

$$(81) \quad \frac{m^2 K_{11}}{2\sqrt{2\pi m}} = -S_0 - \frac{\sqrt{2\pi\gamma}}{6} - \frac{1}{8m} \left[ \frac{V}{2} + \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} \right] \\ + \text{des termes contenant } \frac{1}{m^2} \text{ ou } \frac{1}{8n^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi m}} \text{ en facteur.}$$

4° Enfin, pour  $\alpha = 0$  ou  $x = -2m$ , c'est-à-dire au centre de l'image, on a d'après les formules (28') et (59''),

$$(82) \quad \frac{m^2 K_0}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\gamma}} \left( \pi - \frac{1}{n} + \text{des termes contenant } \frac{1}{m} \text{ en facteur} \right).$$

## VI.

Les formules (78) et (79) se composent chacune de deux parties : l'une connue exactement en termes finis, et provenant des résidus relatifs aux pôles des éléments différentiels des intégrales qui interviennent dans le calcul de  $K$ ; la seconde  $\tau$ , fournie par des développements asymptotiques, applicables seulement lorsque  $|x|$  a une valeur suffisamment élevée, est connue avec une faible erreur relative et, par suite, avec une erreur absolue négligeable,  $\tau$  étant très petit, comme on le verra. On suppose, par ailleurs, la largeur de la fente suffisante pour que  $\frac{1}{8n^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi m}}$  soit totalement négligeable.

Il reste à trouver une expression de  $K$ , applicable au cas où  $x$  n'est pas un nombre élevé, en tenant compte de ce que  $m$  et  $n$  sont grands. Reportons-nous, à cet effet, à la formule (7). Nous avons démontré (12) que la première intégrale est identiquement nulle. L'intégrale

$$J = \int_c \frac{1}{u-z} \frac{E^{i2u\sqrt{1-u^2}} + E^{-i2u\sqrt{1-u^2}}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

a été calculée au paragraphe III. Les expressions trouvées, (25) et (26), sont valables lorsque  $\alpha$  tend vers 1 et ne tombent en défaut que pour  $\alpha$  très petit.

Il faut, au contraire, calculer une nouvelle expression de la troisième intégrale  $L$ , valable pour  $\alpha$  voisin de 1. A cet effet, nous allons la développer suivant les puissances ascendantes de  $\alpha - 1$ .

Nous avons, en conséquence, à chercher la valeur, pour  $\alpha = 1$ , de la dérivée d'ordre  $s$ , par rapport à  $\alpha$ , de l'intégrale double qui figure dans la formule (7) et que l'on peut mettre sous la forme

$$(83) \quad L = \int_c \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1 - \cos 2nt}{t^2} dt.$$

Remarquant que la dérivée, par rapport à  $\alpha$ , de la fraction dépendant de  $u - \alpha$ , sous le premier signe  $\int$ , est égale et de signe contraire à sa dérivée par rapport à  $u$ , il vient

$$\frac{dL}{d\alpha} = - \int_c \frac{d}{du} \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1 - \cos 2nt}{t^2} dt.$$

Intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle, comme reprenant sa valeur quand la variable, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ, on tire de là

$$\frac{dL}{d\alpha} = \int_c \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} du \frac{d}{du} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1 - \cos 2nt}{t^2} dt.$$

Cette expression se généralise de proche en proche et l'on a

$$\frac{d^s L}{d\alpha^s} = \int_c \frac{E^{i2m(u-\alpha)} + E^{-i2m(u-\alpha)}}{(u-\alpha)^2} du \frac{d^s}{du^s} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1 - \cos 2nt}{t^2} dt.$$

Faisant  $\alpha = 1$  et développant  $\cos 2nt$  en série, cette formule devient

$$(84) \quad \left( \frac{d^s L}{d\alpha^s} \right)_{\alpha=1} = 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{(2n)^{2\mu}}{\Gamma(2\mu+1)} \frac{1}{2\mu-1} \\ \times \int_c \frac{E^{i2m(u-1)} + E^{-i2m(u-1)}}{(u-1)^2} \frac{d^s}{du^s} (1-u^2)^{\mu-\frac{1}{2}}.$$

Il s'agit de trouver la valeur asymptotique de l'intégrale, pour  $p$  fixe et  $m$  très grand. Comme dans les applications que nous ferons

des résultats, on n'aura à prendre qu'un nombre restreint de termes dans la série,  $p$  doit être regardé comme très petit, par rapport à  $m$  qui est considérable, par hypothèse. C'est ce qui va nous permettre d'appliquer les formules (2) et (3).

Les points singuliers de l'élément différentiel sont les points  $u = +1$  et  $u = -1$ . Leur considération conduit à appliquer les formules (2) et (3) aux développements de

$$\frac{1}{(u-1)^2} \frac{d^s}{du^s} (1-u^2)^{p-\frac{1}{2}},$$

en suivant une voie absolument semblable à celle qui a été adoptée pour arriver à la formule (44). On a d'abord, en différentiant le développement (40),

$$(85) \quad \frac{1}{(u-1)^2} \frac{d^s}{du^s} (1-u^2)^{p-\frac{1}{2}} \\ = (-1)^{p+1} 2^{p-\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}-s\right)} (u-1)^{p-\frac{5}{2}-s} \\ \times \left[ 1 + \frac{4p^2-1}{2p-2s+1} \frac{u-1}{4} + \dots \right],$$

le binôme  $(u-1)^{p-\frac{5}{2}-s}$  étant réel et positif, pour  $u$  réel et supérieur à 1.

On obtiendrait le développement de la même fonction, dans le voisinage du point  $u = -1$ , en partant de la formule (41). Mais on n'a pas à en faire usage, du moment où l'on admet, sur la valeur de l'intégrale à calculer, une erreur relative de l'ordre de  $\frac{1}{m^2}$ . Cette particularité s'est déjà présentée en établissant la formule (44). Tous calculs faits, la formule (84) devient

$$\left(\frac{d^s L}{d\alpha^s}\right)_{\alpha=1} = \sum_{n=1}^{p=\infty} \frac{(2n)^{2p}}{2^{2p-1}} \frac{2^{p+2+\frac{1}{2}}}{(2m)^{p-\frac{3}{2}-s}} \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p+1) \Gamma\left(-p+\frac{5}{2}+s\right) \Gamma\left(p+\frac{1}{2}-s\right)} \\ \times \left[ \cos\left(p-\frac{7}{2}-s\right) \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. + \frac{2p-2s-3}{2p-2s+1} \frac{4p^2-1}{16m} \sin\left(p-\frac{7}{2}-s\right) \frac{\pi}{2} + \dots \right];$$

elle peut d'ailleurs être modifiée en tenant compte des propriétés de la fonction  $\Gamma$ , rappelées dans l'Introduction, et qui permettent d'écrire

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(-p + \frac{5}{2} + s\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2} - s\right) \\ &= \left(-p + \frac{3}{2} + s\right) \left(-p + \frac{1}{2} + s\right) \frac{\pi}{\sin\left(p - s + \frac{1}{2}\right)\pi} \\ &= (2p - 2s - 3)(2p - 2s - 1) \frac{\pi}{4} (-1)^{p-s} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p + 1)} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{-2p}}{\Gamma(p + 1)}.$$

Posant

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} S_s &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos(p-s)\frac{\pi}{2} + \sin(p-s)\frac{\pi}{2}}{(2p-1)(2p-2s-3)(2p-2s-1)\Gamma(p+1)} \left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}, \\ T_s &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos(p-s)\frac{\pi}{2} - \sin(p-s)\frac{\pi}{2}}{[4(p-s)^2-1]\Gamma(p+1)} (2p+1) \left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}, \end{aligned} \right.$$

on arrive finalement à l'expression

$$(87) \quad \left(\frac{d^s L}{da^s}\right) = 2^s \sqrt{2\pi m} (2m)^s n^2 \left[ S_s + \frac{1}{16m} T_s + \frac{1}{m^2} (\dots) + \dots \right].$$

On a en conséquence, d'après la formule (76),

$$\frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{1}{16n^2\sqrt{2\pi m}} J - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{[2m(\alpha-1)]^s}{\Gamma(s+1)} \left[ S_s + \frac{1}{16m} T_s + \frac{1}{m^2} (\dots) + \dots \right],$$

$J$  s'exprimant, suivant les cas, par les formules (25) ou (26), valables lorsque  $\alpha$  tend vers 1. Tenant compte des formules (77), (25') et (26'), on obtient, pour  $\alpha < 1$  ou  $x < 0$ ,

$$(88) \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\gamma x} \left(2 + \frac{x}{2m}\right)} \left[ 1 - \left(1 + \frac{x}{2m}\right) \frac{\sin \sqrt{-2\gamma x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}}{\sqrt{-2\gamma x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \right] - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \left[ S_s + \frac{1}{16m} T_s + \frac{1}{m^2} (\dots) + \dots \right]$$

ét, pour  $\alpha > 1$  ou  $x > 0$ ,

$$(88') \quad \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\gamma x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \left[ 1 + \left(1 + \frac{x}{2m}\right) \frac{E^{-\sqrt{2\gamma x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} - E^{\sqrt{2\gamma x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}}}{2\sqrt{2\gamma x \left(2 + \frac{x}{2m}\right)}} \right] - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \left[ S_s + \frac{1}{16m} T_s + \frac{1}{m^2} (\dots) + \dots \right],$$

en négligeant des termes en  $\frac{1}{8\alpha^2\sqrt{2\pi m} n^2}$  qui sont complètement insensibles dans les conditions où nous aurons à appliquer ces formules ( $\alpha$  voisin de 1 et  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ ).

VII.

Les formules établies dans les pages qui précèdent permettent d'étudier les variations de l'intensité en fonction de  $x$ , en prenant comme unité l'intensité  $I_b$  au bord géométrique, c'est-à-dire au bord qui limiterait nettement le contour de l'image, sans l'existence de la diffraction.

C'est là de beaucoup la question la plus importante à élucider, parce qu'elle se rapporte à la répartition complexe de la lumière au voisinage du bord géométrique. L'aspect d'une région restreinte d'une surface éclairée dépend, en effet, non pas des variations de l'intensité absolue à l'intérieur, mais de celles de l'intensité relative, par rapport à l'intensité localisée en un point particulier choisi dans cette région. En posant

$$y = \frac{I}{I_b},$$

on a, d'après la formule (5),

$$(89) \quad y = \frac{K}{K_b},$$

$K_R$  étant donné par la formule (81) et  $K$ , suivant les circonstances, par l'une des formules (78), (79), (82) ou (88).

D'après la formule (81), la formule (89) peut s'écrire

$$(89') \quad \left[ S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} - \frac{1}{16m} \left( \nu + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \right) \right] y = \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}}.$$

Il convient, pour étudier  $y$ , de calculer tout d'abord les dérivées  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$  pour  $x = 0$ . A cet effet, il faut partir des formules (89') et (88). Négligeant les termes en  $\frac{1}{m}$  qui sont très petits, en raison de la grandeur de  $m$ , la formule (89') devient

$$(90) \quad \left( S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} \right) y = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\nu}x} \left[ 1 - \frac{\sin\sqrt{-4\nu}x}{\sqrt{-4\nu}x} \right] \sum_{s=0}^{s=\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)},$$

$S_s$  étant défini, en fonction du rapport  $\nu = \frac{n^2}{m}$ , par la formule (86).

Développant le second membre en série, il vient

$$(90') \quad \left( S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} \right) y = \sqrt{2\pi\nu} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(4\nu x)^s}{1 \cdot 2 \dots (2s+3)} - \sum_{s=0}^{s=\infty} S_s \frac{x^s}{1 \cdot 2 \dots s}.$$

On arriverait d'ailleurs au même résultat en partant de l'expression (26') de  $J$  au lieu de (25').

On tire de là

$$(91) \quad \left. \begin{aligned} & - \left( S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} \right) \frac{dy}{dx} = -4\nu \sqrt{2\pi\nu} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s(4\nu x)^{s-1}}{1 \cdot 2 \dots (2s+3)} - \sum_{s=1}^{s=\infty} S_s \frac{x^{s-1}}{1 \cdot 2 \dots s-1}, \\ & - \left( S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} \right) \frac{d^2y}{dx^2} = (4\nu)^2 \sqrt{2\pi\nu} \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{s(s-1)(4\nu x)^{s-2}}{1 \cdot 2 \dots (2s+3)} - \sum_{s=1}^{s=\infty} S_s \frac{x^{s-2}}{1 \cdot 2 \dots s-2}. \end{aligned} \right\}$$

Il en résulte, pour  $x = 0$ ,

$$(92) \quad \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 = \frac{1}{3} \frac{3S_1 + \frac{1}{10} \sqrt{2\pi} \nu^{\frac{3}{2}}}{S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}}, \quad \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_0 = \frac{S_2 + \frac{2\sqrt{2\pi}}{315} \nu^{\frac{5}{2}}}{S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6}}.$$

Les valeurs de  $S_0$  et de  $S_1$ , en fonction du rapport  $\nu = \frac{n^2}{m}$ , sont données dans le Tableau suivant :

$\nu = \frac{n^2}{m}$	$S_0$	$S_1$	$\nu = \frac{n^2}{m}$	$S_0$	$S_1$	$\nu = \frac{n^2}{m}$	$S_0$	$S_1$
0,01..	-1,0006	0,33167	0,1...	-1,0056	0,31656	1.....	-1,0576	+0,15515
0,02..	1,0011	0,33000	0,2...	1,0112	0,29956	2.....	1,1185	-0,04714
0,03..	1,0017	0,32832	0,3...	1,0169	0,28232	3.....	1,1813	0,27488
0,04..	1,0022	0,32665	0,4...	1,0226	0,26486	4.....	1,2447	0,52844
0,05..	1,0028	0,32497	0,5...	1,0283	0,24718	5.....	1,3078	0,80752
0,06..	1,0033	0,32329	0,6...	1,0341	0,22922	6.....	1,3696	1,11124
0,07..	1,0039	0,32161	0,7...	1,0399	0,21109	7.....	1,4297	1,43854
0,08..	1,0045	0,31993	0,8...	1,0458	0,19267	8.....	1,4880	1,78814
0,09..	1,0050	0,31824	0,9...	1,0517	0,17406	9.....	1,5444	2,15892
0,10..	-1,0056	0,31656	1,0...	-1,0576	0,15515	10.....	-1,5991	-2,54979

Posant

$$S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} = \delta,$$

$$3S_1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{10} \nu^{\frac{3}{2}} = \Delta,$$

on a

$$(93) \quad \left(\frac{d\nu}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{3} \frac{\Delta}{\delta},$$

$\delta$  et  $\frac{\Delta}{\delta}$  sont fournis par les Tables suivantes :

$\nu = \frac{n^2}{m}$	$\delta$	$\frac{\Delta}{\delta}$	$\nu = \frac{n^2}{m}$	$\delta$	$\frac{\Delta}{\delta}$	$\nu = \frac{n^2}{m}$	$\delta$	$\frac{\Delta}{\delta}$
0,01..	-0,95878	-1,0380	0,1...	-0,87347	-1,0963	1....	-0,63984	-1,1192
0,02..	0,94203	1,0517	0,2...	0,82435	1,1173	2....	0,52764	1,0757
0,03..	0,92931	1,0513	0,3...	0,78805	1,1270	3....	0,45766	1,0441
0,04..	0,91866	1,0689	0,4...	0,75835	1,1314	4....	0,40919	1,0264
0,05..	0,90936	1,0752	0,5...	0,73290	1,1327	5....	0,37357	1,0172
0,06..	0,90091	1,0806	0,6...	0,71049	1,1318	6....	0,34623	1,0117
0,07..	0,89337	1,0852	0,7...	0,69039	1,1299	7....	0,32440	1,0071
0,08..	0,88629	1,0893	0,8...	0,67211	1,1268	8....	0,30637	1,0036
0,09..	0,87969	1,0930	0,9...	0,65535	1,1234	9....	0,29109	1,0000
0,10..	-0,87347	-1,0963	1,0...	-0,63984	-1,1192	10....	-0,27797	-0,9977

Il ressort de l'ensemble de ces nombres que  $y$  est une fonction

décroissante de  $x$ , dans le voisinage de  $x = 0$ ,  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$  étant négatif. Cette dérivée prend d'ailleurs sa plus grande valeur absolue pour  $\nu = \frac{1}{2}$ .

Telle est donc la condition pour que l'intensité décroisse le plus rapidement possible, dans le voisinage immédiat de  $x = 0$ , c'est-à-dire dans le voisinage immédiat du bord géométrique de l'image, quand on passe de l'intérieur à l'extérieur de ce bord.

D'autre part, d'après les formules (89), (82), (81), le rapport de l'intensité centrale  $I_0$  de l'image à l'intensité  $I_n$  au bord géométrique a pour valeur approchée,  $n$  étant élevé,

$$\frac{I_0}{I_n} = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{2 \left( S_0 + \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{10} \right) \sqrt{2\nu}},$$

avec une erreur relative de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{n}$ . Cette expression permet de calculer  $\frac{I_0}{I_n}$ . Elle conduit aux résultats suivants, en fonction du rapport  $\nu = \frac{n^2}{m^2}$ :

$\nu$	$\frac{I_0}{I_n}$	$\nu$	$\frac{I_0}{I_n}$	$\nu$	$\frac{I_0}{I_n}$
0,01.....	26	0,1.....	7,1	1.....	3,1
0,02.....	15	0,2.....	5,3	2.....	2,6
0,03.....	12	0,3.....	4,6	3.....	2,5
0,04.....	11	0,4.....	4,1	4.....	2,4
0,05.....	9,7	0,5.....	3,8	5.....	2,4
0,06.....	8,9	0,6.....	3,6	6.....	2,3
0,07.....	8,3	0,7.....	3,4	7.....	2,3
0,08.....	7,9	0,8.....	3,3	8.....	2,3
0,09.....	7,5	0,9.....	3,2	9.....	2,3
				10.....	2,2

Le second membre de la formule (90') est une fonction continue de  $x$ . Il s'ensuit que l'intensité lumineuse varie d'une façon continue, dans le voisinage du bord géométrique, et non brusquement. L'image, au foyer d'une lunette, par suite de la diffraction, n'est donc pas limitée par un bord nettement tranché. Cependant, comme

la variation de l'intensité est extrêmement rapide, quand on traverse le bord géométrique, la chute considérable de lumière, de l'intérieur à l'extérieur de ce bord, donne à l'observateur l'impression de l'existence d'un bord véritable, d'ailleurs mal défini au point de vue physique et auquel il est naturel de donner le nom de *bord optique*.

On vient de voir que la courbe figurant les variations de  $y$  possède, au point correspondant au bord géométrique, une tangente inclinée au maximum sur la partie négative de l'axe des abscisses, lorsque  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . Par suite, quand on passe d'un point intérieur à un point extérieur au bord géométrique, tous deux immédiatement voisins et à distances fixes de ce bord, la chute de l'intensité relative est aussi élevée que possible lorsque  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . On peut donc dire que le bord géométrique de l'image est défini le mieux possible, lorsque la largeur de la fente satisfait à cette égalité.

En conséquence, nous nous proposons d'étudier à fond, dans ce qui va suivre, les variations de  $y$ , dans l'hypothèse où  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . Nous nous bornerons à fournir ensuite de simples indications sur les courbes figurant ces variations, quand  $\frac{n^2}{m}$  possède d'autres valeurs.

Les formules qui ont fourni les résultats, inscrits dans les Tableaux ci-dessus, supposent essentiellement  $n$  suffisamment élevé. En conséquence, les nombres correspondant aux plus faibles valeurs de  $\nu$  n'ont de sens précis que si la longueur de la fente est assez grande pour qu'il en soit ainsi. A cet égard, à côté de termes contenant  $\frac{1}{m^2}$  en facteur, nous avons négligé, dans les formules (78), (79), (80), (80'), (81), (88), (88'), des termes de l'ordre de  $\frac{1}{8n^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi m}}$  (quand on les considère en dehors du voisinage du centre de l'image). Ce rapport ne dépasse pas  $\frac{1}{m^2}$ , lorsque  $\nu > \nu_1$ ,  $\nu_1$  ayant la valeur

$$\nu_1 = [(128\pi)^2 m]^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après la première formule (4), les valeurs de  $\nu_1$ , correspondant

à diverses valeurs de la longueur  $h$  de la fente, à  $\varepsilon = 16'$  et à  $\lambda = 0^{\mu},5$ , sont les suivantes :

$h$ .	$\rho$ .
<sup>m</sup> 2,50.....	0,04
1,50.....	0,04
1,00.....	0,04
0,80.....	0,04
0,60.....	0,04
0,40.....	0,05
0,30.....	0,05
0,20.....	0,05
0,10.....	0,06

## VIII.

ÉTUDE DES VARIATIONS DE  $y$  POUR  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ .

Dans ce qui va suivre, nous adopterons, comme valeur approchée du demi-diamètre solaire, le nombre  $\varepsilon = 16'$  et admettrons que les rayons, admis dans l'œil de l'observateur, ont pour longueur d'onde  $\lambda = 0^{\mu},5$ .

D'après les formules (4), les valeurs correspondantes de  $m$ ,  $n$  et de la largeur de la fente, en fonction de sa longueur, sont données dans le Tableau suivant, auquel on a joint le rapport  $\rho$  par lequel il faut multiplier la surface de la fente, pour avoir celle du cercle de diamètre égal à la longueur de la fente.

Longueur $h$ de la fente.	$m$ .	$n^2$ .	$n$ .	Largeur $a$ de la fente.	Surface de la fente.	$\rho$ .
<sup>m</sup> 2,50.....	73108,18	36554,09	191,19	<sup>mm</sup> 6,54	<sup>cm<sup>2</sup></sup> 163,5	300,3
1,50.....	43864,91	21932,46	148,10	5,06	75,9	232,6
1,00.....	29243,27	14621,64	120,92	4,13	41,3	189,9
0,80.....	23394,62	11697,31	108,15	3,70	29,6	169,9
0,60.....	17545,96	8772,98	93,66	3,20	19,2	147,1
0,40.....	11697,31	5848,66	76,47	2,61	10,4	120,1
0,30.....	8772,98	4386,49	66,23	2,26	6,8	104,0
0,20.....	5848,15	2924,33	54,08	1,85	3,7	84,9
0,10.....	2924,33	1462,17	38,24	1,31	1,3	60,1

D'après les nombres inscrits dans le Tableau situé en tête du paragraphe V, on a, pour  $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ ,

$$-S_0 \dots \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{6} = 0,73290,$$

$$V + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} = 0,69813.$$

Le premier membre de l'équation (89'), pour  $\nu = \frac{1}{2}$ , se réduit donc à  $\left(0,73290 - \frac{0,69813}{16m}\right)y$ . En négligeant le terme en  $\frac{1}{16m}$ , on commet sur  $y$ , d'après le Tableau ci-dessus, une erreur relative inférieure à  $\frac{1}{48000}$ , et par suite tout à fait insensible. Nous partirons, en conséquence, dans ce qui va suivre, de la relation

$$(94) \quad 0,73290y = \frac{m^2 K}{2\sqrt{2\pi m}},$$

K s'obtenant, suivant les cas, en faisant  $\nu = \frac{1}{2}$  dans les formules (78), (79) ou (80), (80') ou (88), (88').

Nous nous proposons d'appliquer cette formule, pour calculer les valeurs de  $y$  correspondant à différentes valeurs de  $x$ , à 0,001 près. Il y a plusieurs cas à considérer.

1<sup>o</sup> La détermination des valeurs de  $y$ , dans le voisinage du bord géométrique, c'est-à-dire pour des valeurs modérées de  $x$  ne dépassant pas 15 en valeur absolue, s'obtient en faisant  $\nu = \frac{1}{2}$  dans les relations (88), (88') et (94). Il convient, en vue de simplifier les calculs numériques, de développer les deux premières par rapport aux puissances du rapport  $\frac{x}{m}$ , qui y figure de différentes manières, et de se limiter au terme en  $\frac{1}{m}$ . La quantité négligée qui devient de beaucoup la plus importante, quand  $x$  atteint 15 en valeur absolue, se trouve dans le développement du second membre de la formule (88') : c'est le terme en  $\frac{1}{m^2}$  contenant  $E^{\sqrt{2x}}$  en facteur,

savoir :

$$\frac{\sqrt{\pi} E\sqrt{2x}}{512m^2} (9 + \sqrt{2x + 2x}).$$

Cette expression est minimum, pour  $x = 2,153\dots$ , entre  $x = 0$  et  $x = 15$ . Sa plus grande valeur absolue correspond à  $x = 15$  et à la plus petite valeur de  $m$  inscrite dans le Tableau en tête du paragraphe VIII, savoir :  $m = 2924,33$ . Or on trouve qu'elle ne dépasse pas 0,000038, quantité totalement négligeable, vu l'ordre d'approximation dont on a besoin, et qui devient bien plus petite encore, quand on se sert d'une lunette d'ouverture supérieure  $0^m,10$  à laquelle correspond la valeur de  $m$  introduite dans le calcul ci-dessus.

Le développement des formules (88), (88') et (89'), effectuées comme on vient de le dire, conduisent aux expressions suivantes, pour  $x < 0$  :

$$\begin{aligned} (95) \quad & - \left( S_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \right) y \\ & = 0,73290y \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \left[ 1 + \frac{\sin \sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}} \right] - \sum_{s=0}^{s=\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \\ & \quad - \frac{1}{16m} \left[ \sqrt{\pi} \left( 2 + \frac{\sin \sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}} + \cos \sqrt{-2x} \right) + \sum_{s=0}^{s=\infty} T_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \right] \end{aligned}$$

et, pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} (96) \quad & - \left( S_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \right) y \\ & = 0,73290y \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \left[ 1 - \frac{E\sqrt{2x} - E^{-\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}} \right] - \sum_{s=0}^{s=\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \\ & \quad - \frac{1}{16m} \left[ \sqrt{\pi} \left( 2 + \frac{E\sqrt{2x} - E^{-\sqrt{2x}}}{2\sqrt{2x}} + \frac{E\sqrt{2x} + E^{-\sqrt{2x}}}{2} \right) + \sum_{s=0}^{s=\infty} T_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)} \right], \end{aligned}$$

$S_s$  et  $T_s$  représentant les séries définies par les formules (86), en y faisant  $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ .

Ces relations donnent naturellement  $y = 1$ , pour  $x = 0$ , c'est-à-dire au bord géométrique, quand on néglige le terme en  $\frac{1}{16m}$  qui est alors absolument insensible. On verra du reste que ces termes en  $\frac{1}{16m}$  sont négligeables pour toutes les valeurs de  $x$  qui ne dépassent pas 15 en valeur absolue, c'est-à-dire entre les limites d'emploi des formules (95) et (96).

2° Au delà de  $|x| = 15$ , on doit pratiquement renoncer à employer les formules (95) et (96), en raison de la complication des calculs numériques qu'elles entraîneraient. Il convient alors de partir des formules (78) et (79), dont l'approximation est d'autant meilleure que  $|x|$  est plus grand. Or elles fournissent déjà, pour  $|x| = 15$ , comme on le verra plus loin, exactement les mêmes résultats que les formules (95) et (96). Considérons d'abord le cas où  $x < -15$ . Posant

$$q = \sqrt{-x \left( 2 + \frac{x}{2m} \right)},$$

$$v \approx \frac{1}{0,73290} = \frac{\left( 1,240 - \frac{4,575}{x} \right) \cos x + \left( 1,465 - \frac{3,456}{x} \right) \sin x}{4x^2},$$

et négligeant, dans la formule (78), le terme  $-\frac{1}{2m \left( 2 + \frac{x}{2m} \right)} \frac{\sin q}{q}$

qui introduit dans  $y$  un appoint inférieur à  $\frac{1}{40000}$ , même lorsque  $m$  reçoit la plus faible valeur inscrite dans le Tableau du paragraphe VIII,  $q$  étant supérieur à 5, on obtient

$$(95') \quad y = 2,41841 \left[ -\frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{\sin q}{q} \right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz \right] \dots$$

Cette formule se raccorde d'ailleurs exactement avec la formule (95), pour  $x = -15$ . Tandis que, pour cette valeur, la formule (95) donne  $y = 3,3300$ , la formule (95') fournit  $y = 3,3299$ . Les résultats s'accordent à 0,0001 près, tandis que l'approximation demandée est de 0,001.

Les variations du terme très petit  $v$  provoquent des sinuosités de période  $2\pi$ , dans la courbe représentative de  $y$ , qui vont rapide-

ment en s'amortissant quand  $x$  diminue à partir de  $-\infty$ . Le terme principal qui dépend de la fonction

$$F(q) = -\frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{\sin q}{q} \right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz$$

croît avec  $q$ . C'est, par conséquent, une fonction décroissante de  $x$  pour  $x < -\infty$ . On a, en effet, les inégalités

$$F'(q) = \frac{3}{q^4} \sin q + \frac{2 + \cos q}{q^3} + \frac{1 - \cos q}{q^2} > \frac{3}{q^4} + \frac{1}{q^3} > 0, \quad \text{pour } q > 3.$$

Or  $q$  est déjà supérieur à 5 pour  $x = -\infty$ .

D'autre part,

$$F''(q) = \frac{1}{q^2} \left[ \frac{12}{q^3} \sin q - 6 \frac{1 + \cos q}{q^2} - \frac{\sin q + 2(1 - \cos q)}{q} + \sin q \right].$$

Or, en s'appuyant sur ce que l'équation  $q^3 - 3q^2 - 6q + 12 = 0$  a deux racines réelles positives, l'une comprise entre 1 et  $\frac{\pi}{2}$ , et la seconde entre 3 et 4, on trouve que  $K$  désignant un entier positif quelconque supérieur à 1, on a

$$F''(2K\pi) < 0, \quad F''\left(2K\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad F''(2K\pi + \pi) < 0.$$

L'équation  $F''(q) = 0$  a donc deux séries de racines positives auxquelles correspondent des points d'inflexion pour  $y$ . La courbe représentant  $y$  possède donc, pour  $x < 0$ , une infinité de sinuosités plus espacées que celles provenant du terme  $v$ ,  $q$  croissant beaucoup moins rapidement que  $x$ . Ces sinuosités sont d'ailleurs de faible amplitude et exigeraient, pour être mises graphiquement en évidence, l'emploi d'une échelle d'ordonnées fortement surélevées par rapport à celle des abscisses. Mais leur existence exerce une influence très nette sur l'allure des valeurs numériques de  $y$ , résumées dans un Tableau inséré plus loin.

La formule (65) donne l'expression approchée suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos qz}{qz^2} dz = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{q} + \frac{2}{q^3} \cos q - \frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{6}{q^2} \right) \sin q,$$

d'autant plus exacte que  $q$  est plus grand. Elle conduit pour  $y$  à

la formule

$$(95'') \quad y = 2,41841 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{q} \left( 1 + \frac{1}{q} - \frac{2}{q^2} \cos q \right) - \frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{1}{q} - \frac{6}{q^2} \right) \sin q \right] + \nu,$$

d'autant meilleure que  $q$  est plus élevé et qui peut être employée avec une sécurité parfaite, pour  $x < -20\pi$ .

C'est ce qui résulte de la comparaison des valeurs de  $y$  obtenues en partant des formules (95') et (95''), pour diverses valeurs de  $x$  :

$x$ .	Formules	
	(95').	(95'').
$-6\pi$ .....	$y = 3,3650$	3,3687
$-8\pi$ .....	3,3914	3,3939
$-10\pi$ .....	3,4244	3,4250
$-12\pi$ .....	3,4659	3,4656
$-14\pi$ .....	3,5074	3,5068
$-16\pi$ .....	3,5416	3,5412
$-18\pi$ .....	3,5660	3,5658
$-20\pi$ .....	3,5809	3,5809

L'exactitude des nombres fournis pour la formule approchée (95'), pour  $x < -20\pi$ , dépasse certainement 0,001, limite à laquelle s'arrête l'approximation demandée.

Ces formules ont été utilisées, pour obtenir les valeurs de  $y$  correspondant à des valeurs de  $x$ , échelonnées entre  $-15$  et  $-100\pi$ . Pour simplifier les opérations, l'ensemble des termes dépendant de  $q$  a été calculé comme il suit. On a d'abord calculé ces termes en prenant  $q = \sqrt{-2x}$ , comme si  $m$  était infini, c'est-à-dire comme si la longueur de fente était infinie. La véritable valeur de  $q$  pouvant s'écrire  $q = \sqrt{-2\left(x + \frac{x^2}{4m}\right)}$ , on a ensuite interpolé entre les nombres obtenus, pour avoir les valeurs correspondant à  $q = \sqrt{-2X}$ , en faisant  $X = x + \frac{x^2}{4m}$ . Or, en procédant ainsi, on arrive à ce résultat intéressant que les corrections à appliquer aux nombres obtenus, en supposant la fente de longueur infinie, ne dépassent pas 0,001 à 0,002, même lorsque la fente a une longueur descendant à  $0^m,10$ . Les corrections sont d'ailleurs nulles, pour des fentes de longueurs dépassant  $0^m,30$ . Il n'y a donc

pratiquement pas lieu de tenir compte de ces corrections. Il en résulte que la courbe figurant les variations de  $y$ , pour  $-100\pi < x < 0$ , est pratiquement la même pour toutes les longueurs de fente supérieures à  $0^m,10$ . Nous avons déjà dit, en effet, que cette circonstance se présente aussi lorsque  $x$  est compris entre 0 et  $-15$ . Elle existe également, comme on va le voir, pour  $x > 0$ . Mais il convient d'ajouter qu'il n'en serait plus tout à fait de même, si l'approximation demandée pour  $y$ , au lieu d'atteindre 0,001, était poussée jusqu'à 0,0001.

Pour les valeurs positives de  $x$  supérieures à 15, il convient, pour calculer  $y$ , de partir des relations (94) et (79) en y faisant  $\nu = \frac{1}{2}$ . Pour la même raison que tout à l'heure, en posant

$$q = \sqrt{x \left( 2 + \frac{x}{2m} \right)},$$

cette relation peut se ramener, en négligeant un terme insensible, à la forme simple

$$(95') \quad y = 2,41841 \frac{1}{q^2} \left[ 1 + \frac{E^{-q} - 1}{q} \right] + \nu.$$

$\nu$  ayant la même signification que dans la formule (95').

La courbe représentant  $y$  possède des sinuosités qui s'amortissent rapidement, à cause de la présence du terme  $\nu$  dans le second membre. Leur période est égale à  $2\pi$ . Les sinuosités de la seconde catégorie, dont il a été question tout à l'heure, n'existent plus dans le cas actuel.

La formule (96') s'accorde exactement avec la formule (96) pour  $x = 15$ . Toutes deux fournissent, pour  $y$ , la valeur  $y = 0,0664$ . L'accord se manifeste jusqu'à 0,0001, tandis qu'il eût suffi d'une approximation atteignant 0,001.

La formule (96') peut être remplacée par la suivante :

$$(96'') \quad y = 2,41841 \frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{1}{q} \right) + \nu,$$

en négligeant le terme en  $\frac{E^{-q}}{q^3}$  inférieur à  $4 \times 10^{-6}$  pour  $x > 15$ .

Par ailleurs, on peut remplacer, dans l'expression de  $y$ ,  $q$  par

$Q = \sqrt{2x}$ ; on a, en effet,

$$q = Q \left( 1 + \frac{Q^2}{8m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $x < 100\pi$ ,  $\frac{Q^2}{8m}$  est inférieur à  $\frac{1}{37}$ , même pour la plus petite valeur 2924,33, de  $m$  inscrite dans le Tableau du paragraphe VIII.  $\frac{1}{q^2}$  et  $\frac{1}{q^3}$  sont donc développables en séries très convergentes et l'on a

$$\frac{1}{q^2} \left( 1 - \frac{1}{q} \right) = \frac{1}{Q^2} \left( 1 - \frac{1}{Q} \right) - \frac{1}{16m} \left( 2 - \frac{3}{Q} \right) + \dots$$

Cette expression montre que, dans le cas le plus défavorable où  $m = 2924,33$ , l'erreur commise sur  $y$ , en remplaçant  $q$  par  $Q$ , n'atteint pas  $\frac{1}{20000}$ .

$q$  augmentant avec  $x$  et étant supérieur à 5, pour  $x = 15$ , la formule (96'') montre que  $y$  est une fonction décroissante de  $x$ , au delà de cette valeur, tout au moins quand on fait abstraction du terme très petit  $v$  qui s'amortit rapidement lorsque  $x$  augmente.

Les formules (95), (95'), (95'') et (96), (96'), (96'') ont été mises en nombre, en faisant usage tantôt de logarithmes, tantôt d'une machine à calculer, à onze colonnes, permettant d'obtenir des résultats avec un grand nombre de chiffres exacts. C'est par le second moyen qu'ont été trouvées les sommes des séries  $S_s$  et  $T_s$ , avec huit chiffres significatifs dont le dernier seul comporte une incertitude de 1 à 2 unités. Cette approximation était nécessaire afin de pouvoir calculer la série  $S = \sum_{s=0}^{\infty} S_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}$  et la série  $T = \sum_{s=0}^{\infty} T_s \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}$  pour toutes les valeurs de  $x$  moindres que 15 en valeurs absolues.

Il arrive, en effet, que quelques termes de ces dernières séries, assez grands pour certaines valeurs de  $x$ , se détruisent presque totalement. Ce sont seulement les dernières décimales, figurant dans ces termes, qui apportent des appoints aux sommes  $S$  et  $T$ . En raison de la longueur et de la complication des calculs, toutes les opérations ont été exécutées deux fois d'une façon indépendante. Leur exactitude a ainsi été contrôlée avec certitude.

Les Tableaux numériques suivants fournissent les principaux résultats du calcul :

Valeurs des fonctions  $S_s$  pour  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ :

$$S_s = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos(p-s)\frac{\pi}{2} + \sin(p-s)\frac{\pi}{2}}{(2p-1)(2p-2s-3)(2p-2s-1)\Gamma(p+1)} \left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}$$

$s.$	$S_s.$	$s.$	$S_s.$
0.....	-1,028 311 2	20.....	+0,000 561 901 90
1.....	+0,247 174 333	21.....	+0,000 613 634 99
2.....	-0,047 473 979	22.....	-0,000 464 873 04
3.....	-0,032 112 800	23.....	-0,000 510 730 38
4.....	+0,013 125 324	24.....	+0,000 390 963 83
5.....	+0,011 151 327	25.....	+0,000 432 655 23
6.....	-0,006 043 025 1	26.....	-0,000 333 375 49
7.....	-0,005 616 820 3	27.....	-0,000 370 254 61
8.....	+0,003 444 252 4	28.....	+0,000 287 629 41
9.....	+0,003 375 474 1	29.....	+0,000 320 825 87
10.....	-0,002 219 765 1	30.....	-0,000 250 692 33
11.....	-0,002 250 853 1	31.....	-0,000 280 673 86
12.....	+0,001 548 220 8	32.....	+0,000 220 438 61
13.....	-0,001 607 484 3	33.....	+0,000 247 614 36
14.....	-0,001 140 862 1	34.....	-0,000 195 348 11
15.....	-0,001 205 264 6	35.....	-0,000 220 069 98
16.....	+0,000 875 372 88	36.....	+0,000 174 309 48
17.....	+0,000 937 132 89	37.....	+0,000 196 878 82
18.....	-0,000 692 800 04	38.....	-0,000 156 495 08
19.....	-0,000 749 477 47	39.....	-0,000 177 169 56
		40.....	+0,000 141 278 25

Somme de la série  $S = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{S_s}{\Gamma(s+1)} x^s$  pour  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ .

$x.$	$S.$	$x.$	$S.$
0.....	-1,028 31	0.....	-1,028 31
1.....	-1,293 42	1.....	-0,809 60
2.....	-1,356 48	2.....	-0,660 67
3.....	-1,569 39	3.....	-0,585 92
4.....	-1,820 56	4.....	-0,572 21
5.....	-2,022 73	5.....	-0,597 06
6.....	-2,168 82	6.....	-0,639 17
7.....	-2,266 95	7.....	-0,685 51
8.....	-2,332 55	8.....	-0,732 93
9.....	-2,380 39	9.....	-0,784 63
10.....	-2,418 97	10.....	-0,844 95
11.....	-2,450 63	11.....	-0,915 71
12.....	-2,474 49	12.....	-0,995 94
13.....	-2,490 00	13.....	-1,083 65
14.....	-2,498 77	14.....	-1,177 86
15.....	-2,503 76	15.....	-1,279 58
16.....	-2,507 41		

Valeurs des fonctions  $T_s$  pour  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ :

$$T_s = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos(p-s)\frac{\pi}{2} - \sin(p-s)\frac{\pi}{2}}{[4(p-s)^2 - 1] \Gamma(p+1)} (2p+1) \left(\frac{n^2}{m}\right)^{p-1}.$$

s.	$T_s$ .	s.	$T_s$ .
0.....	-1,074 317 52	20.....	-0,002 752 925 9
1.....	-3,434 686 89	21.....	+0,000 830 199 6
2.....	-0,350 175 06	22.....	+0,002 250 517 7
3.....	-0,090 990 11	23.....	-0,000 695 341 7
4.....	-0,120 646 354	24.....	-0,001 874 044 3
5.....	+0,002 165 070	25.....	+0,000 590 647 4
6.....	+0,040 015 738	26.....	+0,001 584 689 9
7.....	-0,005 303 894	27.....	-0,000 507 808 7
8.....	-0,020 624 866	28.....	-0,001 357 513 3
9.....	+0,003 860 914	29.....	+0,000 441 172 93
10.....	+0,012 431 697 5	30.....	+0,001 175 899 74
11.....	-0,002 779 152 9	31.....	-0,000 386 793 19
12.....	-0,008 290 006 4	32.....	-0,001 028 432 76
13.....	+0,002 062 813 8	33.....	+0,000 341 849 56
14.....	+0,005 916 702 4	34.....	+0,000 907 060 15
15.....	-0,001 581 816 7	35.....	-0,000 304 285 78
16.....	-0,004 432 964 7	36.....	-0,000 805 970 12
17.....	+0,001 247 752 8	37.....	+0,000 272 574 75
18.....	+0,003 444 363 5	38.....	+0,000 720 883 15
19.....	-0,001 007 790 7	39.....	-0,000 245 563 84

Somme de la série  $T = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{T_s}{\Gamma(s+1)} x^s.$

x.	T.	x.	T.
0.....	- 1,07	0.....	- 1,07
- 1.....	+ 2,19	1.....	- 4,71
- 2.....	+ 5,14	2.....	- 8,84
- 3.....	+ 7,15	3.....	- 13,19
- 4.....	+ 9,75	4.....	- 19,67
- 5.....	+ 11,18	5.....	- 26,96
- 6.....	+ 11,94	6.....	- 35,98
- 7.....	+ 12,09	7.....	- 46,91
- 8.....	+ 11,74	8.....	- 60,02
- 9.....	+ 10,93	9.....	- 75,77
- 10.....	+ 9,82	10.....	- 94,52
- 11.....	+ 8,46	11.....	- 116,70
- 12.....	+ 7,09	12.....	- 142,81
- 13.....	+ 5,68	13.....	- 173,30
- 14.....	+ 4,27	14.....	- 208,99
- 15.....	+ 2,97	15.....	- 250,35

Valeurs de la fonction

$$f_1 = \frac{1}{2x} + \frac{1}{(2x)^{\frac{3}{2}}} \frac{E^{-\sqrt{2x}} - E^{\sqrt{2x}}}{2}$$

x.	f <sub>1</sub> .
0.....	-0,166 67
1.....	-0,184 14
2.....	-0,203 36
3.....	-0,224 45
4.....	-0,247 55
5.....	-0,272 87
6.....	-0,300 56
7.....	-0,330 84
8.....	-0,363 90
9.....	-0,399 98
10.....	-0,439 32
11.....	-0,482 17
12.....	-0,528 79
13.....	-0,579 51
14.....	-0,634 63
15.....	-0,694 46

Valeurs de

$$P = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \cos \sqrt{-2xz}}{-2xz^2} dz.$$

x.	P.
-15.....	+0,258 44
-6π.....	+0,230 97
-8π.....	+0,200 28
-10π.....	+0,180 37
-12π.....	+0,166 44
-14π.....	+0,155 83
-16π.....	+0,147 10
-18π.....	+0,139 55
-20π.....	+0,132 86

Valeurs de la fonction

$$f_2 = \frac{1}{2x} + \frac{\sin \sqrt{-2x}}{(-2x)^{\frac{3}{2}}}$$

x.	f <sub>2</sub> .
0.....	-0,166 67
-1.....	-0,150 78
-1,227.....	-0,147 35
-2.....	-0,136 34
-3.....	-0,122 93
-4.....	-0,111 38
-5.....	-0,100 65
-6.....	-0,090 95
-7.....	-0,082 21
-8.....	-0,074 33
-9.....	-0,067 24
-10.....	-0,060 86
-11.....	-0,055 14
-12.....	-0,050 63
-13.....	-0,045 45
-14.....	-0,042 83
-15.....	-0,037 72
-6π.....	-0,027 15
8π.....	-0,017 87
-10π.....	-0,013 92
-12π.....	-0,012 23
-14π.....	-0,011 31
-16π.....	-0,010 51
-18π.....	-0,009 62
-20π.....	-0,008 65

Valeurs du terme v figurant dans les formules (95'), (95''), (96'), (96'').

x.	v.	x.	v.
15.....	+0,0004	-15.....	-0,0022
16.....	-0,0014	-6π.....	+0,0010
17.....	-0,0016	-8π.....	0,0006
18.....	-0,0005	-10π.....	0,0004
6π.....	+0,0007	-12π.....	0,0002
8π.....	0,0004	-14π.....	0,0002
10π.....	0,0003	-16π.....	0,0001
12π.....	0,0002	-18π.....	0,0001
14π.....	0,0001	-20π.....	0,0001
16π.....	0,0001	-24π.....	0,0001
18π.....	0,0001	-28π.....	+0,0000
20π.....	0,0001		
24π.....	0,0001		
28π.....	+0,0000		

Coefficients de  $-\frac{1}{16m}$  dans les formules (95) et (96).

$x$ .		$x$ .	
-15.....	7,51	0.....	6,02
-14.....	8,50	1.....	4,06
-13.....	9,57	2.....	3,03
-12.....	10,61	3.....	2,80
-11.....	11,59	4.....	1,58
-10.....	12,56	5.....	0,87
-9.....	13,30	6.....	-0,01
-8.....	13,79	7.....	-0,98
-7.....	13,90	8.....	-2,03
-6.....	13,64	9.....	-3,27
-5.....	12,94	10.....	-4,71
-4.....	11,80	11.....	-6,35
-3.....	9,80	12.....	-8,24
-2.....	8,75	13.....	-10,30
-1.....	7,25	14.....	-12,77
		15.....	-15,49

D'après ce dernier Tableau et celui inscrit en tête du paragraphe VIII, les termes en  $\frac{1}{16m}$  des formules (95) et (96) fournissent, pour  $y$ , des appoints inférieurs à un demi-millième, même dans le cas le plus défavorable correspondant à une fente de  $0^m,10$  de longueur et à  $|x| = 15$ . Ils sont donc toujours négligeables.

Les formules (92) donnent, pour  $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ , d'après le Tableau des valeurs de la fonction  $S_s$ ,

$$(97) \quad \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -0,377\,561, \\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = 0,060\,936\,7. \end{cases}$$

Ces formules montrent que  $y$  est une fonction décroissante de  $x$ , dans le voisinage de  $x = 0$ , et que la concavité de la courbe est alors tournée vers les  $y$  positives. Le rayon de courbure, pour  $x = 0$ , est d'ailleurs égal à  $20,0417$  unités graphiques. En raison de sa grandeur, il y a lieu de penser que la courbe représentant  $y$  possède un point d'inflexion, correspondant à une abscisse de valeur peu élevée. Or, en substituant les valeurs  $x = -1$  et  $x = -2$ , dans la série (91) fournissant  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , on trouve, pour  $\nu = \frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ :

Pour  $x = -1$ ,

$$0,732\,902 \frac{d^2y}{dx^2} = 0,008\,520\,6;$$

Pour  $x = -2$ ,

$$0,732902 \frac{d^2 y}{dx^2} = -0,0271901.$$

La dérivée seconde  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  a donc une racine, comprise entre  $x = -1$  et  $x = -2$ , dont la valeur se trouve par interpolation. On arrive, tous calculs faits, aux valeurs suivantes des coordonnées du point d'inflexion et du coefficient angulaire de la tangente en ce point :

$$(98) \quad x = -1,2270\dots \quad y = 1,4944\dots \quad \frac{dy}{dx} = -0,41566\dots$$

$$\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}. \text{ Valeurs de } y.$$

$x.$	$y.$	$x.$	$y.$	$x.$	$y.$
-100π.....	3,699	-12.....	3,276	17.....	0,057
-96π.....	3,699	-11.....	3,243	18.....	0,055
-92π.....	3,698	-10.....	3,197	6π.....	0,054
-88π.....	3,696	-9.....	3,138	8π.....	0,042
-84π.....	3,692	-8.....	3,068	10π.....	0,034
-80π.....	3,688	-7.....	2,984	12π.....	0,029
-76π.....	3,682	-6.....	2,873	14π.....	0,025
-72π.....	3,676	-5.....	2,716	16π.....	0,022
-68π.....	3,671	-4.....	2,491	18π.....	0,0195,
-64π.....	3,667	-3.....	2,187	20π.....	0,0176
-60π.....	3,665	-2.....	1,812	24π.....	0,0148
-56π.....	3,664	-1.....	1,494 <sup>(1)</sup>	28π.....	0,0127
-52π.....	3,663	0.....	1,000 <sup>(2)</sup>	32π.....	0,0112
-48π.....	3,659	1.....	0,659	36π.....	0,0100
-44π.....	3,651	2.....	0,410	40π.....	0,0090
-40π.....	3,637	3.....	0,257	44π.....	0,0082
-36π.....	3,620	4.....	0,182	48π.....	0,0076
-32π.....	3,605	5.....	0,155	52π.....	0,0070
-28π.....	3,597	6.....	0,145	56π.....	0,0065
-24π.....	3,592	7.....	0,135	60π.....	0,0061
-20π.....	3,581	8.....	0,120	64π.....	0,0057
-18π.....	3,566	9.....	0,103	68π.....	0,0054
-16π.....	3,542	10.....	0,090	72π.....	0,0051
-14π.....	3,507	11.....	0,083	76π.....	0,0048
-12π.....	3,466	12.....	0,080	80π.....	0,0046
-10π.....	3,424	13.....	0,077	84π.....	0,0044
-8π.....	3,391	14.....	0,072	88π.....	0,0042
-6π.....	3,365	15.....	0,066	92π.....	0,0040
-15.....	3,330	16.....	0,061	96π.....	0,0039
-14.....	3,313			100π.....	0,0037
-13.....	3,300				

(<sup>1</sup>) Inflexion :  $\frac{dy}{dx} = -0,4157.$

(<sup>2</sup>) Bord géométrique :  $\frac{dy}{dx} = -0,3776.$

Il convient, pour représenter graphiquement les variations de l'intensité relative  $y$ , en partant des nombres inscrits dans les Tableaux ci-dessus, de changer de variable indépendante en posant

$$(99) \quad \xi = \frac{x}{2\pi}$$

et de prendre  $\xi$  comme abscisse. L'avantage résultant de ce changement consiste en ce que l'unité d'abscisse possède alors une signification physique simple. Elle représente le pouvoir séparateur de la lunette d'observation utilisée avec une ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. C'est ce qui résulte des formules (77) et (4) qui donnent

$$\xi = \frac{h}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \varepsilon) = \frac{h}{\lambda} \left[ (\varphi - \varepsilon) \cos \varepsilon - \frac{1}{2} (\varphi - \varepsilon)^2 \sin^2 \varepsilon + \dots \right];$$

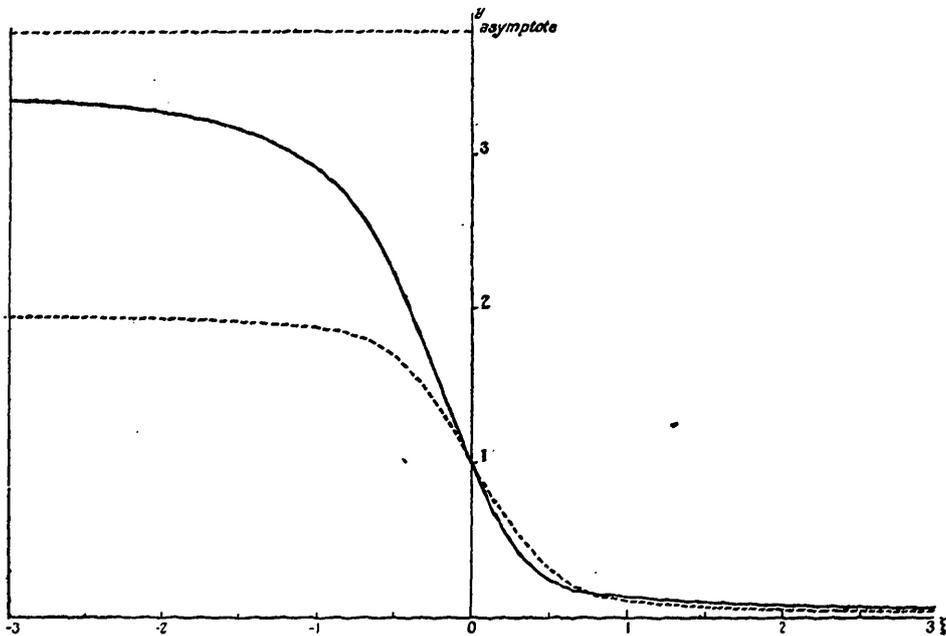
$\cos \varepsilon$  étant pratiquement égal à 1, on voit que  $\xi$  varie de 1 lorsque la très faible distance angulaire  $\varphi - \varepsilon$  au bord géométrique varie de  $\frac{\lambda}{h}$ , c'est-à-dire d'une quantité égale au pouvoir séparateur d'une lunette non diaphragmée dont l'objectif a pour diamètre la longueur  $h$  de la fente.

Les valeurs de  $\xi$  correspondant aux valeurs de  $x$ , considérées dans les Tableaux numériques ci-dessus, sont les suivantes :

$x$ .	$\xi$ .	$x$ .	$\xi$ .
0.....	0,000	14.....	2,228
1.....	0,159	15.....	2,387
1,227.....	0,195	16.....	2,546
2.....	0,318	17.....	2,706
3.....	0,477	18.....	2,865
4.....	0,637	6 $\pi$ .....	3,000
5.....	0,796	8 $\pi$ .....	4,000
6.....	0,955	10 $\pi$ .....	5,000
7.....	1,114	12 $\pi$ .....	6,000
8.....	1,273	14 $\pi$ .....	7,000
9.....	1,432	16 $\pi$ .....	8,000
10.....	1,591	18 $\pi$ .....	9,000
11.....	1,750	20 $\pi$ .....	10,000
12.....	1,910	.....	.....
13.....	2,069	100 $\pi$ .....	50,000

L'identité  $\frac{dy}{d\xi} = 2\pi \frac{dy}{dx}$  permet de calculer la dérivée de  $y$ , par rapport à  $\xi$ , connaissant la dérivée de  $y$ , par rapport à  $x$ . Aux valeurs (97) et (98) de  $\frac{dy}{dx} = -0,3776$ , pour  $x = 0$ , et  $\frac{dy}{dx} = -0,4157$ , pour  $x = -1,227$ , correspondent donc  $\frac{dy}{d\xi} = -2,3723$ , pour  $\xi = 0$ , et  $\frac{dy}{d\xi} = -2,6117$ , pour  $\xi = -0,195$ . La dérivée seconde  $\left(\frac{d^2y}{d\xi^2}\right)_{\xi=0}$  a de même pour valeur  $0,060937 \times 4\pi^2 = 2,4056$ . On en conclut que le rayon de courbure au point ( $\xi = 0, y = 1$ ) de la courbe a pour valeur 7,09. La courbe en trait plein (fig. 25) représente

Fig. 25.



les variations de l'intensité relative  $y$ , quand  $\xi$  varie entre  $-3$  et  $+3$ , l'intensité au bord géométrique étant prise comme unité. Sur la même figure, est tracée, en trait pointillé, une courbe représentant les variations d'intensité, au voisinage du bord géométrique solaire, dans le cas d'une lunette d'ouverture circulaire de

diamètre égal à la longueur de la fente. Cette courbe a été tracée en prenant comme point de départ la Table de Struve (1). Cette Table ayant été dressée, en prenant l'intensité au bord géométrique égale à  $\frac{1}{2}$ , tous les nombres doivent être doublés quand on prend cette intensité pour unité, comme nous l'avons fait. Adoptant comme argument la variable  $\xi$ , définie ci-dessus, au lieu de  $\pi \frac{h}{\lambda} (\varphi - \varepsilon)$  employé dans la Table de Struve, on a les valeurs suivantes pour l'intensité relative, quand on prend comme unité l'intensité au bord géométrique :

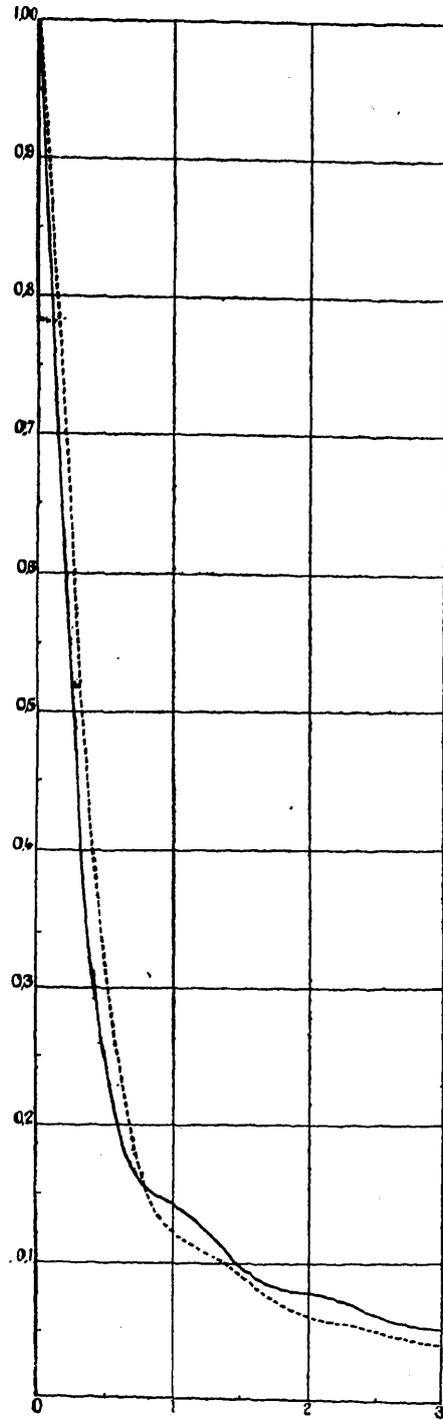
$\xi$ .	Intensité relative.	$\xi$ .	Intensité relative.	$\xi$ .	Intensité relative.
0,000.....	1,0000	0,955.....	0,1260	1,910.....	0,0656
0,0637.....	0,8922	1,019.....	0,1204	1,974.....	0,0638
0,127.....	0,7868	1,082.....	0,1162	2,037.....	0,0622
0,191.....	0,6856	1,146.....	0,1128	2,101.....	0,0610
0,255.....	0,5910	1,210.....	0,1094	2,165.....	0,0598
0,318.....	0,5042	1,273.....	0,1056	2,228.....	0,0586
0,382.....	0,4264	1,337.....	0,1012	2,292.....	0,0560
0,446.....	0,3586	1,401.....	0,0968	2,355.....	0,0528
0,509.....	0,3008	1,464.....	0,0918	2,410.....	0,0496
0,573.....	0,2530	1,528.....	0,0868	2,474.....	0,0466
0,637.....	0,2146	1,592.....	0,0820	2,537.....	0,0444
0,700.....	0,1846	1,655.....	0,0778	2,601.....	0,0426
0,764.....	0,1620	1,719.....	0,0738	2,665.....	0,0412
0,828.....	0,1456	1,783.....	0,0706	2,729.....	0,0400
0,891.....	0,1340	1,846.....	0,0678		

Les valeurs de l'intensité, pour les valeurs négatives de  $\xi$ , s'obtiennent en retranchant de 2 les nombres de la Table correspondant aux valeurs absolues de  $\xi$ .

Sur la figure 25, la même unité graphique a été adoptée pour les ordonnées et les abscisses. La figure 26 a été tracée en prenant, pour les ordonnées, une unité graphique dix fois supérieure à celle des abscisses et en considérant seulement les variations de l'intensité relative, pour  $\xi$  positif, c'est-à-dire à l'extérieur du bord géométrique. Cette figure met en évidence des sinuosités invisibles

(1) ANDRÉ, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. I, p. 34.

Fig. 26.



sur la figure 25. La courbe en trait plein se rapporte à la fente et la courbe en pointillé à une ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente, comme dans le cas de la figure 25.

La courbe de la figure 25, comme on l'a déjà dit, est pratiquement indépendante de la longueur de la fente. Cette longueur n'intervient que dans la signification de l'unité de l'échelle des abscisses qui représente le pouvoir séparateur  $\frac{\lambda}{2 \sin i}$  d'une lunette d'ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. D'ailleurs, la condition  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$  assujettissant la largeur de la fente à ne pas dépasser quelques millimètres (voir le Tableau numérique en tête du paragraphe VIII), on peut prendre pratiquement, comme longueur de la fente, le diamètre même de l'objectif de la lunette. L'unité d'abscisse correspond alors à 1'' pour une lunette de 0<sup>m</sup>,10 d'ouverture, à 0'',5 pour une lunette de 0<sup>m</sup>,20, à 0'',2 pour une lunette de 0<sup>m</sup>,50, à 0'',1 pour une lunette de 1<sup>m</sup>,00, à 0'',04 pour une ouverture de 2<sup>m</sup>,50, etc., dans le cas où la longueur d'onde des radiations, admises dans l'œil, a pour valeur  $\lambda = 0^{\mu},5$ .

La figure 25 met en pleine évidence le fait que l'intensité lumineuse, dans le voisinage immédiat du bord géométrique qui correspond à l'abscisse  $\xi = 0$ , varie plus rapidement, lorsque l'accès de la lumière, dans la lunette d'observation, est limité par la fente, qu'en employant l'instrument avec une ouverture circulaire de diamètre égal à la longueur de la fente. En passant de l'abscisse  $\xi = -1$  à l'abscisse  $\xi = +1$ , l'intensité est en effet réduite dans le rapport  $\frac{1}{20}$ , dans le premier cas, tandis qu'elle diminue dans le rapport  $\frac{1}{15}$ , dans le second. Le bord optique, observable dans la lunette, est donc plus nettement tranché, en diaphragmant l'objectif par la fente, qu'en utilisant sa surface entière. Ce bord se prête en conséquence à des points plus précis, dans le premier cas que dans le second.

Le bord optique n'étant pas susceptible de définition physique, on peut se demander sur quel point de l'image l'observateur porte

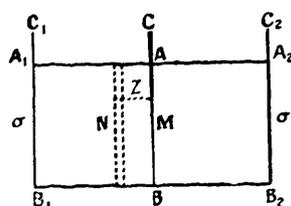
ses pointés micrométriques. La réponse exacte à cette question ne peut être fournie que par l'expérience et l'on peut concevoir, dans ce but, des dispositifs aptes à fournir des données répondant aux besoins des observations. Cependant, il est admissible, *a priori*, que l'observateur doive avoir une tendance à fixer son attention sur la région du bord optique où le contraste est maximum. Ce point, on va l'établir, est situé extérieurement au bord géométrique, à une très faible distance angulaire de ce bord. Or le maximum est plus grand en faisant usage de la fente qu'en utilisant la surface entière de l'objectif; de plus, quand on se déplace normalement au bord géométrique, les variations du contraste, autour du maximum, sont plus élevées dans le premier cas que dans le second. L'observateur, s'il est porté à pointer le point de contraste maximum, fera donc les mesures les plus concordantes dans la première hypothèse. La supériorité de l'emploi de la fente se manifeste ainsi une fois de plus. Nous nous proposons d'établir ces propriétés, après avoir défini le contraste en un point.

Par suite des imperfections de l'œil, les détails à la surface d'un objet éclairé ne s'aperçoivent que s'ils se présentent sous un angle supérieur à une certaine limite  $\sigma$ , probablement de l'ordre de grandeur de  $2'$  à  $3'$  et variable suivant l'observateur. Tel détail, invisible à l'œil nu, devient d'ailleurs observable, quand on le grossit avec un instrument d'optique, de telle sorte que son diamètre angulaire  $\sigma_1$ , multiplié par le grossissement  $G$ , atteigne ou dépasse  $\sigma$ . Une petite surface lumineuse qui se voit sous l'angle  $\sigma$ , impressionne l'œil, non par l'intensité de son éclaircissement en tel ou tel point, mais par la quantité globale de lumière qu'il en reçoit, l'observateur ne distinguant aucun détail à l'intérieur de la surface. Cette remarque permet de définir numériquement le contraste lumineux en un point  $M$  d'une surface dont l'éclaircissement, supposé continu, n'est pas uniforme.

Considérons la courbe  $C$  joignant le point  $M$  aux points voisins de la surface, de même intensité que  $M$ . Prenons sur  $C$  deux points  $A$  et  $B$ , encadrant le point  $M$  à la distance angulaire  $\frac{\sigma}{2}$ , et menons, en ces points, les normales  $A, A_2, B, B_2$ , limitées

aux courbes  $C_1$  et  $C_2$  parallèles à la courbe  $C$  et tracées, de part et d'autre de cette courbe, à la distance angulaire  $\sigma$ . Soient  $Q_1$  la quantité de lumière, reçue par l'œil, émanant du petit rectangle  $BB_1A_1A$ , et  $Q_2$  la quantité analogue relative au rectangle  $BB_2A_2A$ . Sup-

Fig. 27.



posant, pour fixer les idées,  $Q_1 > Q_2$ , nous appellerons contraste lumineux en  $M$  le rapport  $\varphi = \frac{Q_1}{Q_2}$ .

Cette définition suppose que l'œil distingue séparément l'une et l'autre petite surface. Or c'est bien ce qui se produit, puisque leur ensemble, dans la direction de la variation de l'intensité, est vu sous l'angle  $2\sigma$ , tandis que la limite de séparation est  $\sigma$ . D'après cette définition, le contraste, supérieur à 1, est d'autant plus grand que l'une des surfaces est plus lumineuse par rapport à l'autre. Le rapport  $\varphi$  prend d'ailleurs la valeur 1, lorsque l'éclairement de la surface, autour du point considéré  $M$ , est uniforme.

En raison de la petitesse de  $\sigma$ , on peut regarder les deux petits rectangles  $ABB_1A_1$ ,  $ABB_2A_2$  comme rectilignes pour calculer l'expression analytique du rapport  $\frac{Q_1}{Q_2}$ .

Soient  $N$  un point du premier rectangle, placé à la distance  $z$  de  $AB$ , et  $I$ , l'intensité lumineuse en ce point, intensité qui est la même tout le long d'une parallèle à  $AB$ , puisque  $AB$  est une courbe d'égale intensité et que les courbes voisines, de même nature, peuvent être regardées comme parallèles à la première, dans la très petite surface du rectangle <sup>(1)</sup>. Une bande de la surface du rec-

(1) Si l'on formait quelque objection sur ce point, elle ne pourrait porter sur l'application qui sera faite plus loin au bord de l'astre. Les courbes d'égale intensité sont, dans ce cas, rigoureusement parallèles, puisque normales à l'axe de symétrie de l'image le long duquel porte l'observation.

tangle, parallèle à AB, et d'épaisseur  $dz$ , envoie à l'observateur une quantité de lumière proportionnelle à sa surface et à l'intensité  $I_1$  en N, savoir

$$dQ_1 = H\sigma I_1 dz.$$

H désignant une constante.

La quantité de lumière perçue par l'observateur, émanant du rectangle tout entier, est donc

$$Q_1 = H\sigma \int_0^{\sigma} I_1 dz.$$

On a de même

$$Q_2 = H\sigma \int_{\sigma}^0 I_2 dz.$$

d'où

$$(100) \quad \rho = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\int_0^{\sigma} I_1 dz}{\int_{\sigma}^0 I_2 dz}.$$

Si, au lieu de regarder un objet directement à l'œil, on l'examine avec un instrument d'optique possédant un grossissement  $G$ , le plus petit détail visible possède un diamètre  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{G}$ . C'est donc  $\sigma_1$  qui joue alors le rôle de  $\sigma$ , dans les formules qui précèdent.

Partant de la formule (100), on a calculé le contraste  $\rho$ , dans le voisinage du bord géométrique de l'image, en supposant l'œil armé d'un grossissement  $G$  tel que l'angle  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{G}$  soit égal à divers multiples fractionnaires (0,5; 1,0; 1,5; 2,0) du pouvoir séparateur de la lunette employée à pleine ouverture. Ce calcul a été fait : 1° dans le cas où la lunette est employée à pleine ouverture; 2° dans le cas où elle est diaphragmée par une fente de longueur égale au diamètre de l'objectif et de largeur définie par la relation  $\frac{n^2}{m} \approx \frac{1}{2}$ . Les nombres obtenus, dans ce dernier cas, se rapportent aux points de l'image placés le long de l'axe de symétrie parallèle au grand côté de la fente.

Les intégrales figurant dans l'expression (100) du rapport  $\rho$  sont égales, dans l'un et l'autre cas mentionnés ci-dessus, aux aires des

courbes tracées figure 25 et comprises entre l'ordonnée, correspondant à l'abscisse du point où l'on cherche à obtenir le rapport  $\rho$ , et les ordonnées situées de part et d'autre à la distance  $\sigma_1$ .

La première colonne des Tableaux ci-dessous contient les abscisses (le pouvoir séparateur de la lunette est pris comme unité d'abscisse), comptées à partir du bord géométrique, des points où le rapport  $\rho$  a été calculé.

*Ouverture circulaire. Valeurs de  $\rho$ .*

Abscisse.	$\sigma_1 = 0.5.$	$\sigma_1 = 1.0.$	$\sigma_1 = 1.5.$	$\sigma_1 = 2.0.$	Remarques.
-0.1 . . . . .	1.98	3.39	4.76	6.07	Bord géométrique
0.0 . . . . .	2.25	4.00	5.62	7.16	
+0.1 . . . . .	2.55	4.70	6.61	8.42	
0.2 . . . . .	2.84	5.43	7.68	9.78	
0.3 . . . . .	3.10	6.09	8.74	11.15	
0.4 . . . . .	3.29	6.61	9.71	12.43	
0.5 . . . . .	3.34	6.87	10.45	13.50	
0.6 . . . . .	3.13	6.81	10.84	14.24	
0.7 . . . . .	2.85	6.44	10.84	14.62	
0.8 . . . . .	2.44	5.83	10.49	14.64	
0.9 . . . . .	2.04	5.12	9.89	14.43	
+1.0 . . . . .	1.73	4.42	9.16	14.05	

*Fente ( $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ ). Valeurs de  $\rho$ .*

Abscisse.	$\sigma_1 = 0.5.$	$\sigma_1 = 1.0.$	$\sigma_1 = 1.5.$	$\sigma_1 = 2.0.$	Remarques.
-0.1 . . . . .	2.60	5.04	7.38	9.67	Bord géométrique
0.0 . . . . .	2.97	5.91	8.69	11.39	
+0.1 . . . . .	3.34	6.76	10.04	13.18	
0.2 . . . . .	3.64	7.47	11.29	14.86	
0.3 . . . . .	3.76	7.86	12.25	16.23	
0.4 . . . . .	3.59	7.81	12.70	17.09	
0.5 . . . . .	3.17	7.37	12.64	17.44	
0.6 . . . . .	2.64	6.66	12.16	17.36	
0.7 . . . . .	2.15	5.81	11.37	16.95	
0.8 . . . . .	1.76	4.95	10.44	16.35	
0.9 . . . . .	1.52	4.15	9.44	15.62	
+1.0 . . . . .	1.41	3.47	8.43	14.80	

L'examen de ces Tableaux met en évidence le fait que le con-

traste passe par un maximum, dans le voisinage du bord géométrique, quand on se déplace normalement à ce bord, quelle que soit la valeur de  $\sigma_1$ , c'est-à-dire quel que soit le grossissement avec lequel on observe les images dans le plan focal. Le contraste maximum correspondant à l'ouverture circulaire, pour une valeur de  $\sigma_1$ , est d'ailleurs inférieur au contraste maximum relatif à la fente, pour la même valeur de  $\sigma_1$ . De plus, les variations du contraste, de part et d'autre du maximum, sont plus rapides dans la seconde hypothèse que dans la première. Le fait saute immédiatement aux yeux, en considérant les courbes construites, dans l'un et l'autre cas, en prenant  $\xi$  comme abscisse et portant les valeurs du contraste en ordonnées. Ces propriétés sont bien celles dont il a déjà été question plus haut.

Les théories et les calculs développés, dans le présent Mémoire, supposent l'éclat intrinsèque de l'astre uniforme en chaque point de sa surface. On ne peut, en conséquence, les appliquer en toute rigueur au Soleil dont l'éclat décroît nettement du centre au bord. Les moyens analytiques employés se prêtent d'ailleurs, moyennant certains développements, à l'étude de la diffraction des images de cet astre par une fente, en tenant compte des variations d'éclat du disque, du centre au bord. Laissant cette question de côté pour le moment <sup>(1)</sup>, je me bornerai à montrer ici que les ordonnées des courbes d'intensité, correspondant aux points intérieurs au disque solaire, s'obtiennent approximativement en multipliant les ordonnées, calculées dans l'hypothèse d'un éclat intrinsèque uniforme, par les valeurs variables de cet éclat le long du rayon solaire, rapporté à celui de la périphérie, en chacun des points auxquels correspondent ces ordonnées. C'est ce qui résulte de considérations physiques, fondées sur les effets connus de la diffraction d'une onde plane limitée par une ouverture circulaire, de diamètre  $h$ , ou par une fente rectangulaire, de largeur  $a$  et de longueur  $h$ .

Dans la première hypothèse, les ondes diffractées fournissent,

---

(1) Ce travail, déjà commencé, demandera beaucoup de temps, en raison des développements et des calculs numériques très laborieux qu'il comporte.

au foyer d'un objectif de diamètre  $h$ , une image de largeur angulaire  $\frac{\lambda}{h}$ , dans laquelle se trouve concentrée la presque totalité de l'énergie lumineuse incidente, entourée d'anneaux beaucoup plus faibles, d'intensités rapidement décroissantes et espacées angulairement de  $\frac{\lambda}{h}$ . Il s'ensuit que si l'on regarde l'image solaire, au foyer d'un objectif, comme la résultante des images de ses différents points, l'intensité en un point M de l'image, en négligeant une faible erreur relative, provient de l'énergie lumineuse émise par le point P de la surface de l'astre dont M est l'image géométrique, augmentée d'apports originaux d'une petite région de l'astre, avoisinant le point P et comprise dans un cercle de rayon angulaire montant à un multiple de  $\frac{\lambda}{h}$  par quelques unités seulement. Cette région est d'autant moindre que l'objectif est de plus grande largeur, et son éclat intrinsèque moyen diffère nécessairement très peu de l'éclat intrinsèque en P. L'intensité en M est donc sensiblement la même que si tout le disque avait pour éclat intrinsèque celui qui existe en P. L'erreur relative commise est d'autant moindre que le rayon de l'objectif est plus grand.

Lorsque l'objectif est diaphragmé par la fente, un raisonnement analogue est applicable pour les points de l'image disposés le long de l'axe de symétrie parallèle au sens de la longueur de la fente. Il y a cependant une différence. Une onde plane, limitée par une fente de longueur  $h$  et de largeur  $a$ , fournit au foyer d'une lunette une image dans laquelle la lumière diffractée est concentrée presque en totalité, non plus en un point, mais dans une bande centrale, de largeur angulaire  $\frac{\lambda}{h}$  et de longueur angulaire  $\frac{\lambda}{a}$ , entourée d'anneaux ovales d'intensités décroissantes devenant rapidement insensibles. Les espaces obscurs séparant les anneaux successifs sont d'ailleurs aux distances angulaires  $\frac{\lambda}{h}$ ,  $2\frac{\lambda}{h}$ ,  $3\frac{\lambda}{h}$ , ... du centre dans le sens de la longueur de la fente, et aux distances angulaires  $\frac{\lambda}{a}$ ,  $2\frac{\lambda}{a}$ ,  $3\frac{\lambda}{a}$ , ... dans le sens perpendiculaire. Dans le cas qui

nous occupe,  $\frac{\lambda}{h}$  est le pouvoir séparateur d'un objectif de diamètre  $h$  égal à la longueur de la fente ;  $\frac{\lambda}{a}$  est une quantité supérieure, puisque  $a$  est petit par rapport à  $h$ . Si maintenant on considère l'image solaire, au foyer de la lunette diaphragmée par la fente, comme la résultante des images des divers points de l'astre, on voit que l'intensité, en chaque point  $M$ , sur l'axe de symétrie de l'image de l'astre, dirigé dans le sens de la longueur de la fente, provient uniquement, d'après ce qui précède, d'une petite région de la surface de l'astre, avoisinant le point  $P$  de cette surface dont  $M$  est l'image géométrique, si l'on consent à commettre une faible erreur relative. Cette région, par rapport à celle qui a été considérée tout à l'heure, pour la surface entière de l'objectif, est allongée, à cause de  $a < h$ , perpendiculairement à l'axe de symétrie de l'image solaire parallèle au grand côté de la fente sur lequel est placé le point  $M$ . Or l'éclat intrinsèque de l'astre, fonction seulement de la distance au centre, varie à peine dans ce sens, du moment où l'on ne s'éloigne pas par trop de l'axe considéré, c'est-à-dire à condition de ne pas considérer des fentes par trop étroites. Cette condition se trouve remplie en faisant usage d'une lunette de grande ouverture, armée d'une fente dont la largeur satisfait à la relation  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . Il en résulte, comme tout à l'heure, que l'intensité en  $M$  est sensiblement la même que si tout le disque avait pour éclat intrinsèque celui qui existe en  $P$ , à condition que la lunette soit d'ouverture suffisante. L'erreur relative commise est d'autant moindre que cette ouverture est plus considérable.

Ce raisonnement ne donne pas d'indication sur ce qui se passe à l'extérieur du bord géométrique. On peut dire sous ce rapport que, près de ce bord, la lumière diffractée provient nécessairement, en majeure partie, des points du disque répartis sur son contour apparent. L'intensité est donc, dans ce cas, sensiblement la même que si le disque entier avait l'éclat intrinsèque de la périphérie de l'astre.

Les ordonnées des courbes d'intensité relative se trouvent en divisant l'intensité absolue, en chacun des points de l'image, par

l'intensité absolue au bord géométrique. On les obtient, d'après ce qui précède, avec de faibles erreurs relatives, en multipliant les ordonnées des courbes tracées (*fig. 25*) par le rapport de l'éclat intrinsèque, en ces points, à celui de la périphérie de l'astre, rapport qui est le même, que l'objectif soit découvert ou armé de la fente. Cette règle conduit, en conséquence, comme dans l'hypothèse de l'homogénéité d'éclat de l'astre, à la conclusion que le bord optique doit être mieux tranché en masquant l'objectif de la lunette par la fente qu'en l'employant avec sa surface entière.

Toutefois, le raisonnement suppose essentiellement l'objectif suffisamment grand. Des précisions à cet égard ne pourront être données, qu'après extension de la théorie développée, dans le présent Mémoire, au cas où l'éclat intrinsèque de l'astre n'est plus considéré comme uniforme.

Dans l'hypothèse de l'homogénéité d'éclat du disque, on a trouvé le nombre 3,8 comme valeur du rapport  $\frac{I_0}{I_p}$  de l'intensité au centre à celle du bord géométrique, lorsque la largeur de la fente est liée à sa longueur par la relation  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ . D'autre part, dans le cas du Soleil, l'éclat intrinsèque central est voisin de cinq fois celui de la périphérie de l'astre, pour la lumière de longueur d'onde  $\lambda = 0^{\mu},5$ , supposée admise dans l'œil de l'observateur. Il en résulte, en vertu de ce qui précède, que l'éclat de l'image solaire, fournie au foyer d'une lunette armée de la fente, est environ 19 fois plus grand au centre qu'au bord géométrique, à sa rencontre avec l'axe de symétrie parallèle au sens de la longueur de la fente.

## IX.

### COURBES D'INTENSITÉ POUR $\frac{n^2}{m} \gtrless \frac{1}{2}$ .

Les calculs numériques considérables qu'il a fallu exécuter, pour tracer la courbe d'intensité relative correspondant à  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ , en prenant, comme unité, l'intensité au bord géométrique de l'image,

seraient à recommencer, sous de nouveaux frais, si l'on voulait construire exactement les courbes de même nature se rapportant à d'autres valeurs de  $\nu = \frac{n^2}{m}$ . Les calculs des séries  $S_x$  et  $T_x$  seraient même encore plus laborieux, pour  $\frac{n^2}{m} > \frac{1}{2}$ . Ces courbes présentant un intérêt secondaire, puisque l'intensité varie alors moins rapidement, que dans l'hypothèse correspondant à  $\frac{n^2}{m} = \frac{1}{2}$ , au voisinage du bord géométrique, nous nous bornerons à de simples indications à leur sujet.

Le Tableau suivant fournit les valeurs de  $y$ , calculées pour diverses valeurs du rapport  $\nu = \frac{n^2}{m}$  et pour  $x = \pm 15$ , par les formules (80), (80'), (81) et (89). Les deux premières colonnes fournissent les valeurs  $Y$ , obtenues en négligeant les termes en  $\frac{1}{m}$  dans les formules;  $y$  s'obtient en ajoutant à  $Y$  une correction  $\Delta Y = \frac{B}{m}$ , où  $B$  représente

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}} \frac{x}{8} \left[ \frac{1 - \cos \sqrt{4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}} - \frac{1}{2x} \left( 2 - \frac{\sin \sqrt{4\nu x}}{\sqrt{-4\nu x}} - \cos \sqrt{-\nu x} \right) \right] \\ \times \frac{1}{S_0 \frac{\sqrt{2\nu}}{6}} + \frac{Y}{8} \frac{\frac{\nu}{2} - \sqrt{\frac{2\nu}{\nu}}}{S_0 \frac{\sqrt{2\nu}}{6}}$$

pour  $x < 0$ , et

$$B = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\nu}} \frac{1}{16} \left[ 2 + \frac{1 - E^{-\sqrt{4\nu x}}}{\sqrt{4\nu x}} - E^{-\sqrt{4\nu x}} \right] \frac{1}{S_0 \frac{\sqrt{2\nu}}{6}} + \frac{Y}{8} \frac{\frac{\nu}{2} - \sqrt{\frac{2\nu}{\nu}}}{S_0 \frac{\sqrt{2\nu}}{6}}$$

pour  $x > 0$ .

Les deux dernières colonnes du Tableau donnent les valeurs du coefficient  $B$ , en fonction de  $\nu$ .

$m$  étant inférieur, en chiffres ronds, à 3000 (voir le Tableau en tête du paragraphe VIII), les valeurs de  $\Delta y$  sont pratiquement négligeables, pour  $x = -15$ , puisqu'elles ne modifient pas le dernier chiffre à droite de  $Y$ ;  $y$  va donc alors en décroissant, lorsque  $\nu$

augmente. Les corrections  $\Delta y$ , pour  $x = +15$ , peuvent affecter, par contre, le dernier chiffre de Y, lorsque  $\nu$  est petit. Néanmoins, les valeurs de  $y$  conclues vont encore en décroissant, quand  $\nu$  augmente.

$\nu$ .	$\frac{n^2}{m}$	Correction $\Delta Y = \frac{1}{m} B$ .			
		Y pour $x = -15$ .	Y pour $x = +15$ .	B pour $x = -15$ .	B pour $x = +15$ .
0.01	4,94	0,1328	+3,84	-2,14	
0.02	4,92	0,1234	+0,79	-1,44	
0.03	4,90	0,1170	+0,63	-1,14	
0.04	4,87	0,1121	+1,25	-0,98	
0.05	4,83	0,1081	+1,54	-0,86	
0.06	4,79	0,1048	+1,72	-0,78	
0.07	4,75	0,1019	+1,77	-0,71	
0.08	4,71	0,0994	+1,77	-0,66	
0.09	4,66	0,0972	+1,74	-0,63	
0.1	4,62	0,0951	+1,67	-0,60	
0.2	4,21	0,0819	+0,53	-0,43	
0.3	3,85	0,0747	+0,37	-0,36	
0.4	3,56	0,0699	+0,87	-0,32	
0.5	3,33	0,0664	+1,07	-0,30	
0.6	3,15	0,0638	+1,05	-0,28	
0.7	3,00	0,0617	+0,90	-0,26	
0.8	2,88	0,0600	+0,71	-0,25	
0.9	2,80	0,0586	+0,52	-0,25	
1	2,73	0,0575	+0,34	-0,24	
2	2,44	0,0517	+0,20	-0,21	
3	2,31	0,0497	+0,22	-0,20	
4	2,25	0,0487	+0,03	-0,19	
5	2,22	0,0480	+0,14	-0,18	
6	2,19	0,0475	+0,19	-0,18	
7	2,17	0,0470	+0,14	-0,18	
8	2,16	0,0467	+0,09	-0,17	
9	2,14	0,0465	+0,13	-0,17	
10	2,13	0,0463	+0,15	-0,17	

Le fait que, pour  $x = \pm 15$  ou, d'après la formule (99), pour  $\xi = \pm \frac{15}{2\pi}$ , le réseau de courbes obtenu en faisant croître  $\nu$ , se rapproche constamment de l'axe des abscisses, ce fait, dis-je, permet de situer la courbe, correspondant à une valeur donnée de  $\nu$ , par rapport à celle de la figure 25, construite pour  $\nu = \frac{1}{2}$ . On y

parvient, en tenant compte de la propriété de la tangente au point ( $\xi = 0, y = 1$ ), correspondant au bord géométrique, d'être de moins en moins inclinée sur la direction négative de l'axe des abscisses, à mesure que  $\nu$  s'éloigne davantage de  $\frac{1}{2}$ , dans un sens ou dans l'autre.

Si  $\nu < \frac{1}{2}$ , la courbe est disposée au-dessus de la courbe de la figure 25, pour  $\xi = -\frac{15}{2\pi}$ .  $\xi$  croissant, elle rencontre nécessairement cette dernière, vu la disposition de la tangente, avant que  $\xi$  prenne la valeur zéro, pour laquelle  $y = 1$ . La courbe repasse ensuite au-dessus de celle de la figure 25, lorsque  $\xi$  dépasse la valeur zéro, et doit conserver cette situation au moins jusqu'à l'abscisse  $+\frac{15}{2\pi}$ .

Si  $\nu > \frac{1}{2}$ , la courbe est située au-dessous de celle de la figure 25 pour  $\xi = -\frac{15}{2\pi}$ .  $\xi$  croissant, elle doit conserver cette situation tant qu'elle n'a pas franchi le point ( $\xi = 0, y = 1$ ), correspondant au bord géométrique, vu la disposition de la tangente en ce point. Elle passe ensuite au-dessus, lorsque  $\xi$  croît par des valeurs positives, pour rencontrer bientôt la courbe de la figure 25, et repasser au-dessous, avant d'atteindre le point correspondant à l'abscisse  $\xi = +\frac{15}{2\pi}$ .

Toutes les courbes du réseau, pour le point correspondant au centre du Soleil, sont d'ailleurs disposées comme pour l'abscisse  $\xi = -\frac{15}{2\pi}$ . C'est ce qui résulte de l'examen du Tableau du paragraphe VII donnant les valeurs de l'intensité relative, au centre,  $y = \frac{I_0}{I_R}$ . On peut voir, en se fondant sur le même Tableau et en partant des formules (79), (81) et (89), que les courbes sont également disposées comme pour l'abscisse  $\xi = \frac{15}{2\pi}$  au point éloigné d'abscisse positive qui correspond à  $x = 2 m$ .

Ces résultats ont été établis ici dans l'hypothèse où  $\frac{n^2}{m}$  ne dépasse

pas 10. On pourrait les étendre jusqu'à la valeur  $\frac{n^2}{m} = 15$ ; mais, au delà, les calculs deviendraient beaucoup trop laborieux, pour pouvoir être poussés notablement plus loin. La question de la diffraction des images des astres circulaires, par une fente, doit alors être abordée d'une tout autre manière. Ce sujet pourra faire l'objet d'un Mémoire ultérieur.

