JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. DE SÉGUIER

Sur les constituants transitifs de certains groupes linéaires à invariant bilinéaire dans un champ de Galois

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 2 (1919), p. 1-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1919_8_2__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les constituants transitifs de certains groupes linéaires à invariant bilinéaire dans un champ de Galois ;

Par J.-A. de SÉGUIER.

Le présent travail peut être considéré comme une suite de mon Mémoire *Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois* (1), dont je conserverai la terminologie et les notations (2).

Ces deux Mémoires forment le développement de trois Notes

(1) *Journ. Math.*, 1916. Je renverrai à ce Mémoire par le chiffre I.

(2) Je rappelle seulement que je désigne par $\mathfrak{C}$ un champ galoisien d'ordre $\pi = p^{\kappa}$, (p premier), par $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}(\upsilon)$ le champ d'ordre π^2 défini par l'adjonction de la racine υ d'une équation quadratique irréductible dans $\mathfrak{C}$, par ι et ι' des éléments primitifs de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, par N un non carré quelconque de $\mathfrak{C}$, par $a = (a_{ik})$ une matrice invertible d'ordre n de $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}'$ qui sera assimilée à la forme $\Sigma_{ik} a_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, par $\dot{x}$ la matrice d'ordre $\geqq 1$ conjuguée de x relativement à $\mathfrak{C}$, υ, $\upsilon^{\pi} = \dot{\upsilon}$, par $[\mu]$ la similitude de multiplicateur μ, et que je pose $\mathrm{I}' = \{[\iota']\}$, $\mathrm{I} = \{[\iota]\}$, $\mathrm{J} = \{[\iota'^{\pi-1}]\}$, $d = [-1]$, $\mathrm{D} = \{d\}$, et désigne par J^0 le diviseur de J formé de ses substitutions de déterminant 1.

présentées à l'Académie des Sciences en 1913 et 1915 (¹). J'expose ici les résultats indiqués dans les deux dernières. Il s'agit de l'étude des constituants transitifs des groupes hermitiens, gauches et quadratiques dans un champ galoisien quelconque et des groupes des formes bilinéaires symétriques dans un champ galoisien d'ordre 2^κ. On déduit de là les équations de ces divers groupes.

En cherchant à représenter transitivement quelques-uns des groupes considérés ici, M. Dickson a précisément obtenu des groupes semblables à leurs constituants transitifs (²).

I. — Groupe hermitien.

1. Soit λ un élément de $\mathfrak{S}$. Désignons par e_λ l'équation $a = \Sigma a_{ik} x_i \dot{x}_k = \lambda$, si $\bar{a} = \dot{a}$, ou l'équation $a = \omega\lambda$ ($\omega = \upsilon - \dot{\upsilon}$), si $\bar{a} = -\dot{a}$, et posons $x_i = x_{i0} + \upsilon x_{i1}$, x_{i0} et x_{i1} étant réels. L'ensemble des points de coordonnées x_i^0, x_{i1} qui vérifient e_λ forme une quadrique de $\mathfrak{S}$. Mais il sera plus simple de considérer cette quadrique comme formée des points $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. Désignons cette quadrique par $q_{\lambda na} = q_{\lambda a} = q_\lambda$, *en convenant que le point* $0 \ldots 0$ *sera exclu de* q_0, et soit $s_{\lambda n} = s_\lambda$ le nombre des points de q_λ.

Si $n = 1$, $s_0 = 0$, $s_\lambda = \pi + 1$ ($\lambda \neq 0$), et A, qui conserve chaque q_λ, a $\pi - 1$ systèmes d'intransitivité de degré $\pi + 1$. Alors A est un $g_{\pi+1}^{\pi^2-1}$ cyclique semi régulier, et $A^0 = 1$.

Soit $n > 1$. Chaque s_λ étant > 0, A a au moins π systèmes d'intransitivité. On peut évidemment, lorsqu'il ne s'agit que des degrés des systèmes d'intransitivité, faire abstraction de la forme choisie pour a. Soit $a = h$ (I, 2). A transforme le point $10 \ldots 0$ de q_0 en un point quelconque de q_0 (I, 4), *d'où le système d'intransitivité* q_0 *de* degré $s_{0n} = [\pi^n - (-1)^n][\pi^{n-1} - (-1)^{n-1}]$ (I, **2**, **4**). Soit $a = \varepsilon$ (I, **2**). A transforme le point $\iota''0 \ldots 0$ en tous les points $(\alpha_{11}\iota', \alpha_{21}\iota', \ldots)$, le point $\alpha_{11}\alpha_{21} \ldots$ parcourant $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire en

(¹) *Comptes rendus*, t. **157**, 1[er] septembre 1913, p. 430; t. **161**, 8 novembre 1915, p. 553; t. **161**, 29 novembre 1915, p. 670.

(²) *M. A.*, t. **65**; *A. J.*, t. **23**.

tous les points de $q_{\iota^{(\pi+1)l}}$, *d'où les* $\pi - 1$ *systèmes d'intransitivité* q_λ $(\lambda \neq 0)$ *de degré* $s_{1n} = \pi^{2n-1} - (-1)^n \pi^{n-1}$ (I, **2**).

Ainsi pour $\pi = n = 2$, A est un $g^{3.5}_{3.6}$ ayant deux systèmes d'intransitivité des degrés $s_{02} = 3.3$ et $s_{13} = 3.2$. On a ici, en écrivant $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p$ au lieu de $01, 0\upsilon, 0\dot{\upsilon}, 10, 11, 1\upsilon, 1\dot{\upsilon}, \upsilon 0, \upsilon 1, \upsilon\upsilon, \upsilon\dot{\upsilon}, \dot{\upsilon}0, \dot{\upsilon}1, \dot{\upsilon}\upsilon, \dot{\upsilon}\dot{\upsilon}$ respectivement $(\upsilon^2 = \upsilon + 1)$,

$$m_{1\upsilon} = |\upsilon x_1, \upsilon y_1| = abc.dhm.ekp.fln.gio,$$
$$\tau_1 = ad.bh.cm.e.k.p.fi.gn.lo, \qquad u_{11} = ae.bk.cp.d.h.m.fo.gl.in,$$
$$\tau_1 u_{11} = ade.bhk.cmp.fnl.gio;$$

q_0 est formé des points $a, b, c, d, e, h, k, m, p$, et q_1, des points f, g, i, l, n, o.

A(3, 2) est un $g^{3.21}_{3.216}$ ayant deux systèmes des degrés $s_{02} = 3.9$ et $s_{12} = 3.12$ (*cf.* I, **14**). A(4, 2) est un $g^{3.80}_{3.25920}$ ayant deux systèmes des degrés $s_{02} = 3.45$ et $s_{12} = 3.40$. A(3, 3) est un $g^{4.192}_{4.6048}$ ayant un système de degré $s_{03} = 8.28$ et deux de degré $s_{13} = 4.63$.

Soit $A^{(\lambda)}(n, \pi)$ le constituant de A de champ q_λ. J déplaçant tous les symboles, chaque $A^{(\lambda)}$ admet, comme système d'imprimitivité, les systèmes d'intransitivité (de degré $\pi + 1$) de J dans q_λ.

La similitude $[\iota']$ permute circulairement les $\pi - 1$ q_λ où $\lambda \neq 0$ et fixe q_0. Donc : 1° *les* $A^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$ *sont semblables*; 2° A' *a deux constituants transitifs, l'un* $A'^{(1)}(n, \pi)$ *de degré* $(\pi - 1)s_1$ *ayant pour champ l'ensemble des* q_λ *où* $\lambda \neq 0$, *l'autre* $A'^{(0)}(n, \pi)$ *de champ* q_0. *Pour la même raison que tout à l'heure chacun d'eux est imprimitif.*

Si $n \geqq 3$, A^0 *a les mêmes systèmes d'intransitivité que* A. Soit en effet $a = h$. Comme la substitution $s = m_{2\rho}$ ou $m_{0\chi}$ (I, **2**) fixe le point $\xi = (\lambda\upsilon, 1, 0, \ldots, 0)$ de q_λ, A^0 et $A = |s| A^0$ remplacent ξ par les mêmes points de q_λ.

Soit $n = 2$, *et d'abord* $\lambda \neq 0$. A^0 remplace ξ par tous les points $x_1 = \alpha'_{11} + \alpha_{11}\lambda\upsilon$, $y_1 = \beta'_{11} + \beta_{11}\lambda\upsilon$ pour lesquels $\alpha_{11}\beta'_{11} - \beta_{11}\alpha'_{11} = 1$, α_{11}, α'_{11}, β_{11}, β'_{11} étant réels (I, **5**). Or *cette condition équivaut à* $x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = \lambda\omega$. Donc A^0 *remplace* ξ *par tous les points de* q_λ $(\lambda \neq 0)$ [1].

---

[1] D'ailleurs la condition $\alpha_{11}\beta'_{11} - \beta_{11}\alpha'_{11} = 1$ détermine $\pi(\pi^2 - 1)$ points $x_1 y_1$ (*S.*, **74**), c'est-à-dire tous les points de q_λ.

Soit $n=2$ *et* $\lambda=0$. A^0 substitue à $(\iota^l, 0)$ $(l=0, \ldots, \pi)$ les π^2-1 points $(\alpha_{11}\iota^l, \beta_{11}\iota^l)$ (α_{11} et β_{11} parcourant $\mathfrak{C}$ sans s'annuler à la fois) : on obtient ainsi les $(\pi^2-1)(\pi+1)=s_{02}$ points de q_0. Donc *les points de* q_0 *se répartissent dans* A^0 *en* $\pi+1$ *systèmes d'intransitivité donnant lieu à* $\pi+1$ *constituants transitifs parallèles semblables à* $U(2, \pi)$.

Ainsi, en désignant par $A^{0(\lambda)}(n, \pi)$ le constituant de A^0 dans q_λ, on a vu que $A^{0(0)}(2, 2)$ est fromé de trois g_6^3 parallèles isomorphes à $A^0(2, 2)$ et que $A^{0(1)}(2, 2)$ est un g_6^6 régulier également isomorphe à $A^0(2, 2)$.

$A'^{(\lambda)}$ *et* $A^{(\lambda)}$ *sont respectivement isomorphes à* A' *et à* A. Il suffit de considérer A'. Or supposons que le p. g. c. d. $D^{(\lambda)}$ de $A'^{(\lambda)}$, A' soit >1. $D^{(\lambda)}$ est premier à I' (I' est semi-régulier) et normal dans A'. D'ailleurs le p. g. c. d. $\Delta^{(\lambda)}$ de $D^{(\lambda)}$, A est >1, sans quoi $AD^{(\lambda)}$ serait produit direct, et $D^{(\lambda)}$ serait $<I'$ (I, **15**). Donc, en exceptant le cas où $\pi=2$ avec $n\leqq 3$, $\Delta^{(\lambda)}$ est $\geqq A^0$, et A_0 fixerait les points de q_μ où $\mu\neq\lambda$, ce qui n'a pas lieu. Si $\pi=2$ et $n=3$, $\Delta^{(\lambda)}$ serait $>J^0$ (I, **12**), ce qui est absurde, J^0 étant semi régulier. Pour $\pi=n=2$, $A'=A$, et l'on a vérifié directement que $A^{(\lambda)}\equiv A$.

2. Les symboles de $\mathcal{A}$ sont les $\dfrac{\pi^{2n}-1}{\pi^2-1}$ systèmes de π^2-1 points de $\mathfrak{C}'$, autres que $0\ldots0$, situés sur chaque droite issue de $0\ldots0$. *Donc, en laissant de côté le cas* $n=1$, $\mathcal{A}$ *a deux systèmes d'intransitivité, l'un,* q_0 *de degré* $\dfrac{s_0}{\pi^2-1}=\dfrac{\pi^n-(-1)^n}{\pi-(-1)^n}\cdot\dfrac{\pi^{n-1}-(-1)^{n-1}}{\pi-(-1)^{n-1}}$ *répondant à* $a=0$, *l'autre,* q_1 *de degré* $\dfrac{(\pi-1)s_1}{\pi^2-1}=\pi^{n-1}\dfrac{\pi^n-(-1)^n}{\pi+1}$ *répondant à* $a\neq0$. Je désignerai par $\mathcal{A}^{(i)}$ le constituant transitif de $\mathcal{A}$ de champ q_i.

En exceptant le cas où $\pi=n=2$, $\mathcal{A}^{(i)}$ *est isomorphe à* $\mathcal{A}$. Car si le p. g. c. d. $\mathfrak{D}^{(i)}$ de $\mathcal{A}^{(i)}$, $\mathcal{A}$ est >1, le diviseur correspondant D_i de A n'est pas $\leqq J$. D_i est donc $\geqq A^0$, à moins que l'on n'ait $\pi=2$ avec $n\leqq 3$. Mais si D_i est $\geqq A^0$, A^0, fixant certaines droites issues de l'origine [correspondant aux symboles de $\mathcal{A}^{(k)}$ $(k\neq i)$], n'a pas les mêmes systèmes d'intransitivité que A. Donc $n=2$, et $i=0$. Donc $\mathcal{A}^{(1)}\equiv\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^{(0)}$ est isomorphe à un groupe facteur de $\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}^0$ qui est d'ordre 1 ou 2. Or cela est impossible, car $\mathcal{A}^{(0)}$ est transitif de degré $\pi+1$. Soit donc $\pi=2$ et $n\leqq 3$. Le cas de $\mathcal{A}(3, 2)$ déjà étudié (I, **12**) ne fait pas exception. *Mais* $\mathcal{A}^{(1)}(2, 2)$ *est* $\not\equiv \mathcal{A}(2, 2)$. Car $\mathcal{H}=\mathcal{H}^0=H^0$ (ici $J=\{m_{1\upsilon}\}$ est premier à H^0) est, en posant $\frac{x_1}{y_1}=z$, le $g_6\{z+1, z^{-1}\}$ où z parcourt $0, 1, \infty, \upsilon, \dot\upsilon$ $(\upsilon^2=\upsilon+1)$ (*cf.* I, 5). Or $z+1=01.\upsilon\dot\upsilon$, $z^{-1}=0\infty.\upsilon\dot\upsilon$, $\frac{z+1}{z}=01\infty$. Donc $\mathcal{A}^{(0)}$ est un g_6 et $\mathcal{A}^{(1)}$ un g_2.

3. Soit, pour $a=h$, $X_0=X$ le diviseur de A qui fixe $10\ldots0$, et $X_1^{(\lambda)}=X^{(\lambda)}$ son constituant de champ q_λ. Les substitutions de X ont, d'après les formules (4), (5), (6) de I, **3** des matrices de la forme

$$M=\left\{\begin{array}{cc|ccc} 1 & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \alpha'_{22} & \ldots \\ 0 & \beta'_{21} & \beta_{22} & \beta'_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\},$$

où les éléments dont les deux indices sont $\neq 1$ forment une matrice quelconque M_1 du groupe A_1 de $a_1=a-(x_1\dot y_1-y_1\dot x_1)$ [je désignerai par A'_1, A^0_1, $\mathcal{A}^0_1$, $A^{(\lambda)}_1$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}_1$ les groupes déduits de A_1 comme A', A^0, $\mathcal{A}^0$, $A^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ de A (A'_1 ne divise pas A')], et où l'on peut prendre arbitrairement, ou bien les α'_{j1}, β'_{j1} où $j\neq 1$ [alors (4), (5), (6) de I, **3** déterminent explicitement par les autres coefficients de α les α_{1j}, α'_{1j} où $j\neq 1$ et $\alpha'_{11}-\dot\alpha'_{11}$], ou bien les α_{1j}, α'_{1j} où $j\neq 1$ [alors (8), (9), (10) de I, **3** déterminent les α'_{j1}, β'_{j1} où $j\neq 1$ et $\alpha'_{11}-\dot\alpha'_{11}$]. Donc $(X, A_1)=\pi^{2n-3}$. *Les matrices du* $g_{\pi^{2n-3}}P$ *déjà considéré* (I, **13**) *sont celles des matrices* M *où* $M_1=1$. P *est premier à* A_1 *et évidemment permutable à chaque substitution de* A_1, *donc normal dans* $X=A_1P=PA_1$, *et* $(X, 1)=\frac{(A, 1)}{s_{0n}}$. *Le diviseur* X' *de* A' *qui fixe* $10\ldots0$ *est évidemment* $\{X, \tau_1^{-1}\gamma\tau_1\}$ (γ *étant la même substitution que dans* I, **2**); $\tau_1^{-1}\gamma\tau_1$ *est permutable à* A_1 *et à* P, *et* $(X', X)=\pi-1$.

X (ou même P) remplace le point $0y_10\ldots0$ $(y_1\neq 0)$ de q_0 par les π^{2n-3} points $(\alpha'_{11}y_1, y_1, \alpha'_{21}y_1, \ldots)$; d'où π^2-1 systèmes d'intransitivité $q_0^{y_1}$ $(y_1 \neq 0)$ de X (ou de P) de degré π^{2n-3} [et, dans X', $\pi+1$ systèmes de degré $\pi^{2n-3}(\pi-1)$. On voit directement que toute substitution $\neq 1$ de P déplace tous les symboles de chaque $q_0^{y_1}$. L'action de P sur les $q_0^{y_1}$ fournit donc une repré sentation semirégulière de P. D'autre part A_1 fixe les points $0y_1 0 \ldots 0$, et ses constituants dans les champs $q_0^{y_1}$ sont évidemment parallèles. Donc les constituants de X dans les champs $q_0^{y_1}$ sont aussi parallèles. Si $n \leqq 3$, les points des $q_0^{y_1}$, joints aux π^2-1 points $x_1 0 \ldots 0$ $(x_1 \neq 0)$ fixés par X, épuisent q_0. Si $n > 3$, q_0 contient encore $0010\ldots0$ que X remplace par $\alpha_{12}0\alpha_{22}\beta_{22}\ldots$, α_{12} pouvant être pris arbitrairement, et le système des α_{i2}, β_{i2}, où $i \neq 1$ pouvant prendre dans A, $s_{0,n-2}$ déterminations (toutes différentes de $0\ldots0$); d'où un nouveau système q_0^0 de degré $\pi^2 s_{0,n-2}$ (ce nombre est nul si $n \leqq 3$) qui achève d'épuiser q_0 (P a, dans q_0^0, $s_{0,n-2}$ constituants transitifs de degré π^2). *Donc* $X^{(0)}$ *ne fixe que les* π^2-1 *points* $x_1 0 \ldots 0$ *de* q_0.

Comme $A_1 \equiv A_1^{(0)}$ (1), et que chaque substitution de P déplace les points $0y_1 0\ldots0$ fixés par $A_1^{(0)}$, l'action de P sur q_0 est première à $A_1^{(0)}$. *Donc* $X^{(0)} \equiv X$.

4. Considérons maintenant $\mathcal{A}^{(0)}$. Soit $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$ le diviseur de $\mathcal{A}$ fixant $10\ldots0$, $\mathfrak{X}_0^{(i)} = \mathfrak{X}^{(i)}$ son constituant de champ q_i, et Ξ' le groupe déduit de X' en y regardant les variables comme homogènes. I' étant premier à X' (I' est semi régulier), Ξ' à l'ordre de X' et est évidemment $\leqq \mathfrak{X}$. D'ailleurs $\mathcal{A}^{(0)} \equiv \mathcal{A}$ (même si $n=\pi=2$) (2). Donc $\mathfrak{X}^{(0)} \equiv \mathfrak{X}$, et $(\mathfrak{X}, 1) = (\mathfrak{X}^{(0)}, 1) = (\mathcal{A}, 1) : \frac{s_{0n}}{\pi^2-1}$; donc $\mathfrak{X} = \Xi'$.

La forme générale des matrices de $\mathfrak{X}$ est

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{array}{cc|ccc} \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \ldots \\ 0 & \beta'_{11} & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \alpha'_{22} & \ldots \\ 0 & \beta'_{21} & \beta_{22} & \beta'_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\},$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I' comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans A. Alors la matrice $\mathfrak{M}_1$ des éléments de $\mathfrak{M}$ dont les deux indices sont $\neq 1$ est la matrice générale de A_1, et $\alpha_{11}\beta'_{11} = 1$. En multipliant par une m on peut ramener α_{11} et β'_{11} à 1. Les α'_{j1}, β'_{j1} ou $j \neq 1$ (ou les α_{1i}, α'_{1i} où $i \neq 1$) et la partie réelle de α'_{11} [d'après (5) ou (9) de **1, 3**] sont arbitraires, et les coefficients restants de $\mathfrak{M}$ sont déterminés par le choix de ceux-là et de ceux de $\mathfrak{M}_1$. Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont proportionnels. *Donc* $\mathfrak{X} = \{A_1 P, m_{1i'}\} I' | I' = \{A_1 P, m_{1i'}\} | J$. De là encore $(\mathfrak{X}, 1) = (\pi - 1)(X, 1)$.

Au lieu des $\pi^2 - 1$ systèmes $q_0^{y_1}\, y_1 \neq 0$ de X, on obtient ici de la même manière dans $\mathfrak{X}$ un seul système, $\mathfrak{q}_0^1$ de degré π^{2n-3}. Au lieu de q_0^0, on obtient ici de même (les $\pi^2 - 1$ points autres que l'origine de chaque génératrice du cône $q_{0,n-2,a_1}$ forment un seul symbole) pour $\mathfrak{X}$ un système $\mathfrak{q}_0^0$ de degré $\frac{\pi^2 s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$ (qui disparaît si $n \leq 3$). Au lieu des $\pi^2 - 1$ points autres que $0\dots 0$ fixés par $X^{(0)}$, on a ici un seul symbole fixé par $\mathfrak{X}^{(0)}$, et ce symbole, joint à $\mathfrak{q}_0^1$, $\mathfrak{q}_0^0$, forme $\mathfrak{q}_0$.

Si $\mathfrak{A}^{(0)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré $\delta\ (> 1)$, $\mathfrak{X}^{(0)}$ fixe celui qui contient $10\dots 0$. Il faut donc que n soit > 3, et alors, ou bien $\delta = 1 + \frac{\pi^2 s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$, ou bien $\delta = 1 + \pi^{2n-3}$. Si $\delta = 1 + \frac{\pi^2 s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$, δ, divise le degré π^{2n-3} de l'autre système d'intransitivité de $\mathfrak{X}^{(0)}$, ce qui est absurde. Si $\delta = 1 + \pi^{2n-3}$, δ divise $\frac{s_{0,n-2}}{\pi^2 - 1}$. Donc $(\pi^2 - 1)\delta$ est $\leq s_{0,n-2}$, et *a fortiori*

$$\pi^{2n-1} - \pi^{2n-3} \leq \pi^{2n-5} + \pi^{n-2},$$

d'où, en divisant par π^{n-2} (n est > 3), et en remplaçant 1 par $\pi^{n-1} - \pi^{n-3}$, $\pi^{n+1} < 2\pi^{n-1}$ ou $\pi^2 < 2$, ce qui ne se peut. *Donc* $\mathfrak{A}^{(0)}$ *est primitif pour* $n > 2$.

Pour $n = 2$, en posant $\frac{x_1}{y_1} = z$ et en changeant la notation, $\mathfrak{X} = \Sigma(z, \mu z + \mu')$ (μ et μ' réels, et $\mu \neq 0$, d'ailleurs quelconques) est d'ordre $\pi(\pi - 1)$, et le champ du $g^{\pi}_{\pi(\pi-1)}$ transitif $\mathfrak{X}^{(0)}$ est formé des points substitués à $z = 0$. *Donc* $\mathfrak{A}^{(0)}(2, \pi)$ *est semblable à* $\mathfrak{L}(2, \pi)$ (*S.*, 73, 85) *qui est trois fois transitif* (*S.*, 78).

5. Prenons maintenant a sous la forme ε, et soit X_1 le diviseur de A qui fixe $10\dots 0$ (d'après les systèmes d'intransitivité de A', X_1 est aussi le diviseur de A' qui fixe $10\dots 0$). La forme générale des matrices de X_1 est

$$\left\{\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\}$$

où les éléments dont les deux indices sont >1 forment une matrice du groupe A_1 de $a_1 = a - z_1 \dot{z}_1$ (je désignerai par A_1^0, $\mathcal{A}_1^0$, $A_1^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1^{(\lambda)}$ les groupes déduits de A_1 comme A^0, $\mathcal{A}^0$, $A^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ de A). *Donc* X_1 *est formé de* π^2 *constituants parallèles semblables à* A_1, et $(X_1, 1) = \frac{(A, 1)}{s_{1n}}$. Donc X_1 a π^2 constituants transitifs de degré $s_{0,n-1}$ semblables à A_1^0 et $\pi^2(\pi-1)$ de degré $s_{1,n-1}$ semblables à $A_1^{(1)}$. Les π^2 points restants sont les points $z_1 0\ldots 0$ fixés par X_1, *dont les* $\pi+1$ *pour lesquels* $z_1^{\pi+1}=1$ *font partie de* q_1.

Cherchons les systèmes d'intransitivité du constituant X_1^1 de X_1 dont le champ est q_1, c'est-à-dire ceux des systèmes de X_1 pour lesquels $a=1$. Pour ceux de degré $s_{0,n-1}$, $a_1=0$; si donc $a=1$, on a $z_1^{\pi+1}=1$, *d'où* $\pi+1$ *systèmes d'intransitivité de degré* $s_{0,n-1}$ *de* $X_1^{(1)}$. Pour ceux de degré $s_{1,n-1}$, on a $a_1 \neq 0$. Si donc $a=1$, on a $a_1 = 1 - z_1^{\pi+1}$, z_1 n'étant pas racine de $z_1^{\pi+1}=1$. D'ailleurs $1-z_1^{\pi+1}$ est réel, et, pour chacune de ses $\pi-2$ valeurs autres que 0 et 1, z_1 prend $\pi+1$ valeurs, tandis que, pour la valeur 1, $z_1=0$. *D'où* $(\pi+1)(\pi-2)+1=\pi^2-\pi-1$ *systèmes d'intransitivité de degré* $s_{1,n-1}$ *de* X_1^1. Les systèmes obtenus pour X_1^1 contenant $s_{1n}-\pi-1$ points, on retrouve que X_1^1 fixe $\pi+1$ points de q_1.

6. Considérons maintenant $\mathcal{A}^{(1)}$. Soit $\mathcal{X}_1$ le diviseur de $\mathcal{A}$ qui fixe $10\ldots0$, $\mathcal{X}_1^{(1)}$ son constituant dans q_1, et Ξ_1 le groupe déduit de X_1 en y supposant les variables homogènes. Comme au n° 4, Ξ_1 a l'ordre de X_1 et est $\leqq \mathcal{X}_1$, et $(\mathcal{X}_1, 1) = (\mathcal{X}_1^{(1)}, 1) = (\mathcal{A}, 1) : \frac{s_{1n}}{\pi+1}$; donc $\mathcal{X}_1 = \Xi_1$.

D'ailleurs la matrice générale de $\mathcal{X}_1$ est

$$\mathfrak{M} = \left\{\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \qquad (\alpha_{11} \neq 0),$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de Γ' comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\alpha_{11} = 1$. Alors la matrice $\mathfrak{M}_1$ déduite de $\mathfrak{M}$ en supprimant la première ligne et la première colonne est la matrice générale de A_1. Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont proportionnels. Donc $\mathcal{X}_1 \equiv A_1$, et de nouveau $\mathcal{X}_1 = \Xi_1$.

Au lieu des $\pi^2 - 1$ constituants de X_1 semblables à $A_1^{(0)}$ où $z_1 \neq 0$, on obtient ici de même un seul constituant semblable à $A_1^{(0)}$, dont le champ est dans $\mathfrak{q}_1$. Au lieu de celui où $z_1 = 0$, on obtient pour $\mathcal{X}_1$ un constituant semblable à $\mathcal{A}_1^{(0)}$, dont le champ est dans $\mathfrak{q}_0$ (ce constituant disparaît si $n = 2$). Au lieu des $(\pi^2 - 1)(\pi - 1)$ constituants de X_1 semblables à $A_1^{(1)}$ où $z_1 \neq 0$, on a pour $\mathcal{X}_1$ $\pi - 1$ constituants parallèles semblables à $A_1^{(1)}$, dont $\pi - 2$ ont leur champ dans $\mathfrak{q}_1$ et un dans $\mathfrak{q}_0$. Au lieu des $\pi - 1$ constituants de X_1 semblables à $A_1^{(1)}$ où $z_1 = 0$, on a ici pour $\mathcal{X}_1$ un constituant semblable à $\mathcal{A}_1^{(1)}$, dont le champ est dans $\mathfrak{q}_1$ *et se réduit à un point si* $n = 2$. Donc, pour $n = 2$, $\mathcal{X}_1^{(1)}$ fixe deux points, et $\mathcal{A}^{(1)}(2, \pi)$ *est imprimitif* : son imprimitivité sera précisée tout à l'heure. Les systèmes d'intransitivité obtenus, joints au point $10\ldots0$ fixé par $\mathcal{X}_1$, épuisent $\mathfrak{q}_0$ et $\mathfrak{q}_1$.

Si $\mathcal{A}^{(1)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré $\delta\,(>1)$, $\mathcal{X}_1^{(1)}$ fixe celui qui contient $z_1 0\ldots0$ $(z_1 \neq 0)$. Donc δ a la forme

$$\delta = 1 + \rho s_{0,n-1} + \sigma s_{1,n-1} + \tau \frac{s_{1,n-1}}{\pi + 1}$$

$$(\rho, \tau = 0 \text{ ou } 1, \qquad \sigma \text{ entier} \geq 0 \quad \text{et} \quad \leq \pi - 2),$$

et δ divise le degré $\dfrac{s_{1n}}{\pi + 1} = \pi^{n-1}\dfrac{\pi^n - (-1)^n}{\pi + 1}$ de $\mathcal{A}^{(1)}$.

Soit d'abord $\rho = 1$. Alors δ a le facteur π^{n-2}, et $\dfrac{(\pi + 1)\delta}{\pi^{n-2}}$ divise $\pi^n - (-1)^n$. Or on a

$$\begin{aligned}\frac{(\pi + 1)\delta}{\pi^{n-2}} &= \pi^n + \pi^{n-1} + (-1)^{n-1}(\pi^2 - 1) + \sigma(\pi + 1)[\pi^{n-1} - (-1)^{n-1}] \\ &\quad + \tau[\pi^{n-1} - (-1)^{n-1}] \geq \pi^n + \pi^{n-1} - \pi^2 + 1 + \sigma\pi^n - \sigma\pi.\end{aligned}$$

Donc cette dernière quantité doit être $\leq \pi^n - (-1)^n \leq \pi^n + 1$. On doit donc avoir

$$\sigma\pi^n + \pi^{n-1} \leq \pi^2 + \sigma\pi,$$

d'où, en remplaçant σ par o au premier membre, par $\pi-2$ au second,

$$\pi^{n-1} \leqq 2\pi^2 - 2\pi < 2\pi^2 \quad \text{ou} \quad \pi^{n-3} \leqq 1, \quad \text{d'où} \quad n = 3,$$

et l'inégalité précédente devient $\sigma\pi^3 \leqq \sigma\pi$. Donc $\sigma = 0$, et $\frac{(\pi+1)\delta}{\pi^{n-2}} = \pi^3 + \pi^2(\tau+2) - \tau - 1$. Or on voit de suite que cette quantité ne peut être $\leqq \pi^n - (-1)^n = \pi^3 + 1$.

Soit donc $\rho = 0$, *et d'abord* $\sigma > 0$. *Si* $n \geqq 3$, δ est $\equiv 1 \bmod \pi$ et divise $\frac{\pi^n - (-1)^n}{\pi + 1}$. Donc $(\pi+1)\delta$ est $\leqq \pi^n + 1$, et l'on a *a fortiori*, en remplaçant $(\pi+1)\delta$ par $\pi s_{1,n-1}$,

$$\pi^{2n-2} < \pi^n - (-1)^n \pi^{n-1} + 1$$

d'où, en remplaçant le second membre par $2\pi^n$, l'impossibilité $\pi^{n-2} < 2$.

Si $n = 2$, en omettant le cas déjà traité (**2**) où $n = \pi = 2$, on a $\mathcal{A}^{(1)} \equiv \mathcal{A}$. Donc toute division en systèmes d'imprimitivité correspond à un $g_{\delta(\pi+1)}\mathcal{J} > \mathcal{N}_1$ (*S.*, 60). Or ici $s_{1,n-1} = \pi + 1$, et δ est $> \pi + 1$. Donc $(\mathcal{J}, 1)$ est $> (\pi+1)^2 > \pi(\pi+1)$. Or $\mathcal{A} \equiv \mathcal{G}(2, \pi)$ (**1**, **5**). Donc $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ serait $< \pi - 1$, et $\mathcal{G}(2, \pi)$ serait représentable en moins de π symboles, ce qui est impossible (*S.*, 86).

Soit $\sigma = 0$. Alors $\tau = 1$, et l'inégalité $(\pi+1)\delta \leqq \pi^n + 1$ devient, en remplaçant, dans δ, $s_{1,n-1}$ par $\pi^{2n-3} - \pi^{n-2}$,

$$\pi^{2n-3} - \pi^{n-2} \leqq \pi^n - \pi < \pi^n, \quad \text{ou} \quad \pi^{n-1} < \pi^2 + 1, \quad \text{ou} \quad \pi^{n-1} \leqq \pi^2.$$

Donc n est $\leqq 3$. *Soit d'abord* $n = 2$, donc $s_{1,n-1} = \pi + 1$, $\delta = 2$. En omettant le cas déjà traité (**2**) où $n = \pi = 2$, on a $\mathcal{A}^{(1)} \equiv \mathcal{A}$. Donc toute division en systèmes d'imprimitivité correspond à un $g_{2(\pi+1)}\mathcal{J} > \mathcal{N}_1$ (*S.*, 60). Or, en posant $\frac{z_1}{z_2} = z$, toute substitution de $\mathcal{A}$ a la forme $\alpha = \left(\frac{\alpha_{11}z + \alpha_{12}}{\alpha_{21}z + \alpha_{22}}\right)$ (avec les conditions indiquées dans I, **3**). Pour que α soit permutable à $\mathcal{N}_1 = |\mu z|$ (μ étant d'ordre $\pi+1$), il faut et suffit que $\alpha(\mu z)$ puisse se mettre sous la forme $(\mu z)^s \alpha$, d'où

$$z^2 \alpha_{11}\alpha_{21}\mu(1-\mu^s) + z[\alpha_{11}\alpha_{22}(\mu - \mu^s) + \alpha_{12}\alpha_{21}(1 - \mu^{s+1})] + \alpha_{12}\alpha_{22}(1-\mu^s) = 0.$$

Donc $\alpha_{11}\alpha_{21}=\alpha_{12}\alpha_{22}=0$. Si $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$, α est dans $\mathcal{X}_1$. Si $\alpha_{11}=\alpha_{22}=0$, α a la forme jz^{-1} (j quelconque dans $\mathcal{C}'$). Donc $\mathcal{Y}$ est le $g_{2(\pi+1)}^{\pi'+1}$ diédral $\{\mathcal{X}_1, z^{-1}\}$ où $\mathcal{X}_1$ est un $g_{\pi+1}^{\pi'-1}$ cyclique semi régulier fixant les symboles 0, ∞ échangés par z^{-1} (les $\pi+1$ points de q_0 permutés entre eux par $\mathcal{X}_1$ sont les racines de $z^{\pi+1}=-1$). On voit que $\mathcal{A}^{(1)}(2,\pi)$ *n'admet qu'une division en systèmes d'imprimitivité.*

Soit $n=3$, et désignons par r un système d'imprimitivité de degré $\delta=\pi^2-\pi+1$, correspondant à $\rho=\sigma=0$, $\tau=1$. Prenons a sous la forme h, et écrivons les variables dans l'ordre x, x_1, y_1. On peut supposer que le point fixé par $\mathcal{X}_1$ est $x00$. Pour les autres points de r, on a $x=0$ et $x_1\dot{y}_1-y_1\dot{x}_1\neq 0$ (puisque $\rho=\sigma=0$) ce sont donc les $\pi(\pi-1)$ points $(0, x_1, \theta x_1)$, $(x_1\neq 0)$, θ parcourant les éléments de $\mathcal{C}'$ qui sont hors de $\mathcal{C}$. Pour qu'une substitution α de $\mathcal{A}$ change $x00$ en $(0, x_1, \theta x_1)$, il faut que l'on ait $\alpha_{00}=0$, $\alpha_{10}=x_1$, $\beta_{10}=\theta x_1$. Supposons $\pi>2$. Alors r contient au moin 6 points autres que $x00$. Si α est dans le diviseur fixant r, elle doit remplacer 5 quelconques de ces points par 5 d'entre eux. Or α remplace le point $(0, x'_1, \theta' x_1)$ (θ' étant dans $\mathcal{C}'$ hors de $\mathcal{C}$ et $x'_1\neq 0$) par un point dont la coordonnée x est $x'_1(\alpha_{01}+\theta'\alpha'_{01})$, α_{01} et α'_{01} n'étant pas tous deux nuls ($\alpha_{00}=0$). Cette quantité ne peut évidemment pas s'annuler pour 5 valeurs de θ'. Donc $\pi=2$. $\mathcal{A}(3,2)$ a d'ailleurs été déjà étudié (I, **14**).

7. Considérons maintenant le constituant $\mathcal{A}^{0(i)}(n,\pi)=\mathcal{A}^{0(i)}$ de $\mathcal{A}^0$ dans q_i. Tout d'abord $\mathcal{A}^{0(i)}$ *est transitif*. Cela est clair si $\mathcal{A}^{(i)}$ est primitif, et on l'a vérifié pour $\mathcal{A}^{0(1)}(3,2)$ (I, **14**). La question ne se pose donc plus que pour $\mathcal{A}^{0(1)}(2,\pi)$, et l'on peut supposer $p>2$, sans quoi $\mathcal{A}^0\equiv\mathcal{A}$. Alors $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0)=2$, et $\mathcal{A}^{0(i)}\equiv\mathcal{A}^0$ (2). Si donc $\mathcal{A}^{0(1)}$ est intransitif, ses systèmes d'intransitivité, qui sont des systèmes d'imprimitivité de $\mathcal{A}^{(1)}$, sont de degré 2. Donc $(\mathcal{A}^0, 1)$ sera une puissance de 2, ce qui est absurde puisque $\mathcal{A}^0\equiv\mathfrak{V}(2,\pi)$.

Je dis que, *si* $\mathcal{A}^{(i)}$ *est primitif*, $\mathcal{A}^{0(i)}$ *est primitif*. On peut omettre le cas déjà traité (I, **14**) où $\pi=2$ avec $n=3$ et le cas $n=1$ où $\mathcal{A}^0=\mathcal{A}=1$. Le diviseur de $\mathcal{A}^0$ qui fixe le même symbole que $\mathcal{X}_i$ est le p. g. c. d. $\mathcal{X}_i^0$ de $\mathcal{X}_i$ avec $\mathcal{A}^0$, normal dans $\mathcal{X}_i$, et $\mathcal{X}_i|\mathcal{X}_i^0\equiv\mathcal{A}|\mathcal{A}^0$

a pour ordre le p. g. c. d. π_1 de n et de $\pi+1$ (I, **2**; *cf.* *S.*, 55). Je désignerai par $\mathfrak{X}_i^{0(i)}$ le constituant de $\mathfrak{X}_i^0$ dont le champ est $\mathfrak{q}_i$.

Le diviseur $\mathfrak{Y} = A_1 PI' | I'$ de $\mathfrak{X}$ a, d'après les nos **3** et **4**, les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{X}$, et le diviseur $\mathfrak{Y}^0 = A_1^0 PI' | I'$ de $\mathfrak{Y}$ a, pour $n \geqq 4$, les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{Y}$. Cela est clair pour le système $\mathfrak{q}_{0}^1$, et, si $n > 4$, pour le système $\mathfrak{q}_{0}^0$, car alors A_1^0 a les mêmes systèmes d'intransitivité que A_1 ; si $n = 4$, $A^0 I' | I'$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $A_1 I' | I'$, et, si $n \leqq 3$, $\mathfrak{q}_0^0$ disparaît.

Le groupe $\mathfrak{X}_1 \equiv A_1$ a un diviseur correspondant au diviseur A_1^0 de A_1, et ce diviseur est contenu dans $\mathfrak{X}_1^0$. Donc $\mathfrak{X}_1^0$ a, pour $n > 3$ (a a ici la forme ε), les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{X}_1$.

Soit $n = 3$. Alors $\pi_1 = 1$ ou 3. Si $\pi_1 = 1$, $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}$. Soit donc $\pi_1 = 3$ et $\pi + 1 = 3\mu$. Considérons une substitution ξ de $\mathfrak{X}_1$ ramenée à la forme où $\alpha_{11} = 1$ (avec les notations du n° **6**). Pour que ξ, qui est alors dans A, soit dans $\mathfrak{X}_1^0$, il faut et suffit qu'il y ait dans ξJ une substitution de déterminant 1. Or $|\xi|$ a la forme j^k, en posant $\iota'^{\pi-1} = j$ (I, **2**). Il faut donc et suffit qu'on puisse trouver un entier t tel que $j^{k+3t} = 1$, c'est-à-dire que k soit multiple de 3. Or soit ξ_1 la sous-matrice de ξ contenue dans A_1. Écrivons x au lieu de z_1, et faisons le changement de variables qui ramène $z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3$ à la forme $\omega(x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1)$ (I, **2**). On aura $A_1 = \Sigma_1^{\pi+1} A_1^0 m_{1\iota'}^k$. Il faut et suffit que ξ_1 soit dans le diviseur $\Delta = \Sigma_0^{\mu-1} A_1^0 m_{1\iota'}^{3l}$ de A_1. Or le constituant $A_1^{0(0)}$ de A_1^0 dans le champ des solutions (autres que 00) de $x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1 = 0$ a $\pi+1$ systèmes d'intransitivité répondant aux éléments $\iota'^0, \iota', \ldots, \iota'^\pi$ de $\mathfrak{S}$: celui de ces systèmes qui répond à ι'^l est formé des $\pi^2 - 1$ points $(\alpha_{11} \iota'^l, \beta_{11} \iota'^l)$, α_{11} et β_{11} parcourant $\mathfrak{S}$ sans s'annuler à la fois (**I**). Mais $m_{1\iota'}^{3i}$ remplace le point $(\alpha_{11} \iota'^l, \beta_{11} \iota'^l)$ par $(\alpha_{11} \iota'^{l+3i}, \beta_{11} \iota^{-3i} \iota'^{l+3i})$. Donc, dans Δ, les systèmes d'intransitivité de A_1^0 qui répondent à ι'^l et à ι'^{l+3i} se réunissent en un. Donc Δ n'a que trois systèmes d'intransitivité. Donc, dans $\mathfrak{X}_1^0$, le système de degré $s_{02} = (\pi^2 - 1)(\pi + 1)$ est remplacé par 3 systèmes de degré $\frac{1}{3} s_{02} = (\pi^2 - 1)\mu$, les $\pi - 2$ systèmes de degré $s_{12} = \pi(\pi^2 - 1)$ et celui de degré $\frac{s_{12}}{\pi+1} = \pi(\pi - 1)$ étant conservés.

Si donc $\mathfrak{A}^{0(1)}$ a un système d'imprimitivité de degré $\delta (> 1)$, $\mathfrak{X}_1^{0(1)}$ fixe celui qui contient 100. Donc δ a la forme $1 + \rho' \mu(\pi^2 - 1) +$

$\sigma\pi(\pi^2-1)+\tau\pi(\pi-1)$, ρ' étant l'un des nombres $0, 1, 2, 3$, σ l'un des nombres $0, \ldots, \pi-2$, τ l'un des nombres $0, 1$, et δ divise le degré $\pi^2(\pi^2-\pi+1)$ de $\mathcal{A}^{0(1)}$.

Si $\rho'=3$, comme $3\mu=\pi+1$, la discussion est la même que pour $\mathcal{A}^{(1)}$ dans le cas où $\rho=1$. *De même si* $\rho'=0$. Il reste seulement à considérer les cas $\rho'=1, 2$.

Soit $\rho'=1$. Supposons d'abord δ divisible par p. Alors p divise $1-\mu$.

Si $\mu=1$, on a $\pi=2$, et l'on rentre dans le cas déjà traité de $\mathcal{A}^0(3,2)$ (I, **14**).

Soit donc $\mu=1+kp^\beta$, *k et β étant* $\geqq 1$, *et k premier à p.* Comme $\pi+1=3\mu$, on a $\pi-3kp^\beta=2$, d'où $p=2, \pi>2$, et $\beta=1$. Alors

$$\frac{\delta}{p}=-k+\frac{\pi^2}{p}(1+kp)+\sigma\frac{\pi}{p}(\pi^2-1)+\tau\frac{\pi}{p}(\pi-1)$$

est premier à p et doit diviser $\pi^2-\pi+1$. Mais cela est impossible, $-k+\frac{\pi^2}{p}(1+kp)$ étant $>\pi^2>\pi^2-\pi+1$. Donc δ est premier à p et doit diviser $\pi^2-\pi+1$. Cela est encore impossible, $\rho'\mu(\pi^2-1)$ étant $>\pi^2-\pi+1$.

Soit $\rho'=2$. Supposons δ divisible par p. Alors p divise $1-2\mu$ qui est $\neq 0$. Soit $2\mu=1+kp^\beta$, k et β étant $\geqq 1$, et k premier à p. Comme $3\mu=\pi+1$, on a $2\pi-3kp^\beta=1$, ce qui est absurde. Donc δ est premier à p et doit diviser $\pi^2-\pi+1$. Or on voit comme dans le cas précédent que cela est impossible.

Il résulte de ce qui précède, en négligeant $\mathcal{A}^0(3, 2)$ étudié séparément (I, **14**), que l'on peut raisonner sur $\mathcal{A}^0$ comme sur $\mathcal{A}$, et que $\mathcal{A}^{0(i)}$ est bien primitif en même temps que $\mathcal{A}^{(i)}$.

La question se pose maintenant de savoir si $\mathcal{A}^{0(1)}(2,\pi)$ *et* $\mathcal{A}^{0(1)}(3,2)$ *n'ont pas d'autres systèmes d'imprimitivité que* $\mathcal{A}^{(1)}(2,\pi)$ *et* $\mathcal{A}^{(1)}(3,2)$.

Considérons d'abord $\mathcal{A}^{(1)}(3,2)$. Avec les notations déjà employées (I, **14**). $\mathcal{X}_1$ est ici le g_6 $\{\beta,\zeta\}$ qui a les systèmes d'intransitivité *bcfgkqrst, del, hmp, ino, au.* $\mathcal{X}_1$ est le g_9, $\{\mathcal{X}_1^0, s_0\}$ qui a les systèmes d'intransitivité *bcfgkqrst, dehilmnop, au.* Soit s un système d'imprimitivité de $\mathcal{A}^{0(1)}$ de degré δ contenant v. $\mathcal{X}_1$ fixe s, et, $\mathcal{A}^{0(1)}$ étant de degré 12, $\delta=2, 3, 4$ ou 6. Si $\delta=2$, β montre que s contient *a* ou *u*, ce que contredit la forme de ζ. Si $\delta=3$, β montre que

s contient a et u, et V_1 et V_2 montrent que les autres systèmes de la division correspondante sont nécessairement *del*, *hmp*, *ino*; $\mathcal{A}^{0(1)}$ admet d'ailleurs ces systèmes d'imprimitivité. Si $\delta = 4$, ζ montre que s contient l, o et p, ce que contredit la forme de β. Si $\delta = 6$, β montre que s contient a et u, puis V_1 que s contient d, e et l, puis V_2 que s contient h, m et p, ce qui ne se peut. *Ainsi $\mathcal{A}^{0(1)}$ a une seule division en systèmes d'imprimitivité qui sont auv, del, hmp, ino, et $\mathcal{A}^{(1)}$ l'admet aussi.*

Considérons maintenant $\mathcal{A}^{(1)}(2, \pi)$. Si $p = 2$, π_1 se réduit à 1, et $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}$. *Soit donc $p > 2$*, d'où $\pi_1 = 2$. Ici $\mathcal{X}_1^{(1)}$ fixe les deux points 10 et 01 et a $\pi - 2$ constituants parallèles, semblables au $g^{\pi+1}A_1^{(1)}$, pour lesquels on a $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $a \neq 0$ (**6**). Déterminons les $\pi - 2$ champs de ces constituants. D'après leur définition on a, en posant $\frac{z_1}{z_2} = z$, pour chaque point z de ces $\pi - 2$ champs, $z \neq 0$, ∞ et $z^{\pi+1} \neq -1$. Donc $z^{\pi+1}$, qui est réel, prend $\pi - 2$ valeurs (autres que $0, \infty, -1$) qu'on peut représenter par $\zeta^{\pi+1}$ (ζ est déterminé à un facteur près de la forme j^k, en posant $\iota^{\pi-1} = j$), et, pour chacune d'elles, z prend les $\pi + 1$ valeurs ζj^k ($k = 0, \ldots, \pi$). Ce sont précisément ces $\pi + 1$ valeurs qui forment le système d'intransitivité contenant ζ.

Soit maintenant ξ une substitution de $\mathcal{X}_1$, ramenée à la forme où $\alpha_{11} = 1$ (avec les notations du n° **6**). Pour que ξ, qui est alors dans A, soit dans A^0, il faut et suffit qu'il y ait dans ξJ une substitution de déterminant 1. Or ξ a la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j^k \end{pmatrix}$. Il faut donc et suffit qu'on puisse trouver un entier t tel que $j^{k+2t} = 1$, c'est-à-dire que t soit pair. Donc le $g_{\frac{\pi+1}{2}}\mathcal{X}_1^0$ peut être considéré comme formé des substitutions $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j^{2t} \end{pmatrix}$ qui transforment ζ en les $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ points $j^{-2t}\zeta$. *Donc $\mathcal{X}_1^{0(1)}$ a $2\pi - 4$ systèmes d'intransitivité de degré $\frac{1}{2}(\pi + 1)$.*

Si $\mathcal{A}^{0(1)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré $\delta (> 1)$, $\mathcal{X}_1^{0(1)}$ fixe celui qui contient 10. Donc δ a la forme $1 + \sigma' \frac{\pi + 1}{2} + \tau$ $[0 \leqq \sigma' \leqq 2(\pi - 2), \tau = 0 \text{ ou } 1]$.

Si $\sigma' = 0$, la discussion est la même que pour $\mathcal{A}^{(1)}$ et conduit aux mêmes systèmes d'imprimitivité.

Soit $\sigma' > 0$. En omettant le cas déjà traité où $\pi = n = 2$ (**2**), on a $\mathcal{L}^{0(1)} \equiv \mathcal{L}^{0}$. Donc toute division en systèmes d'imprimitivité de $\mathcal{L}^{0(1)}$ correspond à un $g_{\delta\frac{\pi+1}{2}}$ $\mathcal{T} > \mathcal{N}_1^0$ contenu dans $\mathcal{L}^0$ (*S.*, 60).

Or δ est ici $> \sigma'\frac{\pi+1}{2}$. Donc $(\mathcal{T}, 1)$ est $> \sigma'\left(\frac{\pi+1}{2}\right)^2 > \sigma'\frac{\pi(\pi+1)}{4}$. Mais $\mathcal{L}^0 \equiv \mathfrak{v}(2,\pi)$ (I, **5**) est d'ordre $\frac{\pi(\pi^2-1)}{2}$. Donc $(\mathcal{L}^0, \mathcal{T})$ est $< \frac{2(\pi-1)}{\sigma'}$. Si donc σ' était $\geqq 3$, $\mathfrak{v}(2,\pi)$ serait représentable en moins de $\frac{2}{3}\pi$ symboles, ce qui ne se peut (*S.*, 90). *Donc σ' est* $\leqq 2$. D'ailleurs δ doit diviser le degré $\pi(\pi-1)$ de $\mathcal{L}^{0(1)}$.

Soient $\tau = 0$ *et* $\sigma' = 1$. Alors $\delta = \frac{\pi+3}{2}$. Si p divise δ on a $p = 3$, et $\frac{\delta}{3} = \frac{1}{2}(3^{K-1}+1)$ $(\pi = p^K)$ divise $\pi - 1 = 3^K + 3^{K-1} - 2\frac{\delta}{3}$, donc aussi $3 + 1 = 4$, d'où $3^{K-1} \leqq 7$, et $K \leqq 2$. Si $K = 1$, $\mathcal{T}$ est un g_6, et $\mathcal{L}^0$, isomorphe au g^4_{12}, n'a pas de g_6. Si $K = 2$, est un g_{30}, et $\mathcal{L}^0$, isomorphe au g^6_{360}, n'a pas de g_{30} [un tel g_{30}, ne divisant pas le g^5_{20} métacyclique (*S.*, 73) contiendrait 6 g_5 ; ne pouvant donc contenir 10 g_3, il n'en aurait qu'un ; or, dans un champ de 6 symboles, aucun g_3 ne peut être permutable à une s_5]. Donc δ est premier à p et divise $\pi - 1 = 2\delta - 4$, d'où $\pi = 5$ et $\delta = 4$. Donc $\mathcal{T}$ est un g_{12}. Or $\mathcal{L}^0$ est ici isomorphe au g^5_{60}, dont chaque g_3 est effectivement contenu dans un g^4_{12}. *Donc* $\mathcal{L}^{0(1)}(2, 5)$, *qui est la représentation de* $\mathfrak{v}(2, 5)$ *en* g^{20}_{60}, *admet une division en systèmes d'imprimitivité de degré* 4. On a déjà vu que $\mathcal{L}^{(1)}(2, 5)$ [isomorphe au g^5_{120} (I, **5**; *cf.* *S.*, 86)] *n'admet pas une telle division* : cela correspond au fait qu'aucun g_6 cyclique du g^5_{120} n'y divise un g_{24} (tout g_{24} du g^5_{120} est un g^4_{24} ; car, le g^5_{120} ayant 10 g_3, chacun de ses g_{24} en contient 4, d'après le théorème de Sylow).

Soient $\tau = 0$ *et* $\sigma' = 2$. Alors $\delta = \pi + 2$ ne peut diviser $\pi(\pi - 1)$.

Soient $\tau = 1$ *et* $\sigma' = 1$. Alors $\delta = \frac{\pi+5}{2}$. Si p divise δ, on a $p = 5$, et $\frac{\delta}{5} = \frac{1}{2}(5^{K-1}+1)$ divise $\pi - 1 = 5^K + 5^{K-1} - 2\frac{\delta}{5}$, donc aussi $5 + 1 = 6$, d'où $5^{K-1} \leqq 11$, et $K \leqq 2$. Si $K = 1$, $\mathcal{T}$ est un g_{15}, et $\mathcal{L}^0$, isomorphe au g^5_{60}, qui n'est pas représentable en g^4, n'a pas de g_{15}. Si $K = 2$, $\mathcal{T}$ est un $g_{15.13}$ et n'a qu'un g_{13} ; or $\mathcal{L}^0$ est isomorphe au $g^{26}_{24.25.13}$ $\mathfrak{v}(2, 5^2)$ de classe 24, où un g^{26}_{13} ne peut être permutable à une s_5 (*S.*, 58).

Donc δ est premier à p et divise $\pi - 1 = 2\delta - 6$. Donc $\pi + 5$ divise 12, et $\pi = 7$. Donc $\delta = 6$, et $\mathfrak{J}$ est un g_{24}. Or $\mathcal{A}^0(2, 7)$ est isomorphe au g_{168}^7 (*S.*, 105), où le diviseur fixant un symbole est un g_{24}^6. Donc tout g_4 cyclique du g_{168}^7, fixant nécessairement un symbole, est effectivement contenu dans un g_{24}. *Donc* $\mathcal{A}^{0(1)}(2, 7)$, *qui est la représentation de* $\mathfrak{v}(2, 7)$ *en* g_{168}^{42}, *admet une division en systèmes d'imprimitivité, de degré* 6. On a déjà vu que $\mathcal{A}^{(1)}(2, 7)$, isomorphe au $g_{336}^8 \mathfrak{L}(2, 7)$ (I, **5**), *n'admet pas une telle division* : cela correspond au fait que $\mathfrak{L}(2, 7)$, n'étant pas représentable en g^7 (*S*, 86), n'a pas de g_{48}.

Soient $\tau = 1$ *et* $\sigma' = 2$. Alors $(\mathcal{A}^0, \mathfrak{J})$ est $< \pi - 1$, et $\mathfrak{v}(2, \pi)$, isomorphe à $\mathcal{A}^0$, est représentable en moins de π symboles. Donc $\pi = 3^2$ (*S.*, 90), $\delta = 12$, et $(\mathfrak{J}, 1) = 60$. Or, dans le g_{360}^6 isomorphe à $\mathfrak{v}(2, 3^2)$, chaque g_5 est effectivement contenu dans un g_{60}. *Donc* $\mathcal{A}^{0(1)}(2, 3^2)$, *qui est la représentation de* $\mathfrak{v}(2, 3^2)$ *en* g_{360}^{72}, *admet une division en systèmes d'imprimitivité de degré* 12. On a déjà vu que $\mathcal{A}^{(1)}(2, 3^2)$, isomorphe au $g_{720}^{10} \mathfrak{L}(2, 3^2)$ (I, **5**), *n'admet pas une telle division*: cela correspond au fait que $\mathfrak{L}(2, 3^2)$, n'étant pas isomorphe au g_{360}^6 (*S.*, 81) n'a pas de g_{120}.

8. *Equations de* $\mathrm{A}(n, \pi)$, $\mathrm{A}^0(n, \pi)$. Soit $a = h$. Considérons le diviseur $\mathrm{X}^1 = \{\mathrm{X}, m_{1\iota}\}$ de A. Son constituant $\mathrm{X}^{1(0)}$ dans q_0 a trois systèmes d'intransitivité : l'un est formé des points $x_1 0 \ldots 0$ fixés par $\mathrm{X}^{(0)}$; l'autre des $q_0^{\prime 1}$ (il contient $010\ldots0$); le troisième, qui disparaît pour $n \leqq 3$ (**3**), est q_0'' (il contient $0010\ldots0$). $\mathrm{X} = \mathrm{A}_1\mathrm{P}$ et P sont normaux dans X^1. On a d'ailleurs, en posant $\{\mathrm{A}_1, m_{1\iota}\} = \mathrm{A}_1^1$ et $\{\mathrm{P}, m_{1\iota}\} = \mathrm{P}^1$, $\mathrm{X}^1 = \mathrm{A}_1^1\mathrm{P} = \mathrm{A}_1\mathrm{P}^1$. Enfin, comme $\mathrm{X} \equiv \mathrm{X}^{(0)}$ (**3**), et que $\{m_{1\iota}\}$ est isomorphe à son action sur les points $x_1 0 \ldots 0$ fixés par X (*donc premier à* X), *on a aussi* $\mathrm{X}^1 \equiv \mathrm{X}^{1(0)}$.

Posons maintenant, en désignant par e une racine de $e^2 = \iota$,
$t_i = \tau_i m_{ie} = \begin{vmatrix} x_i & e y_i \\ y_i & e^{-1} x_i \end{vmatrix}$. On a $t_i^2 = 1$, et t_i est permutable à A_1 et à A_1^1 (I, **7**).

Soit d'abord $n \geqq 4$. Comme t_1 échange les deux points $010\ldots0$, $e0\ldots0$, et T_{12} les deux points $0010\ldots0$, $10\ldots0$, on aura (*S.*, 56).

$$(1) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{X}^1 + \mathrm{X}t_1\mathrm{X}^1 + \mathrm{X}\mathrm{T}_{12}\mathrm{X}^1 = \mathrm{X}\mathrm{T}\mathrm{X}^1, \qquad \mathrm{T} = 1 + t_1 + \mathrm{T}_{12},$$

ou, puisque $t_1 \{m_{1\rho}\} t_1 = \{m_{1\rho}\}$ et $T_{12} m_{1\rho} T_{12} = m_{2\rho}$,

$$A = X^1 + X^1 t_1 X^1 + X^1 T_{12} X^1 = X^1 T X^1. \tag{2}$$

Désignons ξ par un quelconque des générateurs, τ_i, u_i, $V_{ik\rho}$ (I, 6) *où i et k sont* $\neq 1$, par ξ' un quelconque de ceux où i et k sont $\neq 1, 2$, et considérons les identités

$$t_1^2 = T_{12}^2 = 1, \qquad t_1 \xi t_1 = \xi, \qquad T_{12} \xi' T_{12} = \xi', \tag{3}$$

$$t_1 m_{1\rho} t_1 = m_{1, \dot{\rho}^{-1}}, \tag{4}$$

(5) $\begin{cases} t_1 V_{1k\rho} t_1 = t_k m_{1,-\dot{\rho}} m_{k,\dot{\rho}^{-1}} T_{2k} V_{12\dot{\rho}} T_{12} V_{12,-\dot{\rho}^{-1}} T_{2k} t_k, \quad t_k = \tau_k m_{ke}, \\ \quad e^2 = \nu \ (k \geqq 2), \\ \text{d'où, en transformant par } t_k, \text{ et en changeant } \rho \text{ en } e^{-1}\rho, \\ t_1 U_{1k\rho} t_1 = m_{1,e^{-1}\dot{\rho}} m_{k,-e\dot{\rho}^{-1}} T_{2k} V_{12,-e^{-1}\dot{\rho}} T_{12} V_{12,e\dot{\rho}^{-1}} T_{2k} \ (k \geqq 2), \end{cases}$

(6) $\begin{cases} t_1 U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = m_{0\theta} m_{1k} U_{01\sigma} u_{1\alpha} t_1 U_{01\tau} u_{1\beta}, \\ \theta = \dot{r} r^{-1}, \quad \sigma = \theta\rho, \quad \tau = e\rho r^{-1}, \quad \kappa = -\dot{\sigma}\tau^{-1} = r e^{-1}, \\ \alpha = \lambda - r - \dot{r}, \quad \beta = -\alpha\nu (r\dot{r})^{-1}, \quad r = \lambda - \rho\dot{\rho}\nu, \\ \text{(la formule vaut pour } \lambda = 0 \text{ } ou \text{ } \rho = 0\text{, mais non pour } \lambda = \rho = 0). \end{cases}$

$$t_1 T_{12} = T_{12} t_2, \qquad \text{d'où, par inversion,} \qquad T_{12} t_1 = t_2 T_{12}. \tag{7}$$

$$T_{12} u_{1\lambda} T_{12} = u_{2\lambda}, \tag{8}$$

$$T_{12} m_{1\rho} T_{12} = m_{2\rho}. \tag{9}$$

(10) $\begin{cases} T_{12} V_{12\rho} T_{12} = t_1 U_{12,-e\dot{\rho}} t_1, \\ \text{d'où, en transformant par } t_1, \text{ d'après (3) et (7),} \\ T_{12} U_{12\rho} T_{12} = U_{12\dot{\rho}}, \end{cases}$

(11) $\begin{cases} T_{12} V_{j2\rho} T_{12} = t_1 U_{j1,e\rho} t_1 \qquad (j > 2 \quad \text{ou} \quad j = 0), \\ \text{d'où, en transformant par } t_1 \text{ et } t_1 t_k \text{ (pour } j = k > 2\text{), d'après (3) et (7),} \\ T_{12} U_{1j\rho} T_{12} = U_{2j\rho} \qquad (j > 2 \quad \text{ou} \quad j = 0), \\ T_{12} V_{1k\rho} T_{12} = V_{2k\rho} \qquad (k > 2). \end{cases}$

Supposons connues les équations de $A_1 \equiv A(n-2, \pi)$. P^1 *est défini par les équations de* P (I, **15**) *jointes à celles de la forme* $m_{1\nu}^{-1} \gamma m_{1\nu} = \gamma'$, γ *parcourant les générateurs de* P, *et à* $m_{1\nu}^{\pi^2-1} = 1$ [car P^1 vérifie ce système, et ce système définit un groupe d'ordre $\leqq (P^1, 1)$ (*E.*, 19)]. *On connaît aussi toutes les relations de la forme* $\alpha^{-1}\beta\alpha = \beta'$, α *parcourant les générateurs de* A_1, *et* β *ceux de* P^1 (I, **7**). *L'ensemble* S *de ces trois systèmes définit* X^1 [car X^1

vérifie S, et S définit un groupe d'ordre $\leqq (X^1, 1)$ (¹)], *et les équations* (3)-(11), *jointes à* S, *définissent* $A(n, \pi)$ (²).

Pour l'établir, il suffit de montrer que TX^1T est, *en vertu de ces équations*, $\leqq X^1TX^1$. Car alors le groupe Z défini par ces équations sera $\leqq X^1TX^1$, donc $\leqq A$. Mais comme A les vérifie, A est $\leqq Z$. Donc $Z = A$ (*cf.*, *S.*, 68).

Dans ce qui suit les relations employées entre les éléments de X^1 seront employées, bien entendu, comme des conséquences des équations de X^1. On a d'abord, d'après (5) (en négligeant les derniers indices des u, m, V, U),

$$T_{12}V_{12}t_1 = m_1 m_2 V_{12} t_1 U_{12}. \tag{12}$$

D'après (5) encore

$$X^1 t_1 U_{12} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} T_{2k} V_{12} T_{12} V_{12} T_{2k} \qquad (k > 2).$$

Or $T_{2k}V_{12} = V_{1k}T_{2k}$, et $V_{12}V_{1k} = V_{1k}V_{12}$. Donc, d'après (11), le dernier complexe s'écrit $X^1T_{12}V_{12}T_{2k}T_{12}V_{12}T_{2k}$, ou, en remplaçant $V_{12}T_{2k}T_{12}$ par $T_{2k}T_{12}V_{2k}$, puis T_{2k} par $m_{2,-1}V_{2k1}V_{k2,-1}V_{2k1}$ (I, **6**), $X^1T_{12}V_{2k}V_{k2}V_{2k}T_{12}V_{2k}V_{12}T_{2k}$, ou, employant deux fois (11) $X^1T_{12}V_{k2}T_{12}V_{1k}V_{2k}V_{12}T_{2k}$, ou, d'après (11) et (5),

$$X^1 T_{12} V_{12}(T_{2k} V_{1k} V_{2k} V_{12} T_{2k}),$$

ou, en remplaçant la parenthèse par $V_{12}V_{k2}V_{1k} = V_{12}V_{1k}V_{k2}V_{12}$ (I, **7**), en observant que V_{12} est permutable à V_{1k}, et en employant (11), $X^1T_{12}V_{k2}V_{12}$. Comme V_{k2} est permutable à V_{12}, on a finalement, en transformant par T_{2l},

$$X^1 t_1 U_{1l} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{k2} T_{2l} \qquad (k > 2;\ l \geqq 2;\ k \neq l); \tag{13}$$

d'où, en transformant par t_l, t_k, $t_l t_k$,

$$\left.\begin{aligned}
&(14) \quad X^1 t_1 V_{1l} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{k2} t_2 T_{2l}\\
&(15) \quad X^1 t_1 V_{1k} U_{1l} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{k2} t_k T_{2l}\\
&(16) \quad X^1 t_1 V_{1k} V_{1l} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} V_{k2} t_2 t_k T_{2l}
\end{aligned}\right\} \quad (k > 2;\ l \geqq 2;\ k \neq l) \text{ (³)}$$

(¹) On voit de même que X est défini par celles des équations de X^1 où ne figure pas $m_{1\nu}$. Les équations de $\mathfrak{X}$ s'obtiennent d'une façon toute semblable.

(²) On peut évidemment éliminer les U_{1j} ou les V_{1j} ($j = 0, 2, \ldots, \nu$) et ne prendre qu'une équation dans chacune des formules (5), (10), (11) [mais, dans (11), l'équation prise ne peut être la troisième que si on lui adjoint une des autres équations correspondant à $j = 0$].

(³) Les seconds membres de (13) et de (16) doivent être, comme les premiers, symétriques en k et l : on le vérifie en transformant par T_{kl}. Les formules (14) et (15) ne diffèrent que pour $l > 2$.

On a encore, d'après (5),

$$X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} t_2 V_{12} T_{12} V_{12} T_{2k},$$

d'où, en remplaçant $t_2 V_{12}$ par $U_{12} t_2$, puis $T_{12} V_{12} U_{12}$ par $T_{12} U_{12} V_{12} u_1 = u_2 U_{12} T_{12} V_{12}$ (I, **7**),

$$X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} t_2 T_{12} V_{12} T_{2k}.$$

ou, en remplaçant $V_{12} t_2 T_{12}$ par $t_2 U_{12} T_{12} = t_2 T_{12} U_{12}$, puis $T_{12} t_2 T_{12}$ par t_1, et en faisant passer T_{2k} à gauche,

(17) $$X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} t_1 = X^1 t_1 U_{1k} V_{1k} \qquad (k \geqq 2).$$

On a, d'après (5) et (6),

$$X^1 t_1 V_{12} U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} t_2 U_{01} u_1 t_1 U_{01} u_1,$$

λ *ou* ρ pouvant être nul (mais non λ et ρ). De là, t_2 étant permutable aux éléments suivants, et V_{12} à $U_{01} u_1$, en employant (12), en transformant par T_{2k}, et en faisant passer t_k à gauche

(18) $$X^1 t_1 V_{1k} U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} U_{01} u_1 \qquad (\lambda \text{ ou } \rho \text{ peut être nul})$$

d'où, en transformant par t_k,

(19) $$X^1 t_1 U_{1k} U_{01\rho} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 U_{1k} U_{01} u_1 \qquad (\lambda \text{ ou } \rho \text{ peut être nul}).$$

Si, dans (18) et (19), on fait $\rho = 0$, la fomule (6), qui a été employée, se simplifie, et l'on voit qu'au second membre U_{01} se réduit aussi à 1; d'où

(20) $$\left\{\begin{array}{l} X^1 t_1 V_{1k} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} u_1 \\ X^1 t_1 U_{1k} u_{1\lambda} t_1 = X^1 t_1 U_{1k} u_1 \end{array}\right\} \quad (\lambda \neq 0).$$

La formule (5) donne

(21) $$X^1 t_1 V_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} T_{2k} t_k, \qquad X^1 t_1 U_{1k} t_1 = X^1 T_{12} V_{12} T_{2k}$$

qui remplace (20) pour $\lambda = 0$ (1).

---

(1) $X' t_1 V_{1k} t_1$ ne peut se ramener à $X' t_1 V_{1k} u_1$ (ni par suite $X' t_1 U_{1k} t_1$ à $X' t_1 U_{1k} u_1$), car $t_1 V_{1k\rho} t_1 u_{1\lambda} V_{1k\sigma}$ devrait être dans $X' t_1$, et par suite changer le point $10\ldots0$ en $0e^{-1}0\ldots0$, ce qui n'a pas lieu.

Considérons enfin $X^1 t_1 V_{12} U_{12} U_{01}^{\rho} u_1^{\lambda} t_1$, où U_{01}, U_{12}, V_{12} sont permutables à u_1, et entre eux mod $\{u_1\}$. En écrivant ce complexe sous la forme $X^1 t_1 V_{12} U_{01} u_1 t_1 . t_1 U_{12} t_1$, on voit, d'après (18) et (5), qu'il est égal à $X^1 t_1 V_{12} U_{01} u_1 V_{12} T_{12} V_{12}$ ou, puisque V_{12} est permutable à $U_{01} u_1$, d'après (5) et (12), à $X^1 t_1 U_{01} u_1 U_{12} t_1 V_{12}$, ou, d'après (19), à $X^1 t_1 U_{12} U_{01} u_1 V_{12}$. On a donc finalement

$$(22)\qquad X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} U_{01}^{\rho} u_1^{\lambda} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} U_{01} u_1 \qquad (\lambda \text{ ou } \rho \text{ peut être nul}).$$

De là, comme tout à l'heure, pour $\rho = 0$,

$$(23)\qquad X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} u_1^{\lambda} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} u_1 \qquad (\lambda \neq 0).$$

La formule (17) remplace (23) pour $\lambda = 0$.

Réduisons maintenant $X^1 t_1 V_{1k_1} \dots V_{1k_r} U_{1l_1} \dots U_{1l_s} U_{01}^{\theta} u_1 t_1 X^1$, les k_i, l_i étant $\neq 0$, et θ étant égal à 0 ou à 1. Si r ou s est > 1, ou si $k_i \neq l_i$, on ramène cette expression, en introduisant t_1^2, d'après (21), à $X^1 T_{12} V_{12} t_1 V_{1k'_1} \dots V_{1k'_{r'}} U_{1l'_1} \dots U_{1l'_{s'}} U_{01}^{\theta} u_1 t_1 X^1$ qui, d'après (12), se ramène à la forme primitive où $r + s$ est diminué de 1. On arrive finalement à des cas déjà traités, et l'on voit, d'après les résultats obtenus, que $t_1 X^1 t_1$ est dans $X^1 t_1 X^1 + X^1 T_{12} X^1$.

Passons au complexe $T_{12} X^1 T_{12} = T_{12} A_1^1 P T_{12}$. T_{12} transforme : 1° les générateurs de P autres que V_{12}, U_{12} en éléments de A_1, V_{12} en $t_1 U_{12} t_1$, et U_{12} en U_{12} ; 2° V_{j2} ($j > 2$ ou $j = 0$) en $t_1 U_{1j} t_1$, V_{2j} en V_{1j}, m_1, τ_1, t_1 en m_2, τ_2, t_2, et chacun des autres générateurs de A_1^1 en lui-même. Donc, t_1 étant permutable à A_1^1, et P normal dans X^1, $T_{12} X^1 T_{12}$ est $\leqq X^1 (t_1 P)^m$, m étant un certain entier. Or, ϖ désignant un élément arbitraire de P, $X^1 t_1 \varpi t_1 P (t_1 P)^{m-2} X^1$ se ramène, d'après les formules (13)-(23) (V_{k2}, T_{2l}, t_l sont permutables à $t_1 P$ pour $k > 2$ ou $k = 0$ et $l \geqq 2$), ou à $X^1 (t_1 P)^{m-1} X^1$, ou à $X^1 T_{12} P (t_1 P)^{m-2} X^1$. De même $X^1 T_{12} \varpi t_1$ se ramène, d'après (5)-(11), à $X^1 T_{12} V_{12}^{\theta} t_1$ ($\theta = 0$ ou 1), donc, d'après (7), (12), ou à $X^1 T_{12}$, ou à $X^1 t_1 U_{12}$. On a donc

$$X^1 T_{12} P (t_1 P)^{m-2} X^1 = X^1 T_{12} P (t_1 P)^{m-3} X^1 + X^1 (t_1 P)^{m-2} X^1.$$

En continuant ainsi on voit que $X^1 T_{12} X^1 T_{12} X^1$ est dans $X^1 T_{12} X^1 + X^1 t_1 X^1$, donc $T_{12} X^1 T_{12}$ dans $X^1 T X^1$.

Chacun des deux complexes $X^1 t_1 X^1 T_{12} X^1$, $X^1 T_{12} X^1 t_1 X^1$ étant formé des inverses des éléments de l'autre, il suffit de considérer le premier, qui se réduit à $X^1 t_1 P T_{12} X^1$. Or $X^1 t_1 \varpi T_{12} X^1$ se ramène, d'après (5)-(11), à $X^1 t_1 V_{12}^{\theta} T_{12} X^1$ ($\theta = 0$ ou 1), donc, d'après (7), (12), ou à $X^1 T_{12} X^1$, ou à $X^1 t_1 X^1$. Donc $t_1 X^1 T_{12}$ et de même $T_{12} X^1 t_1$ sont dans $X^1 T X^1$. Donc enfin $T X^1 T$ est dans $X^1 T X^1$.

Soit maintenant $n = 3$. Alors T_{12} n'existe pas. Mais le système d'intransitivité de $X^{1(0)}$ qui, pour $n \geqq 4$, contient $0010\ldots0$ n'existe pas non plus (**3**). Donc $A = X^1 + X^1 t_1 X^1$ (¹). L'analyse précédente subsiste en supprimant tout ce qui concerne les générateurs dont un indice est > 1. *Les équations de* A *sont alors fournies par* (3) (*où l'on remplace* T_{12} *par* 1), (4), (6) *jointes aux équations de* X^1.

Pour $n = 2$, *ces mêmes équations* [*où l'on fait, dans* (6), $\rho = 0$, *donc* $m_{00} = 1$] *fournissent les équations de* $\{U(2, \pi), m_{1e}\}$. En éliminant t_1 à l'aide de $t_1 = \tau_1 m_{1e}$, e disparaît aussi, et l'on en déduit aisément les équations de $U(2, \pi)$ [*cf.* **10** et *S.*, 85, 92 où c est mis pour τ_1, et a pour m_{1e} si $\pi \equiv 1 \bmod 4$ ou si $p = 2$, et pour $m_{1e}\tau_1^2$ si $\pi \equiv 3 \bmod 4$].

9. *Il reste à former les équations de* $A^0(n, \pi)$ *pour* $n \geqq 3$. Désignons par m le générateur m_{2e} si $n \geqq 4$, le générateur $m_{0,\varepsilon-1}$ (I, **2**) si $n = 3$. Adjoignons aux équations de A les équations (19)-(21) de (I, **7**) qui en résultent ou qui définissent des générateurs auxiliaires (elles fournissent en particulier l'expression de chaque m_i par m et les générateurs de A^0 conformément à la relation plus générale $A = \Sigma_0^{\pi} A^0 m^k$). Après avoir remplacé t_i par $\tau_i m_{ie}$, réunissons dans chaque équation de A, les différents m_i en une seule puissance de m : cette puissance, étant dans A^0 (d'après l'équation elle-même), est de la forme $m^{k(\pi+1)}$. On peut maintenant négliger les équations où figurent les m_i autres que m, puisque ces équations ne servent qu'à définir ces m_i comme générateurs supplémentaires. On peut de plus, à l'aide de la formule (21) de (I, **7**), si $n \geqq 4$, éliminer $m^{\pi+1}$ des autres équations où il figure; si $n = 3$, $m^{\pi+1} = 1$. Les équations de A se composent alors : 1° d'un système E formé des

(¹) La représentation de A relative à X^1 est alors deux fois transitive (*s.*, 56).

équations où ne figure pas m; 2° des équations de la forme $m^{-1}\varphi m=\varphi'$, $m^{\pi+1}=\varphi''$, φ parcourant les générateurs de Λ^0, et φ', φ'' étant connus. *Le système* E′ *obtenu en adjoignant à* E *les conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité fournies par les autres équations définit* $\Lambda^0(n,\pi)$ (*E.*, 19).

II. — Groupe gauche.

10. On a vu (I, **18**) que G (n,π) remplace le point 10...0 par un point quelconque (autre que 0...0). G (n,π) *est donc un* g^{π^n-1} *transitif.*

Soit X le diviseur de G qui fixe 10...0. Les substitutions de X ont des matrices de la forme M du n° **3** où les éléments dont les deux indices sont $\neq 1$ forment une matrice quelconque M_1 du groupe G_1 de $a_1=\Sigma_2^n(x_iy'_i-y_ix'_i)$ [je désignerai par G'_1, G''_1, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}'_1$, les groupes déduits de G_1 comme G′, G″, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ (G'_1 ne divise pas G′)], et où l'on peut prendre arbitrairement dans $\mathfrak{S}$ ou bien les éléments autres que β'_{11} $(=1)$ de la seconde colonne [alors les formules (1) et (2) de I, **17** déterminent les $\alpha_{1i}, \alpha'_{1i}$ où $i\neq 1$ par les autres éléments de M, ou bien les éléments autres que $\alpha_{11}(=1)$ de la première ligne [alors les formules (3) et (4) de I, **17** déterminent les α'_{j1}, β'_{j1} où $j\neq 1$]. Donc $(X, G_1)=\pi^{n-1}$. *Les matrices du* $g_{\pi^{n-1}}$ P *déjà considéré*(I, **23**) *sont celles des* M *où* $M_1=1$. P *est premier à* G_1 *et permutable à chaque substitution de* G_1, *donc normal dans* $X=G_1P$. Comme $m_{11}^{-1}\gamma$ et $\tau_1^{-1}\gamma\tau_1$ fixent 10...0 et sont d'ordre $\pi-1$ mod G (γ est permutable à m_{11}), les diviseurs de G′, G″ qui fixent 10...0 sont respectivement $X'=\{X, m_{11}^{-1}\gamma\}$ $=\{X, \tau_1^{-1}\gamma\tau_1\}$ et $X''=\{X, m_{11}^{-2}\gamma^2\}=\{X, \tau_1^{-1}\gamma^2\tau_1\}$ (si $p=2$, $X''=X'$). $m_{11}^{-1}\gamma$ et $\tau_1^{-1}\gamma\tau_1$ sont permutables à G_1 et à P; $(X', X)=\pi-1$ et $(X'', X)=(G'', G)$.

11. X (ou P) remplace les points $0y_10...0$ $(y_1\neq 0)$ par les π^{n-1} points $(\alpha'_{11}y_1, y_1, \alpha'_{21}y_1, \ldots)$, d'où $\pi-1$ systèmes d'intransitivité q^{y_1} de degré π^{n-1} [et, dans X′, un seul constituant transitif de degré $\pi^n - \pi^{n-1}$, dans X'', si $p > 2$, deux systèmes de degré $\frac{1}{2}(\pi^n - \pi^{n-1})$]. On voit, comme au n° **3** que les constituants correspondants sont parallèles. *Si* $n = 2$, $G = U(2, \pi)$, et les $\pi^2 - \pi$ points de q^{y_1}, joints aux $\pi - 1$ points $x_1 0 \ldots 0$ ($x_1 \neq 0$) fixés par X, X' et X'' épuisent le champ de G (*cf.* *S.*, 78). *Soit* $n > 2$. X remplace $0010\ldots0$ par $\alpha_{12}\, 0\, \alpha_{22}\, \ldots$, α_{12} étant arbitraire, et $\alpha_{22}, \ldots$ prenant $\pi^{n-2} - 1$ systèmes de valeurs, d'où, pour X, X' et X''; un $\pi^{\text{ième}}$ système q^0 de degré $\pi^{n-1} - \pi$ (ce nombre est nul pour $n = 2$), et il ne reste plus que les $\pi - 1$ points $x_1 0 \ldots 0$ ($x_1 \neq 0$). Donc X, X' et X'' n'en fixent pas d'autres [1]. On voit que, *si* $\pi > 2$, $G'(n, \pi)$, *donc aussi* $G(n, \pi)$ *et* $G''(n, \pi)$ *sont imprimitifs* [d'ailleurs ils divisent $L(n, \pi)$ qui est imprimtif (*S.*, 78)].

Si $\pi = 2$, $G' = G$. *Alors* $G(2, 2) = L(2, 2)$ *est deux fois transitif* (*S.*, 78). *Pour* $n > 2$, $G(n, 2)$ *n'est qu'une fois transitif*, car X est intransitif. *Mais* $G(n, 2)$ *est primitif*. Car X n'ayant que deux constituants transitifs des degrés 2^{n-1} et $2^{n-1} - 2$; le degré d'un système d'imprimitivité fixé par X devrait être $2^{n-1} + 1$ ou $2^{n-1} - 1$. Or aucun de ces nombres ne divise, pour $n > 2$, le degré $2^n - 1$ de $G(n, 2)$ [$2^n - 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2(2^{n-1} + 1) - 3$].

12. Il est utile pour la suite (*cf.* **29**) d'étudier X d'un peu plus près quand $p = 2$. *Alors* P *est abélien, et* $\{u_1\}$ *est le central de* X (on le voit directement en cherchant les substitutions de P permutables à $u_{\rho\lambda}$ et à $v_{\rho\lambda}$) même si $\pi = 2$ et $\nu = 1, 2$ (alors G_1 est isomorphe au g_6^3 ou au g_{720}^6).

Soient X^{y_1}, P^{y_1}, G^{y_1}, les actions respectives de X, P, G, sur q^{y_1} qui est formé des points $x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 est arbitraire et où le point de coordonnées $x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu$ prend toutes les déterminations autres que $0, \ldots, 0$. P^{y_1}, étant régulier, est premier à G^{y_1} dont le degré est $\pi^{n-1} - \pi$ ($G_1^{y_1}$ est formé de π constituants parallèles semblables à G_1, chacun étant caractérisé par la valeur de x_1).

---

[1] On vérifie directement que si une substitution α de X fixe tous les points de q^0, son seul coefficient non diagonal $\neq 0$ est α_{12}, les coefficients diagonaux étant égaux à 1. Le p.g.c.d. de X et du constituant de X ayant pour champ les q^{y_1} est donc dans $\{u_1\}$.

Donc $X^{y_1} \equiv X$. D'ailleurs X^{y_1}, ayant un central $\neq 1$, est imprimitif (*S.*, 62).

Soient, *en supposant* $n > 2$, X^0, P^0, G_1^0 les actions de X, P, G_1 sur q^0 qui est formé des $\pi^{n-1} - \pi$ points $x_1 o x_2 y_2 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 est arbitraire, et où le point φ de coordonnées $x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu$ prend toutes les déterminations autres que $o, \ldots, o$. Comme P laisse φ inaltéré, le système $q^{0\varphi}$ des π points $x_1 o\, x_2 y_2 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 varie seul est évidemment un système d'intransitivité de P^0, et les $\pi^{n-2} - 1$ systèmes $q^{0\varphi}$ épuisent q^0 La substitution $V_{1k\lambda}(U_{1k\lambda})$ de P agit sur tous les $q^{0\varphi}$ où, dans φ, x_k (y_k) est $\neq o$ (et sur ceux-là seulement). Donc $\{u_1\}$ est le diviseur de P qui laisse q^0inaltéré. Donc P^0 est d'ordre π^{n-2}. Comme G_1^0 laisse x_1 inaltéré, le système $q^{x_1\varphi}$ des $\pi^{n-2} - 1$ points $x_1 o x_2 y_2 \ldots x_\nu y_\nu$ où x_1 reste constant est un système d'intransitivité de G_1^0, et les π systèmes $q^{x_1\varphi}$ épuisent q^0 (G_1^0 est donc formé de π constituants parallèles semblables à G_1 dont chacun a pour champ un $q^{x_1\varphi}$). *Donc* $X^0 = G_1^0 P^0$ *est transitif d'ordre* $(X, 1) : \pi$ *et admet une division en* $\pi^{n-2} - 1$ *systèmes d'imprimitivité de degré* π *qui sont les systèmes d'intransitivité de son diviseur normal* P^0.

15. Considérons maintenant $\mathcal{G}$ (*cf.*, **4**). Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$ les diviseurs de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ qui fixent $1 o \ldots o$, et Ξ', Ξ'' les groupes déduits de X', X'' en y regardant les variables comme homogènes. Ξ' est $\leqq \mathfrak{X}'$, et $\Xi'' \leqq \mathfrak{X}$. I étant premier à X' et à X'', Ξ' a l'ordre de X', et Ξ'' celui de X''. D'ailleurs $\mathcal{G}$ permute transitivement les $\dfrac{\pi^n - 1}{\pi - 1}$ droites issues de l'origine. Donc $(\mathfrak{X}, 1) = (\mathcal{G}, 1) : \dfrac{\pi^n - 1}{\pi - 1} = \dfrac{(G'', 1)}{\pi^n - 1}$, et $\mathfrak{X} = \Xi''$. De même $\mathfrak{X}' = \Xi'$.

La matrice générale de $\mathfrak{X}$ a la forme $\mathfrak{M}$ du n° **4**, $\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans G. Alors la matrice $\mathfrak{M}_1$ formée des éléments de $\mathfrak{M}$ dont les deux indices sont $\neq 1$ est la matrice générale de G_1 et $\alpha_{11}\beta'_{11} = 1$. En multipliant par une m, on peut ramener α_{11} et β'_{11} à 1. Les α'_{j1}, β'_{j1} où $j \neq 1$ (ou les α_{1i}, α'_{1i} où $i \neq 1$) et α'_{11} sont arbitraires, et les coefficients restants de $\mathfrak{M}$ sont déterminés par le choix de ceux-là et de ceux de $\mathfrak{M}_1$. Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les coefficients sont proportionnels. *Donc* $\mathfrak{X} = \{ G_1 P, m_{11} \} I | I \equiv \{ G_1 P, m_{11} \} | D$. Si l'on remplace, dans le raisonnement précédent, $\mathfrak{X}$, G, G_1 par $\mathfrak{X}'$, G', G'_1, l'égalité $\alpha_{11}\beta'_{11} = 1$ sera remplacée par $\alpha_{11}\beta'_{11} = f$, et l'on aura à multiplier par une puissance de $\gamma = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ (*cf.* I, **16**) pour la ramener à $\alpha_{11}\beta'_{11} = 1$. On obtient alors de même $\mathfrak{X}' = \{ G_1 P, \gamma, m_{11} \} I | I$, et, comme $\gamma^2 \mu_\iota^{-1} = [\iota]$ $\left[\mu_\rho = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1} y_i \end{vmatrix}\right.$ $\left.(i = 1, \ldots, \nu);\ cf.\ \text{I, } \mathbf{16}\right]$, $\mathfrak{X}' = \{ G_1 P, \gamma, m_{11} \} | I$. De là encore $\mathfrak{X} = \Xi''$, $\mathfrak{X}' = \Xi'$.

Au lieu des $\pi - 1$, q^{γ_1} de X, on obtient de même dans $\mathfrak{X}$ (ou $\mathfrak{X}'$) un seul système, $\mathfrak{q}^1$ du même degré π^{n-1}. Au lieu de q^0 (qui disparaît si $n = 2$), on obtient de même un système $\mathfrak{q}^0$ de degré $\frac{\pi^n - \pi}{\pi - 1}$. Et il ne reste plus que le point $10\ldots0$ fixé par $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$ ([1]).

Si $\mathcal{G}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré δ (> 1), $\mathfrak{X}$ fixe celui qui contient $10\ldots0$. Donc δ est égal à $\pi^{n-1} + 1$, ou à $\frac{\pi^{n-1} - 1}{\pi - 1}$ et divise le degré $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}$ de $\mathcal{G}$. Supposons d'abord $n > 2$. Si $\delta = \pi^{n-1} + 1$, $\pi^{n-1} + 1$, divisant $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1} = \Sigma_0^{n-1}\pi^i$, divise aussi $\Sigma_1^{n-2}\pi^i = \pi\,\frac{\pi^{n-2} - 1}{\pi - 1}$, donc aussi $\frac{\pi^{n-2} - 1}{\pi - 1}$. Donc $\pi^{n-1} + 1$ est $\leqq \pi^{n-2} - 1$, ce qui est absurde. Si $\delta = \frac{\pi^{n-1} - 1}{\pi - 1}$, $\pi^{n-1} - 1$ doit diviser $\pi^n - 1 = \pi(\pi^{n-1} - 1) + \pi - 1$, ce qui est impossible pour $n > 2$. *Donc* $\mathcal{G}$ *et*, a fortiori, $\mathcal{G}'$ *sont prmitifs pour* $n > 2$. $\mathcal{G}(2, \pi) = \mathfrak{V}(2, \pi)$ est deux fois transitif et $\mathcal{G}'(2, \pi) = \mathfrak{L}(2, \pi)$ *trois fois* (*S.*, 78, 79).

14. *Equations de* $G(n, \pi)$. Posons $\zeta = \begin{vmatrix} x_i & -x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$ $\left[i = 1, \ldots, \nu;\right.$ si $p > 2$, $\zeta = \gamma^{\frac{\pi - 1}{2}}$ (*cf.* **13**); si $p = 2$, $\left.\zeta = 1\right]$, $\zeta\tau_i = t_i$ (t_i échange x_i

---

([1]) Comme tout à l'heure *le p.g.c.d. de* $\mathfrak{X}$ *et de son constituant de champ* $\mathfrak{q}^1$ *est* $\{ u_1 \}$ (*où l'on regarde les variables comme homogènes*).

et y_i et opère sur les autres variables comme ζ; si $p=2$, $t_i=\tau_i$), $\zeta\tau_i^2=t_i\tau_i=\zeta_i$ (ζ_i opère sur x_i, y_i la substitution $|x_i, -y_i|$ et sur les autres variables comme ζ). On a

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} t_i^2=\zeta_i^2=1 \quad (\text{si } p=2,\ \zeta_i=1), \qquad t_i t_k = m_{i,-1}\tau_i\tau_k, \qquad \zeta_i\zeta_k = m_{i,-1}m_{k,-1}, \\ t_k t_i t_k = m_{i,-1}m_{k,-1}, \qquad t_k\zeta_i t_k=\zeta_i, \qquad t_i\zeta_i t_i = m_{i,-1}\zeta_i, \\ t_k u_{i\lambda} t_k = u_{i,-\lambda} \quad (i\neq k), \qquad t_i u_{i\lambda} t_i = v_{i\lambda}, \qquad t_i m_{i\lambda} t_i = m_{i,\lambda^{-1}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t_i m_{k\lambda} t_i = m_{k\lambda} \quad (k\neq i), \\ t_i V_{ik\lambda} t_i = W_{ik,-\lambda}, \qquad t_k V_{ik\lambda} t_k = U_{ik,-\lambda}, \\ T_{ik} t_l T_{ik} = t_l \quad (l\neq i,k), \qquad T_{ik} t_i T_{ik} = t_k, \\ \zeta_i u_{j\lambda}\zeta_i = u_{j,-\lambda}, \qquad \zeta_i m_{j\lambda}\zeta_i = m_{j\lambda} \quad (i\neq j \text{ ou } i=j), \\ \zeta_i V_{ik\lambda}\zeta_i = \zeta_k V_{ik\lambda}\zeta_k = V_{ik,-\lambda}, \qquad \zeta_i U_{ik\lambda}\zeta_i = U_{ik\lambda}, \\ \zeta_l V_{ik\lambda}\zeta_l = V_{ik\lambda}, \qquad \zeta_l U_{ik\lambda}\zeta_l = U_{ik,-\lambda} \quad (l\neq i,k). \end{array}\right.$$

Considérons, au lieu de G, le groupe $\overline{G}(n, \pi) = G = \{G, \zeta\}$ (pour $p=2$, $\overline{G}=G$). Dans $\overline{G}$ le diviseur $\overline{X}$ fixant $10\ldots0$ est d'ordre 2 (X, 1). Donc $\overline{X}=\{X, \zeta_1\}$.

Soit d'abord $n\geqq 4$. Le diviseur $\overline{X}^1=\{\overline{X}, m_{1i}\}$ [où $\overline{X}$ est normal d'indice $\pi-1$ (*cf.* **8**)] a, dans le champ de $\overline{G}$, trois systèmes d'intransitivité formés, le premier des $\pi-1$ points $x\,0\ldots0$ fixés par X, le second des $\pi-1$ q^{y_1}, le troisième étant q^0. D'où (*S.*, 56)

$$\overline{G}=\overline{X}^1+\overline{X}^1 t_1\overline{X}^1+\overline{X}^1 T_{12}\overline{X}^1.$$

En posant $\{G_1, \zeta_1\}=\overline{G}_1$ [1], $\{\overline{G}_1, m_{1i}\}=\overline{G}_1^1$, $\{P, m_{1i}\}=P^1$ (ζ_1 et m_{1i} sont permutables à G_1 et à P), on a $\overline{X}=P\overline{G}_1$, $\overline{X}^1=P\overline{G}_1^1=P^1\overline{G}_1$.

On remarquera que *celles des équations* (1) *où les indices des* t *et des* T *et le second indice des* V *sont* >1 *résultent de celles de* $\overline{X}$ (X contient $t_i=\zeta\tau_i$ pour $i>1$).

Désignons par ξ un quelconque des générateurs τ_i, u_i, V_{ik} où i et k sont $\neq 1$, par ξ' un quelconque de ceux où i et k sont $\neq 1, 2$, et

---

[1] Pour rendre la correspondance parfaite entre $\overline{G}_1$ et $\overline{G}$, il faudrait introduire dans G les variables fictives *inaltérées* x_0, y_0 sur lesquelles l'action de ζ serait $|-x_0, y_0|$. Mais il suffit pour la suite que l'action de ζ sur x_1, y_1 soit négligeable dans la structure de $\overline{G}_1$.

considérons les identités

(2) $$t_1^2 = T_{12}^2 = 1, \qquad t_1\xi_1 t_1 = \zeta_1\xi\zeta_1, \qquad T_{12}\xi' T_{12} = \xi',$$

(3) $$t_1 u_{1\lambda} t_1 = m_{1\lambda} u_{1\lambda}\zeta_1 t_1 u_{1,\lambda^{-1}},$$

(4) $$t_1 m_{1\lambda} t_1 = m_{1,\lambda^{-1}}, \qquad t_1\zeta_1 t_1 = m_{1,-1}\zeta,$$

(5) $$\left\{\begin{array}{l} t_1 V_{1k\lambda} t_1 = t_k m_{1,-\lambda} m_{k,\lambda^{-1}} T_{2k} V_{12\lambda} T_{12} V_{12,-\lambda^{-1}} T_{2k} t_k, \quad t_k = m_{1,-1}\zeta_1\tau_k \ (k \geqq 2), \\ \text{d'où en transformant par } t_k, \text{ d'après (1)}, \\ t_1 U_{1k\lambda} t_1 = m_{1\lambda} m_{k,-\lambda^{-1}} T_{2k} V_{12,-\lambda} T_{12} V_{12,\lambda^{-1}} T_{2k} \quad (k \geqq 2), \end{array}\right.$$

(6) $$t_1 T_{12} = T_{12} t_2, \qquad \text{d'où} \qquad T_{12} t_1 = t_2 T_{12},$$

(7) $$T_{12} u_{1\lambda} T_{12} u_{2\lambda},$$

(8) $$T_{12} m_{1\lambda} T_{12} = m_{2\lambda}, \qquad T_{12}\zeta T_{12} = m_{1,-1} m_{2,-1}\zeta_1,$$

(9) $$\left\{\begin{array}{l} T_{12} V_{12\lambda} T_{12} = t_1 U_{12,-\lambda} t_1, \\ \text{d'où, par (1), (2) et (6)}, \\ T_{12} U_{12\lambda} T_{12} = U_{12,-\lambda}, \end{array}\right.$$

(10) $$\left\{\begin{array}{l} T_{12} V_{k2\lambda} T_{12} = t_1 U_{1k,-\lambda} t_1, \\ \text{d'où, par (1), (2) et (6)}, \\ T_{12} U_{1k\lambda} T_{12} = U_{2k\lambda}, \\ \text{d'où, en transformant par } \tau_k^{-1}, \\ T_{12} V_{1k\lambda} T_{12} = V_{2k\lambda}. \end{array}\right.$$

Supposons connues les équations de $\overline{\mathrm{G}}_1 \equiv \overline{\mathrm{G}}(n-2, \pi)$. P^1 *est défini par les équations de* P (I, **23**) *jointes à celles de la forme* $m_{11}^{-1}\varpi m_{11} = \varpi'$, ϖ *parcourant les générateurs de* P, *et à* $m_{11}^{\pi-1} = 1$ (*cf.*, **8**). *On connaît aussi toutes les relations de la forme* $\alpha^{-1}\beta\alpha = \beta'$, α *parcourant les générateurs de* $\overline{\mathrm{G}}_1$, *et* β *ceux de* P^1 (I, **7**). *L'ensemble* S *de ces trois systèmes d'équations définit* $\overline{\mathrm{X}}^1$ (*cf.* **8**) (¹), *et les équations* (2)-(10), *jointes à* S, *définissent* $\overline{\mathrm{G}}(n, \pi)$ (*en remplaçant* ζ_1 *par* 1 *si* $p = 2$) (²). On le voit par les mêmes équations qu'au nº **8** où l'on remplacera partout X^1 par $\overline{\mathrm{X}}^1$ et, aux trois seconds membres de (20) et (23), u_1 par $u_1\zeta_1$, en négligeant les équations où figure U_{01}.

Pour $n = 2$, on voit, comme au nº **8** que *les équations de* $\{\mathrm{U}(2, \pi), \zeta\}$ *sont fournies par* (2) *et* (3) *jointes aux équations de* $\overline{\mathrm{X}}^1$.

(¹) On obtient de même les équations de $\overline{\mathrm{X}}$ et de X.

(²) On peut évidemment éliminer les U_{1k} ou les V_{1k} et ne prendre qu'une des équations dans chacune des formules (5), (9), (10).

Les équations déjà obtenues pour U(2, π) (*S.*, 85, 92) s'en déduisent en éliminant t_1 à l'aide de $t_1\zeta_1 = \tau_1$, ζ_1 disparaissant en même temps (*cf.* **8**).

Des équations obtenues pour $\overline{\mathrm{G}}$ *on déduit facilement les équations de* G. Soit E_1 un système d'équations de G_1 supposé connu, E'_1 le système des équations $\zeta_1^2 = 1$, $\zeta_1\varphi\zeta_1 = \varphi'$, φ parcourant les générateurs de G_1. On peut supposer $\overline{\mathrm{G}}_1$ défini par E_1 et E'_1. Introduisons maintenant, dans les équations de $\overline{\mathrm{G}}$, τ_1 au lieu de ζ_1, à l'aide de la relation $t_1\tau_1 = \zeta_1$. L'élimination de ζ_1 se fait comme il suit.

Tout d'abord on peut remplacer $\zeta_1\varphi\zeta_1 = \varphi'$ par $t_1\varphi t_1 = \varphi'$. La seconde équation (4) sera remplacée (d'après la première) par $t_1\tau_1 t_1 = \tau_1^3$, donc $\zeta_1^2 = 1$ et $\zeta_1 m_{11}\zeta_1 = m_{11}$ par $t_1^2 = 1$ et $\tau_1^{-1} m_{11}\tau_1 = m_{11}^{-1}$, et, dans (3), $\zeta_1 t_1$ par τ_1^3. Les équations $\zeta_1 u_{1\lambda}\zeta_1 = u_{1\lambda}^{-1}$, $\zeta_1\mathrm{V}_{1k\lambda}\zeta_1 = \mathrm{V}_{1k,-\lambda}$, $\zeta_1\mathrm{U}_{1k\lambda}\zeta_1 = \mathrm{U}_{1k\lambda}$ deviendront $\tau_1 u_{1\lambda}\tau_1^{-1} = t_1 u_{1,-\lambda} t_1$, $\tau_1\mathrm{V}_{1k\lambda}\tau_1^{-1} = t_1\mathrm{V}_{1k,-\lambda}t_1$, $\tau_1\mathrm{U}_{1k\lambda}\tau_1^{-1} = t_1\mathrm{U}_{1k\lambda}t_1$, d'où l'on éliminera t_1 par (3), (5). L'équation (6) deviendra $t_1\mathrm{T}_{12}t_1 = \mathrm{T}_{12}\tau_1\tau_2^3$ qui permet de remplacer la troisième équation (7) par $\mathrm{T}_{12}\tau_1\mathrm{T}_{12} = \tau_2$.

Éliminons enfin t_1 des équations (9) et (10) à l'aide de (5).

Soit $\overline{\mathrm{E}}$ le système des équations de $\overline{\mathrm{G}}$ ainsi obtenu ($\overline{\mathrm{E}}$ équivaut évidemment au système obtenu d'abord). Le système E formé des équations de $\overline{\mathrm{E}}$ où ne figure pas t_1 et des conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité fournies par les autres définit G (*E.*, 19 [1]).

III. — Groupes quadratiques.

13. Le groupe A, conservant a, permute entre eux les points de chacune des π quadriques $a = \lambda$, λ parcourant ε. Je désignerai par $q_{\lambda na} = q_{\lambda a} = q_\lambda$ la quadrique $a = \lambda$, *en convenant que le sommet* 0...0 *du cône* $a = 0$ *sera exclu de* q_0 *et que, si* $p = 2$ *avec* $n = 2\nu + 1$, *le point*

---

[1] *Voir*, pour un autre système d'équations de G, Dickson, *Q. J.*, t. 38, 1906, p. 145-158.

$(0, \ldots, 0, \sqrt{\lambda c^{-1}}) = \varpi_\lambda$ *fixé par* A (I, **26**), *sera exclu de* q_λ; par $s_{\lambda n a} = s_{\lambda n} = s_\lambda$ le nombre des points de q_λ; par $A^{(\lambda)}(n, \pi, a)$, $A^{0(\lambda)}(n, \pi, a)$, $B^{(\lambda)}(n, \pi, a)$ les constituants respectifs de A, A^0, B dans le champ q_λ.

s_0 *est égal à* $\pi^{2\nu} - 1$ *pour* $n = 2\nu + 1$ $(p \geqq 2)$, *et à* $(\pi^{\nu'} - \theta)(\pi^{\nu'-1} + \theta)$ *pour* $n = 2\nu'$ ($\theta = 1$ *ou* -1 *selon que* ψ *est réductible ou non dans* $\mathfrak{S}$). s_λ $(\lambda \neq 0)$ *est égal à* $\pi^{2\nu} + \theta_{\lambda c}\pi^\nu$ (θ_z *désignant le caractère quadratique de* z) *si* $n = 2\nu + 1$ *et* $p > 2$, *à* $\pi^{2\nu} - 1$ *si* $n = 2\nu + 1$ *et* $p = 2$, *à* $\pi^{2\nu'-1} - \theta\pi^{\nu'-1}$ *si* $n = 2\nu'$ (*E.*, 44, 45). Les systèmes de degré minimum sont donc : 1° pour $\psi = cx^2$ $(p \neq 2)$, les q_λ où $\lambda = Nc$ (N étant toujours un non carré quelconque de $\mathfrak{S}$) ; 2° pour $\delta \neq 0$, les q_λ où $\lambda \neq 0$ si $\theta = 1$, et q_0 si $\theta = -1$.

$A^{(\lambda)}$ *est transitif pour* $\lambda \geqq 0$. En effet, *soit d'abord* $n \geqq 3$. D'après I, **27** A transforme le point $10\ldots0$ de q_0 en un point arbitraire de q_0. De même A transforme le point $\lambda 10\ldots0$ de q_λ en tout point de coordonnées $x_j = \lambda\xi_j + \xi'_j$, $y_j = \lambda\eta_j + \eta'_j$, le point $\xi_1\eta_1\ldots$ étant arbitraire sur q_0, et $\xi'_1\eta'_1\ldots$ étant un point de q_0, tel que la polaire (I, **1**) $a(\xi_1, \eta_1, \ldots; \xi'_1, \eta'_1, \ldots)$ soit égale à 1 [1]. Or si $x_1\, y_1 \ldots$ est un point arbitraire de q_λ, et $\xi_1\eta_1 \ldots$ un point de q_0 tel que $a(x_1, \ldots; \xi_1, \ldots) = 1$ (si $p = 2$ et $n = 2\nu + 1$, le premier membre est homogène en $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$; l'égalité serait donc impossible si $x_1, \ldots, y_\nu x$ était le point ϖ_λ) [2] le point de coordonnées $\xi'_j = x_j - \lambda\xi_j$, $\eta'_j = y_j - \lambda\eta_j$

---

[1] Il y a toujours de tels points. Cela résulte de (I, **27**) et aussi de la Note qui suit.

[2] *Si* $n \geqq 3$, *il y a toujours dans* $\mathfrak{S}$ *des solutions communes à une équation quadratique* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *et à une équation linéaire* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (*les coefficients de ces deux équations étant dans* $\mathfrak{S}$). En effet, en prenant φ pour une des variables, on peut supposer que la seconde équation se réduit à $x_n = 0$, et l'on est ramené à montrer qu'une équation quadratique $f_2 + f_1 + f_0 = 0$ (f_i étant homogène de degré i) à $n - 1 \geqq 2$ variables $z_1, \ldots, z_{n-1}$ a toujours des solutions. Il suffit d'établir que $f_2 + zf_1 + z^2 f_0 = 0$ a toujours des solutions où $z \neq 0$. Or le nombre s des solutions de cette équation est toujours supérieur au nombre σ des solutions où $z = 0$, qui sont celles de $f_2 = 0$ (*E.*, 44, 45). En regardant comme identiques celles des $s - \sigma$ solutions où $z \neq 0$ qui sont formées de valeurs proportionnelles, ce qui revient à y faire $z = 1$, on voit que $f_2 + f_1 + f_0 = 0$ a $\dfrac{s - \sigma}{\pi - 1}$ solutions.

vérifie les conditions

$$a(\xi'_1, \eta'_1, \ldots) = a(x_1, y_1, \ldots) - \lambda a(x_1, \ldots; \xi_1, \ldots) + \lambda^2 a(\xi_1, \eta_1, \ldots) = 0,$$
$$a(\xi'_1, \ldots; \xi_1, \ldots) = a(x_1, \ldots; \xi_1, \ldots) - \lambda a(\xi_1, \eta_1, \ldots) = 1.$$

Donc A transforme $\lambda 1 0 \ldots 0$ en un point quelconque de q_λ.

Pour $p = 2$ *et* $n = 2\nu + 1$, les $\pi^{2\nu} - 1$ points de q_λ répondent biunivoquement aux $\pi^{2\nu} - 1$ points $x_1 \ldots y_\nu$ autres que $0 \ldots 0$, le point $x_1 \ldots y_\nu$ répondant au point de q_λ où $cx^2 = \lambda - \Sigma_1^\nu x_i y_i$. D'ailleurs A permute les points de q_λ comme $G(2\nu, \pi)$ permute les points $x_1 \ldots y_\nu$ (I, **26**). *Ainsi* A *fixe les* π *points* ϖ_λ, *et chacun de ses* π *constituants parallèles* $A^{(\lambda)}$ *est semblable à* $G(2\nu, \pi)$. On peut donc négliger ce cas.

Soit maintenant $n = 2$, et $a = x_1 y_1$, x_1 et y_1 étant, si a est irréductible dans $\mathfrak{S}$, des fonctions linéaires conjuguées, à coefficients dans $\mathfrak{S}'$, des variables primitives x, y. Alors (I, **25**) $A = \{ m_{1r}, t_1 \}$, r étant d'ordre $\pi - \theta$ ($\theta = 1$ ou -1 selon que a est réductible ou non dans $\mathfrak{S}$). m_{1r} a toujours au moins $\pi - 1$ cycles formés chacun des $\pi - \theta$ points d'un q_λ où $\lambda \neq 0$, et t_1 transforme chacun d'eux en son inverse. Si $\theta = 1$, les $2(\pi - 1)$ points de q_0 se partagent en deux cycles de m_{1r} formés, l'un des points $x_1 0$, où $x_1 \neq 0$, l'autre des points $0 y_1$ où $y_1 \neq 0$, et t_1 transforme chaque cycle en l'inverse de l'autre. Si $\theta = -1$, q_0 n'existe pas (*E.*, 44, 45). *Ainsi* $A^{(0)}$ *est régulier diédral d'ordre* $2(\pi - 1)$ *si* $\theta = 1$ *et disparaît si* $\theta = -1$. $A^{(\lambda)}$ $(\lambda \neq 0)$ *est un* $g^{\pi-\theta}_{2(\pi-\theta)}$ *transitif diédral : il est primitif toujours et seulement si* $\pi - \theta$ *est premier* [pour chaque diviseur e de $\pi - \theta = ee'$ où $e' > 1$, $A^{(\lambda)}$ a un $g^{\pi-\theta}$ normal intransitif], *ce qui ne peut arriver que si* $p = 2$, *et encore faut-il alors que* K $(\pi = p^k)$ *soit premier, si* $\theta = 1$, *et que* K *soit une puissance de 2 si* $\theta = -1$ (*cf. S.*, 36, 139) (1).

---

(1) Si a est réductible dans $\mathfrak{S}$, t_1 fixe les points (h, h), $(-h, -h)$ de q_{h^2} et ne fixe aucun point de q_λ. Si a est irréductible dans $\mathfrak{S}$, $t_1 m_{1q} = \begin{vmatrix} x_1 \cdot q x_1 \\ y_1 \cdot q^{-1} y_1 \end{vmatrix}$ (*cf.* I, **25**), qu'il est plus commode de substituer à t_1, et dont la forme réelle est t_0, fixe les points $(x_1 = \varkappa h, y_1 = \dot{\varkappa} h)$, $(x_1 = -\varkappa h, y_1 = -\dot{\varkappa} h)$ [et t_0 les points $(x = \pm h, y = 0)$] de q_{ch^2} et ne fixe aucun point de $q_{c\lambda}$. On voit donc que, *si* $p \neq 2$ (*alors* $\pi - \theta$ *est pair*), *les* $A^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$, *bien que semblables* (on va le voir), *ne fournissent pas tous la même représentation de* A (*cf. S.*, 54).

On sait d'ailleurs que, dans un diédral défini par des équations de la forme

Quel que soit n, si $p \neq 2$, D déplace tous les symboles. Donc, *pour $p \neq 2$, chaque $A^{(\lambda)}$ admet comme systèmes d'imprimitivité les systèmes d'intransitivité (de degré 2) de D dans q_λ (cf.* **17, 21, 22**).

La substitution γ de I, **24** fixe q_0 et permute circulairement : 1° pour n pair ou $p=2$, les $\pi-1$ q_λ où $\lambda \neq 0$; 2° pour n impair avec $p \neq 2$, d'une part les $\frac{1}{2}(\pi-1)$ q_λ où λ est un carré ($\neq 0$), d'autre part les $\frac{1}{2}(\pi-1)$ q_λ où λ est non carré. *Donc : 1° les $A^{(\lambda)}$ de même degré où $\lambda \neq 0$ sont semblables*; 2° *A' et A'' ont des constituants transitifs de champ q_0 (qui disparaissent pour $n=2$, $\theta=-1$)*; 3° *pour $p \neq 2$, A'' (si n est impair $A''=A'$) a deux autres constituants transitifs, l'une de degré $\frac{1}{2}(\pi-1)s_1$ ayant pour champ l'ensemble des q_λ où λ est carré ($\neq 0$), l'autre de degré $\frac{1}{2}(\pi-1)s_N$ ayant pour champ l'ensemble des q_λ où λ est non carré; pour $p=2$ (alors $A''=A'$), ou pour $p \neq 2$ et n pair, A' a un constituant transitif de degré $(\pi-1)s_1$ ayant pour champ l'ensemble des q_λ où $\lambda \neq 0$.*

Je désignerai par $A'^{(\lambda)}(n, \pi, a)$, $A''^{(\lambda)}(n, \pi, a)$ les constituants respectifs de A', A'' dont le champ contient q_λ. $A''^{(\lambda)}$ ne dépend que du caractère quadratique de λ; si n est pair et $\lambda \neq 0$. $A'^{(\lambda)} = A'^{(1)}$. *Pour $p \neq 2$, $A''^{(1)}$ est semblable à $A''^{(N)}$ si n est pair* (on le voit comme pour les $A^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$), *mais non si n est impair* (leurs degrés sont alors différents).

Pour $p=2$ et $n=2\nu+1$, $A'^{(0)}$ est semblable à $G'(2\nu, \pi)$. Considérons $A'^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 0$). Soit **G** l'action de A sur les q_λ où $\lambda \neq 0$, et g une $s_{\pi-1}^{(\pi-1)s_1}$ remplaçant chaque symbole $x_1, \ldots, y_\nu, \iota^k$ de $A^{(\iota^{2k})}$ par le symbole $\iota x_1, \ldots, \iota y_\nu, \iota^{k+1}$ de $A^{(\iota^{2k+2})}$ (si une substitution de A remplace $x_1 \ldots, y_\nu x$ par $X_1 \ldots, Y_\nu X$, elle remplace $\iota^r x_1, \ldots, \iota^r y_\nu, \iota^r x$ par $\iota^r X_1, \ldots, \iota^r Y_\nu, \iota^r X$). Alors *$A'^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 0$) est semblable au produit direct de* **G** *par $\{g\}$ (cf. S., 58).* On peut donc négliger ce cas.

Soit par exemple $n=2$, et conservons les notations de I, **24, 25**. Si $\theta=1$, γ a dans q_0 un cycle commun avec m_1, et fixe les points oy_1;

$a^m = b^2 = 1$, $bab = a^{-1}$, les g_2 non normaux, qui sont les $\{ba^\xi\}$, forment deux systèmes conjugués si m est pair et un seul si m est impair (*E.*, 20). Donc $\{a, b\}$ a au plus deux représentations distinctes relatives à ses g_2. Elles sont semblables, car l'automorphisme qui conserve a et remplace b par ba les transforme l'une dans l'autre (*S.*, 54). *Les $A^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$ sont donc semblables.* On va le retrouver autrement au texte pour $n \geqq 2$.

dans le champ des q_λ où $\lambda \neq 0$, γ et $m_{1\iota}$ sont des $s_{\pi-1}^{(\pi-1)^2}$ régulières permutables, engendrant un $g_{(\pi-1)^2}$ régulier; d'ailleurs t_1 déplace les points de q_0 et ceux des q_λ. Donc $A'^{(0)} \equiv A'^{(1)} \equiv A'$, et $A''^{(0)} \equiv A''^{(1)} \equiv A''^{(N)} \equiv A''$. Si $\theta = -1$, q_0 n'existe pas, et l'on peut supposer $\{\gamma\}$ cyclique d'ordre $\pi^2 - 1$ (I, **25**). Donc $A'^{(1)}$ coïncide alors avec A', et $A''^{(1)} \equiv A''^{(N)} \equiv A''$.

Quel que soit n, si $p \neq 2$, D déplace tous les symboles. Donc, *pour* $p \neq 2$, *chaque* $A'^{(\lambda)}$ *admet comme systèmes d'imprimitivité les systèmes d'intransitivité* (*de degré* 2) *de* D *dans son champ.*

Si $n \geqq 4$, B *et par suite* A'' *ont les mêmes systèmes d'intransitivité que* A. En effet, si $n > 4$, ou si $\psi = 0$, $m_{2\iota}$ et t_2 fixent le point $1\lambda 0 \ldots 0$; donc $A = \{m_{2\iota}, t_2\}B$ (si $p = 2$, $m_{2\iota}$ est dans B) et B remplacent ce point par les mêmes points de q_λ. Si $n = 4$ et $\psi \neq 0$, on raisonne de même en remplaçant $m_{2\iota}$ par un générateur du groupe Ψ de ψ. Je désignerai par $A''^{(\lambda)}$, $B^{(\lambda)}$, les constituants respectifs de A'', B dans q_λ.

Si $n = 3$ (*donc* $p \neq 2$), $A''^{(\lambda)}$ *et* $B^{(\lambda)}$, *pour* $\lambda \neq 0$, *sont transitifs.* On le voit de même, car $A = \{t_0\}A'' = \{t_0, m_{1\lambda}t_1\}B$ (t_0 et $m_{1\lambda}t_1$ fixent $1\lambda 0$, et $m_{1\lambda}t_1$ est hors de B même si λ est non carré, puisque $m_{1\lambda}t_1$ est un des restes de A mod B). Considérons $A''^{(0)}$. D'après la forme générale des substitutions de A'' indiquée précédemment (I, p. 366) ([1]), A'' transforme 100 en tous les points $\left(\frac{\alpha^2}{\Delta}, -\frac{c\gamma^2}{\Delta}, -\frac{\alpha\gamma}{\Delta}\right)$ où $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ est $\neq 0$, α, β, γ, δ, Δ étant d'ailleurs quelconques. Les points de q_0 où $x = 0$ (donc $x_1 y_1 = 0$) s'obtiennent en faisant α ou γ nul. Ceux où $x \neq 0$ (donc $x_1 y_1 \neq 0$) sont $\left(x_1, -\frac{cx^2}{x_1}, x\right)$ et s'obtiennent en faisant par exemple $\alpha = 1$, $\Delta = \frac{1}{x_1}$, $\gamma = -\frac{x}{x_1}$. *Donc* $A''^{(0)}$ *est un* g^{π^2-1} *transitif. Mais* $B^{(0)}$ *est intransitif.* Car les substitutions de B sont celles où $\Delta = 1$ et transforment par suite 100 en les points $(\alpha^2, -c\gamma^2,$

([1]) Dans cette substitution générale, qui correspond à $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, il faut changer partout les signes de β et de γ : elle est égale à $U_{01,-\frac{\beta}{c\alpha}} V_{01,\frac{\alpha\gamma}{\Delta}} m_{1,\frac{\alpha^2}{\Delta}}$ si $\alpha \neq 0$, et à $t_{01} m_{1,-\frac{\Delta}{c\gamma^2}} V_{01,-\frac{\gamma\delta}{\Delta}}$ si $\alpha = 0$. Il faut de même, à la page 352, changer le signe de λ dans les substitutions qui correspondent à $DV_{01\lambda}$ et à $DU_{01\lambda}$.

$-\alpha\gamma$) au nombre de $\frac{\pi^2-1}{2}$ $\left[\text{il y en a } 2\frac{\pi-1}{2} \text{ où } x=0 \text{ et } 2\left(\frac{\pi-1}{2}\right)^2\right.$ $\left.\text{où } x\neq 0\right]$. *Donc* $B^{(0)}$ *a un constituant transitif* $B'^{(0)}$ *de degré* $\frac{\pi^2-1}{2}$ *dont le champ* q'_0 *contient* 100; et comme B est normal dans A^0, $B^{(0)}$ *a un second constituant transitif* $B''^{(0)}$ *semblable au premier dont le champ* q''_0 *contient* N00. q'_0 *et* q''_0 *sont des systèmes d'imprimitivité de* $A^{0(0)}$ *de* $A^{(0)}$ *et de* $A'^{(0)}$. Il est clair que $A^{0(0)}$ *et* $B^{(0)}$, étant d'ordre >2 sont respectivement isomorphes à $A^0 \equiv \varrho(2,\pi)$ et $B\equiv \upsilon(2,\pi)$ (I, **40**) (¹).

Si $n=2$, A^0 *est le* $g_{\pi-1}$ *cyclique normal de* A. *Donc, si* $\theta=1$, $A^{0(0)}$ *est un* $g_{\pi-1}^{2(\pi-1)}$ *cyclique ayant deux cycles d'ordre* $\pi-1$, *et si* $\theta=-1$, $A^{0(0)}$ *disparaît.* $A^{0(\lambda)}$ $(\lambda\neq 0)$ *est un* $g_{\pi-1}^{\pi-1}$ *cyclique régulier. Si* $p>2$, B *étant le diviseur d'indice* 2 *du* $g_{\pi-1}$ *cyclique* A^0, *chaque système d'intransitivité de* A^0 *se partage, dans* B, *en deux systèmes de degré moitié moindre. Si* $p=2$, $B=A^0$.

$A'^{(\lambda)}$, $A''^{(\lambda)}$, $A^{(\lambda)}$, $A^{0(\lambda)}$, $B^{(\lambda)}$ *sont respectivement isomorphes à* A', A'' A, A^0, B. On l'a vérifié pour $n\leqq 3$. Soit donc $n\geqq 4$. Il suffit de considérer A'. Or supposons que le p.g.c.d. $D^{(\lambda)}$ de $A'^{(\lambda)}$, A' soit >1. $D^{(\lambda)}$ est premier à I (I est semirégulier) et normal dans A'. D'ailleurs le p.g.c.d. $\Delta^{(\lambda)}$ de $D^{(\lambda)}$, A est >1, sans quoi $AD^{(\lambda)}$ serait produit direct, et $D^{(\lambda)}$ diviserait I (I, **39**). Donc, en exceptant le cas où $n=4$ avec $\pi=2$ et ψ réductible et le cas $n=\pi=3$, $\Delta^{(\lambda)}$ est $\geqq$ B (I, **40**, **47**) et B ne déplacerait pas tous les symboles. On verra au numéro sui-

(¹) Voici une autre démonstration. Il est aisé de vérifier directement que $A^{0(0)}$ et $B^{(0)}$ sont d'ordre >2. Ils sont donc respectivement isomorphes à $A^{(0)}\equiv \varrho(2,\pi)$ et à $B\equiv\upsilon(2,\pi)$ (I, **40**). Soit Γ le constituant *transitif* de A^0 dont le champ q_Γ contient 100. On vérifie de même que Γ est d'ordre >2, donc isomorphe à A_0. On verra d'ailleurs (**18**) que le diviseur X de A qui fixe 100 est d'ordre 2π. Comme il contient $t_0=|x,-x|$ qui est hors de A^0, le diviseur X^0 de A^0 qui fixe 100 est d'ordre π (X^0 est donc le p.p.c.m. des U_{01}). Le diviseur $X^{0(0)}$ de Γ qui fixe 100 est donc d'ordre $\leqq\pi$. Donc Γ est de degré $\geqq \pi^2-1=s_0$. Donc $\Gamma=A^{0(0)}$, et $A^{0(0)}$ *est transitif. Mais* $B^{(0)}$, qui n'est pas représentable en g^{π^2-1} [son ordre est $\frac{1}{2}\pi(\pi^2-1)$], *est intransitif.* D'ailleurs X^0, p.p.c.m des U_{01}, divise $B=\Sigma X^0\beta_i$, les $\frac{1}{2}(\pi^2-1)$ β_i remplaçant 100 par autant de points distincts. Donc $B^{0(0)}$ a un système d'intransitivité de degré $\frac{1}{2}(\pi^2-1)$ contenant 100.

vant que, dans les cas exceptés, $A'^{(2)}$ est encore isomorphe à A'.

16. *Soit par exemple* $\pi=2$, $n=4$, *et d'abord* $\psi=0$. $A=A'$ est ici un g^{15}_{72}, $B=A^0$ un g^{15}_{36}, $A^{(0)}$ un g^9_{72}, $A^{(1)}$ un g^6_{72}. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x_2, y_2, rangeons les points $x_1y_1x_2y_2$ de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique (¹) en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1 considérées comme appartenant au champ des nombres réels. Désignons dans cet ordre les points de q_0 par $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et ceux de q_1 par 0, 1, 2, 3, 4, 5. On aura, en introduisant quelques notations,

$t_1=cf.dg.eh.12$, $\quad t_2=ab.de.gh.45$,
$s_1=V_{12}=bh.cd.ei.02.15.34$, $\quad s_2=V_{21}=ad.fh.gi.01.24.35$,
$s'_1=t_1s_1t_1=be.fg.hi.01.25.34$, $\quad s'_2=t_1s_2t_1=ag.ce.di.02.14.35$,
$u=s_1s_2=adc.bfh.egi.045.132$, $\quad u'=t_1s_1s_2t_1=agf.bce.hdi.045.123$.

B est (*cf.* I, **40**) le produit direct des $g_6\{u, s_1\}=\{u, s_2\}$, $\{u', s'_1\}=\{u', s'_2\}$ qui sont définis par $u^3=s_i^2=1$, $s_ius_i=u^2$; $u'^3=s_i'^2=1$, $s'_ius'_i=u'^2$. Chacun d'eux étant intransitif dans q_0, $B^{(0)}$ *est imprimitif. Mais* $A^{(0)}$ *est primitif*, sans quoi, tout système d'imprimitivité étant de degré 3, le g^8_8 qui fixe a, fourni par l'action de $\{t_1, s_1, s'_1\}$ sur q_0 devrait avoir un système d'intransitivité de degré $\leqq 2$, tandis qu'il a les deux systèmes *behi*, *cdfg* (*cf.* **18**). $A^{(1)}$ *est imprimitif*, car il a le diviseur normal intransitif $\{045, 123\}$, action de $\{u, u'\}$ sur q_0. Il est clair que $A^{(0)}$ *et* $A^{(1)}$ *sont isomorphes à* A.

Soit $\psi=x^2+xy+y^2$ (*irréductible dans* $\mathfrak{S}$). Alors $A=A'$ est un g^{15}_{120} isomorphe au g^5 symétrique, $B=A^0$ un g^{15}_{60} isomorphe au g^5 alterné ou à $\mathfrak{v}(2,4)$ (I, **40**), $A^{(0)}$ un g^5_{120}, $A^{(1)}$ un g^{10}_{120}. En désignant par a, b, c, d, e et par 0, 1, ..., 9 respectivement les points de q_0 et q_1 rangés comme tout à l'heure dans l'ordre lexicographique, l'ordre

(¹) Si k variables $x_1, \ldots, x_k$ (rangées dans cet ordre) prennent, dans le champ des nombres réels, des systèmes de valeurs $\xi_1^1, \ldots, \xi_k^1$; $\xi_1^2, \ldots, \xi_k^2$; ..., ces systèmes sont dits *rangés* dans l'ordre lexicographiques si, le $\alpha^{\text{ième}}$ système étant $\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_k^\alpha$, la première des différences $\xi_1^\beta-\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_k^\beta-\xi_k^\alpha$ qui est $\neq 0$ a le signe de $\beta-\alpha$.

des variables étant x_1, y_1, x, y, et en introduisant encore quelques notations, on a

$$\begin{array}{ll} s_1 = t_1 = ab.36.47.58, & s_3 = t'_0 = cd.01.34.67, \\ V_{01} = bd.ce.03.25.68.79, & V_{10} = ac.de.17.28.39.45, \\ s_2 = V_{10}t_1V_{10} = bc.15.24.69, & s_4 = (V_{10}t_1)^3 = de.12.45.78, \end{array}$$

et $A = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ (car $V_{011} = t_1 t'_0 V_{10} t_1 t'_0$. Les équations qui définissent A par les s_i ont été données ailleurs (*S.*, 69). A chaque substitution σ_0 de $A^{(0)}$ faisons correspondre la substitution σ_1 de $A^{(1)}$ telle que $\sigma_0\sigma_1$ soit dans A. Aux s_2^2 de $A^{(0)}$ répondent alors des s_2^6 de $A^{(1)}$. *Donc* $A^{(1)}$ *est la représentation primitive du* g^5 *symétrique en* g^{10} (*S.*, 53). $B^{(0)}$ *est le* g^5 *alterné, et* $B^{(1)}$ *la représentation du* g^5 *alterné en* g^{10} (*S.*, 53).

Soit encore $\pi = n = 3$ *avec* $\psi = x^2$. Alors $A' = A$ (I, **24**) est un g_{48}^{26} produit direct de A^0 par D (I, **39**); $A^0 \equiv \mathfrak{L}(2, 3)$ est un g_{24}^{26} et $B \equiv \mho(2, 3)$ un g_{12}^{26} (I, **40**); $s_0 = 8$, $s_1 = 12$, $s_2 = 6$; $A^{(\lambda)} \equiv A$, et $B^{(\lambda)} \equiv B$ pour $\lambda \gtrless 0$. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x, rangeons les points de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique, en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1, 2 considérées comme appartenant au champ des nombres réels, et désignons dans cet ordre ceux de q_0 par 0, 1, ..., 7, ceux de q_1 par a, b, ..., j, k, l, ceux de q_2 par α, β, γ, δ, ε, ζ. On a alors

$$\begin{aligned} d = \gamma &= 01.25.37.46.ab.cf.de.gk.hj.il.\alpha\zeta.\beta\varepsilon.\gamma\delta, \\ t_1 &= 02.15.36.47.cg.dh.ej.fk.\gamma\delta, \\ t_0 &= 34.67.ab.cd.ef.gh.jk.\alpha\beta.\varepsilon\zeta, \\ m_{1,-1} &= 01.25.36.47.ce.df.gj.hk.il.\alpha\varepsilon.\beta\zeta.\gamma\delta. \\ V_{012} &= 243.567.aec.bdf.gih.jkl.\alpha\gamma\beta.\delta\varepsilon\zeta, \\ t_{01}m_{1,-1} &= 05.12.34.67.ab.ck.dj.eh.fg.il.\alpha\zeta.\beta\varepsilon. \end{aligned}$$

On sait que $t_{01}m_{1,-1}$ est ici dans B (I, **39**). Le groupe $B^1 = \{B, t_1\}$ de I **48**, est ici le p.p.c.m. des substitutions paires de A. On vérifie que les $A'^{(\lambda)}$ sont imprimitifs, et les systèmes d'intransitivité de B de degré 4.

17. Les symboles de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$ sont les $\frac{\pi^n - 1}{\pi - 1}$ droites de $\mathcal{E}$ issues de $0 \ldots 0$, chacune de ces droites pouvant être remplacée par un quelconque de ses points dont on regardera les coordonnées comme homogènes.

Si donc $p > 2$, $\mathcal{A}$ a trois systèmes d'intransitivité, le premier de degré $\frac{s_0}{\pi - 1}$ répondant à $a = 0$, le second de degré $\frac{s_1}{2}$ répondant à $a = \lambda^2$, le troisième de degré $\frac{s_N}{2}$ répondant à $a = N\lambda^2$.

Si $p = 2$, $\mathcal{A}$ a deux systèmes d'intransitivité, le premier de degré $\frac{s_0}{\pi - 1}$ répondant à $a = 0$, le second de degré s_1 répondant à $a \neq 0$.

Je désignerai par $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ le constituant transitif de $\mathcal{A}$ répondant à $a = \lambda$, et le champ de $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ par $\mathfrak{q}_{\lambda na} = \mathfrak{q}_{\lambda a} = \mathfrak{q}_\lambda$: pour une forme a donnée, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ et $\mathfrak{q}_\lambda$ ne dépendent que du caractère quadratique de λ.

Pour $p > 2$, $\mathcal{A}^{(1)}$ est semblable à $\mathcal{A}^{(N)}$ si n est pair (on le voit comme pour les $A^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$), *mais non si n est impair* (leurs degrés sont alors différents).

Je désignerai par $\mathcal{A}^{0(\lambda)}$ et $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ les constituants respectifs de $\mathcal{A}^0$ et $\mathcal{B}$ de champ $\mathfrak{q}_\lambda$.

Si n est impair $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Si alors $p = 2$, $\mathcal{A}^{(0)}$ est semblable à $\mathcal{G}(2\nu, \pi)$, et $\mathcal{A}^{(1)}$ à $G(2\nu, \pi)$ (I, **26**). On peut donc négliger ce cas.

Si n est pair, $\mathcal{A}'$ a le système d'intransitivité $\mathfrak{q}_0$ et un seul autre système formé de $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_N$.

Je désignerai de même par $\mathcal{A}'^{(\lambda)}$ le constituant transitif de $\mathcal{A}'$ répondant à $a = \lambda$.

Pour $n = 2$, en conservant les notations du n° **15**, et en posant $\frac{x_1}{y_1} = z_1$, on a (I, **24**) $\mathcal{A}' = |rz_1, z_1^{-1}|$, r étant d'ordre $\pi - \theta$, où (si $\theta = -1$, $z_1 = x_1^{1-\pi}$ est une puissance de r).

$$rz_1 = (1, r, \ldots, r^{\pi-\theta-1})(0)(\infty),$$

$$z_1^{-1} = (1)(r^i, r^{-i})(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}}$$

$$\left(i \text{ parcourt les entiers} \geqq 1 \text{ et} \leqq \frac{\pi - \theta}{2}\right),$$

z_1^{-1} transformant rz_1 en $r^{-1}z_1$, $\mathcal{A} = |r^2 z_1, z_1^{-1}|$, $\mathcal{A}^0 = |r^2 z_1|$, $\mathcal{B} = |r^1 z_1|$.

Si $p > 2$, $\pi - \theta$ est pair $= 2\mu$, et l'on a

$$r^2 z_1 = (1, r^2, \ldots, r^{2\mu-2})(r, r^3, \ldots, r^{2\mu-1})(0)(\infty),$$
$$z_1^{-1} = (1)(r^{\mu})(r^i, r^{-i})(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}} \qquad (i = 1, \ldots, \mu-1).$$

Donc $\mathcal{A}'^{(0)} = \mathcal{A}^{(0)} = \left\{(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}}\right\}$, et $\mathcal{A}''^{(0)} = \mathcal{B}^{(0)} = 1$. $\mathcal{A}'^{(1)}$ est l'action de $\mathcal{A}'$ sur les r^k. $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{0(1)}$, $\mathcal{B}^{(1)}$ sont les actions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}$ sur les r^{2k}, et $\mathcal{A}^{(N)}$, $\mathcal{A}^{0(N)}$, $\mathcal{B}^{(N)}$ [semblables à $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{0(1)}$, $\mathcal{B}^{(1)}$ (1)] leurs actions sur les r^{2k+1}. $\mathcal{A}'^{(1)}$ *est un* $g_{4\mu}^{2\mu}$ *diédral isomorphe à* $\mathcal{A}'$, *transitif et imprimitif* (son diviseur normal $\{r^2 z_1\}$ est intransitif). $\mathcal{A}^{(\lambda)}(\lambda \neq 0)$ *est un* $g_{2\mu}^{\mu}$ *diédral isomorphe à* $\mathcal{A}$ *et transitif.* $\mathcal{A}^{(\lambda)}$, *évidemment primitif si* μ *est premier, est imprimitif si* μ *est composé* (son g_{μ}^{μ} cyclique normal a alors au moins un diviseur intransitif). $\mathcal{A}^{0(\lambda)}(\lambda \neq 0)$ *est un* g_{μ}^{μ} *cyclique régulier isomorphe à* $\mathcal{A}^0$. $\mathcal{B}^{(\lambda)}(\lambda \neq 0)$ *est isomorphe à* $\mathcal{B}$. *Si* μ *est impair,* $\mathcal{B}^{(\lambda)} = \mathcal{A}^{0(\lambda)}$. *Si* μ *est pair,* $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ *est un* $g_{\frac{\mu}{2}}^{\mu}$ *cyclique ayant deux cycles de degré* $\frac{\mu}{2}$.

Si $p = 2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, *et* $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0$. $\mathcal{A}^{(0)} = \left\{(0\infty)^{\frac{1+\theta}{2}}\right\}$, $\mathcal{B}^{(0)} = 1$. $\mathcal{A}^{(\lambda)}(\lambda \neq 0)$ *est l'action de* $\mathcal{A}$ *sur les* r^k ; *c'est un* $g_{2(\pi-\theta)}^{\pi-\theta}$ *diédral transitif semblable à* $\mathrm{A}^{(\lambda)}$ (*cf.* **15**). $\mathcal{B}^{(\lambda)}(\lambda \neq 0)$ *est, comme* $\mathrm{A}^{0(\lambda)}$, *un* $g_{\pi-\theta}$ *cyclique régulier.*

Pour $n > 2$, $\mathcal{B}$ *a les mêmes systèmes d'intransitivité que* $\mathcal{A}$. On le démontre pour $n > 3$ comme le théorème analogue relatif à B et à A (**15**). Pour $n = 3$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 = \{m_{1N}\}\mathcal{B} = \{m_{1\lambda} t_1\}\mathcal{B}$ (**15**; I, **40**). Or, m_{1N} fixe 100 (les variables sont ici homogènes), et $m_{1\lambda} t_1$ fixe $1\lambda 0$. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ remplacent 100 et $1\lambda 0$ par les mêmes points de q_0 et q_λ respectivement. Donc $\mathcal{B}$ a un constituant transitif de chacun des degrés $\frac{1}{2}(\pi^2 \pm \pi)$.

Pour $n > 2$, *en exceptant le cas* $n = \pi = 3$, $\mathcal{A}'^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}^{0(\lambda)}$, $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ *sont respectivement isomorphes à* $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}$. Il suffit de considérer $\mathcal{A}'$. Or, supposons que le p.g.c.d. $\mathcal{D}^{(\lambda)}$ de $\mathcal{A}'^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}'$ soit > 1. Le diviseur correspondant $\mathrm{D}^{(\lambda)}$ de A' n'est pas $\leqq \mathrm{I}$. D'ailleurs, le p.g.c.d. $\Delta^{(\lambda)}$

---

(1) D'après ce qui a été observé au sujet de $\mathrm{A}^{(\lambda)}(2, \pi)$, $\mathcal{A}^{(1)}$ et $\mathcal{A}^{(N)}$ fournissent la même représentation de $\mathcal{A}$ toujours et seulement si μ est impair [alors $(r^2 z_1)(z_1^{-1})$ fixe $r^{\mu-1}$ et $r^{2\mu-1}$].

de $D^{(\lambda)}$, A est > 1, sans quoi $AD^{(\lambda)}$ serait produit direct, et $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ serait $\leqq$ I (I, **40**). Donc $\Delta^{(\lambda)}$ est $\geqq$ B, sauf peut-être si $n=4$ avec $\pi \leqq 3$, ψ étant irréductible, ou si $n=\pi=3$. Le cas où $n=4$ et $\pi=2$ (alors $\mathcal{A}'=\mathcal{A}=A$) a été étudié (**16**). Dans le cas où $n=4$ et $\pi=3$, si $\Delta^{(\lambda)}$ ne contient pas B, il contient F (I, **40**). Donc $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ contient $\mathfrak{F}$ dont la substitution R_{121} (I, **28**) déplace tous les symboles.

Soit $n=\pi=3$ et $\psi=x^2$. Alors $\mathcal{A}'=\mathcal{A}=A^0$ est un g_{24}^{13} isomorphe à $\mathfrak{L}(2,3)$ et $\mathcal{B}$ un g_{12}^{13} isomorphe à $\mathfrak{V}(2,\pi)$ (I, **40**). Les degrés respectifs de $\mathcal{A}^{(0)}$, $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$ ou de $\mathcal{B}^{(0)}$, $\mathcal{B}^{(1)}$, $\mathcal{B}^{(2)}$ sont 4, 6 et 3. Les droites issues de ooo peuvent être identifiées chacune avec le premier des points de A (rangés dans l'ordre adopté au n° **16**) situés sur elle. Avec les notations du n° **16**, les symboles de q_0 sont alors o, 2, 3, 4; ceux de q_1 a, c, d, g, h, i, ceux de q_2 α, β, γ, et l'on a

$$d=\gamma=1, \qquad t_1=02.34.cg.dh, \qquad t_0=34.cd.gh.\alpha\beta,$$
$$m_{1,-1}=t_0 d=t_0, \qquad V_{012}=243.adc.gih.\alpha\gamma\beta.$$

Donc $\mathcal{A}^{(0)}$ est un g_{24}^4, $\mathcal{A}^{(1)}$ un g_{24}^6 imprimitif, $\mathcal{A}^{(2)}$ un g_6^3, $\mathcal{B}^{(0)}$ un g_{12}^4 [B contient $t_0 m_{1,-1}=t_1 d$ (I, **32**)], $\mathcal{B}^{(1)}$ un g_{12}^6, $\mathcal{B}^{(2)}$ un g_3^3.

Dans la désignation des constituants de A, A′, A″, A^0, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}$, je continuerai à remplacer les lettres A, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ par Q, R, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, pour préciser que a a la forme $\Sigma_1^\nu x_i y_i+\psi$.

18. Excluons désormais les cas $n=2$ et $n=\pi=3$, déjà traités.

Soit $X_0=X$ le diviseur de A, d'ordre (A, 1) : s_0 qui fixe 10...0, et $X_0^{(\lambda)}=X^{(\lambda)}$ son constituant de champ q_λ. Les substitutions de X ont, d'après les formules (4) et (5) de I, **26**, des matrices de la forme M indiquée au n° **3**, où les éléments dont les deux indices sont $\neq 1$ forment une matrice quelconque M_1 du groupe A_1 de $a-x_1y_1$ [je désignerai par A_1', A_1'', A_1^0, B_1, $A_1^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}_1^{0(\lambda)}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_1^{(\lambda)}$ les groupes déduits de A_1 comme A′, A″, A^0, B, $A^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$, $\mathcal{A}^{0(\lambda)}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ de A (A_1' ne divise pas A′)], et où l'on peut prendre arbitrairement, ou bien les α'_{j1} β'_{j1}, où $j\neq 1$ [alors les formules (8), (4), (6) de I, **26** déterminent explicitement α'_{11} et les α_{1j}, α'_{1j} où $j\neq 1$ par les autres coefficients de α], ou bien les α_{1j}, α'_{1j} où $j\neq 1$ [alors les formules (18), (16), (15) de I, **26** déterminent explicitement α'_{11} et les α'_{j1}, β'_{j1} par les autres coefficients de α]. Donc $(X, A_1)=\pi^{n-2}$.

Les matrices de P (I, **42**) *sont celles des matrices* M *où* $M_1 = 1$. P *est premier à* A_1 *et normal dans* $X = A_1 P = PA_1$ (*cf.*, **3**). P *est même caractéristique* (*E.*, 117) *dans* X, car les g_{p^r} sylowiens de A_1 n'ont aucun diviseur commun (I, **47**, **40**).

Comme $m_{11}^{-1}\gamma$ fixe $10\ldots0$ et est d'ordre $(A', A) \bmod A$ (γ est permutable à m_{11}), les diviseurs de A', A'' qui fixent $10\ldots0$ sont respectivement $X' = \{X, m_{11}^{-1}\gamma\}$ et, si n est pair, $X'' = \{X, m_{11}^{-2}\gamma^2\}$ (si n est impair, $A' = A''$, et $X' = X''$); $m_{11}^{-1}\gamma$ est permutable à A_1 et à P, et $(X', X) = (A', A)$, $(X'', X) = (A'', A)$.

X remplace le point $oy_1 o\ldots o$ $(y_1 \neq 0)$ de q_0 par les π^{n-2} points $(\alpha'_{11}y_1, y_1, \alpha'_{21}y_1, \beta'_{21}y_1, \ldots)$ ($\alpha'_{21}, \beta'_{21}, \ldots$ étant arbitraires), *d'où* $\pi - 1$ *systèmes d'intransitivité* $q_0^{y_1}$ *de* X (*ou de* P) *de degré* π^{n-2} [*et, dans* X', *un seul système de degré* $\pi^{n-2}(\pi - 1)$]. *Les constituants de* X *dans les champs* $q_0^{y_1}$ *sont parallèles* (*cf.*, **3**). En exceptant les deux cas $n = 4$ avec $\theta = -1$ et $n = 3$, X remplace le point $0010\ldots0$ de q_0 par les points $(\alpha_{12}, 0, \alpha_{22}, \beta_{22}, \ldots)$ (α_{12} pouvant être pris arbitrairement, et $\alpha_{22}, \beta_{22}, \ldots$ pouvant prendre $s_{0,n-2}$ systèmes de valeurs) *d'où un* $\pi^{\text{ième}}$ *système* q_0^0 *de degré* $\pi s_{0,n-2}$; comme $s_{0,n-2}$ s'annule dans les deux cas exceptés, on peut, dans ces deux cas, introduire un $\pi^{\text{ième}}$ système fictif q_0^0 de degré $\pi s_{0,n-2}$. *Donc* X (*ou* X') *qui fixe évidemment les* $\pi - 1$ *points* $x, 0\ldots0$ $(x_1 \neq 0)$ *de* q_0, *n'en fixe pas d'autres.* Chaque substitution de P déplaçant les points $oy_1 o\ldots o$ fixés par $A_1^{(0)}$, l'action de P sur q_0 est isomorphe à P et première à $A_1^{(0)} \equiv A_1$. *Donc* $X^{(0)} \equiv X$.

On voit que $A^{(0)}$ *et* $A'^{(0)}$ *sont imprimitifs si* $\pi > 2$ (*des deux cas* $n = 2$ *et* $n = \pi = 3$, *ici exclus et déjà traités, le premier seul présente quelques exceptions*). Alors X a, dans A, un normalisant $> X$, car toute substitution de A qui transforme un des points $x_1 o\ldots o$ en un autre est évidemment permutable à X.

Si $\pi = 2$ (*alors* n *est pair*), $A^{(0)}$ *n'est qu'une fois transitif* [*sauf si* $n = 4$ *avec* $\theta = -1$ *auquel cas* $A^{(0)}$ *est le* g_{120}^5 (**16**)], car X est intransitif. *Mais* $A^{(0)}(n, 2)$ *est toujours primitif.* En effet, soit $\zeta (> 1)$ le degré d'un système d'imprimitivité de $A^{(0)}$, et $s_{0n} = m\zeta$ $(m > 1)$. X, fixant un symbole, doit fixer le système d'imprimitivité dont fait partie ce symbole. Ce système étant donc formé de certains systèmes d'intransitivité de X, ζ a la forme $\alpha 2^{n-1} + 2\beta s_{0,n-2} + 1$

($\alpha, \beta \geqq 0$). On a donc, en posant $2^{\nu'-1} = z \, (\geqq 2)$,

$$m[(\alpha+\beta)z^2 + \theta\beta z - 2\beta + 1] = 2z^2 + \theta z - 1.$$

Donc m est impair et, par suite, $\geqq 3$. Or, pour $\alpha = 0$ (et *a fortiori* pour $\alpha > 0$), cela entraîne $\beta = 0$; et pour $\beta = 0$, $\alpha = 1$ (donc *a fortiori* pour $\alpha > 1$) cela entraîne $z^2 \leqq \theta z - 4$, donc $z^2 < \theta z$, ce qui ne se peut.

Si $\pi = 2$, $B^{(0)}$ *est primitif sauf si* $n = 4$ *avec* $\theta = -1$ [*il est alors imprimitif* (**16**)]. En effet, pour $n = 4$ avec $\theta = -1$, $B^{(0)}$ est le g_{60}^{5} (**16**). Soit donc $n \geqq 6$, et désignons par Y le diviseur de B qui fixe $10\ldots0$. Comme la substitution $t = t_3$ ou t_0 fixe les points $0y_10\ldots0$ et $0010\ldots0$, Y et $X = \{t\}Y$ remplacent ces points par les mêmes points de q_0. Ils ont donc les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $A^{(0)}$ (s'applique à $B^{(0)}$.

19. Supposons $\pi = 2$. Alors, pour $\theta = \pm 1$, $Q(n, 2)$ divise $G(n, 2)$ (I, **26**), et $(G, Q) = s_0 + 1$. Pour $\theta = -1$ (alors $\psi = x^2 + xy + y^2$), on a $\nu' = \nu + 1$, $n = 2\nu'$, et l'on assimile ici $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$, de $G(n, 2)$ à x, y de $Q_2(n, 2)$ dont on ne considère que la forme réelle. Il sera donc commode de modifier un peu les notations relatives à $Q_0(n, 2)$ et de poser aussi pour $\theta = 1$, $\nu' = \nu + 1$, $x_{\nu'} = x$, $y_{\nu'} = y$.

$G(n, 2)$ $(n > 2)$ (1), *admet une représentation transitive* **G** *en* g^{s_0+1} *relative à* $Q(n, 2)$ $(\theta = \pm 1)$. Pour $n > 4$ cela résulte de ce que G est simple (I, **21**). Pour $n = 4$, cela résulte de ce que ni Q_2 ni R_2 n'est normal dans G ($v_1 V_{10} v_1$ altère a), en sorte que G est alors représentable en g_{720}^{6} relativement à Q_2 (*cf.* I, **22**), et par suite en g_{720}^{10} relativement à Q_0 (*cf.* *S.*, 81). *Pour* $n = 2$, $G = Q_2$ *est un* g_6^3, *et* $Q_0 = \{t_1\}$ *un* g_2^2.

Le diviseur **Q** *de* **G** *qui correspond à* Q *de* G *est semblable à* $Q^{(0)}$ (**G** *est donc deux fois transitif*). En effet, soit $G = \Sigma_0^{s_0} Q\alpha_i$ $(\alpha_0 = 1)$, et désignons par C_i le transformé du couple C_0 des quadriques q_0, q_1 par α_i. Le groupe conservant C_i est $\alpha_i^{-1}Q\alpha_i$, et les C_i sont tous distincts, sans quoi $\alpha_i\alpha_k^{-1}$ serait dans Q pour deux valeurs différentes

(1) Pour $n = 2$, $G = Q_2 = \{m_{011} = u_1 v_1, t_0 = u_1\}$ est un g_6^3, $Q_0 = \{t_1\}$ un g_2^2, et $G = Q_0 R_2 = Q_2 R_0$, Q_0 étant premier à R_2, et Q_2 à $R_0 = 1$.

de i, k. Il suffit de montrer qu'on peut déterminer les α_i de manière que les C_i où $i \neq 0$ soient, en désignant par $\varpi = (\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_{\nu'}, \eta_{\nu'})$ ($\xi_{\nu'} = \xi$, $\eta_{\nu'} = \eta$) un point paramétrique et en posant

$$b^{(\varpi)} = \Sigma_0^{\nu}(\xi_i x_i + \eta_i y_i) = \Sigma_0^{\nu}(\xi_i x_i^2 + \eta_i y_i^2),$$

les s_0 couples $C^{(\varpi)}$ définis par $a^{(\varpi)} = a + b^{(\varpi)} = \lambda$ ($\lambda = 0, 1$) *où* ϖ *parcourt* q_0. Car toute substitution α *de* Q, opérant sur $\xi_1, \ldots$ [*quand on l'applique à* $x_1, \ldots$ ($x_{\nu'} = x$, $y_{\nu'} = y$) *de* $a^{(\varpi)}$ *ou, ce qui revient au même, de* $b^{(\varpi)}$] comme sa transposée $\bar{\alpha}$ sur $x_1, \ldots$, permute les $C^{(\varpi)}$ comme $\bar{\alpha}$ permute les ϖ, et $\bar{\alpha}$ parcourt Q en même temps que α (I, **26**). Or donnons à $V_{i\nu'}$, $V_{\nu' i}$, $U_{i\nu'}$, $W_{i\nu'}$, $u_{\nu'}$, $v_{\nu 1}$, $t_{\nu 1}$ leur sens relatif à G ou Q_0, à V_{0k}, V_{k0}, U_{0k}, W_{0k}, u_0, t_0 leur sens relatif à Q_2 (donc $u_0 = v_{\nu'}$, $t_0 = u_{\nu'}$), et désignons par ϖ_0, ϖ_1, ϖ_2 les déterminations $0\ldots0$, $0\ldots010$, $0\ldots01$ de ϖ.

Soit d'abord $\theta = 1$. V_{0k}, V_{k0}, U_{0k}, W_{0k} opèrent sur ϖ les substitutions respectives. $\begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_k + \eta_k + \xi + 1 \\ \eta, & \eta + \eta_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \xi_k + \eta_k + \eta + 1 \\ \xi, & \xi + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \xi_k + \eta_k + \xi + 1 \\ \eta, & \eta + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \xi_k & \xi_k + \eta_k + \eta + 1 \\ \xi & \xi + \eta_k \end{vmatrix}$. On voit directement que ces substitutions permutent entre eux les points du système formé de q_0 et de ϖ_0. Il reste à vérifier que leur p. p. c. m. les permute transitivement. Or les substitutions du p. p. c. m. des V_{0k}, U_{0k}, qui laissent ξ inaltéré, transforment ϖ_0 et ϖ_1 en des points ϖ où $\xi_1, \ldots, \eta_\nu$ sont arbitraires. De même les substitutions du p. p. c. m. des V_{k0}, W_{0k}, qui laissent η inaltéré, transforment ϖ_0 et ϖ_2 en des points ϖ où $\xi_2, \ldots, \eta_\nu$ sont arbitraires. D'ailleurs $V_{01} U_{01} V_{01} = t_{01}$ et $V_{10} W_{01} V_{10} = u_0 t_1$ [*cf.* I, (**26**)] transforment ϖ_0 en ϖ_1 et ϖ_2 respectivement, et si l'une des coordonnées ξ, η d'un point ϖ de q_0 est $\neq 0$, la seconde est déterminée par l'autre et $\xi_1, \ldots, \eta_\nu$. Les points ϖ de q_0 où $\xi = \eta = 0$ sont les transformés de ϖ_0 par V_{01} $Q_0(2\nu, 2)$.

Soit maintenant $\theta = -1$. $V_{\nu' k}$, $V_{k\nu'}$, $U_{k\nu'}$, $W_{k\nu'}$ opèrent sur ϖ les substitutions respectives $\begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_k + \xi + 1 \\ \eta, & \eta + \eta_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \eta_k + \eta + 1 \\ \xi, & \xi + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \eta_k, & \eta_k + \xi + 1 \\ \eta, & \eta + \xi_k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_k + \eta + 1 \\ \xi, & \xi + \eta_k \end{vmatrix}$ qui permutent entre eux les points de q_0 et ϖ_0. Le p. p. c. m. des $V_{\nu' k}$, $U_{k\nu'}$, qui laissent ξ inaltéré, transforme ϖ_0 en des points ϖ où $\xi_1, \ldots, \eta_\nu$ sont arbitraires, la coordonnée η étant déterminée par les autres. A l'aide des $V_{k\nu'}$, $W_{k\nu'}$ on obtient de même tous les points ϖ de q_0 où $\eta = 0$. Les points ϖ de q_0 où $\xi = \eta = 1$ s'obtiennent par $V_{\nu'1}\, V_{1\nu'}\, t_{01}\, Q_0(2\nu, 2)$.

Il résulte de la démonstration précédente que $G = Q_0 R_2 = Q_2 R_0$ (*S.*, 28, 55). *Je dis que le p. g. c. d.* Δ *de* Q_0, R_2 *et celui* Δ' *de* Q_2, R_0 *coincident* (1). Tout d'abord Δ et Δ' contiennent évidemment $R_0(2\nu, 2)$ et les substitutions (*cf.* I, **31**).

$$P_k = V_{k\nu'}\, U_{k\nu'} = V_{k0}\, U_{0k} = \begin{vmatrix} x_k & x_k + y_k + x + y \\ x & x + y_k \\ y & y + y_k \end{vmatrix},$$

$$O_k = t_k P_k t_k = V_{\nu' k} W_{k\nu'} = V_{0k} W_{0k} = \begin{vmatrix} y_k & x_k + y_k + x + y \\ x & x + x_k \\ y & y + x_k \end{vmatrix} \text{ (2)}.$$

D'après les formules (4)-(8) et (15)-(19) (de I, **26**), toute substitution α de Δ ou Δ', donc commune à Q_0 et Q_2 et appartenant à R_0 ou R_2 vérifie les relations

$$(E) \quad \begin{cases} \alpha_{0i} = \beta_{0i}, \quad \alpha'_{0i} = \beta'_{0i} \ (i \neq 0), \quad \alpha^2_{00} + \beta^2_{00} = \alpha'^2_{00} + \beta'^2_{00} = 1, \\ \alpha_{i0} = \alpha'_{i0}, \quad \beta_{i0} = \beta'_{i0} \ (i \neq 0), \quad \alpha^2_{00} + \alpha'_{00} = \beta^2_{00} + \beta'^2_{00} = 1. \end{cases}$$

D'après (7) de I, **26**, le nombre des couples α_{i0}, β_{i0} $(i \neq 0)$ où $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 1$ est pair. S'il est > 0, on peut, en multipliant α à

---

(1) D'après les relations $V_{0k} V_{\nu' k} = v_k$, $U_{0k} U_{\nu' k} = u_k$, $t_k = v_k u_k v_k$, $G = \{R_0, R_2\}$. Mais $R_0 R_2$ n'est pas un groupe. Car ce groupe serait G (*E.*, 67), et le p. g. c. d. de R_0, R_2 serait d'indice 2 dans Δ; or on va voir qu'il coïncide avec Δ. De même, en désignant par P le p. p. c. m. des $\{u_k, v_k\}$ $(k = 1, \ldots, \nu')$ qui est leur produit direct, d'ordre $6^{\nu'}$ $[\{u_k, v_k\} \equiv U(2, 2)$ (*S.*, 83)], $G = \{R_i, P\}$ $(i = 0, 2)$. Mais $R_i P$ n'est pas un groupe. Car le p. g. c. d. X_i de R_i, P devrait être d'ordre $\dfrac{3^{\nu'}}{2^{\nu'} + \theta} > 1$. Or aucune substitution de $\{u_k, v_k\}$ ne conserve $x_k\, y_k$. Donc X_i ne peut être > 1 que si $i = 2$, $\theta = -1$, et alors il serait $\{u_{\nu'}, v_{\nu'}\}$, dont l'ordre 6 ne divise pas $3^{\nu'}$.

(2) On remarque les relations $(P_k O_k)^3 = 1$, $O_k P_k = (P_k O_k)^2$, $P_k t_{\nu'} = t_{\nu'} P_k$, $Q_k t_{\nu'} = t_{\nu'} Q_k$ et $P_k O_k P_k = t_k t_{\nu'}$.

droite par des V_{ik} où i et k sont $\neq 0$, annuler tous les α_{i0} sauf un tel que α_{h0}. Donc $\beta_{h0}=0$, et en multipliant α à droite par des P_k, O_k, on peut annuler tous les $\alpha_{i0}=\alpha'_{i0}$, $\beta_{i0}=\beta'_{i0}$ où $i\neq 0$. Alors, d'après (4)-(8) de I, **26**, α est dans $R(2\nu, 2)$ ou dans $R(2\nu, 2)t_\nu$, donc dans $R(2\nu, 2)$ (elle est dans R_0 ou R_2). *Donc* $\Delta=\Delta'$ *est le p. p. c. m. de* $R_0(2\nu,2)$ *et des* P_k, O_k, *et le p. g. c. d. de* R_0, R_2. Comme $G=Q_0Q_2$, *le p. g. c. d. de* Q_0, Q_2 *est* $\Gamma=\{\Delta, t_1\}=\{\Delta, t_\nu\}$ (puisque Δ contient $t_{k\nu}=P_kO_kP_k$), *produit direct de* Δ *par* $\{t_\nu\}$.

Δ *est isomorphe à* $G(2\nu, 2)$. En effet, ils sont du même ordre, et $R_0(2\nu,2)$ divise $G(2\nu,2)$. De plus P_k et O_k se réduisent à u_k, v_k quand on y néglige x et y, et, d'après (E), toutes les fois qu'on multiplie à gauche une α de Δ par P_k ou O_k, l'effet sur la matrice des α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} où i, k sont $\neq 0$ est le même qu'en multipliant par u_k ou v_k [1]. *On retrouve donc ainsi que* $G=Q_0R_2=Q_2R_0$ (*E.*, 67).

Désignons par $q^i_{\lambda n}=q^i_\lambda$, $s^i_{\lambda n}=s^i_\lambda$, $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{R}_i$, ce que deviennent q_λ, s_λ, $\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}$, pour $Q=Q_i$. Comme $G=Q_iR_k(i\neq k)$, *les diviseurs* $\mathbf{Q}_{ki}$, $\mathbf{R}_{ki}$ *de* $\mathbf{G}_i$ *qui correspondent à* Q_k, R_k *de* G *sont des représentations de ces groupes en* $g^{s^i_0+1}$ *transitifs relativement à* Γ, Δ *respectivement* (*S.*, 28, 55). *On vient de voir que* Q_i *est semblable à* $Q_i^{(0)}$. *De même* $\mathbf{Q}_{ki}$ *et* $\mathbf{R}_{ki}$ *sont respectivement semblables à* $Q_k^{(1)}$, $R_k^{(1)}(s^i_0+1=s^k_1)$. Car on verra (**22**) que les diviseurs X_k, Y_k de Q_k, R_k qui fixent un symbole de q^k_1 sont Δ et $\Delta\{t_\nu\}$ si $k=0$ (il faut ici transformer la forme ψ du nº **22** par u_ν), $u_\nu\Delta u_\nu$ et son produit direct par $v_\nu=u_\nu t_\nu t_\nu u_\nu$, si $k=2$ (*cf. S.*, 54).

Soient Γ_k, Δ_k *les diviseurs de* $\mathbf{Q}_{ki}$ *qui correspondent à* Γ, Δ *de* Q_k (*ce sont les diviseurs fixant un symbole dans* $\mathbf{G}_{ki}$, $\mathbf{R}_{ki}$ *respectivement*). *On verra* (**22**) *que* Γ_k, Δ_k *ne fixent qu'un point du champ, et que* Δ_k *a deux constituants transitifs, l'un de degré* $2^{2\nu}-1$, *semblable*

---

[1] Plus directement Δ contient toujours une α et une seule où la matrice M des coefficients dont les deux indices sont $\neq 0$ est une matrice donnée de $G(2\nu, 2)$. En effet les α_{0i}, α'_{0i}, β_{0i}, β'_{0i}, α_{i0}, α'_{i0}, β_{i0}, β'_{i0} où $i\neq 0$ sont complètement déterminés par M et (E) d'après les formules (4)-(8) et (15)-(19) de I, **26**. D'ailleurs, α étant dans R_0, on a $I_\alpha=\nu+1$ (I, **37**) ce qui détermine $\alpha_{00}\beta'_{00}$ et par suite α_{00}, β_{00}, α'_{00}, et β'_{00} d'après (E).

à $G(2\nu, 2)$, *qui lui est commun avec* Γ_k, *l'autre de degré* $2(s'_{0,2\nu}+1) = 2s^k_{1,2\nu}$ *semblable à la représentation de* $G(2\nu, 2)$ *relative à* $R_i(2\nu, 2)$.

Ainsi pour $n=6$, $\pi=2$, $\mathbf{G}_0$ est un $g^{36}_{1451520}$ deux fois transitif, $\mathbf{Q}_0$, semblable à $Q^{(0)}_0$, un $g^{35}_{8!}$ isomorphe au $g^8_{8!}$ (I, **45**), $\mathbf{R}_0$, semblable à $R^{(0)}_0$, un g^{35}_{20160} isomorphe à $L(4,2)$ et au g^8 alterné (I, **45**), $\mathbf{Q}_{20}$ un g^{36}_{51840} semblable à $Q^{(1)}_2$, $\mathbf{R}_{20}$ un g^{36}_{25920} semblable à $R^{(1)}_2$ (*cf.* **25-26**). $\mathbf{G}_2$ est un $g^{28}_{1451520}$ deux fois transitif, $\mathbf{Q}_2$ un g^{27}_{51840} semblable à $Q^{(0)}_2$, $\mathbf{R}_2$ un g^{27}_{25920} semblable à $R^{(0)}_2$ (¹), $\mathbf{Q}_{02}$ un $g^{28}_{8!}$ semblable à $Q^{(1)}_0$, $\mathbf{R}_{02}$ un g^{28}_{20160} semblable à $R^{(1)}_0$.

Le $g^{27}_{720}\Delta_0$ et le $g^{35}_{720}\Delta_2$ qui fixent un symbole dans $R^{(1)}_0$ et $R^{(1)}_2$ respectivement sont isomorphes au g^6_{720} (²). Δ_0 et Δ_2 ont chacun deux constituants dont l'un est semblable au $g^{15}_{720}G(4,2)$ (I, **22**). L'autre constituant de Δ_0 est un g^{12}_{720} semblable à la représentation de $G(4, 2)$ relative au g_{60}, $R_2(4,2)$ (**16**). L'autre constituant de Δ_2 est un g^{20}_{720} semblable à la représentation de $G(4,2)$ relative au $g_{36}R_0(4,2)$ (**16**).

20. *Considérons maintenant* $\mathcal{A}''$. — Soient $\mathcal{X}_0=\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'_0=\mathcal{X}'$ les diviseurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}'$ qui fixent $10\ldots0$; $\mathcal{X}^{(\lambda)}_0=\mathcal{X}^{(\lambda)}$ et $\mathcal{X}'^{(\lambda)}_0=\mathcal{X}'^{(\lambda)}$ leurs constituants de champ $\mathfrak{p}_\lambda$, et Ξ', Ξ'' les groupes déduits de X', X'' en y supposant les variables homogènes. Ξ' est évi-

(¹) On sait que $G(6,2)$ est le groupe de l'équation qui détermine les 28 tangentes d'une quartique, et $\mathbf{Q}(6,2)$ celui de l'équation qui détermine les 27 droites d'une surface cubique (Jordan, *Traité*, nº 441-456; Maillet, *A. T.*, 1904). $\mathbf{Q}(6,2)$ est aussi le groupe de l'équation qui détermine les tiers de périodes des fonctions hyperelliptiques à quatre périodes (Jordan, *Traité*, nºˢ 499-504) et de celle dont dépend la réduction d'une forme sextique binaire à la forme canonique u^3-v^2, u étant quadratique et v cubique (Clebsch, *Gött. Abh.*, t. 14; 1869).

(²) Il en résulte que $Q^{(1)}_0$ *est semblable à l'action du* $g^8_{8!}$ *sur les 28 combinaisons des huit symboles 2 à 2* (*et par suite* $R^{(1)}_0$ *à celle du* g^8 *alterné sur ces mêmes combinaisons*). Il suffit de montrer que si un $g^8_{2.720}X$ est le produit direct d'un $g_{720}X_1$ par un g_2X_2, X_1 est un g^6_{720}, et X_2 un g^2_2 fixant les symboles de X_1 (*S.*, 48). Or, 2.720 ne divisant pas $7!$, X déplace 8 symboles. X n'est pas transitif. Car le diviseur Y fixant un symbole serait un g_{180} et aurait 1 ou 6 g^5_5 dont chacun figurerait dans 3 des 8 conjugués de Y. Or, X ayant 36 g_5, cela est impossible. Donc X est intransitif, et son ordre exige qu'un des constituants soit un g^6_{720} et l'autre un g^2_2.

demment $\leqq \mathcal{X}'$, et $\Xi'' \leqq \mathcal{X}$. Comme I est premier à X' et à X'', Ξ' a l'ordre de X' et Ξ'' celui de X''. D'ailleurs $\mathcal{A}^{(0)} \equiv \mathcal{A}$ (**17**). Donc, $\mathcal{X}^{(0)} \equiv \mathcal{X}$, et $(\mathcal{X}^{(0)}, 1) = (\mathcal{A}, 1) : \frac{s_0}{\pi - 1} = \frac{(A'', 1)}{s_0}$. Donc $\mathcal{X} = \Xi''$. De même $\mathcal{X}' = \Xi'$.

La matrice générale de $\mathcal{X}$ a la forme générale $\mathfrak{M}$ du n° **4**, et l'on voit, comme aux n^{os} **4** et **6** que $\mathcal{X} \equiv | A_1 P, m_{11} | 1 | I \equiv | A_1 P, m_{11} | D$, $\mathcal{X}' \equiv | A_1 P, m_{11}, \gamma | I | I$, ou, puisque $\gamma^2 \mu^{-1} = [2]$ (I, **24**), $\mathcal{X}' \equiv | A_1 P, m_{11}, \gamma | | I$ ($\mathcal{X}$ est normal dans $\mathcal{X}'$). De là encore $\mathcal{X} \equiv \Xi''$, $\mathcal{X}' \equiv \Xi'$.

Au lieu des $\pi - 1$ $q_0^{\gamma_1}$ *de* X, *on obtient de même, dans* $\mathcal{X}$ *ou* $\mathcal{X}'$ *un seul système* $\mathfrak{q}_0^{\gamma_1}$ *du même degré* π^{n-2}. *Au lieu de* q_0^0, *on obtient de même un système* $\mathfrak{q}_0^0$ *de degré* $\frac{\pi s_{0, n-2}}{\pi - 1}$ (*qui est fictif de degré* 0 *si* $n = 4$ *avec* $\theta = -1$ *ou si* $n = 3$). *Et il ne reste plus que le point* 10...0 *fixé par* $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{X}'$.

Si $\mathcal{A}^{(0)}$ a des systèmes d'imprimitivité de degré $\zeta (> 1)$, $\mathcal{X}_0^{0}$ fixe celui qui contient 10...0. Donc $\zeta = 1 + \pi \frac{s_{0, n-2}}{\pi - 1}$, $s_{0, n-2}$ étant $\neq 0$, ou $\zeta = 1 + \pi^{n-2}$. Si $\zeta = 1 + \pi \frac{s_{0, n-2}}{\pi - 1}$, ζ divise le degré π^{n-2} de l'autre système d'intransitivité de $\mathcal{X}$, ce qui est absurde. Si $\zeta = 1 + \pi^{n-2}$, ζ divise $\pi \frac{s_{0, n-2}}{\pi - 1}$, donc aussi $\frac{s_{0, n-2}}{\pi - 1}$, d'où $(\pi - 1)\zeta \leqq s_{0, n-2}$. Si $n = 2\nu'$ on a donc

$$\pi^{n-1} - \pi^{n-2} + \pi - 1 \leqq \pi^{n-3} - 1 + \theta(\pi^{\nu'-1} - \pi^{\nu'-2}),$$

d'où *a fortiori*, en faisant $\theta = 1$, en supprimant $\pi - 1$ au premier membre, et en divisant par $\pi^{\nu'-2}$,

$$\pi^{\nu'+1} < \pi^{\nu'} + \pi^{\nu'-1} + \pi - 1,$$

et, encore *a fortiori*, $\pi^{\nu'+1} < 2\pi^{\nu'}$, ou $\pi < 2$, ce qui est absurde. Si $n = 2\nu + 1$, on a

$$\pi^{n-1} - \pi^{n-2} + \pi - 1 \leqq \pi^{2\nu-2} - 1$$

d'où, *a fortiori*, $\pi^{n-1} < 2\pi^{n-2}$, ou $\pi < 2$. *Donc pour* $n > 4$, *ou pour* $n = 4$ *et* $\theta = 1$, $\mathcal{A}^0(n, \pi)$ $(\pi \geqq 2)$ *est primitif, simplement transitif.*

Pour $n = 4$ *et* $\theta = -1$, $\mathfrak{q}_0^0$ disparaît, et $\mathcal{X}^{(0)}$ est un g^{π^2} transitif qui est le normalisant dans $\mathcal{A}^{(0)}$ du g_{π^2} transitif correspondant à PD | D (I, 42). *Donc* $\mathcal{A}^{0}$ *est ici un* g^{π^2+1} *deux fois transitif*, isomorphe à $\{\mathfrak{V}_z(2, \pi^2), z^{\pi}\}$ (I, **40**), et $\mathfrak{M}^{(0)}$ un g^{π^2+1} isomorphe à $\mathfrak{V}_z(2, \pi^2)$. $\mathfrak{M}^{(0)}$ *est semblable à* $\mathfrak{V}(2, \pi^2)$ *qui est deux fois transitif*; car les deux groupes sont des représentations d'un même groupe abstrait relatives au normalisant d'un g_{π^2} sylowien (*S.*, 55, 64). *De même* $\mathcal{A}^{(0)}$ *est semblable à* $\{\mathfrak{V}_z(2, \pi^2), z^{\pi}\}$.

Pour $n = 3$, on voit de même que $\mathfrak{M}^{(0)}$ *est semblable à* $\mathfrak{V}(2, \pi)$, *et* $\mathcal{A}^{(0)}$ *à* $\mathcal{L}(2, \pi)$ (I, **40**).

$\mathfrak{M}^{(0)}$ *est primitif.* En effet, d'après ce qu'on vient de voir, on peut supposer $n > 4$ ou $n = 4$ et $\psi = 0$. Le p. g. c. d. $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}$ est, en regardant les variables comme homogènes, $\{B, P, m_{11}, m_{21}\}$. Or m_{21} fixe $010\ldots0$ et $0010\ldots0$. Donc $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{A} = \{m_{21}\}\mathfrak{F}$ remplacent ces points par les mêmes points de $\mathfrak{q}_0''$. Ils ont donc les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $\mathcal{A}^{0}$ s'applique à $\mathfrak{M}^{(0)}$.

Pour $p > 2$, $\mathfrak{M}^{(0)}(5, \pi)$, *isomorphe à* $\mathrm{B}(5, \pi)$ (**17**; I, **39**), *est isomorphe à* $\mathcal{G}(4, \pi)$, (I, **43**) *et de même degré* $\frac{\pi^4 - 1}{\pi - 1}$. Mais le diviseur $\mathcal{A}$, d'ordre $\pi^4(\pi - 1)(\pi^2 - 1)$, qui fixe un symbole dans $\mathcal{G}(4, \pi)$ est isomorphe à $\{G(2, \pi) P_{G(4,\pi)}, m_{11}\} | D$ où le $g_{\pi^3} P_G D | D$, p. g. c. d. des g_{π^4}, a un central d'ordre π (I, **23**), tandis que le diviseur $\mathfrak{F}$ fixant un symbole de $\mathfrak{M}^{0}(5, \pi)$ est, on vient de le voir, isomorphe à $\{R(3, \pi) P_{R(3,\pi)}, m_{11} m_{21}\}$ où le $g_{\pi^3} P_R$, p. g. c. d. des g_{π^4}, est abélien (I, **42**). *Les deux représentations* $\mathfrak{M}^{(0)}(5, \pi)$ *et* $\mathcal{G}(4, \pi)$, *de même degré* $\frac{\pi^4 - 1}{\pi - 1}$, *du même groupe abstrait ne sont donc pas semblables* (1).

---

(1) D'après I, **43**, le diviseur $\mathfrak{F}_1$ de $G(4, \pi)$ qui correspond à $\mathfrak{F}$ fixe la droite dont les coordonnées Z_{ik} vérifient $Z_{13} = Z_{23} = Z_{24} = 0$, $Z_{12} + Z_{34} = 0$, $Z_{14} \not\equiv 0$. D'après la relation qui lie les Z_{ik} (*S.*, **76**) on a aussi $Z_{12} Z_{34} = 0$; donc $Z_{12} = Z_{34} = 0$. Les équations $Z_{12} = 0$, $Z_{24} = 0$ en η_1, η'_1, dont le déterminant est Z_{14}, donnent $\eta_1 = \eta'_1 = 0$. Les équations $Z_{13} = 0$, $Z_{34} = 0$ donnent de même $\xi_2 = \xi'_2 = 0$. Donc $\mathfrak{F}_1$ *fixe la droite* $\eta_1 = \xi_2 = 0$, et comme $\mathfrak{F}_1$ est maximum dans $\mathcal{G}$ (*S.*, **60**), $\mathfrak{F}_1$ *est le diviseur de* $\mathcal{G}$ *qui fixe cette droite.* $\mathcal{A}$ *est le diviseur de* $\mathcal{G}(4, \pi)$ *qui fixe le point* 1000 *ou le plan* $\eta_1 = 0$ *qui est son plan focal relativement au complexe* $\Sigma(\xi_i \eta'_i - \eta_i \xi'_i) = 0$ *conservé par* $\mathcal{G}$. (*Cf.* MITCHELL, *Transact. of the Am. Math. Soc.*, 1914, p. 384, 388, 395.)

21. *Considérons maintenant les* $A^{(\lambda)}$, $A'^{(\lambda)}$ *où* $\lambda \neq 0$, *et soit d'abord* $n = 2\nu + 1$ $(p > 2)$.

Pour étudier le diviseur de A qui fixe un point de $q_{\lambda a}$, il est ici commode de remplacer y_1 par $y_1 + \lambda x_1$. a est alors remplacée par $a + \lambda x_1^2 = a_\lambda$, et aux premiers membres des conditions (4), (5), (6), (7), (8) de I, **26**, il faut ajouter respectivement les termes $2\lambda\alpha_{1j}\alpha'_{1k}$, $2\lambda\alpha_{1j}\alpha_{1k}$, $2\lambda\alpha'_{1j}\alpha'_{1k}$, $\lambda\alpha_{1j}^2$, $\lambda\alpha'^2_{1j}$, tandis qu'au second membre de (7) il faut faire $c_1 = \lambda$. Les deux points $\pm 1, 0, \ldots, 0$ appartiennent à $q_{\lambda a_\lambda}$, et le diviseur X_λ de A [ou de A′, puisque le degré de $A'^{(\lambda)}$ est ici $\frac{1}{2}(\pi - 1) = (A', A)$ fois celui de $A^{(\lambda)}$] qui fixe l'un d'eux fixe l'autre. La matrice générale de X_λ a la forme.

$$M = \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \cdots \\ \hline 0 & \beta'_{11} & \beta_{12} & \beta'_{12} & \cdots \\ 0 & \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \alpha'_{22} & \cdots \\ 0 & \beta'_{21} & \beta_{22} & \beta'_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|.$$

Les relations entre les éléments de M qui correspondent aux combinaisons de la première colonne avec chacune des autres (*cf.* I, **1**) donnent le système

S $\qquad 2\lambda\alpha'_{11} + \beta'_{11} = 1, \qquad 2\lambda\alpha'_{1l} + \beta'_{1l} = 0, \qquad 2\lambda\alpha_{1l} + \beta_{1l} = 0 \ (l \neq 1).$

Le système S′ des autres relations entre les éléments de M (correspondant aux autres combinaisons de colonnes) peut se remplacer par le système S″ résultant de l'élimination de α_{1k}, α'_{1k} à l'aide de S.

Soit maintenant M_1 la matrice déduite de M en supprimant la première ligne et la première colonne. Les matrices M_1 forment évidemment un groupe $X_{\lambda 1}$ homomorphe à X_λ, et comme, d'après S, M est complètement déterminée par M_1, $X_{\lambda 1} \equiv X_\lambda$.

Or M_1 est la matrice d'une substitution du groupe de la forme $\Sigma_2^\nu x_i y_i + cx^2 - \frac{y_1^2}{4\lambda} = a_{\lambda 1}$: on le voit nettement en diminuant d'une unité tous les indices *non nuls* des x_i, y_i $(x = x_0)$ et des éléments de M_1 ; car S″ devient alors le système des relations qui lient les coefficients de la substitution générale du groupe de $a_{\lambda 0} = \Sigma_1^{\nu-1} x_i y_i + cx^2 - \frac{y^2}{4\lambda}$.

Comme les éléments de M_1 ne sont liés que par S'', on peut prendre pour M_1 une matrice quelconque de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda,1})$. *Donc* $X_{\lambda,1}$ *coïncide avec* $A(2\nu, \pi, a_{\lambda,1})$ *à la notation près des variables, et* $X_\lambda \equiv X_{\lambda,1} \equiv A(2\nu, \pi, a_{\lambda,0})$ (1).

X_λ *a* π^2 *systèmes d'intransitivité représentés par les* π^2 *points* $p_{\sigma\mu} = \left(\sigma - \frac{y_1^\mu}{2\lambda}, y_1^\mu, x_2^\mu, y_2^\mu, \ldots, x^\mu\right)$, σ *et* μ *parcourant* $\mathfrak{S}_1$ *et* $y_1^\mu, x_2^\mu, y_2^\mu, \ldots, x^\mu$ *étant un point quelconque du système* $q_{\mu,a_{\lambda,1}}$ *de* $X_{\lambda,1}$ (*si* $q_{0,a_{\lambda,1}}$ *disparaît, ce qui a lieu pour* $\nu = 1$ *avec* $\theta_{c\lambda} = 1$, θ_z *désignant le caractère quadratique de z, on remplacera* $q_{0,a_{\lambda,1}}$ *par* $0 \ldots 0$) : *les points* $x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu x$ *du système* $[\sigma, \mu]$ *de* $p_{\sigma\mu}$ *sont ceux où* $x_1 = \sigma - \frac{y_1^\mu}{2\lambda}$ *et*

---

(1) Des générateurs de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ indiqués précédemment (I, **30**), on déduit par S un système de générateurs correspondants de X_λ. Les générateurs de X_λ ainsi obtenus sont, en remplaçant y_1 par $y_1 - \lambda x_1$ pour revenir à la forme $a = \Sigma_1^\nu x_i y_i + cx^2$ [les deux points fixés par X_λ sont alors $1\,\lambda\,0 \ldots 0$ et $(-1, -\lambda, 0, \ldots, 0)$], ceux de $A(n, \pi, a)$ avec les modifications et restrictions suivantes :

1° On remplacera t_1 par $m_{1\lambda} t_1$ qui correspond à t_0 de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$;

2° On remplacera t_0 par $m_{1\lambda} t_{01}$ qui correspond à $m_{0,-1}$ de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$;

3° On supprimera les $m_{1\mu}$;

4° On remplacera le couple $V_{1k\mu}$, $V_{k1\mu}$ $(k \neq 0)$ par l'unique substitution $V_{k1\mu} U_{1k, \frac{\mu}{\lambda}}$ qui correspond à $V_{k0.2\mu}$ de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$;

5° On remplacera $V_{01\mu}$ par la substitution qui correspond à

$$m_{0 s_0 s_1} = \begin{vmatrix} x & s_0 x - \dfrac{s_1}{4c\lambda} y \\ y & -s_1 x + s_0 y \end{vmatrix} \qquad \left(s_0^2 - \frac{s_1^2}{4c\lambda} = 1\right)$$

de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ (*cf.* I, **24**, **25**) pour $s_1 \neq 0$ (si $s_1 = 0$, $m_{0 s_0 s_1}$ se réduit à 1 où à $m_{0,-1}$ qui a déjà été considérée). Cette substitution est $m_{1\mu''} V_{01\mu} U_{01\mu}$ où $\mu = \frac{s_1}{4c}$, $\mu' = 2\frac{1 - s_0}{s_1}$, $\mu'' = \frac{2}{1 + s_0}$ $\Big[$d'où $s_1 = 4c\mu$, $s_0 = \frac{2}{\mu''} - 1$, $\mu' = \frac{\mu'' - 1}{c\mu\mu'}$, et, d'après la relation entre s_0 et s_1, $c\mu'(\lambda\mu + \mu') = 0\Big]$.

A priori $m_{1\lambda} t_{01}$ et $m_{1\mu''}$ sont dans B toujours et seulement si $m_{0,-1}$ et $m_{0 s_0 s_1}$ respectivement sont dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$. Il est aisé de le vérifier directement. Pour que $m_{0,-1}$ soit dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, il faut et suffit que $\pi \equiv \theta_{\lambda c} \bmod 4$ (θ_z désignant le caractère quadratique de z) (I, **39**); mais alors précisément $m_{1,-\lambda c}$, donc aussi $m_{1\lambda} t_{01}$, est dans B (*loc. cit.*). Pour que $m_{0 s_0 s_1}$ soit dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, il faut et suffit que $2(1 + s_0)$ soit carré (I, **25**, **39**); mais alors μ'' l'est aussi. •

où $y_1 x_2 \ldots x$ parcourt le système $q_{\mu\lambda_1}$ de X_{λ_1} (en remplaçant $q_{0\alpha\lambda_1}$, s'il disparait, par $0 \ldots 0$).

En effet, si M transforme $p_{\sigma\mu}$ en $p_{\sigma'\mu'}$, on a

$$\sigma - \frac{y_1^{\mu}}{2\lambda} + \alpha'_{11} y_1^{\mu} + \alpha_{12} x_2^{\mu} + \ldots + \alpha_{10} x^{\mu} = \sigma' - \frac{y_1^{\mu'}}{2\lambda},$$
$$\beta'_{11} y_1^{\mu} + \beta_{12} x_2^{\mu} + \ldots + \beta_{10} x^{\mu} = y_1^{\mu'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'après S, les deux premières équations donnent $\sigma' = \sigma$. Alors la première résulte de la seconde qui, jointe aux suivantes, montre que M_1 transforme le point qui représente $q_{\mu\alpha\lambda_1}$ en celui qui représente $q_{\mu'\alpha\lambda_1}$. Donc $\mu' = \mu$. Si $\mu = 0$, les π systèmes obtenus en faisant varier σ sont de degré $(\pi^{\nu} - \theta_{c\lambda})(\pi^{\nu-1} + \theta_{c\lambda})$, car X_λ transforme les 2ν dernières coordonnées de $p_{\sigma\mu}$ comme X_{λ_1}, et, d'après S, l'action de chaque substitution de X_λ sur la première coordonnée est déterminée par son action sur les autres. Si $\mu \neq 0$, ils sont de degré $\pi^{2\nu-1} - \theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1}$.

Les π^2 systèmes contiennent donc $\pi^n - \pi$ points. Or X_λ fixe les π points $x_1 0 \ldots 0$. *Donc les seuls points de $q_{\lambda\alpha\lambda}$ fixés par X_λ sont* $\pm 1, 0, \ldots, 0$. *Donc $A^{(\lambda)}(n, \pi)$ et $A'^{(\lambda)}(n, \pi)$ sont imprimitifs pour $\lambda \neq 0$ et $n = 2\nu + 1 > 1$ ($p > 2$).*

22. *Soit maintenant n pair $= 2\nu'$.*

Supposons, ce qui est toujours permis, $\psi \neq 0$, *réductible ou irréductible, $bc' \neq 0$ et $\lambda = c'$* [les $A^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$ sont semblables (**15**)]. Écrivons les variables dans l'ordre $x, y, x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$. Le système $q_{c'}$ contient les points $0, \pm 1, 0, \ldots, 0$ (confondus si $p = 2$), et le diviseur $X_{c'}$ de A [ou de A', puisque le degré de $A'^{(\lambda)}$ est ici $\pi - 1 = (A', A)$ fois celui de $A^{(\lambda)}$ (**15**)], qui fixe l'un d'eux fixe l'autre. La matrice générale de $X_{c'}$ a la forme

$$M = \left|\begin{array}{c|c|cccccc}
\alpha_{00} & 0 & \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \ldots \\ \hline
\beta_{00} & 1 & \beta_{01} & \beta'_{01} & \beta_{02} & \beta'_{02} & \ldots \\ \hline
\alpha_{10} & 0 & \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \ldots \\
\beta_{10} & 0 & \beta_{11} & \beta'_{11} & \beta_{12} & \beta'_{12} & \ldots \\
\alpha_{20} & 0 & \alpha_{21} & \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \alpha'_{22} & \ldots \\
\beta_{20} & 0 & \beta_{21} & \beta'_{21} & \beta_{22} & \beta'_{22} & \ldots \\
\ldots & \ldots & & & & &
\end{array}\right|.$$

Les relations entre les éléments de M qui correspondent aux combinaisons de la deuxième colonne avec chacune des autres donnent le système

$$\Sigma \qquad b\alpha_{00}+2c'\beta_{00}=b, \quad b\alpha_{0k}+2c'\beta_{0k}=0, \quad b\alpha'_{0k}+2c'\beta_{0k}=0 \qquad (k\neq 0).$$

Le système Σ' des autres relations (correspondant aux autres combinaisons de colonnes) peut se remplacer par le système Σ'' résultant de l'élimination de α_{0k}, α'_{0k} à l'aide de Σ.

Soit d'abord $p>2$. Appelons M_1 la matrice déduite de M en supprimant la deuxième ligne et la deuxième colonne. Les matrices M_1 forment évidemment un groupe $X_{c'1}$ homomorphe à $X_{c'}$, et comme, d'après Σ, M est complètement déterminée par M_1, $X_{c'1}=X_{c'}$.

Or M est une matrice du groupe de $\Sigma_1^\nu x_i y_i + c_1 x^2 = a_1$, en posant $\frac{-\delta}{4c'}=c_1$, car Σ'' est précisément le système des relations qui lient les coefficients de la substitution générale de $A(2\nu+1,\pi,a_1)$ et comme les coefficients de M_1 ne sont liés que par Σ'', on peut prendre pour M_1 une matrice quelconque de $A(2\nu+1,\pi,a_1)$. Donc $X_{c'1}$ coïncide avec $A(2\nu+1,\pi,a_1)$, et $X_{c'}\equiv X_{c'1}$ [1].

$X_{c'}$ *a* π^2 *systèmes d'intransitivité représentés par les* π^2 *points* $p_{\sigma\mu}=0\sigma 1\mu 0\ldots 0$, σ *et* μ *parcourant* $\mathfrak{S}$; *les points* $xyx_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ *du système* $[\sigma,\mu]$ *de* $p_{\sigma\mu}$ *sont ceux où* $xx_1y_1\ldots x_\nu, y_\nu$ *parcourt* $q_{\mu a_1}$ *et où* $y=\sigma-\frac{bx}{2c'}$.

En effet, si M transforme $p_{\sigma\mu}$ en $p_{\sigma'\mu'}$, on a

$$\alpha_{01}+\alpha'_{01}\mu=0, \qquad \sigma+\beta_{01}+\beta'_{01}\mu=\sigma',$$
$$\alpha_{11}+\alpha'_{11}\mu=1, \qquad \beta_{11}+\beta'_{11}\mu=\mu', \qquad \ldots.$$

---

[1] Des générateurs de $A(2\nu+1,\pi,a_1)$ indiqués précédemment (I, **30**), on déduit par Σ un système de générateurs correspondants de $X_{c'}$: les générateurs de $X_{c'}$ ainsi obtenus sont ceux de $A(n,\pi,a)$ avec les modifications et restrictions suivantes :

1° On remplacera Ψ par le $g_2 \{u_0\}$ qui répond à $\{t_0\}$ de $A(2\nu+1,\pi,a_1)$;

2° On remplacera $V_{0k\mu}$ par $V_{0k\mu}W_{0k,-\frac{b\mu}{2c'}}$ qui correspond à $V_{0k\mu}$ de $A(2\nu+1,\pi,a_1)$;

3° On supprimera les $V_{0k\mu}$.

D'après Σ, les deux premières équations donnent $\sigma' = \sigma$. Alors la seconde résulte de la première, et le système obtenu en négligeant la seconde montre que M_1 transforme le point p_μ de $q_{\mu a_1}$ dont les coordonnées $x, x_1, y_1, x_2, \ldots,$ sont $0, 1, \mu, 0, \ldots,$ en $p_{\mu'}$ de $q_{\mu' a_1}$. Donc $\mu' = \mu$. Comme $X_{c'}$ conserve la coordonnée σ de $p_{\sigma\mu}$ et transforme p_μ comme $X_{c'_1} = A(2\nu+1, \pi, a'_1)$, les π systèmes obtenus en faisant varier σ seul sont, pour $\mu = 0$, de degré $\pi^{2\nu} - 1$, pour $\mu \neq 0$, de degré $\pi^{2\nu} + \theta_{c_1}\pi^\nu$.

Les π^2 systèmes contiennent $\pi^n - \pi$ points, et $X_{c'}$ fixe les π points $0y0\ldots0$. *Donc les seuls points de $q_{c'}$ fixés par $X_{c'}$ sont* $0, \pm 1, 0, \ldots, 0$. *Donc* $A^{\lambda}(n, \pi)$ *et* $A'^{\lambda}(n, \pi)$ *sont imprimitifs pour* $\lambda \neq 0$, *n pair* > 2 *et $p > 2$.*

Soit maintenant $p = 2$. Alors Σ se réduit à $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{0k} = \alpha'_{0k} = 0$ $(k \neq 0)$, et il suffit de porter ces valeurs dans Σ' pour former Σ'' qui se compose : 1° du système Σ''_1 correspondant aux combinaisons de la première colonne avec chacune des $n-2$ dernières; 2° du système Σ''_2 correspondant aux combinaisons deux à deux *sans répétition* des $n-2$ dernières colonnes; 3° du système Σ''_3 correspondant aux combinaisons de chacune des $n-2$ dernières colonnes avec elle-même; 4° de l'équation E qui répond à la combinaison de la première colonne avec elle-même. Or soit M_2 la matrice déduite de M en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes. D'après Σ''_2 (qui ne contient ici que des éléments de M_2), M_2 est une matrice de $G(2\nu, \pi)$, et l'on peut prendre pour M_2 une matrice quelconque de $G(2\nu, \pi)$, car, quand on s'est donné M_2, Σ''_3 détermine les β_{0k}, β'_{0k} où $k \neq 0$, Σ''_1 les α_{i0}, β_{i0}, où $i \neq 0$ (¹), tandis que E, qui s'écrit ici

$$c'\beta_{00}^2 + b\beta_{00} = \Sigma_1^\nu \alpha_{i0}\beta_{i0},$$

ne détermine β_{00} qu'à la constante additive $\frac{b}{c'}$ près.

(¹) Σ''_1 est formé des 2ν équations (4) et (5) de I, **26** qui répondent à $j = 0$, $k \neq 0$. Leur déterminant, qui est le produit de celui de M_2 par b, est $\neq 0$. On remarquera que les 2ν équations (15) et (17) de I, **26** qui répondent à $j = 0$, $k \neq 0$ représentent précisément la résolution de Σ''_1, et que les 2ν équations (18), (19) de I, **26** qui répondent à $i = 0$ fournissent les α_{i0}, β_{i0}, indépendamment des β_{0k}, β'_{0k} (comme le système analogue Σ''_3 a fourni les β_{0k}, β'_{0k}).

Ainsi M_2 détermine $M\{u_0\}$ ($Mu_0 = u_0M$, $u_0^2 = 1$; *cf.* I, **25**). Comme u_0 est dans $X_{c'}$, et qu'une seule des deux matrices M, Mu_0 est dans $A^0 = B$ (M est dans A^0 ou dans $A^0 t_0$; u_0 est dans $A^0 t_0$), on voit que $X_{c'} = Y_{c'}\{u_0\}$, $Y_{c'}$ étant le p. g. c. d. de $X_{c'}$, B, et que M_2 détermine complètement celle M' des deux matrices M, Mu_0 qui est dans $Y_{c'}$. Disons que M_2 et M' se correspondent. On voit directement que la matrice M' de $Y_{c'}$ qui correspond au produit de deux matrices M_2 de $G(2\nu, \pi)$ est le produit des matrices M' correspondant à ces deux matrices M_2. Donc $Y_{c'} \equiv G(2\nu, \pi)$, et $X_{c'}$ est le produit direct de $Y_{c'}$ par $\{u_0\}$ (¹).

Désignons par $\mathbf{A}(2\nu, \pi)$, $\mathbf{B}(2\nu, \pi)$ les diviseurs de $Y_{c'}$ qui répondent aux diviseurs $A(2\nu, \pi)$, $B(2\nu, \pi)$ de $G(2\nu, \pi)$. $Y_{c'}$ divisant $B(n, \pi)$, la condition (32) de I, **37** exige que, dans $\mathbf{B}(2\nu, 2)$, β_{00} reste nul.

Comme $X_{c'}$ conserve x, *chaque valeur* ξ *de* x *caractérise* $n_\xi (\geq 1)$ *systèmes d'intransitivité (de degré* ≥ 1*) formés des points de* $q_{c'}$ *autres que le point* 010 . . . 0 *fixé par* $X_{c'}$ *qui vérifient* $\Sigma_1^\nu x_i y_i + \psi(\xi, y) = c'$. *Je dis que* $n_\xi = 1$, *et que* $X_{c'}$ *ne fixe, dans* $q_{c'}$, *que le point* 010 . . . 0.

Considérons en effet le système d'intransitivité σ_ξ de degré ζ_ξ dont fait partie le point $\xi 0 x_1 10\ldots0$ ($x_1 = c\xi^2 + c'$) de $q_{c'}$. $V_{10\eta}$ (qui est dans $Y_{c'}$) transforme ce point en $\xi\eta x'_1 10\ldots0$ où $x'_1 = b\xi\eta + x_1 + c'\eta^2 = \psi(\xi, \eta) + c'$.

Soit d'abord $\xi \neq 0$. *Si* $\psi(\xi, \eta) + c' \neq 0$ [si $\pi = 2$, ce cas ne se présente que pour $\psi = xy + y^2$; $A(2\nu, 2)$ est alors, à la notation près, le transformé de $Q_0(2\nu, 2)$ par u_0], le point $x'_1 10\ldots0$ du champ de $A(2\nu, \pi)$ appartient dans ce champ à un système d'intransitivité autre que q_0. Donc $\mathbf{A}(2\nu, \pi)$ [ou $\mathbf{B}(2\nu, \pi)$, puisque $B(2\nu, \pi)$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $A(2\nu, \pi)$] le

(¹) Aux générateurs τ_i, $u_{i,c'\mu}$, $V_{ik\mu}$, $m_{i\mu}$ de $G(2\nu, \pi)$ répondent respectivement, dans $Y_{c'}$, les générateurs t_i, $V_{i0\mu}$, $V_{ik\mu}$, $m_{i\mu}$. On obtient donc un système de générateurs de $X_{c'}$ en prenant les générateurs de $A(n, \pi)$ avec les modifications et restrictions suivantes :

1° On remplacera Ψ par $\{u_0\}$;
2° On supprimera les générateurs $V_{0i\mu}$.

En supprimant le générateur u_0 de $X_{c'}$ on obtient $Y_{c'}$.

remplace et remplace de même $\xi_1 \eta x'_1$ 10...o par $\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}$ points. *Si* $\psi(\xi, \eta) + c' = 0$ [si $\pi = 2$, ce cas ne se présente que pour $\psi = x^2 + xy + y^2$; $A(2\nu, 2)$ est alors $Q_2(2\nu, 2)$], le point x'_1 10...o appartient dans le champ de $A(2\nu, 2)$ à q_0. Donc $\mathbf{A}(2\nu, \pi)$ remplace $\xi\eta x'_1$ 10...o par $\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^\nu - 1$ points, et $W_{01,\eta\xi,-1}$ (qui est dans $Y_{c'}$) le remplace par $\xi\eta$o...o. On a donc, pour $\xi \neq 0$, si $\psi(\xi, \eta) + c'$ est réductible en η $\left(\text{ses racines sont alors distinctes, car leur différence est } \frac{b\xi}{c'} \neq 0\right)$,

$$\zeta_\xi \geq (\pi - 2)(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) + 2(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^\nu) = \pi^{2\nu} + \pi^\nu,$$

et si $\psi(\xi, \eta) + c'$ est irréductible en η,

$$\zeta_\xi = \pi(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) = \pi^{2\nu} - \pi^\nu.$$

Si $\xi = 0$, $\psi(0, \eta) + c' = c'(\eta^2 + 1)$ n'ayant que la racine $\eta = 1$, on a de même (en ne comptant pas le point 010...o fixé par $X_{c'}$)

$$\zeta_0 \geq (\pi - 1)(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) + \pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1} + \pi^\nu - 1 = \pi^{2\nu} - 1.$$

Or soit μ le nombre des $\xi \neq 0$, tels que $\psi(\xi, \eta) + c'$ soit réductible en η. $\psi(\xi, \eta) + c'$ ayant alors deux racines distinctes si $\xi \neq 0$, et la seule racine $\eta = 1$ si $\xi = 0$, il y a $2\mu + 1$ points $\xi\eta$ annulant $\psi(\xi, \eta) + c'$. Donc $2\mu + 1 = \pi - \theta$ (*E.*, 45), et $\mu = \frac{\pi - \theta - 1}{2}$. Ainsi $\psi(\xi, \eta) + c'$ est irréductible pour $\pi - 1 - \mu = \frac{\pi + \theta - 1}{2}$ valeurs $\neq 0$ de ξ, réductible pour les $\frac{\pi - \theta - 1}{2}$ autres valeurs $\neq 0$ de ξ et aussi pour $\xi = 0$.

Revenons maintenant à l'équation $\Sigma_1^\nu x_i y_i = \psi(\xi, y) + c'$. Pour chacune des $\frac{\pi - 1 - \theta}{2}$ valeurs $\neq 0$ de ξ rendant $\psi(\xi, y) + c'$ réductible en y, l'équation a

$$(\pi - 2)(\pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}) + 2(\pi^{2\nu} - \pi^{\nu-1} + \pi^\nu) = \pi^{2\nu} + \pi^\nu$$

solutions en $y, x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$. Donc ζ_ξ est alors $\leq \pi^{2\nu} + \pi^\nu$. Pour chacune des $\frac{\pi - 1 + \theta}{2}$ valeurs $\neq 0$ de ξ rendant $\psi(\xi, y) + c'$ irréductible en y, l'équation a $\pi^{2\nu}-\pi^\nu$ solutions, et ζ_ξ est $\leqq \pi^{2\nu}-\pi^\nu$. Pour $\xi=0$, $\psi(\xi, y)+c'$ n'ayant que la racine $y=1$, l'équation a $\pi^{2\nu}-1$ solutions (en ne comptant pas la solution $10\ldots0$ correspondant au point $010\ldots0$ fixé par $X_{c'}$). Donc ζ_0 est $\leqq \pi^{2\nu}-\pi^\nu$. *En comparant ces inégalités avec les précédentes, on voit que leurs seconds membres fournissent, pour chaque* ξ, *la valeur exacte de* ζ_ξ, et que les σ_ξ contiennent $s_{c'}-1$ points exactement. Donc $n_\xi=1$, et $X_{c'}$ ne fixe dans $q_{c'}$ que le point $010\ldots0$.

On remarquera que $\mathbf{B}(2\nu, \pi)$ *fixe les points* $\xi\eta\,0\ldots0$ (puisque β_{00} y est nul). Or, si $\pi=2$, $A(2\nu, 2)$, conjugué de $Q_0(2\nu, 2)$ si $\psi=xy+y^2$, et identique à $Q_2(2\nu, 2)$ si $\psi=x^2+xy+y^2$, a dans $G(2\nu, 2)$ l'indice $\frac{\zeta_1}{2}$. Donc $\mathbf{B}(2\nu, 2)$, qui fixe les deux points $1\eta0\ldots0$ $(\eta=0, 1)$, a dans $Y_{c'}$ l'indice ζ_1 et est par suite le diviseur fixant un symbole du constituant de $Y_{c'}$ de champ σ_1. *Donc, si* $\pi=2$, *le constituant de champ* σ_1 *de* $Y_{c'}$ *est semblable à la représentation de* $G(2\nu, 2)$ *relative à* $R(2\nu, 2)$ (*nécessairement imprimitive puisque* Q *est* $>R$). *De même, si* $\pi=2$, *le constituant de champ* σ_0 *de* $Y_{c'}$ *est semblable à* $G(2\nu, 2)$; car à tout point $x_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ répond un seul point $oyx_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ de $q_{c'}$ et l'action de M et de M_2 sur $x_1y_1\ldots x_\nu y_\nu$ est la même. On remarquera que u_0 fixe tous les points de σ_0. *Donc, si* $\pi=2$, *les constituants* de $X_{c'}$ *et de* $Y_{c'}$ *dans* σ_0 *coïncident.*

Si $A^{(c')}$ est imprimitif, le constituant $X_{c'}^{(c')}$ de $X_{c'}$ dans $q_{c'}$ fixe au moins un système d'imprimitivité dont le degré, d'après les degrés des systèmes d'intransitivité de $X_{c'}$ a la forme

$$\zeta=r(\pi^{2\nu}-\pi^\nu)+s(\pi^{2\nu}+\pi^\nu)+t(\pi^{2\nu}-1)+1,$$

r, s, t étant entiers $\geqq 0$, et $r\leqq\dfrac{\pi-1+\theta}{2}$, $s\leqq\dfrac{\pi-1-\theta}{2}$, $t\leqq 1$.

Si $t=0$, ζ est impair, et comme il divise le degré $\pi^{2\nu+1}-\theta\pi^\nu$ de $A^{(c')}$, il divise $\pi^{\nu+1}-\theta$. On a donc, q désignant un entier $\geqq 1$,

$$q[r(\pi^{2\nu}-\pi^\nu)+s(\pi^{2\nu}+\pi^\nu)+1]=\pi^{\nu+1}-\theta.$$

Donc $q+\theta=k\pi^\nu$, k étant un entier $\geqq 0$. Donc

$$q[r(\pi^\nu-1)+s(\pi^\nu+1)]\leqq\pi-1,$$

d'où $s = 0$, $\nu = r = q = k = \theta = 1$, $\pi = 2$. *Alors* $A^{(c')}$ *est résoluble* (I, **40**) *et par suite imprimitif*, puisque son degré 6 n'est pas une puissance de nombre premier (*S.*, 63).

Si $t = 1$, ζ est pair et divise π^ν. On a donc

$$q[r(\pi^{2\nu} - \pi^\nu) + s(\pi^{2\nu} + \pi^\nu) + \pi^{2\nu}] = \pi^\nu \qquad (q \text{ entier} \geqq 2),$$

ce qui est manifestement impossible pour $\nu > 0$. *Donc, pour* $p = 2$ *et* n *pair* > 2, $A^{(c')}$ *est primitif simplement transitif, sauf si* $\pi = 2$ *avec* $n = 4$ *et* $\theta = 1$, *auquel cas il a des systèmes d'imprimitivité de degré* 2.

Le même théorème s'applique à $B^{(c')}$. En effet, $X_{c'}$ a π systèmes d'intransitivité, chacun étant caractérisé par la valeur ξ que x y conserve et formé des points $\xi y x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu$ tels que $\Sigma_1^\nu x_i \eta_i + \psi(\xi, y) = c'$. Or, pour $n \geqq 4$, il y a toujours de ces points pour lesquels $x_1 = y_1$ (**15**). Comme t_1 les fixe, $X_{c'} = | t_1 | Y_{c'}$ et $Y_{c'}$ les remplacent par les mêmes points de $q_{c'}$. Donc $X_{c'}$ et $Y_{c'}$ ont les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $A^{(c')}$ s'applique à $B^{(c')}$.

23. *Considérons maintenant* $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ *et* $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ *pour* $\lambda \neq 0$, *et soit d'abord* $n = 2\nu + 1$ $(p > 2)$.

Revenons aux variables du nº **21**. Soient $\mathcal{X}_\lambda$ le diviseur de $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ qui fixe $10\ldots0$, $\mathcal{X}_\lambda^{(\mu)}$ le constituant de $\mathcal{X}_\lambda$ dans le champ $\mathfrak{J}_{\mu\alpha_\lambda}$ ($\mathcal{X}_\lambda^{(\mu)}$ ne dépend que des caractères quadratiques de λ, μ); Ξ_λ, Ξ'_λ les groupes déduits des diviseurs respectifs X_λ, X'_λ de A, A' qui fixent $10\ldots0$ en y regardant les variables comme homogènes. Ξ_λ et Ξ'_λ sont évidemment $\leqq \mathcal{X}_\lambda$. Or on voit comme au nº **4** que Ξ_λ et Ξ'_λ ont les ordres respectifs de X_λ, X'_λ, et que $\mathcal{X}_\lambda \equiv \mathcal{X}_\lambda^{(\mu)}$. Donc $(\mathcal{X}_\lambda, 1) = (\mathcal{X}'_\lambda, 1) = (\mathcal{A}, 1) : \frac{s_\lambda}{2} = \frac{(A, 1)}{s_\lambda} = \frac{2(A', 1)}{(\pi - 1)s_\lambda}$. Donc $\mathcal{X}_\lambda = \mathcal{X}'_\lambda = \Xi_\lambda = \Xi'_\lambda$.

La matrice générale de $\mathcal{X}_\lambda$ est

$$\mathfrak{M} = \left|\begin{array}{c|cccc} \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \ldots \\ \hline 0 & \beta'_{11} & \beta_{12} & \beta'_{12} & \ldots \\ 0 & \alpha'_{21} & \alpha_{22} & \alpha'_{22} & \ldots \\ 0 & \beta'_{21} & \beta_{22} & \beta'_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right| \qquad (\alpha_{11} \not\equiv 0).$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans A. Alors, d'après S et l'équation (4) de **I, 26** modifiée comme il a été dit (**21**), $\alpha_{11}=1$, et la matrice $\mathfrak{M}_1$ déduite de $\mathfrak{M}$ en supprimant la première ligne et la première colonne est la matrice générale de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 1})$ (**21**). Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont proportionnels. Donc $\mathfrak{X}_\lambda' \equiv A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, et, de nouveau $\mathfrak{X}_\lambda = \Xi_\lambda$.

Désignons par (σ, μ) le système d'intransitivité de $\mathfrak{X}_\lambda$ dont fait partie $[\sigma, \mu]$ (**21**) quand on y suppose les coordonnées homogènes. *Les* π *systèmes* $[0, \mu]$ *fournissent évidemment les trois systèmes* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, N)$ (*correspondant aux trois* $q_{\rho a_{\lambda 0}}$), *le premier de degré* $\frac{s_{0,n-1,a_{\lambda 0}}}{\pi-1}$, *les deux autres de degré* $\frac{1}{2}\, s_{1,n-1,a_{\lambda 0}}$. *D'ailleurs les* π *systèmes* $(1, \mu)$ *sont distincts.* Si en effet le produit de M et d'une similitude de I transformait $(1, \mu)$ en $(1, \mu')$, on aurait des équations de la forme

$$
\begin{aligned}
1-\frac{y_1^\mu}{2\lambda}+\alpha'_{11}y_1^\mu+\alpha_{12}x_2^\mu+\alpha'_{12}y_2^\mu+\ldots &= k\left(1-\frac{y_1^{\mu'}}{2\lambda}\right),\\
\beta'_{11}y_1^\mu+\beta_{12}x_2^\mu+\beta'_{12}y_2^\mu+\ldots &= k y_1^{\mu'},\\
\alpha'_{21}y_1^\mu+\alpha_{22}x_2^\mu+\alpha'_{22}y_2^\mu+\ldots &= k x_2^{\mu'},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Les deux premières donnent, d'après S, $k=1$. Alors la première résulte de la seconde, et $\mathfrak{M}_1$ transforme $q_{\mu a_{\lambda 1}}$ en $q_{\mu' a_{\lambda 1}}$. Donc $\mu'=\mu$ (**21**). Il est clair d'ailleurs que $(1, \mu)$ est du même degré que $[1, \mu]$ ou $q_{\mu a_{\lambda 1}}$.

La somme des degrés des $\pi+3$ *systèmes ainsi obtenus étant le degré* $\frac{\pi^n-1}{\pi-1}-1$ *de* $\mathfrak{X}_\lambda$, $\mathfrak{X}_\lambda$ *n'en a pas d'autres.*

Dans $[\sigma, \mu]$, $a_\lambda = \lambda\sigma^2+\mu$. Donc *ceux des* (σ, μ) *qui appartiennent à* $\mathfrak{X}_\lambda^{(\lambda)}$ *sont*, en réduisant σ à 0 ou à 1, $(0, \lambda)$ *de degré* $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu-1}-\theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1})$, $(1, 0)$ *de degré* $(\pi^\nu-\theta_{c\lambda})(\pi^{\nu-1}+\theta_{c\lambda})$ *et les* $\frac{1}{2}(\pi-3)$ $(1, \mu)$ *où* $\lambda+\mu=k^2\lambda$ $(k^2=0, 1)$, *chacun de degré* $\pi^{2\nu-1}-\theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1}$: la somme des degrés de ces $\frac{1}{2}(\pi+1)$ systèmes d'intransitivité étant $\frac{1}{2}\, s_{\lambda n}-1$, $\mathfrak{X}_\lambda^{(\lambda)}$ ne fixe qu'un point de q_c.

Si $\mathfrak{X}^{(\lambda)}$ a un système d'imprimitivité de degré ζ contenant $10\ldots 0$,

$\mathcal{X}_\lambda^{(\lambda)}$ fixe ce système, et ζ a la forme

$$\zeta = \frac{r}{2}(\pi^{2\nu-1} - \theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1}) + s(\pi^\nu - \theta_{c\lambda})(\pi^{\nu-1} + \theta_{c\lambda}) + t(\pi^{2\nu-1} - \theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1}) + 1$$

$$\left(r, s, t \text{ entiers} \geq 0;\ r, s \leq 1;\ t \leq \frac{\pi - 3}{2}\right);$$

de plus ζ divise le degré $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu} + \theta_{c\lambda}\pi^\nu)$ de $\mathcal{A}^{(\lambda)}$.

Si $s = 0$, ζ est premier à π. Donc ζ divise $\frac{1}{2}(\pi^\nu + \theta_{c\lambda}) = \zeta q\,(q \geq 1)$, d'où

$$q(2t + r)(\pi^{2\nu-1} - \theta_{c\lambda}\pi^{\nu-1}) = \pi^\nu + \theta_{c\lambda} - 2 < \pi^\nu,$$

d'où $q(2t + r) = \nu = \theta_{c\lambda} = 1$. Mais alors $\mathcal{B} \equiv \mathcal{O}(2, \pi)$ (I, **40**), et le $g_{\pi-1}$ diédral (**15**) qui fixe un symbole dans $\mathcal{B}^{(c')}$ y est maximum pour $\pi > 3$, d'après la détermination connue des diviseurs de $\mathcal{O}$.

Si $s = 1$, la relation $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu} + \theta_{c\lambda}\pi^\nu) = \zeta q\,(q \geq 2)$ donne

$$q(r + 2t + 2)(\pi^\nu - \theta_{c\lambda}) + 2q\theta_{c\lambda} = \pi(\pi^\nu + \theta_{c\lambda}).$$

Donc π divise $q(r + 2t) = l\pi\,(l \geq 1)$, et l'on a, en divisant par π,

$$\pi^{\nu-1}(l\pi + 2q - 1) = \theta_{c\lambda}(l - 1),$$

d'où $\theta_{c\lambda} = \nu = 1$, et $l(\pi - 1) + 2q = 1$, ce qui ne se peut. *Donc* $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 0$, *n impair*) *est primitif hors du cas* $n = \pi = 3$ (**17**).

$\mathcal{B}^\lambda(2\nu + 1, \pi)$ $(\lambda \neq 0)$ *est aussi primitif hors du cas* $n = \pi = 3$. En effet, on vient de le voir pour $\nu = 1$. Soit donc $n \geq 5$. Le p.g.c.d. $\mathcal{F}_\lambda$ de $\mathcal{B}$ avec $\mathcal{X}_\lambda \equiv A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ est formé des $\mathfrak{M}$ (réduites comme au n° **21** à être dans A) où $\mathfrak{M}_1$ est dans $B(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$, seul diviseur d'indice 2 dans $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$. On a alors $\mathcal{X}_\lambda = |m_{21}|\mathcal{F}_\lambda$ (les variables de m_{21} étant supposées homogènes). Or chacun des systèmes (σ, μ) de $\mathcal{X}_\lambda^{(\lambda)}$ contient un point dont les coordonnées ont la forme $\sigma - \frac{y_1}{2\lambda}, y_1, 0, \ldots, 0, x$, car on peut toujours résoudre $cx^2 - \frac{y_1^2}{4\lambda} = \mu$ [*cf.* **21**; si $\mu = 0$ et $\theta_{c\lambda} = -1$, x et y_1 seront nuls; mais alors, dans $\mathcal{X}_\lambda^{(\lambda)}$, σ est $\neq 0$, puisque le seul système de $\mathcal{X}_\lambda^{(\lambda)}$ où $\mu = 0$ est $(1, 0)$]. Donc $\mathcal{F}_\lambda$ et $\mathcal{X}_\lambda = |m_{21}|\mathcal{F}_\lambda$ remplacent ces points par les mêmes points de q_λ. Donc ils ont les mêmes systèmes d'intransitivité, et le raisonnement fait pour $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ s'applique à $\mathcal{B}^{(\lambda)}$.

24. *Soit maintenant* $n = 2\nu'$.

Si $p=2$, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ et $\mathcal{B}^{(\lambda)}$ sont respectivement semblables à $A^{(\lambda)}$ et $B^{(\lambda)}$ (**17**) déjà étudiés (**22**).

Soit donc $p > 2$, et revenons aux variables et aux conventions du n° **22**. Les deux $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ où $\lambda \neq 0$ étant semblables (**17**), supposons $\lambda = c'$. Soient $\mathcal{X}_{c'}$ et $\mathcal{X}'_{c'}$ les diviseurs respectifs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ [ici $(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = 2$] qui fixent $010\ldots0$; $\mathcal{X}_{c'}^{(\mu)}$ et $\mathcal{X}_{c'}'^{(\mu)}$ leurs constituants de champ $\mathfrak{q}_{\mu}$, qui ne dépendent que du caractère quadratique de μ; $\Xi_{c'}$ et $\Xi'_{c'}$ les groupes déduits de $X_{c'}$, $X'_{c'}$ en y supposant les coordonnées homogènes. $\Xi_{c'}$ est évidemment $\leqq \mathcal{X}_{c'} \leqq \mathcal{X}'_{c'}$. I étant premier à $X_{c'}$ et à $X'_{c'}$, $\Xi_{c'}$ a l'ordre de $X_{c'}$ et $\Xi'_{c'}$ celui de $X'_{c'}$. D'ailleurs $\mathcal{A}^{(c')} \equiv \mathcal{A}$ (**17**). Donc $\mathcal{X}_{c'}^{(c')} \equiv \mathcal{X}_{c'}$, et $(\mathcal{X}_{c'}, 1) = (\mathcal{A}, 1) : \frac{s_{c'}}{2} = \frac{(A, 1)}{s_{c'}}$. Donc $\mathcal{X}_{c'} = \Xi_{c'}$. De même $(\mathcal{X}'_{c'}, 1) = (\mathcal{A}', 1) : s_{c'} = \frac{(A', 1)}{(\pi - 1)s_{c'}} = \frac{(A, 1)}{s_{c'}}$. Donc $\mathcal{X}'_{c'} = \mathcal{X}_{c'} = \Xi_{c'}$.

La matrice générale de $\mathcal{X}_{c'}$ ou de $\mathcal{X}'_{c'}$ a, *a priori*, la forme

$$\mathfrak{M} = \left|\begin{array}{c|c|ccc} \alpha_{00} & 0 & \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \ldots \\ \hline \beta_{00} & \beta'_{00} & \beta_{01} & \beta'_{01} & \ldots \\ \hline \alpha_{10} & 0 & \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \ldots \\ \beta_{10} & 0 & \beta_{11} & \beta'_{11} & \ldots \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right| \quad (\beta'_{00} \neq 0),$$

$\mathfrak{M}$ n'étant déterminée qu'à une matrice près de I comme facteur. Fixons ce facteur de manière que $\mathfrak{M}$ soit dans A. Alors, d'après Σ et la formule (4) de **I, 26**, $\beta'_{00} = 1$, et la matrice $\mathfrak{M}_1$ déduite de $\mathfrak{M}$ en y supprimant la seconde ligne et la seconde colonne est la matrice générale de $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ (**22**). Mais on devra regarder comme indistinctes les $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont proportionnels. Donc $\mathcal{X}_{c'} = A(2\nu + 1, \pi, a_1)$, et, de nouveau, $\mathcal{X}_{c'} = \mathcal{X}'_{c'} = \Xi_{c'}$.

Désignons par (σ, μ) le système d'intransitivité de $\mathcal{X}_{c'}$ dont fait partie $[\sigma, \mu]$ quand on suppose les coordonnées homogènes. *Les* π *systèmes* $[0, \mu]$ *fournissent évidemment les trois systèmes* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, N)$ (*correspondant aux trois* $\mathfrak{q}_{\rho a_1}$), *le premier de degré* $\frac{s_{0,n-1,a_1}}{\pi - 1}$, *le second de degré* $\frac{1}{2} s_{1,n-1,a_1}$, *le troisième de degré* $\frac{1}{2} s_{N,n-1,a_1}$. *D'ailleurs les* π *systèmes* $(1, \mu)$ *sont distincts*. Si en effet le produit de M et d'une similitude de I transformait $(1, \mu)$ en $(1, \mu')$, on aurait des équations de la forme

$$E \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{00}x^{\mu} \qquad\qquad + \alpha_{01}x_1^{\mu} + \alpha'_{01}y_1^{\mu} + \ldots = kx^{\mu'}, \\ \beta_{00}x^{\mu} + 1 - \frac{bx^{\mu}}{2c'} + \beta_{01}x_1^{\mu} + \beta'_{01}y_1^{\mu} + \ldots = k\left(1 - \frac{bx^{\mu'}}{2c'}\right), \\ \alpha_{10}x^{\mu} \qquad\qquad + \alpha_{11}x_1^{\mu} + \alpha'_{11}y_1^{\mu} + \ldots = kx_1^{\mu'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les deux premières équations donnent, d'après Σ, $k = 1$. Alors la seconde résulte de la première, et $\mathfrak{M}_1$ transforme $q_{\mu\alpha_1}$ en $q_{\mu'\alpha_1}$. Donc $\mu' = \mu$ (**22**). Il est clair d'ailleurs que $(1, \mu)$ est du même degré que $[1, \mu]$ ou $q_{\mu\alpha_1}$.

La somme des degrés des $\pi + 3$ systèmes ainsi obtenus étant le degré $\frac{\pi^{\nu} - 1}{\pi - 1} - 1$ de $\mathfrak{N}_{c'}$, $\mathfrak{N}_{c'}$ n'en a pas d'autres.

Dans $[\sigma, \mu]$, $a = c'\sigma^2 + \mu$. *Donc ceux des (σ, μ) qui appartiennent à $\mathfrak{N}_{c'}^{(c')}$ sont*, en réduisant σ à o ou à 1 $(0, c')$ *de degré* $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu} + \theta_{c'c_1}\pi^{\nu})$, $(1, 0)$ *de degré* $\pi^{2\nu} - 1$, *et les* $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ $(1, \mu)$ *où* $c' + \mu = k^2c'$ $(k^2 \neq 0, 1)$ *ou* $\mu = (k^2 - 1)c'$, *le degré de* $(1, \mu)$ *pour* $\mu \neq 0$ *étant* $\pi^{2\nu} + \theta_{\mu c_1}\pi^{\nu}$.

Comme $4c'c_1 = -\delta$, on a, en posant $\theta_{-1} = \varepsilon$, $\theta_{c'c_1} = \theta_{-\delta} = \varepsilon\theta$. Cherchons pour combien des $\frac{1}{2}(\pi - 3)$ valeurs de μ de la forme $(k^2 - 1)c'$ $(k^2 \neq 0, 1)$, μc_1 est un carré $l^2 \neq 0$. L'équation $\frac{l^2}{c_1} = (k^2 - 1)c'$ ou $k^2 - \frac{4}{\delta}l^2 = 1$ a $\pi - \theta$ solutions dont $1 + \varepsilon\theta$ où $k = 2$ et 2 où $l = 0$. Or si k, l est une solution, $\pm k, \pm l$ en est aussi une. Donc le nombre des valeurs cherchées de μ est $\frac{1}{4}[\pi - 3 - \theta(1 + \varepsilon)]$. C'est le nombre des systèmes $(1, \mu)$ de $\mathfrak{N}_{c'}^{(c')}$ de degré $\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}$. Celui des systèmes $(1, \mu)$ de degré $\pi^{2\nu} - \pi^{\nu}$ est celui $\frac{1}{4}[\pi - 3 + \theta(1 + \varepsilon)]$ des valeurs restantes de μ. La somme des degrés des $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ systèmes de $\mathfrak{N}_{c'}^{(c')}$, indiqués étant $\frac{1}{2}s_{c'n} - 1$, $\mathfrak{N}_{c'}^{(c')}$ ne fixe qu'un point de $q_{c'}$.

Si $\mathfrak{A}^{(c')}$ a un système d'imprimitivité de degré ζ contenant $010\ldots0$, $\mathfrak{N}_{c'}^{(c')}$ fixe ce système, et ζ a la forme

$$\zeta = \frac{r}{2}(\pi^{2\nu} + \varepsilon\theta\pi^{\nu}) + s(\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}) + s'(\pi^{2\nu} + \pi^{\nu}) + t(\pi^{2\nu} - 1) + 1;$$

r, s, s', t entiers $\geqq 0$; $r, t \leqq 1$; $s \leqq \frac{1}{4}[\pi - 3 - \theta(1 + \varepsilon)]$; $s' \leqq \frac{1}{4}[\pi - 3 + \theta(1 + \varepsilon)]$.

De plus ζ divise le degré $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu+1}-\theta\pi^\nu)=\zeta q\ (q\geqq 2)$ de $\mathcal{A}^{(c')}$.

Si $t=0$, $q=k\pi^\nu\ (k\geqq 1)$, et l'on a

$$k[(r+2s+2s')\pi^{2\nu}+(\varepsilon\theta r+2s-2s')\pi^\nu+2]=\pi^{\nu+1}-\theta,$$

d'où successivement

$$k[(r+2s+2s')\pi^{2\nu}-(r+2s+2s')\pi^\nu]<\pi^{\nu+1}-\theta-2k<\pi^{\nu+1},$$

$$k(\pi^\nu-1)<\frac{\pi}{r+2s+2s'},\qquad k\pi^{\nu-1}<\frac{\pi}{r+2s+2s'},$$

donc $\nu=k=r=1$, $s=s'=0$. L'égalité précédente donne alors

$$\pi^2+\varepsilon\theta\pi+2=\pi^2-\theta\qquad\text{ou}\qquad\theta(\varepsilon\pi+1)=-2,$$

d'où $\theta=1$, $\varepsilon=-1$, $\pi=3$.

Si $t=1$, on a

$$q[(r+2s+2s'+2)\pi^\nu+\varepsilon\theta r+2s-2s']=\pi^{\nu+1}-\theta.$$

Donc π^ν divise $q(\varepsilon\theta r+2s-2s')+\theta=k\pi^\nu$, et, q étant $\geqq 2$, k est $\neq 0$. On a alors, en éliminant q et en posant $h=\dfrac{2s-2s'+\varepsilon\theta r}{2s+2s'+r+2}$,

$$k=\frac{h\pi+\theta}{\pi^\nu+h}.$$

Or, p étant >2, $1+h=\dfrac{4s+(1+\varepsilon\theta)r+2}{2s+2s'+r+2}$ et $1-h=\dfrac{4s'+(1-\varepsilon\theta)r+2}{2s+2s'+r+2}$ sont $\geqq\frac{2}{\pi}$, d'où $|h|\leqq 1-\frac{2}{\pi}$, et, ν étant $\geqq 1$, $|k|<\dfrac{|h|\pi+1}{\pi^\nu-|h|}\leqq\dfrac{\pi^2-\pi}{\pi^{\nu+1}-\pi+2}<1$, d'où $k=0$, ce qui ne se peut.

Ainsi, pour n pair >2 *et* $p>2$, *sauf peut-être pour* $n=4$ *avec* $\pi=3$ *et* $\theta=1$, $\mathcal{A}^{(c')}$ *est primitif simplement transitif, et de même,* $\mathcal{A}'^{(c')}$, *puisque* $\mathfrak{X}'_{c'}=\mathfrak{X}_{c'}$.

Or pour $n=4$ *avec* $\pi=3$ *et* $\theta=1$, $\mathcal{A}'^{(c')}$, $\mathcal{A}^{(c')}$ *et* $\mathcal{B}^{(c')}$ *sont résolubles* (I, **40**), *et par suite imprimitifs*, puisque leur degré n'est pas une puissance de nombre premier (*S.*, 63).

$\mathcal{B}^{(c')}$ *est primitif* (*simplement transitif comme* $\mathcal{A}^{(c')}$) *pour n pair* >2 et $p>2$, *sauf pour* $n=4$ *avec* $\pi=3$ *et* $\theta=1$ (*on vient de voir qu'il est alors imprimitif*). En effet, soit $\mathfrak{T}_{c'}$ le p.g.c.d. de $\mathfrak{X}_{c'}$, $\mathcal{B}$, et *supposons d'abord* $n \geqq 6$. Les substitutions t_2 et m_{2N} sont (en y supposant les variables homogènes) dans $\mathcal{X}_{c'}$ et hors de $\mathcal{B}$. Elles fixent tous les points $o\sigma 1 \mu o \ldots o$ [qui représentent les systèmes d'intransitivité de $\mathcal{X}_{c'}$ (**22**)]. Donc $\mathcal{F}_{c'}$ et $\mathcal{X}_{c'} = \{ t_2, m_{2N} \} \mathcal{F}_{c'}$ remplacent ces points par les mêmes points de $q_{c'}$ [$\mathcal{X}_{c'} | \mathcal{F}_{c'} \equiv \mathcal{A} | \mathcal{B}$ est, pour $p > 2$, d'ordre 4 ou 2 selon que B contient ou non d (I, **39**)]. Donc $\mathcal{F}_{c'}$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathcal{X}_{c'}$, et l'on peut raisonner pour $\mathcal{B}^{(c')}$ comme pour $\mathcal{A}^{(c')}$.

Soit maintenant $n = 4$. *Si* ψ *est irréductible*, d est hors de B (I, **39**), et $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0$. Or u_0, qui est dans $\mathcal{A}^0$ hors de $\mathcal{B}$, fixe tous les points $o\sigma 1 \mu$. Donc $\mathcal{X}_{c'} = \{ u_0 \} \mathcal{F}_{c'}$ et l'on peut encore raisonner pour $\mathcal{B}^{(c')}$ comme pour $\mathcal{A}^{(c')}$. *Si* ψ *est réductible*, considérons d'abord $\mathcal{A}^0$ (1). Le p.g.c.d. $\mathcal{X}^0_{c'}$ de $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{X}_{c'} = \{ u_0 \} \mathcal{X}^0_{c'}$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathcal{X}_{c'}$, et l'on voit de même que $\mathcal{A}^{0(c')}$ est primitif. Or $\mathcal{B}$ est ici (I, **40**) produit direct de deux groupes qui, étant normaux et, pour $\pi > 3$, simples, déplacent tous les symboles et sont formés de constituants transitifs parallèles. Soient $\varphi^{(c')}$ et $\psi^{(c')}$ les actions des facteurs directs de $\mathcal{B}$ sur $q_{c'}$. $\varphi^{(c')}$ et $\psi^{(c')}$, étant normaux dans $\mathcal{A}^{0(c')}$, qui est primitif, *sont transitifs, réguliers et adjoints*. Donc $\mathcal{B}^{(c')}$ est primitif (*S.*, 61).

25. *Soit par exemple* $n = 6, \pi = 2$, ψ *étant irréductible* (*donc* $\psi = x^2 + xy + y^2$).

---

(1) On ne peut raisonner ici sur $\mathcal{B}$ comme précédemment. En effet, pour qu'une substitution $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{X}_{c'}$, déterminée comme précédemment, fixe le point $\left(x^{\mu}, 1 - \dfrac{b x^{\mu}}{2c'}, x_1^{\mu}, y_1^{\mu} \right)$ de $(1, \mu)$, il faut et suffit qu'elle vérifie le système E. On a vu qu'alors $k = 1$, et que $\mathfrak{M}$ est dans $A(3, \pi, a_1)$ ou, si l'on préfère, dans $A^0(3, \pi, a_1)$ [pour n impair, $A = A^0 D$ (I, **39**)], et fixe un point de $q_{\mu a_1}$. Or pour raisonner comme précédemment, il faudrait déterminer $\mathfrak{M}_1$ de manière qu'elle fixât un point de chacun des $\frac{1}{2}(\pi - 3) q_{\mu a_1}$ répondant aux systèmes $(1, \mu)$ $(\mu \neq 0)$ de $\mathcal{X}^{(c')}_{c'}$. Mais le diviseur de $A^0(3, \pi, a_1) \equiv \mathfrak{L}(2, \pi)$ (I, **40**) qui fixe un point de $q_{\mu a_1}$ est isomorphe au $g_{\mu - 0 \mu a_1} A^0(2, \pi, a_{\mu 1})$, en posant $a_{\mu 1} = c_1 x^2 - \dfrac{y_1^2}{4\mu}$ (**21**). Donc, chaque $g_{\pi \pm 1}$ de $\mathfrak{L}(2, \pi)$ étant complètement déterminé par une quelconque de ses substitutions $\neq 1$, et μ prenant plus d'une valeur pour $\pi > 5$, $\mathfrak{M}_1$ se réduit à 1, et alors aussi $\mathfrak{M} = 1$.

Alors A est d'ordre $5840 = 2^7.3^4.5$, et B simple d'ordre $25920 = 2^6.3^4.5$; $s_0 = 27$ et $s_1 = 36$. Je désignerai d'une manière générale par $Z^{(\lambda)}$ l'action d'une partie quelconque Z de A sur q_λ. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, je rangerai les points de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique, en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1 considérées comme appartenant au champ des nombres réels (*cf.* **16**). Désignons dans cet ordre 000000 et les 27 points de q_0 par a'', c'', b'', n'', m'', q'', a, c, b, n, m, q, a', c', b', n', m', q', e, d, l, k, i, p, h, g, o, f. On aura, en introduisant encore quelques notations,

$$m_{32}^{(0)} = m_{001}^{(0)} = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x+y \end{vmatrix}^{(0)}$$

$$= del.gho.ikp.mnq.m'n'q'.m''n''q''.a.b.c.a'.b'.c'.a''.b''.c'',$$

$$u_0^{(0)} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & x+y \end{vmatrix}^{(0)}$$

$$= dl.ip.go.mq.m'q'.m''q''.a.b.c.n.a'.b'.c'.n'.a''.b''.c''.n''.e.k.h.f,$$

$$t_1^{(0)} = aa'.bb'.cc'.mm'.nn'.qq'.e.f.g.h.i.k.l.o.p.a''.b''.c''.m''.n''.q'',$$

$$U_{12}^{(0)} = ab.cf.dg.eh.im.kn.lo.pq.c'c''.m'm''.n'n''.q'q''.a'.a''.b'.b'' = \alpha_1,$$

$$V_{12}^{(0)} = ac.bf.di.ek.gm.hn.lp.oq.b'b''.m'm''.n'n''.q'q''.a'.a''.c'.c'' = \alpha_2,$$

$$U_{31}^{(0)} = ad.bg.ci.el.fm.ho.kp.nq.n'n''.q'q''.a'.a''.b'.b''.c'.c''.m'.m'' = \alpha_3,$$

$$V_{10}^{(0)} = ae.bh.ck.dl.fn.go.ip.mq.m'm''.q'q''.a'.b'.c'.n'.a''.b''.c''.n'' = \alpha_4.$$

$$U_{02}^{(0)} = cm.c'm'.c''m''.eh.fi.kp.lo.qn.q'n'.q''n''.a.a'.a''.b.b'.b''.d.g. = \sigma,$$

$$V_{02}^{(0)}m_{32}^{(0)} = bnm.b'n'm'.b''n''m''.dep.fhg.ikl.a.a'.a''.c.c'.c''.q.q'.q''.o = \tau,$$

$$V_{21}^{(0)} = a'b'.cc''.dg.eh.fc'.im'.kn'.lo.mm''.nn''.pq'.qq''.a.b.a''.b'',$$

$$W_{02}^{(0)} = cn.qm.c'n'.q'm'.c''n''.q''m''.dg.fk.ip.lo.a.a'.a''.b.b'.b''.e.h,$$

$$t_2^{(0)} = bc.b'c'.b''c''.gi.hk.op.a.a'.a''.m.m'.m''.n.n'.n''.q.q'.q''.d.e.f.l.$$

$P^{(0)}$ est ici le g_{16} abélien principal $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ (I, **42**), permutable à σ, τ : pour préciser, on a

$$\sigma^{-1}\alpha_1\sigma = \alpha_1,\ \sigma^{-1}\alpha_2\sigma = \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \sigma^{-1}\alpha_3\sigma = \alpha_3,\ \sigma^{-1}\alpha_4\sigma = \alpha_1\alpha_4,$$

$$\tau^{-1}\alpha_1\tau = \alpha_1\alpha_2\alpha_4,\ \tau^{-1}\alpha_2\tau = \alpha_2,\ \tau^{-1}\alpha_3\tau = \alpha_4,\ \tau^{-1}\alpha_4\tau = \alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

D'ailleurs $\{\sigma, \tau\} = \Gamma$, fixant a est premier à $P^{(0)}$, et comme $\sigma^2 = \tau^3 = (\sigma\tau)^5 = 1$, Γ est icosaédral [donc $\Gamma = B_1^{(0)}$ (**18**)]. Donc $P^{(0)}\Gamma$ est un g_{960}, et comme il fixe $a' = 100000$, il est le diviseur $Y_0^{(0)}$ de $B^{(0)}$

qui fixe a' [1]. Donc $\{Y_0^{(0)}, V_{21}^{(0)}\}$, qui est transitif, coïncide avec $B^{(0)}$. Si donc Y_0 est le diviseur de B dont l'action sur q_0 est $Y_0^{(0)}$, $B = \{Y_0, V_{21}\}$. Les systèmes d'intransitivité de Γ sont $bcmnq$, $b'c'm'n'q'$, $b''c''m''n''q''$ de degré 5 et $defghiklop$ de degré 10. Ceux de $P^{(0)}$ sont $ab\ldots q$ de degré 16 et $b'b''$, $c'c''$, $m'm''$, $n'n''$, $q'q''$ de degré 2. Il est clair que $Y_0^{(0)}$ est isomorphe à son constituant transitif $\mathbf{Y}$ dans le champ $ab\ldots q$ de degré 16 [$\mathbf{Y}$ est un diviseur *primitif* de $T(4, 2)$ (*S.*, 70)] [2]. Les systèmes d'intransitivité de $\{\sigma, \tau\}$ dans ce champ étant de degré 5 ou 10, aucun diviseur de $P^{(0)}$ autre que $P^{(0)}$ et 1 ne peut être normal dans $Y_0^{(0)}$ [3]. Comme $t_2^{(0)}$ fixe a', $X_0^{(0)} = \{t_2^{(0)}\} Y_0^{(0)}$. Les constituants transitifs de degré 10 de Γ et de $\{t_2^{(0)}\}\Gamma$ sont des représentations primitives connues du g_{60}^5 et du g_{120}^5 (*S.*, 53) : cela résulte de la forme des s_2 impaires et de ce qu'un g_{120}^5 n'a pas d'autres g_{12} que ses g_{12} tétraédraux et les normalisants de ses g_4.

Négligeons un instant l'action de $Y_0^{(0)}$ sur les symboles autres que a, b, …, q. Γ est le diviseur fixant a et a 16 conjugués distincts. Donc $T = \{\tau\}$, qui a 10 conjugués distincts dans Γ et divise 4 conjugués de Γ, a $\frac{10.16}{4} = 40$ conjugués dans $Y_0^{(0)}$. Son normalisant T' est donc un g_{24}. T' dérive de T,

$$\sigma_0 = (\sigma\tau)^{-2}\tau\sigma\tau(\sigma\tau)^2 = cq.dg.eh.fp.ik.mn.m'n'.m''n''.c'q'.c''q''.a.a'.a''.b.b'.b''.l.o,$$

α_2 et $\alpha_1\alpha_3\alpha_4 = \beta$; il est défini par $\tau^3 = \sigma_0^2 = \alpha_2^2 = \beta^2 = 1$, $\sigma_0\tau\sigma_0 = \tau^2$, $\alpha_2\tau = \tau\alpha_2$, $\beta\tau = \tau\beta$, $\sigma_0\alpha_2\sigma_0 = \alpha_2\beta$, $\sigma_0\beta\sigma_0 = \beta$.

Désignons maintenant les 36 points de q_1, rangés dans l'ordre indiqué, par a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, $\varkappa$, respectivement. On aura,

---

(1) On remarquera que $\{B_1^{(0)}, t_{12}^{(0)}\}$, fixant q'', divise un conjugué de $P^{(0)}\Gamma$.

(2) Ce g_{960} n'est pas isomorphe au g_{960}^{20} de même composition qui fixe 4 symboles dans le g^{24} cinq fois transitif de Mathieu (*S.*, 109; à la dernière ligne de ce numéro, au lieu de $\theta^{-1}b_3\theta = b_4$, $\theta^{-1}b_4\theta = b_3b_4$, il faut lire $\theta^{-1}b_3\theta = b_2b_4$, $\theta^{-1}b_4\theta = b_1b_3b_4$), car aucune s_3 de ce dernier groupe n'est permutable à une s_2 du g_{16}, p. g. c. d. des g_{64} sylowiens (toutes les s_3 de ce g_{960}^{20} étant conjuguées, il suffit de le vérifier pour la $s_3\theta$ de l'endroit cité), tandis qu'ici $\tau\alpha_2 = \alpha_2\tau$.

(3) De là résulte encore que $\mathbf{Y}$ est primitif. *Voir* Jordan, *Traité*, **141-144**.

en introduisant quelques notations,

$$
\begin{aligned}
m_{30}^{(1)} &= acb.dfe.gih.kml.npo.qsr.uwv.xzy.\alpha\gamma\beta.\theta\kappa\iota.j.t.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta,\\
u_0^{(1)} &= bc.ef.hi.lm.op.rs.vw.yz.\beta\gamma.\iota\kappa.a.d.g.j.k.n.q.t.u.x.\alpha.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta,\\
t_1^{(1)} &= ku.lv.mw.nx.oy.pz.q\alpha.r\beta.s\gamma.t\delta.a.b.c.d.e.f.g.h.i.j.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\kappa,\\
\mathrm{U}_{12}^{(1)} &= dx.ey.fz.j\delta.kq.lr.ms.n\theta.o\iota.p\kappa.t\zeta.\varepsilon\eta.a.b.c.g.h.i.u.v.w.\alpha.\beta.\gamma = \alpha'_1 = \sigma_5,\\
\mathrm{V}_{12}^{(1)} &= g\alpha.h\beta.i\gamma.j\delta.kn.lo.mp.q\theta.r\iota.s\kappa.t\eta.\varepsilon\zeta.a.b.c.d.e.f.u.v.w.x.yz = \alpha'_2 = \sigma_1,\\
\mathrm{U}_{01}^{(1)} &= au.cw.dx.fz.g\alpha.i\gamma.km.l\varepsilon.np.o\zeta.qs.r\eta.t\iota.\theta\kappa.b.e.h.j.v.y.\beta.\delta = \alpha'_3,\\
\mathrm{V}_{10}^{(1)} &= bv.cw.ey.fz.h\beta.i\gamma.k\varepsilon.lm.n\zeta.op.q\eta.rs.t\theta.\iota\kappa.a.d.g.j.u.x.\alpha.\delta = \alpha'_4,\\
\mathrm{U}_{02}^{(1)} &= ag.ci.df.ej.kq.ms.np.ot.u\alpha.w\gamma.xz.y\delta.\zeta\iota.\theta\kappa.b.h.l.r.v.\varepsilon.\eta.\beta = \sigma',\\
\mathrm{V}_{02}^{(1)}m_{30}^{(1)} &= afb.ced.ghj.kpl.mon.qrt.uzv.wyx.\alpha\beta\delta.\eta\theta\iota.i.s.\gamma.\varepsilon.\zeta.\kappa = \tau',\\
\mathrm{V}_{21}^{(1)} &= dn.eo.fp.jt.u\alpha.v\beta.w\gamma.x\theta.y\iota.z\kappa.\delta\zeta.\varepsilon\eta.a.b.c.g.h.i.k.l.m.q.r.s = \sigma_2\\
\mathrm{W}_{02}^{(1)} &= be.cf.gj.hi.lo.mp.qt.rs.vy.wz.\alpha\delta.\beta\gamma.\eta\theta.\iota\kappa.a.d.k.n.u.x.\varepsilon.\zeta,\\
t_2^{(1)} &= dg.eh.fi.nq.or.ps.x\alpha.y\beta.z\gamma.\zeta\eta.a.b.c.j.k.l.m.t.u.v.w.\delta.\varepsilon.\theta.\iota.\kappa,\\
\tau'^{-1}\alpha'_1\tau' &= \alpha'_1\alpha'_3\alpha'_4\\
&= bv.cw.dx.g\alpha.kt.l\kappa.m\iota.n\eta.os.pr.q\zeta.\varepsilon\theta.a.e.f.h.i.j.u.y.z.\beta.\delta.\gamma = \sigma_3,\\
(\alpha'_4\sigma_2\alpha'_4)^{-1}\mathrm{W}_{02}^{(1)}\sigma_2\mathrm{W}_{02}^{(1)}\alpha'_4\sigma_2\alpha'_4 &\\
= du.ev.fw.gk.hl.im.j\varepsilon.n\alpha.o\beta.p\gamma.t\eta.d\zeta.a.b.c.q.r.s.x.y.z.\theta.\iota.\kappa &= \sigma_4.
\end{aligned}
$$

Les substitutions $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$, qui fixent $a = 000001$, vérifient les équations $\sigma_i^2 = 1$, $(\sigma_i\sigma_k)^3$ pour $|i-k| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_k)^2 = 1$ pour $|i-k| > 1$. Donc leur p.p.c.m. est isomorphe au g^6 symétrique (*S.*, **69**; *E.*, **66**) et est le diviseur $\mathrm{Y}_1^{(1)}$ de $\mathrm{B}^{(1)}$ qui fixe a. On sait *a priori* (**22**) que $\mathrm{X}_1^{(1)}$ est le produit direct de $\mathrm{Y}_1^{(1)}$ par $u_0^{(1)}$. Les systèmes d'intransitivité de $\mathrm{X}_1^{(1)}$ (ou de $\mathrm{Y}_1^{(1)}$) sont $bcefhilmoprsvwyz\beta\gamma\iota\kappa$ de degré 20 et $dgjknqtux\alpha\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$ de degré 15. Les actions des σ_i et de $u_0^{(1)}$ sur chacun de ces systèmes vérifient les mêmes équations que les σ_i et $u_0^{(1)}$; mais l'action de $u_0^{(1)}$ sur le système de degré 15 se réduit à 1. Donc le constituant de degré 20 est isomorphe à $\mathrm{X}_1^{(1)}$, et celui de degré 15, comme aussi l'action des seules σ_i sur le système de degré 20, est une représentation du g^6 symétrique (*cf.* I, **22**). $\mathrm{B}^{(1)}$ étant primitif (**22**), on a, pour toute substitution ξ de $\mathrm{A}^{(1)}$ hors de $\mathrm{X}_1^{(1)}$, $\mathrm{A}^{(1)} = \{\mathrm{X}_1^{(1)}, \xi\}$ et, si ξ est dans $\mathrm{B}^{(1)}$, $\mathrm{B}^{(1)} = \{\mathrm{Y}_1^{(1)}, \xi\}$. On peut prendre $\xi = \sigma'$ ou $\xi = \tau'$, ou mieux

$$\xi = \tau'\sigma_2\tau'^{-1} = ak.cm.eo.hr.u\kappa.v\delta.w\theta.x\gamma.y\eta.z\alpha.\beta\zeta.\varepsilon\iota.b.d.f.g.i.j.l.n.p.q.s.t,$$

qui fixe 12 symboles. Comme

$$\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = bhzse.ciyrf.dg\delta\theta\iota.jxkuq.l\beta\kappa ov.m\gamma tpw.n\alpha\zeta\varepsilon\eta.a$$

ne fixe que a, $X_1^{(1)}$ contient le normalisant de chacun de ses g_5 dans $B_1^{(1)}$. Or $X_1^{(1)}$ est isomorphe au g_{720}^6. *Donc le normalisant de chaque* g_5 *de* B *est isomorphe au* g_{20} *métacyclique* (*S.*, 73).

26. *Soit* $n=5$, $\pi=3$, $\psi=x^2$. Alors $A=A^0 D$ (I. **39**). A^0 est d'ordre $51840 = 2^7.3^4.5$, et B (simple) d'ordre $25920 = 2^6.3^4.5$; $s_0=80$, $s_1=90$, $s_2=72$. Je désignerai encore par $Z^{(\lambda)}$ l'action d'une partie quelconque Z de A sur q_λ. L'ordre des variables étant x_1, y_1, x_2, y_2, x, je rangerai les points de chaque q_λ dans l'ordre lexicographique, en attribuant aux coordonnées les valeurs 0, 1, 2 considérées comme appartenant au champ des nombres réels (*cf.* **16**).

Désignons dans cet ordre les points de q_2 par 1, 2, 3, ..., 72. Les systèmes d'intransitivité (de degré 2) de $D^{(2)}$ sont des systèmes d'imprimitivité de $A^{(2)}$ et peuvent être identifiés avec les symboles de $\mathcal{A}^{(1)}$. Prenons dans chaque système le point désigné par le plus petit des nombres 1, ..., 72. Représentons ces systèmes (ou les symboles de $\mathcal{A}^{(1)}$) par les 36 nombres ainsi obtenus que je remplacerai, dans leur ordre de grandeur, par les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, κ, ι respectivement. On a alors, en désignant par $Z^{(\lambda)}$ l'action d'une partie quelconque Z de $\mathcal{A}$ sur $\mathfrak{q}_\lambda$, et en introduisant quelques notations,

$$t_1^{(1)} = dj.ek.fl.gm.hn.io.\gamma\delta.\varepsilon\theta.\zeta\kappa.\eta\iota.a.b.c.p.q.r.s.t.u.v.w.x.y.z.\alpha.\beta.$$

$$V_{121}^{(1)} = ajo.bkn.clm.dv\kappa.ew\iota.fx\theta.g\varepsilon\alpha.h\eta y.i\zeta z.ptr.qus.\beta\gamma\delta \qquad = \mathfrak{a},$$

$$V_{211}^{(1)} = aid.bhe.cfg.j\iota r.k\kappa s.l\alpha\delta.m\gamma x.nt\zeta.ou\eta.pvy.qwz.\beta\varepsilon\theta \qquad = \mathfrak{b},$$

$$V_{011}^{(1)} = adi.bhe.jkx.l\zeta\eta.m\iota\kappa.no\alpha.pq\beta.rs\gamma.tu\delta.vw\varepsilon.yz\theta.c.f.g \qquad = \mathfrak{c},$$

$$U_{121}^{(1)} = ajo.bkn.cml.dr\eta.es\zeta.f\gamma\alpha.gx\delta.h\kappa t.i\iota u.pyv.qzw.\beta\varepsilon\theta \qquad = \mathfrak{d},$$

$$U_{011}^{(1)} = ajo.bnk.dex.f\kappa\iota.g\eta\zeta.hi\alpha.pq\beta.rs\delta.tu\gamma.vw\theta.yz\varepsilon.c.l.m \qquad = \mathfrak{e},$$

$$W_{121}^{(1)} = adi.beh.cfg.jv\zeta.kw\eta.lx\varepsilon.m\theta\alpha.n\iota y.o\kappa z.ptr.qus.\beta\delta\gamma \qquad = \mathfrak{f},$$

$$(\mathfrak{d}^2\mathfrak{f})^2 = m_{12}^{(1)} m_{22}^{(1)} = t_0^{(1)}$$

$$= ab.de.hi.jk.no.pq.rs.tu.vw.yz.\zeta\eta.\iota\kappa.c.f.g.l.m.x.\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\theta \qquad = \sigma'_1,$$

et

$$\mathfrak{c}^{-1}\sigma'_1\mathfrak{c} = ae.bi.dh.kx.l\eta.m\varkappa.o\alpha.q\beta.s\gamma.u\delta.w\varepsilon.z\theta.c.f.g.j.n.p.r.t.v.y.\zeta.\iota = \sigma'_2,$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{d}^2\mathfrak{a}\mathfrak{e}.\mathfrak{b}\mathfrak{f}^2\mathfrak{c}^2 = apbhj.dikn\beta.eqo\alpha x.f\gamma mus.g\varepsilon lzw.r\delta t\iota\varkappa.v\theta y\zeta\eta.c = \mathfrak{g},$$
$$\mathfrak{b}\mathfrak{f}^2\mathfrak{c}^2.\mathfrak{a}\mathfrak{d}^2\mathfrak{a}\mathfrak{e} = aoebq.di\beta kn.fyvm\theta.gtrl\delta.h\alpha xjp.s\gamma u\zeta\eta.w\varepsilon z\iota\varkappa.c = \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{g}^{-1}\sigma'_1\mathfrak{g} = an.bo.f\delta.g\theta.hp.iq,jk.r\varkappa.s\iota.v\eta.w\zeta.\alpha\beta.c.d.e.l.m.t.u.x.y.z.\gamma.\varepsilon = \sigma'_3,$$
$$\mathfrak{b}^{-2}\sigma'_3\mathfrak{b}^2 = ab.dh.ei.jn.ko.ry.sz.tv.uw.x\alpha.\gamma\theta.\delta\varepsilon.c.f.g.l.m.p.q.\beta.\zeta.\eta.\iota.\varkappa = \sigma'_4,$$
$$\mathfrak{b}^{-1}\sigma'_1\mathfrak{b} = ah.bi.de.l\gamma.m\varepsilon.np.oq,r\zeta.s\eta.v\iota.w\varkappa.\alpha\beta\ c.f.g.j.k.t.u.x.y.z.\delta.\theta = \sigma'_5,$$
$$(\mathfrak{a}\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3)^{-1}\sigma'_2(\mathfrak{a}\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3)$$
$$= bm.cn.q\theta.d\delta.x\eta.kl.gr.z\beta.hu.i\varkappa.t\iota.\varepsilon w.a.e.f.j.o.p.s.v.y.\alpha.\gamma.\zeta = \sigma'.$$

Les substitutions σ'_i vérifient les équations $\sigma_i'^2 = 1$, $(\sigma'_i\sigma'_k)^3 = 1$ pour $|i - k| = 1$, et $(\sigma'_i\sigma'_k)^2 = 1$ pour $|i - k| > 1$. Leur p.p.c.m. $\mathfrak{J}$ qui fixe c est donc isomorphe au g^{6}_{720}. Les systèmes d'intransitivité de $\mathfrak{J}$ sont $abdehijknopqx\alpha\beta$ de degré 15 et $fglmrstuvwyz\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\iota\varkappa$ de degré 20. Le groupe $\{\mathfrak{J}, \sigma'\}$, étant transitif, est d'ordre $\geqq 720.36 = 25920$. Donc $\{\mathfrak{J}, \sigma'\} = \mathfrak{M}^{(1)}$, et $\{\mathfrak{M}^{(1)}, t^{(1)}\} = \mathfrak{A}^{(1)}$.

La substitution $\omega = acgje\varepsilon iymr\iota\varkappa\eta bf\gamma zlv\delta d\alpha know\theta qps\zeta ht.ux\beta$ transforme respectivement $\sigma_1, \ldots, \sigma_5, \sigma, t_1^{(1)}$ de $\mathrm{Q}_2^{(1)}(6,2)$ (**25**) en $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_5, \sigma', \mathfrak{b}^{-1}t_1^{(1)}\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{Q}^{0(1)}(5,3)$. *Donc* $\mathrm{Q}_2(6,2) \equiv \mathfrak{Q}^0(5,3)$, $\mathrm{R}_2(6,2) \equiv \mathfrak{R}(5,3)$, *et l'on a une correspondance des générateurs.*

27. *Équations de* $\mathrm{A}(n,\pi)$, $\mathrm{A}^0(n,\pi)$, $\mathrm{B}(n,\pi)$. — Considérons le diviseur $\mathrm{X}^1 = \{\mathrm{X}, m_{11}\}$ de A. Son constituant $\mathrm{X}^{1(0)}$ dans q_0 a trois systèmes d'intransitivité : l'un est formé des points x, $0\ldots0$ fixés par X; l'autre des q_0^{ν} (il contient donc $010\ldots0$); le troisième, qui disparaît si $n = 4$, ψ étant irréductible, ou si $n = 3$ (**18**) est q_0^0 (il contient donc $0010\ldots0$). $\mathrm{X} = \mathrm{A}_1\mathrm{P}$, A_1 et P sont permutables à m_{11}, et l'on a, en posant $\{\mathrm{A}_1, m_{11}\} = \mathrm{A}_1^1$, $\{\mathrm{P}, m_{11}\} = \mathrm{P}^1$, $\mathrm{X}^1 = \mathrm{A}_1^1\mathrm{P} = \mathrm{A}_1\mathrm{P}^1$. Enfin, comme $\mathrm{X} \equiv \mathrm{X}^{(0)}$ (**18**), et que m_{11} déplace les points x_1 $0\ldots0$ fixés par X, on a aussi $\mathrm{X}^1 \equiv \mathrm{X}^{1(0)}$.

Soit d'abord $\nu \geqq 2$, *et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que* ψ *est irréductible quand* δ *est* $\neq 0$. Comme t_1 échange les deux points $010\ldots0$, $10\ldots0$, et T_{12} les deux points $0010\ldots0$, $10\ldots0$, on aura (*S.*, 56)

$$(1) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{X}^1 + \mathrm{X}t_1\mathrm{X}^1 + \mathrm{X}\mathrm{T}_{12}\mathrm{X}^1 = \mathrm{X}\mathrm{T}\mathrm{X}^1, \qquad \mathrm{T} = 1 + t_1 + \mathrm{T}_{12},$$

ou, puisque $t_1 m_{1\lambda} t_1 = m_{1\lambda}^{-1}$, $T_{12} m_{1\lambda} T_{12} = m_{2\lambda}$,

(2) $$\Lambda = X^1 + X^1 t_1 X^1 + X^1 T_{12} X^1 = X^1 T X^1.$$

Désignons par ξ un quelconque des générateurs indiqués de Λ, (I, **30**), par ξ' un quelconque des ξ qui laissent x_1, y_1, x_2, y_2 inaltérés, et considérons les identités

(3) $$t_1^2 = T_{12}^2 = 1, \qquad t_1 \xi t_1 = \xi, \qquad T_{12} \xi' T_{12} = \xi',$$

(4) $$t_1 m_{1\lambda} t_1 = m_{1\lambda}^{-1},$$

(5) $$t_1 V_{1k\lambda} t_1 = t_k m_{1,-\lambda} m_{k\lambda}^{-1} T_{2k} V_{12\lambda} T_{12} V_{12,-\lambda^{-1}} T_{2k} t_k \qquad (k \geqq 2),$$
d'où, en transformant par t_k,
$$t_1 U_{1k\lambda} t_1 = m_{1,-\lambda} m_{k\lambda}^{-1} T_{2k} V_{12\lambda} T_{12} V_{12,-\lambda^{-1}} T_{2k} \qquad (k \geqq 2);$$

(6) *si ψ est irréductible*, avec les notations de I, **31**, **32**,
$$t_1 U_{10\lambda} V_{10\mu} t_1 = m_{1,-\rho\dot\rho} m_{\nu,-\rho\dot\rho^{-1}} t_{\nu'} U_{10,-\lambda} V_{10,-\mu} t_1 U_{10,-\lambda(\rho\dot\rho)^{-1}} V_{10,-\mu(\rho\dot\rho)^{-1}} \quad [1],$$
d'où
$$t_1 V_{10\mu} t_1 = m_{1,-c'\mu^2} m_{\nu',-\rho\dot\rho^{-1}} t_0 V_{10,-\mu} t_1 V_{10,-(c'\mu)^{-1}} \qquad (\mu \neq 0),$$
$$t_1 U_{10\lambda} t_1 = m_{1,-c\lambda^2} m_{\nu',-1} t_0 U_{10,-\lambda} t_1 U_{10,-(c\lambda)^{-1}} \qquad (\lambda \neq 0) \quad [2];$$
si $\psi = c x^2$,
$$t_1 U_{10\lambda} t_1 = m_{1,-c\lambda^2} t_0 U_{10,-\lambda} t_1 U_{10,-(c\lambda)^{-1}},$$

(7) $$t_1 T_{12} = T_{12} t_2, \qquad \text{d'où} \qquad T_{12} t_1 = t_2 T_{12}$$

(8) $$T_{12} m_{1\lambda} T_{12} = m_{2\lambda},$$

(9) $$T_{12} V_{12\lambda} T_{12} = t_1 U_{12,-\lambda} t_1,$$
d'où, en transformant par t_1, d'après (3) et (7),
$$T_{12} U_{12\lambda} T_1 = U_{12,-\lambda},$$

(10) $$T_{12} V_{j2\lambda} T_{12} = t_1 U_{1j,-\lambda} t_1 \qquad (j \geqq 3 \text{ ou } j = 0),$$
d'où, en transformant par t_1, d'après (3) et (7),
$$T_{12} U_{1j\lambda} T_{12} = U_{2j\lambda} \qquad (j \geqq 3 \text{ ou } j = 0),$$
d'où, en transformant par m_{011},
$$T_{12} V_{1j\lambda} T_{12} = V_{2j\lambda} \qquad (j \geqq 3 \text{ ou } j = 0).$$

---

[1] Cette formule équivaut (I, **31**) à
$$t_1 V_{1\nu'\dot\rho} U_{1\bar\nu'\dot\rho} t_1 = m_{1,-\rho\dot\rho} m_{\nu',-\dot\rho\rho^{-1}} t_{\nu'} V_{1\nu',-\rho} U_{1\nu',-\dot\rho} t_1 V_{1\nu',-\dot\rho^{-1}} U_{1\nu',-\rho^{-1}}$$
qui peut se déduire de (5) dans $A(n, \pi^2)$.

[2] Si cc' est carré, cette formule est, à la notation près, la transformée de la précédente par $m_{0,bkc'^{-1},k} = m_{\nu',-k\rho}$ ($k^2 c' = c$) (I, **29**).

Supposons connues les équations de $A_1 \equiv A(n-2, \pi)$. P^1 *est défini par les équations de* P (I, **42**) *jointes à celles de la forme* $m_{11}^{-1}\chi m_{11} = \chi'$, χ *parcourant les générateurs de* P, *et à* $m_{11}^{\pi-1} = 1$. *On connaît aussi toutes les relations de la forme* $\alpha^{-1}\beta\alpha = \beta'$, α *parcourant les générateurs de* A_1, *et* β *ceux de* P^1 (I, **29**). *L'ensemble* S *de ces trois systèmes définit* X^1 (*cf.* **8**) (¹) *et les équations* (3)-(10) [*en omettant* (6) *si* $\psi = 0$], *jointes à* S, *définissent* $A(n, \pi)$ (²).

On le voit comme au n° **8** où l'on fera les modifications suivantes : 1° on remplacera les u_i et les τ_i par 1, et l'on donnera à t_i, U_{ij} leur sens actuel ; 2° on remplacera les formules (20) et (23), qui ne donneraient alors rien de nouveau, par les suivantes :

$$X^1 t_1 V_{1k} V_{10} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} V_{10}, \qquad X^1 t_1 U_{1k} V_{10} t_1 = X^1 t_1 U_{1k} U_{10},$$
$$X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} V_{10} t_1 = X^1 t_1 V_{1k} U_{1k} V_{10}$$

qui s'obtiennent comme (18), (19) et (22); 3° le complexe

$$X^1 t_1 V_{1k_1} \ldots V_{1k_r} U_{1l_1} \ldots U_{1l_s} U_{01}^{\eta} u_1 t_1 X^1$$

devra être remplacé par

$$X^1 t_1 V_{1k_1} \ldots V_{1k_r} V_{10}^{\varepsilon} U_{1l_1} \ldots U_{1l_s} U_{01}^{\eta} t_1 X^1 \qquad (\varepsilon, \eta = 0 \text{ ou } 1).$$

Soit maintenant $n = 4$, ψ *étant irréductible, ou* $n = 3$ (pour $n = 2$, *cf.* I, **25**). Alors T_{12} n'existe pas. Mais le troisième système d'intransitivité de $X^{1(0)}$ disparaît aussi (**18**). *Donc* $A = X^1 + X^1 t_1 X^1$ (³), *et ses équations sont données par* (3) (*où l'on remplacera* T_{12} *par* 1), (4), (6) *jointes aux équations de* X^1 (*cf.* **8**).

Formons maintenant les équations de A^0 *pour* $n \geqq 3$ (pour $n = 2$, *cf.* I, **30**). Adjoignons aux équations de A les formules de I, **28-32** qui en résultent ou qui définissent des générateurs auxiliaires. Elles permettent de faire disparaître les t_j aux seconds membres de (5), (6), (9), (10), et d'écrire (7) sous la forme $t_1 T_{12} t_1 = T_{12} R_{121} S_{12,-1}$ (I, **29**) [si $n = 3$, on négligera (5), (7), (9), (10)]. On peut supposer les équations de X^1 formées : 1° des équations de $A_1^0 P^1$; 2° des équa-

---

(¹) On obtient de même les équations de X, X', $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$.

(²) On peut évidemment éliminer les U_{1j} ou les V_{1j} et ne prendre qu'une des équations dans chacune des formules (6) (en supposant cc' carré), (9), (10).

(³) La représentation de A relative à X^1 est alors deux fois transitive (*S.*, 56).

tions $t_j^2 = 1$, $t_j \varphi t_j = \varphi'$ $(j \neq 1)$, φ parcourant les générateurs de A_1^0 et de P', et φ' étant déterminé par φ. A l'aide des relations $t_1 t_j = t_j t_1 = t_{1j} = t_{j1}$ (d'où $t_1 t_{1j} t_1 = t_{1j}$), on peut, dans les équations de A, remplacer $t_j^2 = 1$ et $t_j \varphi t_j = \varphi'$ par $t_{1j}^2 = 1$ et $t_{1j} \varphi t_{1j} = \varphi''$, φ'' étant l'expression de $t_1 \varphi' t_1$ par les générateurs de A^0. *Les équations de* A *sont ainsi données par la réunion de deux systèmes, l'un de la forme* $t_1^2 = 1$, $t_1 \varphi t_1 = \varphi'$, φ *parcourant les générateurs de* A^0, *l'autre* E *ne contenant que les* φ. *Le système* E' *formé de* E *et des conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité définit* A^0 (*E.*, 19).

Formons enfin les équations de B *pour* $n \geqq 3$ (pour $n = 2$, *cf.* I, **25**). Aux équations de A^0 on peut adjoindre les équations $m_{11}^{-1} \varphi m_{11} = \varphi'$, φ parcourant les générateurs de B, $m_{11}^2 = \varphi''$ (φ'' étant dans B) et les équations exprimant chaque m_j par m_{11} et les φ (I, **28-32**). A l'aide de ces équations on pourra : 1° éliminer tous les m_j autres que m_{11}; 2° dans chaque équation de A^0, réunir toutes les puissances de m_{11} en une seule qui, étant dans B (d'après l'équation même), sera de la forme. $m_{11}^{2k} = \varphi''^k$. On peut négliger les équations qui servent seulement à introduire comme générateurs supplémentaires des m_j autres que m_{11}. *Les équations de* B *seront alors formées de celles des équations précédentes où ne figure pas* m_{11}, *jointes aux conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité.*

Remarque. — Pour $n \leqq 6$ les résultats de I, **40**, **43**, **45**, **46** permettent de définir autrement A, A^0, B à l'aide des équations de $\mathfrak{O}(2, \pi)$, $U(2, \pi)$, $\mathcal{H}^0(4, \pi)$, $\mathcal{G}(4, \pi)$ (*cf. S.*, 88, 92; *E.*, 66).

IV. — Groupe des formes symétriques dans un champ galoisien de module 2.

28. Soit $a = \Sigma_{ik} a_{ik} x_i y_k (i, k = 1, \ldots, n)$ et $\bar{a} = a$. Si tous les a_{ii} sont nuls, a rentre dans le cas déjà étudié des formes gauches (I, **16**). Si un des a_{ii} tels que a_{11}, est $\neq 0$, on peut, par des additions symétriques de lignes et de colonnes, annuler les a_{1k} et les a_{k1} autres que a_{11} et, en multipliant x_1 et y_1 par $\sqrt{a_{11}^{-1}}$, réduire a_{11} à 1. En opérant de même sur la matrice des a_{ik} où i et k sont $\geqq 2$ et ainsi de suite, on ramène a à la forme $\Sigma_1^r x_i y_i + a'$, a' étant gauche, donc d'ordre pair (*E.*, 195); et l'on peut supposer a' réduite à la forme canonique de I, **16**. Comme d'ailleurs $\Sigma_1^3 x_i y_i$ se ramène à $x_1 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$ (par addition de la deuxième colonne à la première et de la deuxième ligne à la première, puis de la troisième colonne à la deuxième et de la troisième ligne à la deuxième, puis de la première colonne à la troisième et de la première ligne à la troisième), on peut supposer $r \leqq 2$.

Si donc n est impair, a se ramène par transformation linéaire à un seul type correspondant à $r = 1$.

Si u est pair, il y a deux types répondant l'un à $r = 0$ (c'est le type gauche déjà étudié), l'autre à $r = 2$. Ces deux types sont distincts, car, si dans $\Sigma_1^\nu (x_{2i-1} y_{2i} + x_{2i} y_{2i-1})$ $(n = 2\nu)$ on remplace x_i par $\Sigma_k c_{ik} x_k$ et y_i par $\Sigma_k c_{ik} y_k$, la forme obtenue n'aura pas de terme en $x_1 y_1$ (1).

29. Soit donc, en changeant les notations, $a = \Sigma_1^\nu (x_i y'_1 + y_i x'_1) + \psi$, $\psi = xx' + \eta yy'$ $(\eta = 0$ ou $1)$, $x'_1, y'_1, \ldots, x'_\nu, y'_\nu, x' = x'_0, y' = y'_0$ étant cogrédientes à $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, x = x_0, y = y_0$. Il est clair que $\mathrm{A}' = \mathrm{AI}$, puisque I contient $\left[\iota^{\frac{\pi}{2}}\right]$ qui multiplie a par ι. *Donc* $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et comme I est ici premier à A, $\mathcal{A}$ *est semblable à* A.

Si une substitution α de A' multiplie a par f, on a $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, $|\alpha^2| = f^n$. Je prendrai pour α et α^{-1} les mêmes notations que dans I, **26** et je poserai $f = g^2$.

Soit d'abord $n = 2\nu + 1$ $(\eta = 0)$.

La considération des coefficients de $x_j y'_k$ (ou $x'_j y_k$), $x_j x'_k$ (ou $x_k x'_j$), $y_j y'_k$ (ou $y_k y'_j$) pour $j \neq k$ et de $x_j x'_j$, $y_j y'_j$ donne, en posant $\varepsilon_{jk} = 0$ pour $j \neq k$, $\varepsilon_{jj} = 1$,

$$\Sigma_{i=1}^\nu (\alpha_{ij} \beta'_{ik} + \beta_{ij} \alpha'_{ik}) + \alpha_{0j} \alpha'_{0k} = f \varepsilon_{jk} \qquad (j, k \geqq 0)\ (^2), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma_{i=1}^\nu (\alpha_{ij} \beta_{ik} + \beta_{ij} \alpha_{ik}) + \alpha_{0j} \alpha_{0k} = 0 \qquad (2)\\ &\Sigma_{i=1}^\nu (\alpha'_{ij} \beta'_{ik} + \beta'_{ij} \alpha'^{ik}) + \alpha'_{0j} \alpha'_{0k} = 0 \qquad (3) \end{aligned}\right\} \quad (j, k \geqq 0;\ j \neq k),$$

---

(1) *Voir* JORDAN, *Journ. Math.*, 1905, p. 268.

(2) Pour $k = 0$, (1) se réduit à $0 = 0$.

et

$$
\begin{array}{lll}
(4) & \alpha_{0j}^2 = f\varepsilon_{0j} \quad \text{ou} \quad \alpha_{0j} = g\varepsilon_{0j} & \multirow{2}{*}{$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} (j \gtreqless 0).$} \\
(5) & \alpha'_{0j} = 0 &
\end{array}
$$

On a d'ailleurs, comme dans (I, **26**), $f\alpha^{-1} = a\bar{\alpha}a^{-1}$, c'est-à-dire

$$
fA_{ik} = \beta'_{ki}, \quad fA'_{ik} = \alpha'_{ki}, \quad fB_{ik} = \beta_{ki}, \quad fB'_{ik} = \alpha_{ki}, \quad (i, k \neq 0),
$$
$$
fA_{i0} = \alpha'_{0i}, \quad fB_{i0} = \alpha_{0i}, \quad fA_{0k} = \beta_{k0}, \quad fA'_{0k} = \alpha_{k0}, \quad fA_{00} = \alpha_{00}.
$$

Les conditions (4)-(5), écrites pour α^{-1} (qui multiplie a par f^{-1}), donnent alors $\beta_{j0} = 0$, $\alpha_{j0} = 0$ $(j \neq 0)$, $\alpha_{00} = g$.

Donc $A(2\nu + 1, \pi)$ *laisse* x *inaltéré et agit sur* $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$ *comme* $G(2\nu, \pi)$.

Donc $A(2\nu + 1, \pi)$ *a* π *constituants transitifs parallèles semblables à* $G(2\nu, \pi)$ *caractérisés chacun par la valeur de* x. Soit G_λ celui où $x = \lambda$ et $\mathbf{G}$ le constituant non transitif formé des $\pi - 1$ G_λ où $\lambda \neq 0$. D'après la manière dont $[\iota]$, permutable à G_0, transforme G_{ι^k} en $G_{\iota^{k+1}}$, on voit que $A'(2\nu + 1, \pi)$ *a deux constituants transitifs dont l'un est semblable à* $G'(2\nu, \pi)$, *et l'autre produit direct de* $\mathbf{G}$ *par une* $s_{\pi-1}^{\pi-1, \pi^{2\nu}-1}$ *remplaçant chaque symbole* $x_1, \ldots, y_\nu, \iota^k$ de G_{ι^k} par le symbole $\iota x_1, \ldots, \iota y_\nu, \iota^{k+1}$ de $G_{\iota^{k+1}}$ (si une substitution de A remplace $x_1, \ldots, y_\nu, \iota^k$ par $X_1, \ldots, Y_\nu, \iota^k$, elle remplace $\iota x_1, \ldots, \iota y_\nu, \iota^{k+1}$ par $\iota X, \ldots, \iota Y, \iota^{k+1}$) (*cf.* **15**).

Soit $n = 2\nu + 2$ $(n = 1)$. Il est avantageux ici de ramener a, par le changement de variables $\begin{vmatrix} x & x \\ y & x + y \end{vmatrix}$ à la forme $\Sigma_0^\nu (x_i y'_i + y_i x'_i) + yy'$. La considération des mêmes coefficients que tout à l'heure donne

$$
\begin{array}{ll}
(6) & \Sigma_{i=0}^\nu (\alpha_{ij}\beta'_{ik} + \beta_{ij}\alpha'_{ik}) + \beta_{0j}\beta'_{0k} = f\varepsilon_{jk} \qquad (j, k \gtreqless 0), \\
(7) & \Sigma_{i=0}^\nu (\alpha_{ij}\beta_{ik} + \beta_{ij}\alpha_{ik}) + \beta_{0j}\beta_{0k} = 0 \\
(8) & \Sigma_{i=0}^\nu (\alpha'_{ij}\beta'_{ik} + \beta'_{ij}\alpha'_{ik}) + \beta'_{0j}\beta'_{0k} = 0
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} (j, k \gtreqless 0;\ j \neq k),
$$

$$
\begin{array}{ll}
(9) & \beta_{0j} = 0 \\
(10) & \beta'_{0j} = g\varepsilon_{0j}
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} (j \gtreqless 0).
$$

La relation $f\alpha^{-1} = a\alpha a^{-1}$ donne

$$
fA_{ik} = \beta'_{ki}, \quad fA'_{ik} = \alpha'_{ki}, \quad fB_{ik} = \beta_{ki}, \quad fB'_{ik} = \alpha_{ki} \quad (i, k \neq 0),
$$
$$
\left.\begin{array}{l}
fA_{i0} = \beta'_{0i}, \quad fA'_{i0} = \alpha'_{0i} + \beta'_{0i}, \quad fB_{i0} = \beta_{i0}, \quad fB'_{i0} = \alpha_{0i} + \beta_{0i} \\
fA_{0k} = \beta_{k0} + \beta'_{k0}, \quad fA'_{0k} = \alpha_{k0} + \alpha'_{k0}, \quad fB_{0k} = \beta_{k0}, \quad fB'_{k0} = \alpha_{k0}
\end{array}\right\} (i, k \neq 0),
$$
$$
fA_{00} = \beta_{00} + \beta'_{00}, \quad fA'_{00} = \alpha_{00} + \alpha'_{00} + \beta_{00} + \beta'_{0}, \quad fB_{00} = \beta_{00}, \quad fB'_{00} = \alpha_{00} + \beta_{00},
$$

d'où les relations suivantes [1], équivalentes *a priori* à (6)-(10) :

$$(11)\qquad \Sigma_{l=0}^{\nu}(\alpha_{kl}\beta'_{jl}+\beta_{jl}\alpha'_{kl})+\alpha_{k0}\beta_{j0}=f\varepsilon_{jk}\qquad (j,k\geq 0),$$

$$\begin{aligned}&(12)\qquad \Sigma_{l=0}^{\nu}(\beta_{kl}\beta'_{jl}+\beta_{jl}\beta'_{kl})+\beta_{j0}\beta_{k0}=0\\ &(13)\qquad \Sigma_{l=0}^{\nu}(\alpha_{kl}\alpha'_{jl}+\alpha_{jl}\alpha'_{kl})+\alpha_{j0}\alpha_{k0}=0\end{aligned}\Bigg\}\ (j,k\geq 0;\ j\neq k),$$

$$\begin{aligned}&(14)\qquad \alpha_{j0}=g\varepsilon_{0j}\\ &(15)\qquad \beta_{j0}=0\end{aligned}\Bigg\}\ (j>0).$$

Comme (11)-(15) équivaut à (6)-(10), les conditions (14) et (15) en particulier résultent de (6)-(10). En utilisant (9), (10), (14), (15) on voit directement que le système (6)-(10) équivaut au système (1)-(2) de I, **17** joint à

$$g\alpha_{0j}=\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta'_{i0}+\beta_{ij}\alpha'_{i0}),\qquad g\alpha'_{0j}=\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{i0}\beta'_{ij}+\beta'_{i0}\alpha'_{ij})\qquad (j\neq 0),$$
$$\alpha_{00}=\beta'_{00}=g,$$

c'est-à-dire que la matrice M des α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} où i et k sont $\neq 0$ est dans $G'(2\nu,\pi)$, et qu'on peut prendre arbitrairement les α'_{i0}, β'_{i0} autres que β'_{00}, les α_{0j}, α'_{0j}, où $j\neq 0$ étant alors déterminés.

On voit de même que le système (11)-(15) équivaut au système (3)-(4) de I, **17** joint à

$$g\alpha'_{j0}=\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{0i}\alpha'_{ji}+\alpha_{ji}\alpha'_{0i}),\qquad g\beta'_{j0}=\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{0i}\beta'_{ji}+\beta_{ji}\alpha'_{0i})\qquad (j\neq 0),$$
$$\alpha_{00}=\beta'_{00}=g,$$

c'est-à-dire, sous une seconde forme, que M est dans $G'(2\nu,\pi)$, et qu'on peut prendre arbitrairement les α_{0i}, α'_{0i} autres que α_{00}, les α'_{j0}, β'_{j0} où $j\neq 0$ étant alors déterminés.

On voit donc que A *et* A′ *coïncident* (*à un changement près des notations*) *avec les groupes* X *et* X′ *étudiés aux* n^os **11**, **12** *et* **14**.

---

[1] Pour écrire (11), (13) dans le cas où j ou k est nul, on a à tenir compte de (14) et (15).

NOTE.

La composition des groupes quadratiques A′, A⁰, A, B a été déterminée dans ces traits essentiels (I, **40**, **48**). Je voudrais ici achever de la préciser.

Pour n impair, D est premier à A⁰ d'où $A = A^0 D$ et $A' = A'' = A^0 I$ (I, **24**); $A' | A^0$ est donc un $g_{\pi-1}$ cyclique.

Pour n pair $A' | A_0$ est un $g_{2(\pi-1)}$ abélien produit direct du g_2 $A^0 \{ t_j \} A^0$ par le $g_{\pi-1}$ cyclique $A^0 \{ \gamma \} | A^0$ (I, **24**). Or tout diviseur d'un groupe abélien est le produit direct des groupes sylowiens de ce diviseur, et les groupes sylowiens d'ordre impair de $A' | A^0$ sont cycliques. Pour déterminer les diviseurs de $A' | A^0$, il suffit donc de déterminer les diviseurs de son groupe sylowien d'ordre pair, dont les équations ont la forme $u^{2^\alpha} = t^2 = 1$, $ut = tu$, 2^α étant la plus haute puissance de 2 qui divise $\pi - 1$. Le rang d'un diviseur X est 1 ou 2 (*E.*, 119). *Si* X *est cyclique, il a l'une des formes* $\{ u^{2^r} \}$, $\{ u^{2^r} t \}$ $(0 \leqq r \leqq \alpha)$. *Si* X *est de rang* 2, il a la forme $\{ u', t' \}$, u' ayant un ordre de la forme $2^s (1 \leqq s \leqq \alpha)$, et t' l'ordre 2 (*E.*, 124). Donc u' peut être supposé de la forme u^{2^r} ou $u^{2^r} t$ $(0 \leqq r < \alpha)$, et t' de la forme t ou $u^{2^{\alpha-1}} t$, *ce qui donne pour* X *les seules déterminations distinctes* $\{ u^{2^r}, t \} (0 \leqq r < \alpha)$.

$A' | B$ est défini comme il suit, en remplaçant les congruences mod B par des équations, et en supprimant les indices des t_j, $m_{j\rho}$:

$p > 2$, *n impair* :

$$(1) \qquad \gamma^{\pi-1} = t^2 = m^2 = 1, \qquad \gamma t = t\gamma, \qquad \gamma m = m\gamma, \qquad tm = mt;$$

$p > 2$, *n pair*, ψ *irréductible* :

$$(2) \qquad \gamma^{\pi-1} = m, \qquad t^2 = m^2 = 1, \qquad t\gamma t = \gamma m, \qquad \gamma m = m\gamma, \qquad tm = mt;$$

$p > 2$, *n pair*, ψ *réductible* :

$$(3) \qquad \gamma^{\pi-1} = t^2 = m^2 = 1, \qquad t\gamma t = \gamma m, \qquad \gamma m = m\gamma, \qquad tm = mt;$$

$p = 2$ (*alors n est pair, et* $B = A^0$) :

$$(4) \qquad \gamma^{\pi-1} = t^2 = 1, \qquad \gamma t = t\gamma.$$

Pour déterminer les diviseurs normaux $\geqq$ B de A′, il suffit de déterminer les diviseurs normaux des groupes (1)-(4) ou même seulement, après l'étude de $A' \mid A^0$, *les diviseurs normaux non* $\geqq \{m\}$ *des groupes* (1)-(3). Chacun de ces groupes est le produit direct de ses groupes sylowiens (*cf. E.*, 95-96), ceux d'ordre impair étant cycliques. Il en sera donc de même de chacun de ses diviseurs. *Il suffit donc de déterminer les diviseurs normaux non* $\geqq \{m\}$ *du diviseur sylowien d'ordre pair de chacun des groupes* (1)-(3). Soit Γ_i celui du groupe (i), 2^α ($\alpha \leqq 1$) la plus haute puissance de 2 qui divise $\pi - 1$, et X un des diviseurs cherchés de Γ_i.

Γ_1 a des équations de la forme $u^{2^\alpha} = t^2 = m^2 = 1$, $ut = tu$, $um = mu$, $tm = mt$. C'est donc un $g_{2^{\alpha+2}}$ abélien de rang 3, et X a un rang $\leqq 3$. *Si* X *est cyclique*, X a l'une des formes $\{u^{2^r}\}$, $\{u^{2^r}t\}$, $u^{2^r}m\}$, $\{u^{2^r}tm\}$ ($0 \leqq r \leqq \alpha$). *Si* X *a le rang* 2, X a la forme $\{u', t'\}$, u' ayant un ordre de la forme 2^s ($0 < s \leqq \alpha$), et t' l'ordre 2. Donc, en désignant par τ, τ' des e_2 de $\{t, m\}$, t' a l'une des formes $u^{2^{\alpha-1}}$, $u^{2^{\alpha-1}}\tau$, et u' peut être supposé de l'une des formes u^{2^r}, $u^{2^r}\tau'$ ($0 \leqq r < \alpha$) (si $r = \alpha$, X est cyclique ou contient m). On obtient ainsi les diviseurs $\{u^{2^r}, \tau\}$, $\{u^{2^r}\tau', \tau\}$ ($\tau' \neq \tau$), *d'où, pour* X (en négligeant les formes où $\tau = m$), *les formes* $\{u^{2^r}, t\}$, $\{u^{2^r}, tm\}$, $\{u^{2^r}t, tm\}$, $\{u^{2^r}m, t\}$, ($0 \leqq r < \alpha$). X *ne peut avoir le rang* 3. Car il aurait la forme $\{u', t', m'\}$, m' étant d'ordre 2, et $\{u', t'\}$ un des diviseurs obtenus de rang 2. De là, en désignant par τ, τ', τ'' des e_2 distincts de $\{t, m\}$, les seuls types $\{u^{2^r}, \tau, \tau'\}$, $\{u^{2^r}\tau'', \tau, \tau'\}$, qui tous contiennent m.

Γ_2 *a des équations de la forme* $u^{2^\alpha} = m$, $t^2 = m^2 = 1$, $tut = um$, $um = mu$, $tm = mt$, ou $u^{2^{\alpha+1}} = 1$, $t^2 = 1$, $tut = u^{1+2^\alpha}$. *Soit d'abord* $\alpha = 1$. En écrivant a pour m, b pour t, et c pour u, les équations de la première forme coïncident avec (2) de *E.*, 152. En écrivant encore a pour m, et b pour t, mais en posant $ut = c$, on a les équations (1) de *E.*, 152. En partant de ces dernières équations, on a trouvé (*cf. S.*, p. 224) que le $g_8\,\Gamma_2$ (de central $\{m\}$) a exactement 3 g_4 qui sont $\{m, t\}$, $\{m, ut\}$, $\{u\}$ et 5 g_2 qui sont $\{m\}$, $\{t\}$, $\{mt\}$, $\{ut\}$, $\{mut\}$. Donc X, qui ne contient pas $m = u^2$, ne peut être qu'un des groupes $\{t\}$, $\{mt\}$, $\{ut\}$, $\{mut\}$, 1. Mais aucun des quatre premiers n'est normal (u transforme t en mt, et ut en mut). *Donc* X $= 1$. *Soit* $\alpha > 1$. En écrivant a pour u, et b pour t, la seconde forme des équations de Γ_2 coïncide avec (1) de *E.*, **141**. Donc Γ_2 est un $g_{2^{\alpha+2}}$ de central $\{m\}$. Ses $g_{2^{\alpha+1}}$, qui ont été déterminés (*cf.* *S.*, p. 223), sont $\{u\}$, $\{tu\}$ et $\{u^2, t\}$, et tout diviseur d'ordre $< 2^{\alpha+1}$ divise un $g_{2^{\alpha+1}}$ (*E.*, **75**). Les diviseurs de $\{u^2, t\}$, qui est abélien, sont, d'après ce qu'on a vu au début de cette Note, $\{u^{2^r}\}$, $\{u^{2^r}t\}$ $(1 \leqq r \leqq \alpha + 1)$, $\{u^{2^s}, t\}$ $(1 \leqq s \leqq \alpha)$. Donc X, qui ne contient pas $m = u^{2^\alpha}$, ne peut être qu'un des groupes $\{mt\}$, $\{t\}$. Mais ils ne sont pas normaux (u transforme t en mt). Donc $X = 1$.

Γ_3 *a des équations de la forme* $u^{2^\alpha} = t^2 = m^2 = 1, tut = um, um = mu,$ $tm = mt$. En écrivant a_1 pour u, a_2 pour m, et b pour t, elles coïncident avec (12) de *E.*, **140** (pour $\zeta = 0$). Donc Γ_3 est un $g_{2^{\alpha+2}}$ ayant pour central le $g_{2^{\alpha+1}}$ abélien $\{u^2, t, m\} = E$. Si X ne divise pas E, soit Y son p.g.c.d. avec E. On aura $X = Y + ueY$, e étant dans E, et $u^2 e^2$ dans Y. De plus, X étant normal, on a $t.ueY.t = ueY$, d'où $uemY = ueY$. Donc Y devrait contenir m contre l'hypothèse. *Donc* X *divise* E. D'après l'étude de Γ_1, les diviseurs de Γ_3 contenus dans E et ne contenant pas m sont $\{u^{2^r}\}$, $\{u^{2^r}t\}$, $\{u^{2^r}m\}$, $\{u^{2^r}tm\}$ $(1 \leqq r \leqq \alpha)$; $\{u^{2^r}, t\}$, $\{u^{2^r}, tm\}$, $\{u^{2^r}t, tm\}$, $\{u^{2^r}m, t\}$ $(1 \leqq r < \alpha)$. Mais u transforme $\{u^{2^r}t\}$, $\{u^{2^r}, t\}$ et $\{u^{2^r}t, tm\}$ en $\{u^{2^r}tm\}$, $\{u^{2^r}, tm\}$ et $\{u^{2^r}tm, t\} = \{u^{2^r}m, t\}$ respectivement. *Donc* X *a l'une des formes* $\{u^{2^r}\}$, $\{u^{2^r}m\}$ $(1 \leqq r \leqq \alpha)$.

Parmi les diviseurs $> B$ non normaux dans A′, ceux qui correspondent, pour $p > 2$, à $\{t\}$ et à $\{tm\}$ présentent un intérêt particulier. Je les désignerai par B^1 et B^2.

On a vu que, *pour* $n \geqq 5$, *tout diviseur normal de* B, A_0, A ou A′ *ou non contenu dans* I *est* $\geqq B$ (I, **48**), et le cas $n = 2$ a été traité (I, **25**, **39**). Il ne reste plus à considérer que les cas $n = 3, 4$.

Soit d'abord $n = 4$ et $\psi = 0$. *Alors* $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}\mathfrak{W}$ *est isomorphe à* $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{v}_z \mathfrak{v}_u$ (*cf.* I, **40**), $V_{12\lambda}$ *et* $V_{21\lambda}$ *de* $\mathfrak{V}$ *correspondant respectivement à* $z + \lambda$ *et à* $\frac{z}{\lambda z + 1}$ *de* $\mathfrak{v}_z$, $U_{12\lambda}$ *et* $W'_{2\lambda}$ *à* $u + \lambda$ *et à* $\frac{u}{\lambda u + 1}$ *de* $\mathfrak{v}_u$.

En faisant encore correspondre $\mathfrak{m}_\lambda = \begin{vmatrix} z & \lambda^{-1} z \\ u & \lambda u \end{vmatrix}$ (je poserai $\mathfrak{m}_{-1} = \mathfrak{d}$) *à* $m_{2\lambda}$, $\mathfrak{i} = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$ *à* t_2, *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}u$ *de* $\mathfrak{L}_u$ *à* γ ($\mathfrak{g}_u^2$ *répond à* $m_{11} m_{21} = [\mathfrak{i}^{-1}] \gamma^2$), *on voit que* $[\mathfrak{H}^0] = \{[\mathfrak{M}], \mathfrak{m}_N\}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{H}$, $[\mathfrak{H}] = \{[\mathfrak{H}], \mathfrak{i}\}$ *à* $\mathfrak{H}$, *et* $[\mathfrak{H}'] = [\mathfrak{H}] + \mathfrak{g}_u[\mathfrak{H}]$ *à* $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + \gamma\mathfrak{H}$. *Comme* $\{\mathfrak{g}_u\}$ *est la substitution*

$\mathfrak{y}_z = \iota z$ *de* $\mathfrak{L}_2$, *on voit encore que* $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ *et* $\{\mathfrak{v}, t_2\gamma t_2\}$ *sont isomorphes à* $\mathfrak{L}(2, \pi)$, *et que* $[\mathfrak{A}'] = \{\mathfrak{L}_z\mathfrak{L}_u, \mathfrak{t}\}$.

D'après la correspondance des générateurs de A et de $[\mathfrak{A}]$ et les formules de I, **49**, $R_{12\lambda}$ correspond à $-\lambda^2 z^{-1}$, donc $S_{12\lambda}$ à $\iota(-\lambda^2 z^{-1})\iota = \lambda^2 u^{-1}$ [en particulier $m_{1,-1}T_{12}$ à $-z^{-1}$, et $m_{1,-1}T_{12}t_{12}$ à $-u^{-1}$ (I, **28**)], t_{12} à $(-z^{-1})(-u^{-1})$, $m_{1\lambda^2}$ à $(\lambda^2 z)(\lambda^2 u)$, $m_{2\lambda^2}$ à $(\lambda^2 z^{-2})(\lambda^{-2} u)$, $m_{1\lambda}m_{2\lambda}^{-1}$ à $\lambda^{-2}z$, $m_{1\lambda}m_{2\lambda}$ à $\lambda^2 u$.

Inversement $\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'} = \mathfrak{s}_z$ $(\alpha\beta' - \beta\alpha' = k^2$, k étant réel) et $\mathfrak{s}_u = \iota \mathfrak{s}_z \iota$ répondent respectivement :

pour $\beta \neq 0$, à $DV_{12,\frac{\beta'-k}{\beta}}V_{21,\frac{\beta}{k}}V_{12,\frac{\alpha-k}{\beta}}$ et à $DU_{12,\frac{\beta'-k}{\beta}}W_{21,\frac{\beta}{k}}U_{12,\frac{\alpha-k}{\beta}}$;

pour $\beta = 0$, à $DV_{12,\frac{\alpha'}{\alpha}}m_{1,\frac{\alpha}{k}}m^{-1}_{2,\frac{\alpha}{k}}$ et à $DU_{12,\frac{\alpha'}{\alpha}}m_{1,\frac{\alpha}{k}}m_{2,\frac{\alpha}{k}}$;

La forme générale des substitutions de $[\mathfrak{A}']$ étant $\mathfrak{s}_z\mathfrak{s}_u\mathfrak{m}_\chi^{\varepsilon}\mathfrak{t}^{\varepsilon'}\mathfrak{g}^{\varepsilon''}$ $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = 0$ ou $1)$, on tire de là la forme générale des substitutions de Λ'.

Pour $\pi > 3$, *les diviseurs normaux de* $[\mathfrak{B}]$ *sont* 1, $\mathfrak{V}_z$, $\mathfrak{V}_u$, $[\mathfrak{B}]$ (*E.*, 72), *et ceux de* B *sont* 1, D, **V**, **W**, B.

Pour $\pi = 2$ *ou* 3, $\mathfrak{V}_z$ *est isomorphe au* g_6^3 *ou au* g_{12}^1 *respectivement. En désignant alors par* $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w} = \iota\mathfrak{v}\iota$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = t_2\mathbf{v}t_2$ *les diviseurs normaux sylowiens de* $\mathfrak{V}_z$, $\mathfrak{V}_u$, **V**, **W** *respectivement* $\Big[$*pour* $\pi = 2$, $\mathbf{v} = \left\{\dfrac{z+1}{z}\right\}$, *et pour* $\pi = 3$, $\mathbf{v} = \left\{\dfrac{-1}{z}, \dfrac{z+1}{z-1}\right\}$ (*S.*, 83; *d'où, pour* $\pi = 2$, $\mathbf{v} = \{V_{121}V_{211}\}$, *et pour* $\pi = 3$, $\mathbf{v} = \{R_{121}, V_{121}V_{211}\}$; $\mathbf{v}$ *est isomorphe au* g_8 *des quaternions, et* $R_{121}^2 = (V_{121}V_{211})^2 = d\Big]$, *les diviseurs normaux de* $[\mathfrak{B}]$ *sont* 1, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}\mathfrak{w} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_z\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}\mathfrak{V}_u$, $[\mathfrak{B}]$, *et ceux de* B *sont* 1, D, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{vw} = P$, $\mathbf{Vw}$, $\mathbf{Wv}$, B.

En effet, pour $\pi > 3$, les diviseurs $\geqq D$ de B correspondant aux diviseurs normaux de $[\mathfrak{B}]$ sont ceux de l'énoncé. Il reste à voir si à $\mathfrak{V}_z$, $\mathfrak{V}_u$ ne répondent pas dans B des diviseurs normaux X, $Y = t_2Xt_2$ premiers à D. Or cela est impossible, car B serait alors le produit direct de XY par D, tandis que B contient des s_4 de carré d, par exemple la substitution sr où $r = d$ et où $s_{x_1x_2} = |x_2, -x_1|$ (I, **40**). Pour $\pi = 3$, **V** est un g_{24} ayant un seul g_8 qui contient D (*S.*, 83). Pour $\pi = 2$, $D = 1$ (si alors $\mathfrak{v} = \{\mathfrak{v}\}$ et

$\omega = \{w\}$, $\{\nu w\}$ n'est pas normal, car une s_2 de $\mathfrak{V}_2$ transforme νw en $\nu^2 w$).

Les diviseurs normaux de A^0 *autres que* A^0 *sont ceux de* B *pour* $\pi \geqq 2$ (*pour* $\pi = 2$, $A^0 = B$).

En effet, soient X un diviseur normal de A^0; Y le p.g.c.d. de X, B; $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ les correspondants de X, Y dans $[\mathfrak{A}^0]$. Si $X = Y$, X est un des diviseurs normaux de B, déjà déterminés et tous normaux dans A^0. *Soit donc* $X > Y$. Si $Y \leqq D$, $[\mathfrak{A}^0]$ est produit direct de $[\mathfrak{B}]$ par $\mathfrak{X}$, et l'action $\mathfrak{L}_z$ de $[\mathfrak{A}^0]$ sur z, qui est primitive, serait aussi produit direct de $\mathfrak{V}_z$ par un g_2, ce qui ne se peut (*S.*, 62). *Donc* Y *est* $>$ D. Si $Y = B$, on a $X = A^0$. *Soit donc* $Y < B$. $\mathfrak{X}$ a la forme $\{Y, \beta m_N\}$, β étant dans $[\mathfrak{B}]$, et βm_N ayant son carré dans $\mathfrak{Y}$. Soit $\beta = \alpha_z \beta_u$, α_z étant dans $\mathfrak{V}_z$ et β_u dans $\mathfrak{V}_u$. *Si* $\pi > 3$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{V}_z$ ou $\mathfrak{V}_u$, et pour que $\mathfrak{X}$ fût normal dans $[\mathfrak{A}^0]$, il faudrait que $\beta_u(Nu)$ fût normale dans $\mathfrak{L}_u$ pour $\mathfrak{Y} = \mathfrak{V}_z$, et $\alpha_z(N^{-1}z)$ dans $\mathfrak{L}_z$ pour $\mathfrak{Y} = \mathfrak{V}_u$. Or, cela n'a pas lieu. *Soit* $\pi = 3$. Ici encore $\mathfrak{Y}$ ne peut être un des groupes $\mathfrak{V}_z$, $\mathfrak{V}_u$. Si $\mathfrak{Y} = \nu$, l'action de $\mathfrak{X}$ sur z est un g_8 qui devrait être normal dans le g_{24}^1, $\mathfrak{L}_z$. Donc $\mathfrak{Y} \neq \nu$, et, pour la même raison, $\mathfrak{Y}$ ne peut être un des groupes ω, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{V}_z\omega$, $\nu\mathfrak{V}_u$.

A *a toujours les diviseurs normaux* 1, D, B, A^0, $B^1 = \{B, t_1\}$, $B^2 = \{B, t_1 m_{1N}\}$, A. *Pour* $\pi > 3$, *il n'y en a pas d'autres. Pour* $\pi \leqq 3$, *le seul autre diviseur normal est* P.

En effet, soit X un diviseur normal de A; X^0 le p. g. c. d. de X, A^0; $\mathfrak{X}$ le correspondant de X dans $[\mathfrak{A}]$, et convenons que si une lettre affectée de l'indice z désigne une substitution de $\mathfrak{L}_z$, la même lettre affectée de l'indice u désignera la substitution de mêmes coefficients de $\mathfrak{L}_u$. *Si* $X = X_0$, X, normal dans A^0 et dans A est, pour $\pi > 3$, un des groupes 1, D, B, A_0, et pour $\pi = 3$ un des groupes 1, D, P, B, A^0. *Soit donc* $X > X_0$. *Si* $X^0 \leqq D$, $[\mathfrak{A}]$ est produit direct de $[\mathfrak{A}^0]$ par $\mathfrak{X}$ qui est d'ordre 2, et dont le générateur σ a la forme $m_N^\varepsilon \beta$, ε étant égal à 0 ou à 1, et β étant dans $[\mathfrak{B}]$. Soit $m_N^\varepsilon \beta = \alpha_z \beta_u$, α_z étant dans $\mathfrak{L}_z$, β_u dans $\mathfrak{L}_u$, et les déterminants de α_z, β_u ayant tous deux le caractère quadratique $(-1)^\varepsilon$. La condition $\sigma\iota = \iota\sigma$ donne $\alpha_u \beta_z = \alpha_z \beta_u$, d'où $\beta_z = \alpha_z$. La condition $\sigma\varphi_z = \varphi_z\sigma$, φ_z étant quelconque dans $\mathfrak{V}_z$, donne $\alpha_z \alpha_u \varphi_z = \varphi_u \alpha_z \alpha_u$, d'où $\alpha_z = \alpha_z \varphi_z$, et $\varphi_z = 1$ contre l'hypothèse. *Donc* X_0 *est* $>$ D. *Si* X^0 *est* $\geqq$ B, X est un des groupes A^0, B^1, B^2, A. *Soit donc* $X^0 < B$, *donc* $\pi \leqq 3$. Alors $X^0 = P$, et $\mathcal{X}$ dérive de $\mathfrak{P}$ et d'une substitution σ de la même forme $\iota\alpha_z\beta_u$ que tout à l'heure. $\iota\sigma\iota$ devant être dans $\sigma\mathfrak{P}$, on a $\alpha_u\beta_z = \alpha_z\beta_u\varphi_z\chi_u$, φ_z étant dans o et χ_u dans ω, d'où $\beta_z = \alpha_z\varphi_z$, $\beta_u = \alpha_u\chi_u^{-1}$, $\chi_u = \varphi_u^{-1}$. Donc $\sigma = \iota\alpha_z\alpha_u\varphi_u$. En désignant par μ_z une substitution quelconque de $\mathfrak{V}_z$, $\mu_z^{-1}\sigma\mu_z$ doit être dans $\sigma\mathfrak{P}$, donc $\alpha_z\alpha_u\varphi_u\mu_z$ dans $\mu_u\alpha_z\alpha_u\varphi_u\mathfrak{P}$, donc $\alpha_z\mu_z$ dans $\alpha_z o$, donc μ_z dans o contre l'hypothèse.

Les diviseurs normaux de A' *qui sont* $\leqq I$ *ou* $\geqq B$ *sont connus. Si* $\pi > 3$, *il n'y en a pas d'autres. Si* $\pi \leqq 3$, *le seul autre diviseur normal de* A' *est* P (*si* $\pi = 2$, $A' = A$).

En effet, soient X' un diviseur normal de A' non $\leqq I$ et non $\geqq B$; X son p. g. c. d. avec A; $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}$ les correspondants de X' et X dans $[\mathcal{A}']$. *Si* $X' = X$, on a, d'après ce qui précède, $\pi \leqq 3$ et $X' = P$. *Soit donc* $X' > X$. *Si* $X \leqq D$, p est > 2, sans quoi $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et $\mathcal{X}' = \mathcal{X} = 1$, d'où $X' \leqq I$. Donc $[\mathcal{A}']$ est produit direct de $[\mathcal{A}]$, $\mathcal{X}'$. Donc $\mathcal{X}'$ est engendré par un $s_2\sigma$ de la forme $(\iota u)\iota^{\varepsilon}m_{2\xi}^{\pi}\beta$, β étant dans $[\mathcal{B}]$, c'est-à-dire de la forme $\iota^{\varepsilon}\alpha_z\beta_u$, α_z étant dans $\mathcal{L}_z$, β_u dans $\mathcal{L}_u$, et leurs déterminants ayant des caractères quadratiques différents. Mais alors $\iota\sigma\iota = \iota^{\varepsilon}\alpha_u\beta_z$ est $\neq \sigma$. *Donc* X *est* $> D$ *et* $< B$. *Donc* π *est* $\leqq 3$, et $\mathcal{X}'$ dérive de $\mathfrak{P}$ et d'une substitution σ de la même forme $\iota^{\varepsilon}\alpha_z\beta_u$ que tout à l'heure. $\iota\sigma\iota$ devant être dans $\sigma\mathfrak{P}$, on obtient, comme dans l'étude des diviseurs normaux de A, $\beta_u = \alpha_u\varphi_u$, φ_u étant dans ω. Mais alors les déterminants de α_z, β_u auraient le même caractère.

Soit $n = 4$, ψ *étant irréductible. Alors* $A^0 = BD$ *et* $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0 \equiv B \equiv U(2, \pi^2)$ (I, 40). *Aux substitutions* $P_{1\rho}$, $O_{1,-\rho}$ *qui engendrent* $\overline{B}$ *quand* ρ *parcourt* $\mathfrak{S}'$ *répondent respectivement dans* $\mathfrak{V}_z(2, \pi^2)$, *par la correspondance indiquée entre ces deux groupes* (*l. c.*), $z + \rho$ *et* $\dfrac{z}{1 - \rho z}$. Or la $s_2 - z^{-1}$ transforme ces deux substitutions l'une dans l'autre. *Donc* $[\mathcal{A}] = |\mathfrak{V}_z(2, \pi^2), \dot{z}|$ *est isomorphe à* $\mathcal{A} \equiv |B, t_1|$, $-\dot{z}^{-1} = (\dot{z})(-z^{-1})$ *répondant à* t_1, *et la correspondance des éléments de* $\mathfrak{V}_z$, B *restant la même.* La substitution $\mathfrak{g} = \xi z$ (ξ étant une racine de $\xi^{\pi+1} = 1$) est hors de $\mathfrak{V}_z(2, \pi^2)$. Elle transforme $z + \rho$ en $z + \xi\rho$, $\dfrac{z}{1 - \rho z}$ en $\dfrac{z}{1 - \rho\xi^{-1}z}$, $-\dot{z}^{-1}$ en $(-\dot{z}^{-1})(\xi^{1-\pi}z)$, $(\xi^{\pi-1}z)$ répondant à $\mathrm{I}m_{2\xi}^{\pi-1}$, et $\mathfrak{g}^2 = \xi^2 z$ à

$I m_{1 \iota} m'^{\pi}_{\frac{1}{2}\xi} = I\gamma^2$. *Donc* $[\mathcal{A}'] = [\mathcal{A}] + \mathfrak{g}[\mathcal{A}]$ *est isomorphe à* $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \gamma\mathcal{A}$, $\mathfrak{g}$ *répondant à* γ, *et la correspondance des éléments de* $[\mathcal{A}]$, $\mathcal{A}$ *restant la même*. On remarquera que $[\mathcal{A}']$ contient les trois diviseurs normaux d'indice 2 non isomorphes (*cf.*, *S.*, 92) $[\mathcal{A}]$, $\mathfrak{L}_z(2, \pi^2)$, $\{\mathfrak{V}_z(2, \pi^2), \xi\dot{z}\}$, $[\mathcal{A}'] | \mathfrak{V}_z(2, \pi^2)$ étant un $\mathfrak{g}_4$ non cyclique.

$dm_{1\iota}$ répond à ιz, $dm_{2\sigma}$ ($\sigma^{\pi+1} = 1$) à σz, dt_{12}, à $-z^{-1}$, $m_{1c} m_{2q}$ à $\varkappa^2 z$. (*cf.*, I, **51**), donc $dt_{01} m_{1c} = dt_{12} m_{1c} m_{2q}$ à $-\varkappa^2 z^{-1}$.

Inversement, $\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$ ($\alpha\beta' - \beta\alpha' = k^2$) répond, pour $\beta \neq 0$, à $P_{1\mu} O_{1,\beta k} P_{1\rho} (\dot{\beta}\mu = \dot{\beta}' - k, \dot{\beta}\rho = \dot{\alpha} - k)$, et pour $\beta = 0$, à $dP_{1,\alpha'\alpha^{-1}} m_{1,\alpha^2 k^{-2}}$.

Les diviseurs normaux de A^0 *sont* 1, D, B, $A^0 = BD$. *Ceux de* A *sont* 1, D, B, A^0, B', B^2, A. Il suffit de montrer que tout diviseur normal X de A non $\leq$ D est $\geq$B. Or si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Donc BX est le produit direct de B par X, et X devrait diviser D (I, **39**).

Les diviseurs normaux de A' *qui sont* $\leq$ I *ou* $\geq$B *sont connus. Il n'y en a pas d'autres.* En effet, soient X' un diviseur normal de A' non $\leq$ I et non $\geq$B; X son p.g.c.d. avec A; $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}$ les correspondants de X' et X dans $[\mathcal{A}']$. D'après ce qui précède, X' *est* $>$ X, *et* X $\leq$ D. Donc p est > 2, sans quoi $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et $\mathcal{X}' = \mathcal{X} = 1$, d'où X $\leq$ I. Donc $[\mathcal{A}']$ est produit direct de $[\mathcal{A}]$, $\mathcal{X}'$. Donc $\mathcal{X}'$ est engendré par une $s_2\sigma$ de (ξz) $[\mathcal{A}]$ donc de la forme $(\dot{z})^{\varepsilon} \left(\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right)$, le déterminant $\Delta = \alpha\beta' - \beta\alpha'$ étant non carré dans $\mathfrak{S}'$. Or la condition $(\dot{z})\sigma(\dot{z}) = \sigma$ donne $\left(\dfrac{\dot{\alpha} z + \dot{\alpha}'}{\dot{\beta} z + \dot{\beta}'}\right) = \left(\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right)$ d'où $\dot{\alpha} = \rho\alpha$, $\dot{\alpha}' = \rho\alpha'$, $\dot{\beta} = \rho\beta$, $\dot{\beta}' = \rho\beta'$. On tire de là $\rho^{\pi+1} = 1$ et $\dot{\Delta} = \rho^2\Delta$; or la seconde de ces relations donne $\rho^{\pi+1} = \Delta^{\frac{\pi^2-1}{2}} = -1$ ce qui est contradictoire.

Soit $n = 3$ *et* $\psi = cx^2$ ($p \geq 2$). Alors $A = A^0 D$; $\mathcal{A} \equiv A^0 \equiv \mathfrak{L}(2, \pi)$, *les complexes* Dt_0, Dt_1, $Dm_{1\lambda}$, $DV_{01\lambda}$, $DU_{01\lambda}$ *correspondant à* $-z$, $\dfrac{-c}{z}$, λz, $\dfrac{z}{\lambda z + 1}$, $z - c\lambda$ *respectivement*; $B \equiv \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{V}(2, \pi)$.

Si $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* A, A^0 *ou* B *non* $\leq$ D *est* $\geq$B. *Si* $\pi = 3$, B *est isomorphe au* g'_{12}, *et* A *au* g'_{24}. *Soit* $P = \{t_1, m_{1,-1}\}$ (*correspondant à* $\{z^{-1}, -z\}$ *de* $\mathfrak{V}$) *le* g_4 *de* B. *Les diviseurs normaux de* B *sont* 1, P, B. *Ceux de* A^0 *sont* 1, P, B, A^0. *Ceux de* $A = A^0 D$ *sont*

1, P, B, A^0, D, PD, BD, A. *Si* $\pi=2$, $A=A^0=B$ *est isomorphe au* g_6^3. *Son* g_3 P *est engendré par* $V_{011}U_{011}$ (*qui répond à* $\frac{\varpi}{\varpi+1}$ *de* υ); *ses diviseurs normaux sont* 1, P, B. (*Voir*, I, **40**).

Les diviseurs normaux de A′ *qui sont* $\leqq$ I *et* $\geqq$ B *sont connus. Si* $\pi>3$, *il n'y en a pas d'autres. Si* $\pi\leqq 3$, $A'=A$.

En effet, soit, pour $\pi>3$, X′ un diviseur normal de A′ non $\leqq$ I et non $\geqq$ B, et X le p.g.c.d. de X′, A. D'après ce qui précède on peut supposer $X'>X$ et $X\leqq D$. Alors X′ est premier à A^0, et A^0X' est produit direct de A^0 par X′. Mais alors X′ serait $\leqq$ I (I, **39**).