JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. DE SÉGUIER

Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 2 (1916), p. 281-366.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__281_0>

Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois;

PAR J.-A. DE SÉGUIER.

La théorie des groupes linéaires à invariant quadratique dans un champ galoisien est notablement simplifiée quand on prend cet invariant sous la forme d'une somme de rectangles augmentée d'une forme quadratique à une ou deux variables. Il en est de même de la théorie du groupe linéaire à invariant hermitien quand on prend cet invariant sous une forme analytique qui sera précisée plus loin. De plus, les deux théories et celle du groupe linéaire à invariant bilinéaire gauche se présentent alors avec un parallélisme qui est un nouvel élément de simplification et qui facilite l'étude des relations entre les trois groupes.

C'est l'exposition de cette triple théorie ainsi simplifiée que je reprends ici, en y ajoutant des résultats nouveaux. Une partie de ces résultats a été indiquée dans trois Notes présentées à l'Académie des Sciences [1]. Je me borne ici au développement de la première.

L'idée de prendre l'invariant quadratique sous la forme indiquée, quel que soit le module, appartient à M. Jordan, qui a déjà employé cette forme dans ses dernières recherches sur les groupes résolubles [2], en particulier pour déterminer l'ordre du groupe et ses générateurs dans le cas d'un champ d'ordre premier. Je n'aurai donc, sur ces deux

(1) *Comptes rendus*, t. 157, 1er septembre 1913, p. 430; t. 161, 8 novembre 1915, p. 553; t. 161, 29 novembre 1915, p. 670.

(2) *Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei*, t. XXVI (1908) et Cours professé au Collège de France en 1903.

points, qu'à suivre son exposé. Je prendrai toutefois l'invariant sous une forme un peu plus générale, afin d'avoir toujours les mêmes générateurs quelle que soit la parité du module et du nombre des variables.

Il est à peine utile de rappeler que le sujet qui m'occupe a été étudié d'abord par M. Jordan, dans son *Traité des substitutions*, puis par M. Dickson, dans ses *Linear groups* (1901). Pour des renvois plus précis, je me suis borné à certains points particuliers que le lecteur aurait eu quelque peine à retrouver.

I. — Généralités.

1. Soient $\mathfrak{S}$ un champ fini d'ordre $\pi = p^\kappa$ (p premier); $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}(\upsilon)$ le champ d'ordre π^2 défini par la racine υ d'une équation quadratique irréductible dans $\mathfrak{S}$ (¹); $a = (a_{ik})$ une matrice invertible d'ordre n de $\mathfrak{S}$ ou de $\mathfrak{S}'$. Je désignerai en général par $\dot{x}$ la matrice (d'ordre $\geqq 1$) conjuguée de x relativement à $\mathfrak{S}$, υ, $\upsilon^\pi (= \dot{\upsilon})$, et j'appellerai *réelles* les matrices dont les éléments sont dans $\mathfrak{S}$.

Considérons le groupe des matrices $\alpha = (\alpha_{ik})$ de $\mathfrak{S}$ d'ordre n telles que $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, f désignant un facteur indéterminé ($\bar{\alpha}$ est la transposée de α), et celui des matrices α de $\mathfrak{S}'$ telles que $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$. On peut assimiler a à une forme linéaire $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ ($i, k = 1, \ldots, n$) [qui sera dite *forme des deux points* $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$] et α à une substitution. La condition $\alpha a \bar{\alpha} = fa$ donne, en regardant les y comme cogrédients aux x,

$$(1) \qquad \Sigma_{ijkl}\, a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} x_j y_l = f \Sigma_{jl}\, a_{jl} x_j y_l \qquad \text{ou} \qquad \Sigma_{ik}\, a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} = f a_{jl},$$

et la condition $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$, en regardant les y comme subissant la substitution $\dot{\alpha}$ quand les x subissent la substitution α (on peut alors

---

(¹) *Voir*, par exemple, mes *Éléments de la Théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904), n° 27. Je me servirai, dans ce qui suit, des termes et notations adoptés dans ces *Éléments* et dans mes *Éléments de la Théorie des groupes de substitutions* (Gauthier-Villars, 1912), où l'on trouve une Table de ces termes et notations. Je renverrai au premier Ouvrage par la lettre E et au second par la lettre S.

identifier y_k à $\dot{x}_k$),

$$(2) \qquad \Sigma a_{ik}\alpha_{ij}\dot{\alpha}_{kl} = fa_{jl}.$$

En assimilant chaque colonne de α à un point, on peut dire que la forme a de deux colonnes quelconques (distinctes ou non) de α doit être égale à ce qu'elle devient quand on remplace α par une similitude arbitraire.

Je me bornerai, si $\alpha a\bar{\alpha} = fa$, au cas où $\bar{a} = \pm a$, a étant dans $\mathfrak{S}$, et si $\dot{\alpha}a\bar{\alpha} = fa$, au cas où $\bar{a} = \pm \dot{a}$; alors f est réel, car en comparant les transposées et les conjuguées des deux membres de $\dot{\alpha}a\bar{\alpha} = fa$, on obtient $\dot{f}a = fa$. a est dite *symétrique* si $\bar{a} = a$, *alternée* ou *gauche* si $\bar{a} = -a$, les a_{ii} étant nuls [1], *hermitienne* si $\bar{a} = \dot{a}$. Si $\bar{a} = -\dot{a}$, $(\nu - \dot{\nu})a$ est évidemment hermitienne.

Si $\alpha a\bar{\alpha} = a$ et $\bar{a} = a$, on peut encore assimiler a à une forme quadratique pour $p \neq 2$. Pour $p = 2$, on ne le peut pas; mais il existe toujours un groupe de substitutions multipliant par f une forme quadratique $\Sigma a_{ik}x_ix_k$ $(i \leqq k)$ que j'appellerai encore a.

Considérons, pour $p \geqq 2$, la forme quadratique $a = \Sigma_{ik}a_{ik}x_ix_k$ $(i \leqq k)$. Les conditions imposées aux coefficients α_{ik} de la substitution α qui multiplie a par f prennent la forme, un peu différente,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{ik}a_{ik}(\alpha_{ij}\alpha_{kl} + \alpha_{il}\alpha_{kj}) = fa_{jl} & (i \leqq l;\ j \neq l), \\ \Sigma_{ik}a_{ik}\alpha_{ij}\alpha_{kj} = fa_{jj} & (i \leqq k). \end{array} \right.$$

En disant que a est la forme $a = a(x_1, \ldots, x_n)$ du point $(x_1, \ldots, x_n)$ et $a' = a'(x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n) = \Sigma_{ik}a_{ik}(x_ix'_k + x_kx'_i)$ $(i \leqq k)$ *la polaire de a relativement aux deux points* $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ et en assimilant toujours chaque colonne de α à un point, (3) exprime que la forme a d'une colonne quelconque de α et la polaire de a relative à deux colonnes de α sont égales à ce qu'elles deviennent quand α est remplacée par une similitude.

Les groupes considérés peuvent se réunir sous la notion de *groupe total de a*, en réservant le nom de *groupe de a* au groupe des α pour lesquelles $f = 1$. Le groupe de a sera désigné par $A(n, \pi, a) = A(n, \pi)$,

---

[1] Cette seconde condition ne résulte pas de la première si $p = 2$.

le groupe total de a par $A'(n, \pi, a) = A'(n, \pi)$ [1], et le diviseur de A formé des substitutions de déterminant 1 par

$$A^0(n, \pi, a) = A^0(n, \pi) \ (\leqq A),$$

sauf, à partir du n° **34**, pour $p = 2$. A *et* A^0 *sont évidemment normaux dans* A′.

Les groupes déduits de A^0, A et A′ en y regardant les variables comme homogènes seront désignés respectivement par $\mathcal{A}^0(n, \pi, a) = \mathcal{A}^0(n, \pi)$, $\mathcal{A}(n, \pi, a) = \mathcal{A}(n, \pi)$ et $\mathcal{A}'(n, \pi, a) = \mathcal{A}'(n, \pi)$. $\mathcal{A}^0$ *et* $\mathcal{A}$ *sont encore normaux dans* $\mathcal{A}'$. $\mathcal{A}$ sera dit *groupe homogène de a*, et $\mathcal{A}'$ *groupe homogène total de a*. Les conditions que vérifient les coefficients de la matrice générale de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$ se déduisent des conditions analogues pour A et A′ en multipliant les seconds membres par φ^2, φ étant indéterminé dans $\mathfrak{S}$ (mais $\neq 0$) si $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, et par φ si $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$: mais on ne considérera pas comme distinctes les matrices dont les coefficients sont proportionnels. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre, je me servirai des mêmes lettres pour désigner les substitutions de A′ et leurs actions sur les mêmes variables regardées comme homogènes.

Je désignerai par $[\mu]_a = [\mu]$, ou simplement par μ quand aucune confusion ne sera à craindre, la similitude de multiplicateur μ opérant sur les variables $x_1, \ldots, x_n$ de a, par ι et ι' des éléments primitifs de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ respectivement, et je poserai $[-1]_a = d(n) = d$, $\{d(n)\} = D(n) = D$, $\{[\iota]_a\} = I$, $\{[\iota']_a\} = I'$, $\{[\iota'^{\pi-1}]_a\} = J$, d'où $IJ = \{[\iota'^2]_a\}$; I^0 sera le diviseur de I dont l'ordre est le p. g. c. d. π_0 de n, $\pi - 1$; J^0 celui de J dont l'ordre est le p. g. c. d. π_1 de n, $\pi + 1$ [2].

Il sera commode de conserver les notations générales précédentes

---

[1] Si l'on a à considérer d'autres variables que celles de a, il peut y avoir d'autres substitutions que celles de A′ conservant a à un facteur près, par exemple celles qui agissent sur les seules variables étrangères à a. Mais il restera entendu que, par définition, A et A′ laissent inaltérées les variables qui ne figurent pas dans a.

[2] Soient $2^{n'}$ et $2^{\pi'}$ les plus hautes puissances de 2 divisant n et $\pi^2 - 1$ respectivement. Le p. g. c. d. de n, $\pi^2 - 1$ est égal à $2\pi_1$ si $0 < n' < \pi'$, à π_1 dans tous les autres cas.

concurremment avec les notations particulières qui vont être introduites pour des variables spéciales de a.

II. — Groupe hermitien.

2. Soit d'abord $\bar{a} = \pm \dot{a}$ et $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = f a$; alors $|\alpha\dot{\alpha}| = |\alpha|^{\pi+1} = f^n$, et A et A′ contiennent la conjuguée de chacune de leurs substitutions. Supposons a ou $(\upsilon - \dot{\upsilon})a$ réduite à l'une des deux formes canoniques (¹)

$$h = \Sigma_1^{\nu}(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) + \omega\eta x_0\dot{x}_0 \qquad (\omega = \upsilon - \dot{\upsilon};\ \eta = 0 \text{ ou } 1). \qquad \varepsilon = \Sigma_1^n z_i\dot{z}_i.$$

En posant $x_j = \xi_j + \upsilon\xi'_j$, $y_j = \eta_j - \upsilon\eta'_j$ $(j = 0, \ldots, \nu)$, $\xi_j, \xi'_j, \eta_j, \eta'_j$ étant réels, et $\upsilon + \dot{\upsilon} = -b$, $\upsilon\dot{\upsilon} = c$, on a

$$h = \Sigma_1^{\nu}(\xi_i\eta'_i + \xi'_i\eta_i) + \omega\eta(\xi_0^2 - b\xi_0\xi'_0 + c\xi_0'^2).$$

Donc le type de a considérée comme forme quadratique des parties réelles et imaginaires de ses variables est complètement déterminé par n (*E.*, 44, 45) (²).

(¹) On opère cette réduction comme celle des matrices symétriques ou alternées (*E.*, 192, 195, 201, 202; *S.*, p. 7 et 225), au moyen d'additions, de multiplications, d'échanges de colonnes dans a (ou ωa), chaque opération étant suivie de l'opération conjuguée (ou conjuguée avec changement de signe) sur les lignes.

Pour qu'un changement de variables $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \alpha' x' + \beta' y'$ ramène $\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$ à $ax'\dot{x}' + by'\dot{y}'$ (a, b, réels), il faut et suffit que l'on ait

$$\alpha' = \alpha q, \qquad \beta' = \beta\dot{q}, \qquad \omega\alpha\dot{\alpha} = -a(q - \dot{q})^{-1}, \qquad \omega\beta\dot{\beta} = b(q - \dot{q})^{-1},$$

q étant dans $\mathfrak{S}'$ hors de $\mathfrak{S}$ [le déterminant du changement de variables est $\alpha\beta(\dot{q} - q)$]. Le choix de q peut se faire de $\pi^2 - \pi$ manières, et chacun des coefficients α, β a alors $\pi + 1$ déterminations ($p \geqq 2$) (*E.*, 44, 45).

(²) On peut aussi le voir en partant de ε. Soit $z_i = \zeta_i + \upsilon\zeta'_i$, ζ_i et ζ'_i étant réels. Si $p > 2$, le discriminant de $\varepsilon = \Sigma(\zeta_i^2 - b\zeta_i\zeta'_i + c\zeta_i'^2)$ est $(4c - b^2)^n$ dont le caractère quadratique est déterminé par n ($b^2 - 4c$ est non carré). Si $p = 2$, en remplaçant ζ_i par $\zeta_i + \zeta_k$ et ζ'_k par $\zeta'_k + \zeta'_i$, on fait disparaître les termes ζ_k^2 et $c\zeta_i'^2$; en prenant alors $\zeta_i - b\zeta'_i$ pour ζ'_i et $-b\zeta_k + c\zeta'_k$ pour ζ'_k, on fait disparaître ζ_i^2 et $c\zeta_k'^2$. De là, pour $p \geqq 2$, le même résultat qu'au texte (*E.*, 44, 45).

Pour $a = h$ ou $a = \varepsilon$, A sera dit *groupe hermitien n—aire de $\mathfrak{S}$*, et $\mathcal{A}$ *groupe hermitien homogène ou fractionnaire n—aire de $\mathfrak{S}$*. Je préciserai les formes correspondantes de A, $\mathcal{A}$, A^0, $\mathcal{A}^0$, A', $\mathcal{A}'$ en remplaçant partout les lettres A, $\mathcal{A}$ par H, $\mathcal{H}$ si $a = h$, par E, $\mathcal{E}$ si $a = \varepsilon$.

Il est clair que, si β est primitif dans $\mathfrak{S}'$ donc $\beta^{\pi+1}$ dans $\mathfrak{S}$, $A' = \Sigma_0^{\pi-2} A\beta^k = AI'$; le complexe $A\beta^k$ est formé des substitutions qui multiplient a par $\beta^{k(\pi+1)}$. De même, si γ est la substitution de H′ qui multiplie chaque x_i où $i \neq 0$ par $\beta^{\pi+1}$ et $x_0 = x$ par β sans altérer les y_i, $H' = \Sigma_0^{\pi-2} H\gamma^k$.

Posons

$$m_{i\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \dot{\rho}^{-1} y_i \end{vmatrix} (i \neq 0), \qquad m_{0\chi} = | x, \chi^x |, \qquad m_\chi = | z_n, \chi^{z_n} |,$$

les variables non écrites étant inaltérées. *Si χ ou $\rho\dot{\rho}^{-1}$ est d'ordre $\pi + 1$* (alors ρ est de la forme ι'^σ, σ étant premier à $\pi + 1$) (¹), on aura encore, $m_{i\rho}^{\pi+1}$ étant évidemment dans H^0,

$$H = \Sigma_0^\pi H^0 m_{i\rho}^k = \Sigma_0^\pi H^0 m_{0\chi}^k, \qquad E = \Sigma_0^\pi E^0 m_\chi^k,$$

et, en désignant par s une des substitutions $m_{i\rho}$, $m_{0\chi}$, m_χ suivant le cas, chaque complexe $A^0 s^k = s^k A^0$ est formé des substitutions de $A = \{s\} A^0$ dont le déterminant est $(\rho\dot{\rho}^{-1})^k$ ou χ^k.

Il est clair que, pour $n = 1$, $H^0 = E^0 = 1$.

Par définition $\mathcal{A}' = A'|I'$, et $\mathcal{A} = AI'|I' = A'I'$. Donc $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \equiv A|J$. De même $\mathcal{A}^0 = A^0 I'|I' \equiv A^0|J^0 \equiv A^0 J|J$. Donc $\mathcal{A}|\mathcal{A}^0 \equiv A'|A^0 I' \equiv A|A^0 J$, et $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0) = \pi_1$.

Soit ζ une substitution de A hors de A^0 et ζ_0 une substitution de A^0. Si ζ^y est dans $A^0 I'$, $(\zeta\zeta_0)^y$ y sera aussi, et réciproquement. Prenons donc $\zeta = s$, et soit $s^y = \alpha\iota'^z$, α étant dans A^0. Il faut évidemment pour cela que l'on ait, en supposant $a = \varepsilon$, $s = m_\chi$,

$$\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{n-1,n-1}, \qquad \alpha_{11}\iota'^z = 1, \qquad \alpha_{nn}\iota'^z = \chi^y, \qquad \text{donc} \qquad \alpha_{nn} = \alpha_{11}\chi^y.$$

D'ailleurs, α conservant ε et étant dans A^0, on a aussi

$$\alpha_{ii}\dot{\alpha}_{ii} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad \alpha_{11}^{n-1}\alpha_{nn} = 1,$$

(¹) $\beta\gamma^{-1} = \Pi_1^\nu m_{i,\beta^{-\pi}}$.

et ces conditions suffisent. Ainsi α_{11} est de la forme $\iota'^{\rho(\pi-1)}$, α_{nn} de la forme $\iota'^{\sigma(\pi-1)}$, et $(n-1)\rho+\sigma\equiv 0 \bmod(\pi+1)$. D'ailleurs χ a la forme $\iota'^{\tau(\pi-1)}$ (τ premier à $\pi+1$), et $\sigma-\rho-\tau y\equiv 0 \bmod(\pi+1)$. Donc, en éliminant σ,

$$\rho n+\tau y\equiv 0 \qquad \bmod \pi+1.$$

Mais τ est premier à $\pi+1$. Donc y doit être divisible par π_1, et cela suffit. Donc $A'=\Sigma_0^{\pi_1-1}A^0 I's^k$, et, en regardant les variables comme homogènes, $\mathcal{A}'=\mathcal{A}=\Sigma_0^{\pi_1-1}\mathcal{A}^0 s^k$.

3. Soit

$$\alpha=\left|\begin{matrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}x_k+\alpha'_{ik}y_k)=X_i \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik}x_k+\beta'_{ik}y_k)=Y_i \end{matrix}\right| \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ \nu,\ 0)$$

une substitution de H′, en convenant de supprimer ou de remplacer par 0 toutes les quantités relatives à y_0 et de même, si $\eta=0$, celles relatives à x_0 [ainsi $(1-\eta)\alpha_{i0}=(1-\eta)\beta_{i0}=0$, $\alpha'_{i0}=\beta'_{i0}=0\,(i\geqq 0)$]. La considération des coefficients de $\dot{x}_j x_k$, $\dot{y}_j y_k$, $\dot{x}_j y_k$ dans la transformée de a par α donne, pour le développement de la condition $\dot{\alpha}a\bar{\alpha}=fa$ (*cf.* **1**),

$$(4)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta_{ik}-\beta_{ij}\dot{\alpha}_{ik})+\omega\eta\alpha_{0j}\dot{\alpha}_{0k}=\begin{cases} 0 & \text{sauf si } j=k=0 \\ f\omega\eta & \text{si } j=k=0 \end{cases} \qquad (j,\ k\geqq 0),$$

$$(5)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\dot{\beta}'_{ik}-\beta_{ij}\dot{\alpha}'_{ik})+\omega\eta\alpha'_{0j}\dot{\alpha}'_{0k}=0 \qquad (j,\ k\neq 0),$$

$$(6)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta'_{ik}-\beta_{ij}\dot{\alpha}'_{ik})+\omega\eta\alpha_{0j}\dot{\alpha}'_{0k}=\begin{cases} 0 \text{ si } j\neq k \\ f \text{ si } j=k \end{cases} \qquad (j\geqq 0,\ k\neq 0)$$

[le coefficient de $\dot{x}_j y_k$ conduit à la conjuguée de (6)].

L'équation $\dot{\alpha}a\bar{\alpha}=fa$ donne $f\dot{\alpha}^{-1}=a\bar{\alpha}a^{-1}$. Or

$$a^{-1}=\Sigma_1^{\nu}(y_i\dot{x}_i-x_i\dot{y}_i)+\frac{\eta}{\omega}x_0\dot{x}_0 \quad (^1).$$

(1) On voit que si $\eta=0$ ou si $\omega^2=-1$, $a^{-1}=-a$. Alors l'équation précédente donne $\bar{\alpha}a\dot{\alpha}=fa$, et H et H′ contiennent la transposée de chacune de leurs substitutions. Si l'on prend $a=\varepsilon$, la condition $\dot{\alpha}a\bar{\alpha}=fa$ s'écrit $\dot{\alpha}\bar{\alpha}=f\varepsilon$; E et E′ contiennent donc toujours la transposée de chacune de leurs substitutions.

Donc, en posant

$$\alpha^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x_i & \Sigma_k(\mathrm{A}_{ik} x_k + \mathrm{A}'_{ik} y_k) = \mathrm{X}'_i \\ y_i & \Sigma_k(\mathrm{B}_{ik} x_k + \mathrm{B}'_{ik} y_k) = \mathrm{Y}'_i \end{array} \right| \qquad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ \nu,\ 0),$$

$$(1-\eta)\mathrm{A}_{i0} = (1-\eta)\mathrm{B}_{i0} = \mathrm{A}'_{i0} = \mathrm{B}'_{i0} = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1,\ \ldots,\ \nu,\ 0,$$

on a

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{lllll} f\mathrm{A}_{ik} = \dot\beta'_{ki}, & f\mathrm{A}'_{ik} = -\dot\alpha'_{ki}, & f\mathrm{B}_{ik} = -\dot\beta_{ki}, & f\mathrm{B}'_{ik} = \dot\alpha_{ki} & (i,\ k \neq 0); \\ f\mathrm{A}_{i0} = \omega\eta\dot\alpha'_{0i}, & f\mathrm{B}_{i0} = -\omega\eta\dot\alpha_{0i}, & f\mathrm{A}_{0k} = \dfrac{\eta}{\omega}\dot\beta_{k0}, & f\mathrm{A}'_{0k} = -\dfrac{\eta}{\omega}\dot\alpha_{k0} & (i,\ k \neq 0); \\ & & f\mathrm{A}_{00} = \eta\alpha_{00}. & & \end{array} \right.$$

L'équation (4) écrite pour α^{-1} donne donc (α^{-1} multiplie a par f^{-1})

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega\Sigma_{i=1}^{\nu}(\beta_{ki}\dot\beta'_{ji} - \dot\beta_{ji}\beta'_{ki}) + \eta\beta_{k0}\dot\beta_{j0} = 0 & (j,\ k \neq 0), \\ \omega\eta\Sigma_{i=1}^{\nu}(\dot\alpha'_{0i}\beta_{ki} - \dot\alpha_{0i}\beta'_{ki}) + \eta\dot\alpha_{00}\beta_{k0} = 0 & (k \neq 0)\ \text{(1)}, \\ \omega\eta\Sigma_{i=1}^{\nu}(\dot\alpha_{0i}\alpha'_{0i} - \dot\alpha'_{0i}\alpha_{0i}) + \eta\alpha_{00}\dot\alpha_{00} = fc. & \end{array} \right.$$

L'équation (5) donne de même [2]

$$(9)\quad \omega\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\dot\alpha'_{ji} - \dot\alpha_{ji}\alpha'_{ki}) + \eta\alpha_{k0}\dot\alpha_{j0} = 0 \qquad (j,\ k \neq 0),$$

et l'équation (6)

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\dot\beta'_{ji} - \dot\beta_{ji}\alpha'_{ki}) + \eta\alpha_{k0}\dot\beta_{j0} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ f \text{ si } j = k \end{cases} & (j,\ k \neq 0), \\ \omega\eta\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\dot\alpha'_{0i} - \dot\alpha_{0i}\alpha'_{ki}) + \eta\alpha_{k0}\dot\alpha_{00} = 0 & (k \neq 0). \end{array} \right.$$

Les conditions (8), (9), (10) sont *a priori* équivalentes à (4), (5), (6) [3].

Si l'on prend $a = \varepsilon = (\varepsilon_{ik})$, la condition $\dot\alpha\bar\alpha = f\varepsilon$ donne $\Sigma_i \alpha_{ik}\dot\alpha_{il} = f\varepsilon_{kl}$ qui remplace (4), (5), (6). En formant ce système d'équations

---

(1) En faisant dans (4) $k = 0$, on obtient la conjuguée de cette seconde formule (8).

(2) On suppose *dans cette réduction* j et k non nuls. Aussi, bien que (5) subsiste pour j ou k nul, il n'en est pas de même de (9).

(3) On remarquera que (8), (9), (10) sont formées avec les lignes de α comme (4), (5), (6) avec ses colonnes.

pour $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$, on obtient le système équivalent $\Sigma_i \dot{\alpha}_{ki}\alpha_{li} = f\varepsilon_{kl}$ qui remplace (8), (9), (10).

4. Désignons maintenant par $(4)_l$, $(5)_l$, $(6)_l$, $(8)_l$, $(9)_l$, $(10)_l$ ce que deviennent (4), (5), (6), (8), (9), (10) pour $j = k = l$.

H *contient une substitution* α *dont les colonnes répondant à* x_l, y_l (*en négligeant* y_l *si* $l = 0$) *forment une solution de* $(4)_l$, $(5)_l$, $(6)_l$ *pour* $f = 1$. Car soit τ une substitution n — aire ayant pour colonnes répondant à x_l, y_l les colonnes données, et $\dot{\tau} a \bar{\tau} = a'$. En désignant par $F(x_l, y_l)$ une forme égale à $x_l\dot{y}_l - y_l\dot{x}_l$ si $l \neq 0$ (on peut alors faire $l = 1$) et à $\omega\eta x\dot{x}$ si $l = 0$, on peut écrire $a' = F(x_l + u, y_l + v) + a_l$, u, v, a_l ne contenant plus x_l ni y_l (1). Si donc τ_1 est la substitution qui remplace x_l par $x_l - u$ et y_l par $y_l - v$, donc a' par $F(x_l, y_l) + a_l$, et τ_2 une substitution des x_i, y_i où $i \neq l$ réduisant a_l à $a - F(x_l, y_l)$, $\tau_2\tau_1\tau$ répond à la question. On voit directement [en cherchant une substitution σ de H telle que $\sigma\alpha$ ait les mêmes colonnes répondant à x_l, y_l (ou la même colonne répondant à x_0 si $l = 0$)] que *les substitutions de cette sorte forment le complexe* $H_l\alpha_0$, α_0 *étant l'une d'elles, et* H_l *le diviseur de* H *formé des substitutions qui remplacent les* x_i, y_i *où* $i \neq l$ *par des fonctions de ces seules variables et* x_l, y_l *par* $x_l + X$, $y_l + Y$, X *et* Y *ne dépendant pas de* x_l, y_l (*en négligeant toujours* y_l *si* $l = 0$). Or les conditions (4), (5), (6) où l'on fait un des seconds indices égal à l montrent que $X = Y = 0$, et que H_l *est le groupe des substitutions de* $a - F(x_l, y_l)$. H_l *est donc semblable à* $H(n-2, \pi)$ *si* $l \neq 0$, *et à* $H(n-1, \pi)$ *si* $l = 0$.

De même les substitutions de H *dont les lignes répondant à* x_l

---

(1) D'après la construction de τ, a' a, pour $l \neq 0$, la forme

$$F(x_l, y_l) + x_l\dot{X} - X\dot{x}_l + y_l\dot{Y} - Y\dot{y}_l + Z$$

et, pour $l = 0$, la forme

$$\omega x\dot{x} + \omega(x\dot{X} + X\dot{x}) + Z,$$

X, Y et $Z = (-\dot{Z})$ ne dépendant pas de x_l, y_l. D'où, par des changements de notation, la forme du texte.

et y_l (*en négligeant* y_l *si* $l=0$) *constituent une solution donnée de* $(8)_l$, $(9)_l$, $(10)_l$ *pour* $f=1$ *forment le complexe* $\alpha_0 H_l$, α_0 *étant l'une d'elles qui existe toujours.*

Or pour $n>1$ et $l=1$, l'équation $(4)_1$ (que l'on peut considérer comme liant les parties réelles et imaginaires des coefficients) a, d'après le type de h, $[\pi^n-(-1)^n][\pi^{n-1}-(-1)^{n-1}]$ solutions autres que $0, 0, \ldots, 0$ (*E.*, 44, 45). Il s'agit de calculer le nombre m_Σ des solutions de $(5)_1$, $(6)_1$ répondant à une solution autre que $0, 0, \ldots, 0$ de $(4)_1$ [à la solution $0, 0, \ldots, 0$ de $(4)_1$ ne répond aucune solution de $(5)_1$, $(6)_1$]. m_Σ ne change évidemment pas quand on transforme linéairement les coordonnées des *points* Σ, Σ'. Or si l'on fait subir à ces coordonnées une même substitution s de H, $(4)_1$, (5_1), $(6)_1$ restent inaltérées (elles deviennent les mêmes conditions relatives à la substitution αs de H). D'ailleurs H contient une substitution transformant $\Sigma_0=(1, 0, 0, \ldots, 0)$ en Σ (par exemple α). Donc, pour calculer m_Σ, on peut remplacer Σ par Σ_0 [1]. Alors $\beta'_{11}=1$, et $(5)_1$ permet de prendre arbitrairement les α'_{i1}, β'_{i1} où $i\neq 1$; la partie imaginaire de α'_{11} est alors déterminée. Donc $m_\Sigma=\pi^{2n-3}$. L'ordre de H pour $n=1$ est d'ailleurs $\pi+1$, et pour $n=2$, d'après ce qu'on vient vient de voir, $\pi(\pi+1)(\pi^2-1)$. *Donc l'ordre de* $H(n,\pi)$ *est* $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\Pi_1^n[\pi^i-(-1)^i]$.

On voit de même que *les substitutions* α *de* E *dont la* $n^{\text{ième}}$ *colonne* (*ligne*) *est une solution donnée autre que* $0, 0, \ldots, 0$ *de* $\Sigma_i \alpha_{il}\dot{\alpha}_{il}=1$ $(\Sigma_i \alpha_{li}\alpha_{li}=1)$ *forment le complexe* $E_l\alpha_0(\alpha_0 E_l)$, $E_l\equiv E(n-1,\pi)$ *étant le groupe de* $\varepsilon - x_l x_l$, *et* α_0 *étant l'une d'elles qui existe toujours.* On en déduit plus simplement l'ordre de E; mais la démonstration précédente est utile pour la suite.

La même méthode fournirait des résultats généraux analogues pour

---

[1] On peut donner au raisonnement précédent une forme un peu différente. Les diverses déterminations $s_1\, s_2, \ldots$ de α_0 formant un système de restes de H (mod H_1, 1), il en sera de même de $s_1\sigma$, $s_2\sigma$, ..., σ étant quelconque dans H ($=H\sigma$). De plus, si s_i et s_k ont une même première colonne, il en sera de même de $s_i\sigma$, $s_k\sigma$, et réciproquement. En faisant $\sigma=s_i^{-1}$, on voit que le nombre des s_i ayant une même première colonne est égal à celui des s_i dont la première colonne est $1, 0, 0, \ldots, 0$, c'est-à-dire que m_Σ est indépendant de Σ.

le complexe ($\geqq 1$) des substitutions de H dont les colonnes (lignes) répondant à x_{i_1}, y_{i_1}; x_{i_2}, y_{i_2}, ... sont données, vérifiant (4), (5), (6), et pour le complexe ($\geqq 1$) des substitutions de E dont plusieurs colonnes (lignes) sont données, vérifiant les conditions correspondantes.

5. Soit $n = 2$. Posons $|\alpha| = \delta$. L'équation $\alpha_{11}\beta'_{11} - \beta_{11}\alpha'_{11} = \delta$ jointe à (4) donne, d'après (6), $f\alpha_{11} = \dot{\alpha}_{11}\delta$, $f\beta_{11} = \dot{\beta}_{11}\delta$; jointe à (5), elle donne de même $f\alpha'_{11} = \dot{\alpha}'_{11}\delta$, $f\beta'_{11} = \dot{\beta}'_{11}\delta$. Or $\delta^{\pi+1} = 1$ (**2**). Donc on peut trouver ρ tel que $\rho^{\pi-1} = \delta$. Donc, pour $f = 1$, les coefficients de α multipliés par ρ deviennent réels. Donc le groupe des *matrices* de $\mathcal{H}(2, \pi)$ divise celui des *matrices* de $\mathcal{L}(2, \pi)$ (*S.*, 77) [les deux groupes n'ont pas le même champ (*cf.* **13**)]. Donc, d'après leurs ordres, $\mathcal{H}(2, \pi) \equiv \mathcal{L}(2, \pi)$, et $\mathcal{H}^0(2, \pi) \equiv \mathfrak{O}(2, \pi)$ (*cf. S.*, 79). Pour $\delta = 1$, les coefficients eux-mêmes sont réels. Donc $H^0(2, \pi) \equiv U(2, \pi)$, les matrices des deux groupes étant les mêmes [mais non leurs champs (*cf.* **12**)]. Il est clair que $H(2, \pi) \equiv \{U(2\pi), m_{1\nu}\}$.

6. $H^0(n, \pi)$ contient évidemment les substitutions

$$\tau_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix}, \qquad u_{i\lambda} = | \, x_i \quad x_i + \lambda y_i \, |, \qquad V_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho x_k \\ y_k & y_k - \dot{\rho} y_i \end{vmatrix},$$

$$V_{0k\rho} = \begin{vmatrix} x & x + \rho x_k \\ y_k & y_k + \omega\dot{\rho} x + \rho\dot{\rho}\upsilon x_k \end{vmatrix} \text{ si } \eta = 1 \quad [1]; \qquad V_{0k\rho} = 1 \text{ si } \eta = 0$$

($i, k \neq 0$; λ réel; les variables non écrites sont inaltérées)

et leurs combinaisons

$$v_{i\lambda} = \tau_i^{-1} u_{i,-\lambda} \tau_i = \tau_i u_{i,-\lambda} \tau_i^{-1} = | \, y_i \quad y_i + \lambda x_i \, |,$$

$$m_{i\lambda} = v_{i\lambda} u_{i,-\lambda^{-1}} v_{i\lambda} \tau_i = \tau_i^{-1} u_{i\lambda} v_{i,-\lambda^{-1}} u_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix} \quad [2],$$

$$U_{ik\rho} = U_{ki\dot{\rho}} = \tau_k^{-1} V_{ik,-\rho} \tau_k = \tau_k V_{ik\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k + \dot{\rho} y_i \end{vmatrix},$$

(1) Pour qu'une substitution remplaçant x par $x + \rho x_k$ et conservant x_k laisse $x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k + \omega x\dot{x}$ inaltérée, il faut et suffit, on le vérifie directement, qu'elle remplace y_k par $y_k + \omega\dot{\rho} x + (\lambda + \rho\dot{\rho}\upsilon) x_k$, λ étant indéterminé *dans* $\mathfrak{S}$. Je prends ici $\lambda = 0$.

(2) Comme $m_{i,-1} = \tau_i^2$, cette équation donne $\tau_i = v_{i,-1} u_{i1} v_{i,-1} = u_{i1} v_{i,-1} u_{i1}$. Donc les m et les τ s'expriment par les u et les v (*cf. S.*, **83**, **3**; *E.*, **192**, **202**).

$$U_{0k\rho} = U_{k0\dot\rho} = \tau_k^{-1} V_{0k,-\rho} \tau_k = \tau_k V_{0k\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x & x + \rho y_k \\ x_k & x_k - \omega\dot\rho x - \rho\dot\rho\upsilon y_k \end{vmatrix},$$

$$W_{ik\rho} = W_{ki\dot\rho} = \tau_i^{-1} V_{ik,-\rho} \tau_i = \tau_i V_{ik\rho} \tau_i^{-1} = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \rho x_k \\ y_k & y_k + \dot\rho x_i \end{vmatrix},$$

$$R_{ik\rho} = V_{ik\rho} V_{ki,-\rho^{-1}} V_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_k \\ y_i & \dot\rho^{-1} y_k \\ x_k & -\rho^{-1} x_i \\ y_k & -\dot\rho y_i \end{vmatrix},$$

$$S_{ik\rho} = \tau_k^{-1} R_{ik\rho} \tau_k = \tau_k R_{ik\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & -\rho y_k \\ y_i & \dot\rho^{-1} x_k \\ x_k & -\dot\rho y_i \\ y_k & \rho^{-1} x_i \end{vmatrix},$$

$$T_{ik} = m_{i,-\lambda} m_{k\lambda}^{-1} R_{ik\lambda} = R_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda} = \tau_i \tau_k m_{i\lambda} m_{k\lambda} S_{ik\lambda}$$
$$= S_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{i\lambda}^{-1} \tau_i \tau_k = \begin{vmatrix} x_k & x_k \\ y_i & y_k \\ x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{vmatrix}.$$

Il sera souvent commode de négliger le dernier indice dans les $u_{i\lambda}$, $v_{i\lambda}$, $m_{i\lambda}$, $V_{ik\rho}$, $U_{ik\rho}$, $W_{ik\rho}$ et dans la substitution $m_{i\rho}$ du nº **2**.

7. Il est utile de réunir ici certaines relations entre ces substitutions et les substitutions $m_{i\rho}$ (ρ dans $\mathfrak{S}'$; *cf.* **2**), $m_{0\theta}$ ($\theta^{\pi+1} = 1$) de H (¹):

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l}
\tau_i^4 = u_{i\lambda}^p = V_{ik\rho}^p = 1, \qquad \tau_i^2 = m_{i,-1} \qquad (\text{si } p = 2,\ \tau_i^2 = 1),\\
\tau_i^{-2} V_{ik\rho} \tau_i^2 = V_{ik,-\rho}, \qquad \tau_k^{-2} V_{jk\rho} \tau_k^2 = V_{jk,-\rho} \qquad (j \gtreqless 0);\\
V_{0k\rho}^m = V_{0k,m\rho}\, v_{k,\frac{m(m-1)}{2}\eta b\rho\dot\rho}, \qquad b = -\upsilon - \dot\upsilon.\\
\text{d'où}\\
V_{0k\rho}^{-1} = V_{0k,-\rho}\, v_{k,\eta b\rho\dot\rho}. \qquad V_{0k\rho}^p = \begin{cases} 1 & \text{pour } p > 2,\\ v_{k,\eta b\rho\dot\rho} & \text{pour } p = 2,\end{cases}\\
U_{0k\rho}^{-1} = U_{0k,-\rho}\, u_{k,-\eta b\rho\dot\rho}, \qquad U_{0k\rho}^p = \begin{cases} 1 & \text{pour } p > 2,\\ u_{k,-\eta b\rho\dot\rho} & \text{pour } p = 2,\end{cases}
\end{array}\right.$$

(¹) Les formules (13), (16), 18), (20), se tirent des formules (12), (15), (17), (19) respectivement en transformant ces dernières par des τ.

$$(12)\ \left\{\begin{array}{ll} V_{ik\rho}u_{i\lambda} = u_{i\lambda}V_{ik\rho}, & V_{jk\rho}v_{k\lambda} = v_{k\lambda}V_{jk\rho} \quad (j \gtrless 0), \\ u_{k\lambda}^{-1}V_{ik\rho}u_{k\lambda} = V_{ik\rho}U_{ik,-\lambda\rho}u_{i,-\lambda\rho\bar\rho}, & v_{i\lambda}^{-1}V_{ik\rho}v_{i\lambda} = V_{ik\rho}W_{ik,\lambda\rho}v_{k,\lambda\rho\bar\rho}, \end{array}\right.$$

$$(13)\ \left\{\begin{array}{ll} U_{jk\rho}u_{k\lambda} = u_{k\lambda}U_{jk\rho} \quad (j \gtrless 0), & v_{k\lambda}^{-1}U_{ik\rho}v_{k\lambda} = U_{ik\rho}V_{ik,-\lambda\rho}u_{i,-\lambda\rho\bar\rho}, \\ W_{ik\rho}v_{i\lambda} = v_{i\lambda}W_{ik\rho}, & u_{k\lambda}^{-1}W_{ik\rho}u_{k\lambda} = W_{ik\rho}V_{ki,\lambda\bar\rho}v_{i,\lambda\rho\bar\rho}, \end{array}\right.$$

$$(14)\ \left\{\begin{array}{l} V_{0k\rho}V_{0k\sigma} = V_{0k,\rho+\sigma}v_{k,-\eta(\rho\bar\sigma\upsilon+\bar\rho\sigma\upsilon)} = V_{0k\sigma}V_{0k\rho}v_{k,\omega\eta(\bar\rho\sigma-\bar\sigma\rho)}, \\ U_{0k\rho}U_{0k\sigma} = U_{0k,\rho+\sigma}u_{k,\eta(\rho\bar\sigma\upsilon+\bar\rho\sigma\upsilon)} = U_{0k\sigma}U_{0k\rho}u_{k,\omega\eta(\rho\bar\sigma-\sigma\bar\rho)} \ (^1), \end{array}\right.$$

$$(15)\ \left\{\begin{array}{ll} V_{ik\rho}V_{il\sigma} = V_{il\sigma}V_{ik\rho} & (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ V_{ik\rho}V_{lk\sigma} = V_{lk\sigma}V_{ik\rho} & (i \neq l \text{ ou } i = l) \\ V_{kl\sigma}^{-1}V_{ik\rho}V_{kl\sigma} = V_{ik\rho}V_{il,-\rho\sigma} & \\ V_{ik\sigma}^{-1}U_{ik\rho}V_{ik\sigma} = U_{ik\rho}u_{i,\rho\bar\sigma+\bar\rho\sigma} & \end{array}\right\} \quad (i,\ k,\ l \neq 0),$$

$$(16)\ \left\{\begin{array}{ll} U_{ik\rho}V_{il\sigma} = V_{il\sigma}U_{ik\rho} & (k \neq l) \\ U_{ik\rho}U_{il\sigma} = U_{il\sigma}U_{ik\rho} & (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ W_{ik\rho}W_{il\sigma} = W_{il\sigma}W_{ik\rho} & (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ W_{ik\rho}V_{lk\sigma} = V_{lk\sigma}W_{ik\rho} & (i \neq l), \\ U_{kl\sigma}^{-1}V_{ik\rho}U_{kl\sigma} = V_{ik\rho}U_{il,-\rho\sigma} & \\ W_{kl\sigma}^{-1}U_{ik\rho}W_{kl\sigma} = U_{ik\rho}V_{il,-\rho\sigma} & \\ V_{kl\sigma}^{-1}W_{ik\rho}V_{kl\sigma} = W_{ik\rho}W_{il,-\rho\sigma} & \\ W_{ik\sigma}^{-1}V_{ki\rho}W_{ik\sigma} = V_{ki\rho}v_{i,-\rho\sigma-\bar\rho\bar\sigma} & \end{array}\right\} \quad (i,\ k,\ l \neq 0),$$

$$(17)\ \left\{\begin{array}{l} V_{0k\rho}V_{ik\sigma} = V_{ik\sigma}V_{0k\rho} \\ V_{0i\sigma}^{-1}U_{0k\rho}V_{0i\sigma} = U_{0k\rho}V_{ki,\eta\omega\bar\rho\sigma} \\ U_{0i\sigma}^{-1}U_{0k\rho}U_{0i\sigma} = U_{0k\rho}U_{ki,\eta\omega\bar\rho\sigma} \\ U_{ik\sigma}^{-1}V_{0k\rho}U_{ik\sigma} = V_{ik,\eta\rho\bar\rho\sigma\upsilon}U_{0i,-\rho\bar\sigma}V_{0k\rho} \end{array}\right\} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$(18)\ \left\{\begin{array}{l} U_{0k\rho}U_{ik\sigma} = U_{ik\sigma}U_{0k\rho} \\ U_{0k\rho}V_{ki\sigma} = V_{ki\sigma}U_{0k\rho} \\ V_{0k\rho}W_{ik\sigma} = W_{ik\sigma}V_{0k\rho} \\ V_{ik\sigma}^{-1}U_{0k\rho}V_{ik\sigma} = U_{ik,-\eta\rho\bar\rho\sigma\upsilon}U_{0i,\rho\bar\sigma}U_{0k\rho} \\ W_{ik\sigma}^{-1}U_{0k\rho}W_{ik\sigma} = V_{ki,-\eta\rho\bar\rho\bar\sigma\upsilon}V_{0i,-\rho\bar\sigma}U_{0k\rho} \\ V_{ki\sigma}^{-1}V_{0k\rho}V_{ki\sigma} = W_{ki,\eta\rho\bar\rho\bar\sigma\upsilon}V_{0i,-\rho\sigma}V_{0k\rho} \end{array}\right\} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$(19)\ \left\{\begin{array}{ll} \tau_i^{-1}m_{i\rho}\tau_i = m_{i,\bar\rho^{-1}}, & m_{i\rho}^{-1}u_{i\lambda}m_{i\rho} = u_{i,\lambda\rho\bar\rho}, \\ m_{i\sigma}^{-1}V_{ik\rho}m_{i\sigma} = V_{ik,\rho\sigma}, & m_{k\sigma}^{-1}V_{jk\rho}m_{k\sigma} = V_{jk,\rho\sigma^{-1}} \quad (j \gtrless 0), \\ \multicolumn{2}{c}{m_{0\theta}^{-1}V_{0k\rho}m_{0\theta} = V_{0k,\theta\rho} \quad (\theta^{\pi+1} = 1),} \\ \multicolumn{2}{c}{(i,\ k \neq 0;\ \rho,\ \sigma \text{ dans } \mathfrak{S}'),} \end{array}\right.$$

---

(1) D'après (11) et (14) on peut omettre les générateurs u si n est impair.

$$
(20)\quad \left\{\begin{array}{l}
m_{i\rho}^{-1} v_{i\lambda} m_{i\rho} = v_{i,\lambda(\rho\dot{\rho})^{-1}}, \\
m_{i\sigma}^{-1} \mathrm{U}_{ij\rho} m_{i\sigma} = \mathrm{U}_{ij,-\rho\sigma} \quad (j \geqq 0), \qquad m_{k\sigma}^{-1} \mathrm{W}_{ik\rho} m_{k\sigma} = \mathrm{W}_{ik,\rho\sigma}, \\
m_{00}^{-1} \mathrm{U}_{0k\rho} m_{00} = \mathrm{U}_{0k,\theta\rho} \qquad (\theta^{\pi+1} = 1), \\
\qquad\qquad (i,\ k \neq 0;\ \rho,\ \sigma \text{ dans } \mathfrak{S}'),
\end{array}\right.
$$

$$
(21)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{R}_{ik\rho}\mathrm{S}_{ik\sigma} = \mathrm{S}_{ik\sigma}\mathrm{R}_{ik\rho} = \left|\begin{array}{ll} x_i & \dot{\rho}\sigma y_i \\ y_i & -(\rho\dot{\sigma})^{-1} x_i \\ x_k & -\dot{\sigma}\dot{\rho}^{-1} y_k \\ y_k & \rho\sigma^{-1} x_k \end{array}\right| = \tau_i \tau_k^{-1} m_{i,\dot{\rho}\sigma} m_{k,\dot{\sigma}\dot{\rho}^{-1}}, \\
\mathrm{V}_{0i,\rho_1\dot{\rho}^{-1}} \mathrm{U}_{0i,-1} u_{i,-\rho_0\rho_1^{-1}} \mathrm{V}_{0i,-\rho_1\rho^{-1}} = \tau_i^{-1} u_{i,\rho_0\rho_1(\rho\dot{\rho})^{-1}} m_{i\rho} m_{0,\dot{\rho}\rho^{-1}} m_{i,\rho_1}^{-1} v_{i,-\rho_0\rho_1(\rho\dot{\rho})^{-1}}. \\
\qquad\qquad (\rho = \rho_0 + \upsilon\rho_1).
\end{array}\right.
$$

La première formule (21) donne, pour $\sigma = \rho$, l'expression de $m_{i\lambda}$ (λ réel) par les V et les τ, et, pour $\rho = 1$, celle de $m_{i\rho} m_{k\rho}^{-1}$ par les générateurs de H_0; la seconde donne l'expression de $m_{i\rho} m_{0,\dot{\rho}\rho^{-1}}$ par les mêmes générateurs.

8. $\mathrm{H}^0(n, \pi)$ *dérive des* τ, *des* u *et des* V $[\mathrm{H}_0 1, \pi) = 1$, $\mathrm{H}_0(2, \pi)$ (**2**, **3**, **4**)], *et, si* n *est impair, on peut* [*d'après* (14)] *omettre les* u.

Il suffit de montrer que, α étant dans H^0, on peut, en la multipliant à droite par des τ, u, V, la réduire à une substitution de H_1(**3**), et l'on peut supposer $n > 2$ (**4**). Les α_{i1}, β_{i1} où $i \neq 0$ n'étant pas tous nuls [si $\eta = 1$, cela résulte de (**4**)], on peut, en multipliant au besoin à droite par une V ou une U, rendre non nul α_{21} si $n > 3$, ou α_{01} si $n = 3$. Si n est > 3, en multipliant encore à droite par une V_{12}, on rendra α_{11} égal à 1. Si $n = 3$ et $\beta_{11} = 0$ ou α_{11} réel $\neq 0$, on arrive au même résultat en multipliant à droite par une U_{01} ou une $m_{1\lambda}$. Si $n = 3$ avec $\alpha_{11} = r_0 + ur_1$, $\beta_{11} = s_0 + us_1$ (les r, s étant réels, et $r_1 \neq 0$), on peut réduire s_1 à 0 en multipliant à droite par une v, puis, si β_{11} est alors $\neq 0$, rendre α_{11} réel $\neq 0$ en multipliant à droite par τ_1 : on est ainsi ramené au cas précédent. Soit donc $\alpha_{11} = 1$. En multipliant à droite par des V ou des W, on pourra maintenant annuler les α_{i1}, β_{i1} où $i \neq 1$ (y compris α_{01}). Alors, d'après (4), β_{11} est réel, et l'on peut l'annuler par une v, ce qui entraîne, d'après (6), $\beta'_{11} = 1$. On pourra donc, par les V et les U, annuler les β'_{i1}, α'_{i1} où $i \neq 1$. Alors, d'après (5), α'_{11} est réel, et l'on pourra l'annuler par une u. Or, d'après (4), (5), (6) où l'on fait un des seconds indices égal à 1, la substitution obtenue est alors dans H_1 (*cf.* **3**).

9. Il est utile pour la suite d'indiquer ici les modifications produites par le changement de variables qui consiste à remplacer y_i par $-\frac{1}{2}\omega y_i$ pour $i = 1, \ldots, \nu$, et x par $\varkappa x$ (je supposerai $\varkappa\dot{\varkappa} = c$), en conservant $x_1, \ldots, x_\nu$. Je considérerai ce changement de variables comme une substitution, et je désignerai par les mêmes lettres surmontées d'un trait ce que deviennent les objets précédemment considérés ([1]). On a alors

$$\bar{h} = \omega\left(\Sigma_1^\nu \frac{x_i\dot{y}_i + y_i\dot{x}_i}{2} + \eta c x\dot{x}\right).$$

Les équations $(\bar{4})$, $(\bar{5})$, $(\bar{6})$ qui remplacent respectivement (4), (5), (6) s'en déduisent en y remplaçant partout : 1° le signe $-$ par $+$; 2° ω par $2c$. On a

$$\overline{m}_{i\rho} = m_{i\rho}, \qquad \overline{m}_{0\theta} = m_{0\theta}, \qquad \overline{\mathrm{V}}_{ik\rho} = \mathrm{V}_{ik\rho} \qquad (i, k \neq 0);$$

$$\bar{\tau}_i = \begin{vmatrix} x_i & -\frac{\omega}{2} y_i \\ y_i & \frac{2}{\omega} x_i \end{vmatrix} = t_i m_{i,-\frac{\omega}{2}}, \qquad t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix};$$

$$\bar{u}_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \frac{\lambda\omega}{2} y_i \end{vmatrix}, \qquad \bar{v}_{i\lambda} = \begin{vmatrix} y, & y_i - \frac{2\lambda}{\omega} x_i \end{vmatrix}.$$

Je poserai aussi

$$\mathrm{V}'_{ik\rho} = \mathrm{V}_{ik\rho} \qquad (i, k \neq 0),$$

$$\mathrm{V}_{0k,\frac{\rho}{\varkappa}} = \overline{\mathrm{V}}_{0k\rho}\, \bar{v}_{k,\frac{b}{2}} = \begin{vmatrix} \dot{x} & x + \frac{\rho}{\varkappa} x_k \\ y_k & y_k - 2\varkappa\dot{\rho}x - \rho\dot{\rho}x_k \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{U}'_{ik\rho} = t_k \mathrm{V}'_{ik\rho} t_k = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k - \dot{\rho} y_i \end{vmatrix} = m^{-1}_{k,\frac{\omega}{2}} \overline{\mathrm{U}}_{ik\rho}\, m_{k,\frac{\omega}{2}},$$

$$\mathrm{W}'_{ik\rho} = t_i \mathrm{V}'_{ik\rho} t_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \rho x_k \\ \dot{y}_k & y_k - \dot{\rho} x_i \end{vmatrix} = m^{-1}_{i,\frac{\omega}{2}} \overline{\mathrm{W}}_{ik\rho}\, m_{i,\frac{\omega}{2}},$$

---

[1] On ne confondra pas les $\overline{m}_i$, $\bar{\tau}_i$, $\bar{u}_i$, ... avec les transposées de m_i, τ_i, u_i, ...

$$R'_{ik\rho} = \overline{R}_{ik\rho} = R_{ik\rho}, \qquad S'_{ik\rho} = t_k R_{ik\rho} t_k = \left| \begin{array}{lll} x_i & \rho & y_k \\ y_i & \dot{\rho}^{-1} & x_k \\ x_k & -\dot{\rho} & y_i \\ y_k & -\rho^{-1} & x_i \end{array} \right| = m^{-1}_{k,\frac{\omega}{2}} \overline{S}_{ik\rho} m_{k,\frac{\omega}{2}}.$$

10. Désignons par $H^0_{ik}(n, \pi) = H^0_{ik} = H^0_{ki}$ ce que devient $H^0(4, \pi)$ quand on y remplace x_1, y_1, x_2, y_2 par x_i, y_i, x_k, y_k respectivement, et par $H^0_{0i}(n, \pi) = H^0_{i0} = H^0_{0i}$ ce que devient $H^0(3, \pi)$ quand on remplace x_1, y_1 par x_i, y_i. D'après le n° **6**, $H^0(n, \pi)$ est le p. p. c. m. des H^0_{ij} où $i, j = 1, \ldots, \nu$ si $n = 2\nu$ et $i, j = 0, \ldots, \nu$ si $n = 2\nu + 1$. On peut simplifier ce résultat en remarquant que $\{H^0_{il}, H^0_{kl}\}$ contient toujours H^0_{ik} (i, k, l distincts $\geqq 0$). En effet $\{H^0_{ik}, H^0_{kl}\}$ contient τ_i, τ_k, les u_i et les u_k, et, d'après (15), (18) et (17), on sait exprimer $V_{ik,-\rho\sigma}$ ($i \geqq 0$) par des éléments de H^0_{il}, H^0_{kl} et $V_{ki,\omega\dot{\rho}\sigma}$ par des éléments de H^0_{i0}, H^0_{k0}. Donc

$$\begin{aligned} H^0(2\nu, \pi) &= \{H^0_{12}, H^0_{23}, \ldots, H^0_{\nu-1,\nu}\} = \{H^0_{12}, H^0_{13}, \ldots, H^0_{1\nu}\}, \\ H^0(2\nu+1, \pi) &= \{H^0_{01}, H^0_{12}, \ldots, H^0_{\nu-1,\nu}\} = \{H^0_{01}, H^0_{02}, \ldots, H^0_{0\nu}\} \\ &= \{H^0_{01}, H^0(2\nu, \pi)\}. \end{aligned}$$

11. Les cas $n = 3, 4$ s'imposent donc à l'attention.

Soit d'abord $n = 4$ (¹), et v le p. p. c. m. des V_{12}, V_{21}, $w = \tau_1^{-1} v \tau_1$ celui des U_{12}, W_{12}. D'après le n° **6** $H^0 = \{v, w\}$. Désignons, en général, par $L_{xy} = \Sigma s_{xy}$, U_{xy} les groupes semblables à $L(2, \pi^2)$, $U(2, \pi^2)$ opérant sur les variables x, y (*S.*, 74), et considérons les substitutions $s_{x_1 x_2} \bar{s}^{-1}_{y_1 y_2}$. v est formé des s où $s_{x_1 x_2}$ parcourt $U_{x_1 x_2}$ (*S.*, 83). *Donc v est isomorphe à* $U_{x_1 x_2}$, $V_{ik\rho}$ *de v correspondant à* $|x_i, x_i + \rho x_k|$ *de* $U_{x_1 x_2}$. D'ailleurs $m_{1\rho}$ est permutable à v et transforme les substitutions de v comme $|x_1, \rho x_1|$ transforme les substitutions correspondantes de $U_{x_1 x_2}$. *Donc* $\{v, m_{1i'}\} = V$ *est isomorphe à* $L_{x_1 x_2}$ *et formé de toutes les s de* H. Le p. g. c. d. de V, H^0, formé des $v m^k_{1i'}$ de déterminant 1, est $\{v, m_{1i}\} = V^0$, isomorphe au diviseur de $L_{x_1 x_2}$ formé des substitutions de déterminant réel.

Comme $U(2, \pi^2)$ est, dans $L(2, \pi^2)$, le seul diviseur normal de son

---

(¹) *Cf.* Dickson, *Linear groups*, 134-136.

ordre contenant le central de $L(2, \pi^2)$ (*S.*, 83), le normalisant $\overline{V}$ de V dans H et celui $\overline{V}^0$ de V^0 dans H^0 divisent respectivement les normalisants $\bar{v}$ et $\bar{v}^0$ de v dans H et H^0.

Déterminons d'abord $\bar{v}^0$. On a (avec les notations du n° **3**)

$$V_{12\rho}\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & X_1 - \dot{\rho}\alpha'_{12}y_1 + \rho\alpha_{11}x_2 \\ y_1 & Y_1 - \dot{\rho}\beta'_{12}y_1 + \rho\beta_{11}x_2 \\ x_2 & X_2 - \dot{\rho}\alpha'_{22}y_1 + \rho\alpha_{21}x_2 \\ y_2 & Y_2 - \dot{\rho}\beta'_{22}y_1 + \rho\beta_{21}x_2 \end{vmatrix},$$

et $\alpha^{-1}V_{12\rho}\alpha$ se réduit de $V_{12\rho}\alpha$ en remplaçant, dans les fonctions substituées aux variables, X_i, Y_i par x_i, y_i, et x_i, y_i par X'_i, Y'_i. Identifions maintenant $\alpha^{-1}V_{12\rho}\alpha$ avec une s de v. J'appellerai dans ce qui suit *coefficients significatifs* les 8 coefficients qui jouent le rôle des α_{ik}, β'_{ik} dans une substitution quelconque de H. Les coefficients non significatifs d'une s étant toujours nuls, les 8 équations d'identification relatives à ces derniers sont linéaires homogènes en ρ et $\dot{\rho}$. Comme ρ est arbitraire, ces 8 équations en fournissent 16 qui se réduisent à

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha'_{12} = \alpha_{11}\alpha'_{22} = \alpha_{21}\alpha'_{12} = \alpha_{21}\alpha'_{22} = 0, \\ \beta_{11}\beta'_{12} = \beta_{11}\beta'_{22} = \beta_{21}\beta'_{12} = \beta_{21}\beta'_{22} = 0. \end{cases}$$

Les 8 équations relatives aux coefficients significatifs donnent, en éliminant ces coefficients (conjugués deux à deux au signe près lorsqu'il s'agit d'une s de v), 4 équations linéaires homogènes en ρ et $\dot{\rho}$, d'où, comme tout à l'heure, 8 équations qui se réduisent à

$$(23)\qquad \alpha_{11}\dot{\beta}'_{12} + \alpha_{21}\dot{\beta}'_{22} = 0, \qquad \alpha'_{12}\dot{\beta}_{11} + \alpha'_{22}\dot{\beta}_{21} = 0.$$

En remplaçant $V_{12\rho}$ par $V_{21\rho}$, on obtient, au lieu de (22), (23), les équations suivantes, qui s'en déduisent par permutation des indices 1 et 2,

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha_{22}\alpha'_{21} = \alpha_{22}\alpha'_{11} = \alpha_{12}\alpha'_{21} = \alpha_{12}\alpha'_{11} = 0, \\ \beta_{22}\beta'_{21} = \beta_{22}\beta'_{11} = \beta_{12}\beta'_{21} = \beta_{12}\beta'_{11} = 0. \end{cases}$$

$$(25)\qquad \alpha_{22}\dot{\beta}'_{21} + \alpha_{12}\dot{\beta}'_{11} = 0, \qquad \alpha'_{21}\dot{\beta}_{22} + \alpha'_{11}\dot{\beta}_{12} = 0.$$

Je dis que, si un seul des coefficients significatifs de α est $\neq 0$, α est dans V^0. En effet, *soit d'abord* $\alpha_{11} \neq 0$. Alors, d'après (22), $\alpha'_{12} = \alpha'_{22} = 0$. De plus $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$, sans quoi, d'après (22), β'_{12} et β'_{22} seraient nuls et la quatrième colonne de α serait nulle. Donc $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$, sans quoi, d'après (24), β'_{21} et β'_{11} seraient nuls, et la forme h des deux premières colonnes de α (1) serait nulle. Enfin $\alpha'_{11} = \alpha'_{21} = 0$, sans quoi, d'après (24), α_{12} et α_{22} seraient nuls, et la forme h des deux dernières colonnes serait nulle. De plus, les relations (6) [dont (23) et (25) font partie] donnent, en posant

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = \delta, \qquad \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} = \delta',$$

$$\alpha_{11}\delta' = \beta'_{22}, \qquad \alpha_{12}\delta' = -\beta'_{21}, \qquad \alpha_{21}\delta' = -\beta'_{12}, \qquad \alpha_{22}\delta' = \beta'_{11},$$

d'où $\delta\delta' = 1$. Or $\delta\delta'$, déterminant de α, est égal à 1. Donc δ et δ' sont réels, et les relations précédentes montrent que α est une s de H^0 donc de V^0.

Si α_{12} *est* $\neq 0$, on voit de même que $R_{121}\alpha$ (R_{121} fait partie de v) est dans V^0, donc α dans $R_{121}^{-1} V^0 = V^0$.

Si β'_{11} *ou* β'_{12} *est* $\neq 0$, on voit de même que $(\tau_1\tau_2)^{-1}\alpha\tau_1\tau_2$ ($\tau_1\tau_2$, qui transforme $V_{12\rho}$ en $V_{21\rho}^{-1}$ et $V_{21\rho}$ en $V_{12\rho}^{-1}$ est permutable à v) est dans V^0, donc α dans $\tau_1\tau_2 V^0 (\tau_1\tau_2)^{-1} = V^0$ ($\tau_1\tau_2$ est permutable à $\{m_{1i'}\}$ donc à $\{m_{1i}\}$).

Si donc α_{22}, α_{21}, β'_{22} *ou* β'_{21} *est* $\neq 0$, α est aussi dans V^0, puisque les équations (22)-(25) ne changent pas quand on y échange les indices 1 et 2.

Supposons donc nuls tous les coefficients significatifs de α. Alors $\tau_1\tau_2\alpha$, dont les coefficients significatifs ne sont pas tous nuls, est dans V^0, donc α dans $(\tau_1\tau_2)^{-1}V_0$. Donc $\bar{v}^0 = \{V^0, \tau_1\tau_2\}$, et, $\tau_1\tau_2$ étant permutable à $\{m_{1i'}\}$, $\bar{v}^0 = \bar{V}^0$.

Comme $m_{1i'}$ est permutable à v, à V^0 et à V, et que $H = \{H^0, m_{1i'}\}$, il est clair que $\bar{v} = \{V, \tau_1\tau_2\} = \bar{V}$. Donc $(H, \bar{V}) = (H^0, V^0)$, et v ou V^0 a les mêmes conjugués dans H et H^0.

Toute similitude σ de V étant dans un complexe $vm_{1i'}^k$, $\sigma m_{1i'}^{k}$ est dans v et est par suite une substitution s où $s_{x_i x_i}$ est dans $U_{x_i x_i}$, d'où $\rho^2 = 1$, $i'^k = 1$. Donc σ est dans v et dans D, et, comme v contient $d = R_{121}^2$, le p. g. c. d. de v, J est D. D'ailleurs $(\tau_1\tau_2)^2 = d$. Donc, en remplaçant partout les lettres v, V par $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$ pour indiquer qu'on regarde les variables comme homogènes, les normalisants respectifs de $\mathfrak{v}$ ou $\mathfrak{V}^0$ dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$ sont $\overline{\mathfrak{V}}$ et $\overline{\mathfrak{V}}^0$, et $(\mathcal{H}, \overline{\mathfrak{V}}) = (\mathcal{H}^0, \overline{\mathfrak{V}}^0) = (\mathrm{H}, \overline{\mathrm{V}})$.

12. Soit $n = 3$ et v le p. p. c. m. des V_{01}, $u = \tau_1^{-1} v \tau_1$ celui des U_{01}. v est un g_{π^3} sylowien de H^0 dont le central est le g_π p. p. c. m. des u_1 (**7**). Cherchons ici le normalisant $\overline{u}$ de u dans H. u est permutable à $m_{0,\iota^{\pi-1}}$ (on verra dans un Mémoire ultérieur, que $\{u, m_{0,\iota^{\pi-1}}\}$ est le diviseur fixant le point 100 dans H) et à $m_{1\iota'}$. Donc $\overline{u}$ contient $\{u, m_{0,\iota^{\pi-1}}, m_{1\iota'}\}$.

Pour que $\alpha^{-1}\mathrm{U}_{01\rho}\alpha$ soit de la forme $\mathrm{U}_{01\sigma}u_{1\lambda}$, on trouve, comme pour $n = 4$ (l'élimination des coefficients non nuls de $\mathrm{U}_{01\sigma}u_{1\lambda}$ est ici inutile), $\alpha_{01} = \beta_{11} = \alpha_{11}\beta_{10} = 0$, et comme (6) donne $\alpha_{11}\dot{\beta}'_{11} = 1$, il faut que $\beta_{10} = 0$. Les autres conditions (4)-(6) deviennent alors

$$\alpha'_{11}\dot{\beta}'_{11} - \beta'_{11}\dot{\alpha}'_{11} + \omega\alpha'_{01}\dot{\alpha}'_{01} = 0, \qquad \alpha_{00}\dot{\alpha}_{00} = 1, \qquad \alpha_{10}\dot{\beta}'_{11} + \omega\alpha_{00}\dot{\alpha}'_{01} = 0.$$

Comme $\alpha_{00}\dot{\alpha}_{00} = \alpha_{11}\dot{\beta}'_{11} = 1$, on peut, en multipliant α par des puissances de $m_{0\iota^{\pi-1}}$ et de $m_{1\iota'}$, réduire α_{11}, β'_{11} et α_{00} à 1. Les conditions précédentes expriment alors que α est dans u. Donc $\overline{u} = \{u, m_{0\iota^{\pi-1}}, m_{1\iota'}\}$, et $(\mathrm{H}, \overline{u}) = \pi^3 + 1$. Le p. g. c. d. de $\overline{u}$, H^0 est évidemment $\{u, m_{0,\iota^{\pi-1}}, m_{1\iota}\} = \overline{u}^0$, et $(\mathrm{H}^0, \overline{u}^0) = \pi^3 + 1$ (d'ailleurs, v étant un g_{π^3} sylowien, on savait *a priori* qu'il avait les mêmes conjugués dans H et H_0).

Remplaçons les lettres v, u par $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}$ pour indiquer qu'on regarde les variables comme homogènes. Le $g_{\pi^3}\,u$, toujours ici premier au $g_{\pi+1}\,\mathrm{J}$, est isomorphe à u. Mais $\overline{u}$ contient J (*a priori*), et $\overline{u}^0$ contient J^0. Donc $(\mathcal{H}, \overline{\mathfrak{u}}) = (\mathcal{H}^0, \overline{u}^0) = \pi^3 + 1 = (\mathrm{H}, \overline{\mathrm{V}})$.

13. *Supposons* $n \geqq 4$, et soit Γ un diviseur normal de H non contenu dans J. Si α est dans Γ, Γ contient aussi (les notations étant celles du n° **3**)

$$u_{i\lambda}^{-1}\,\alpha\,u_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \mathrm{X}_i + \lambda\mathrm{Y}_i - \lambda\alpha_{ii}y_i - \lambda^2\beta_{ii}y_i \\ y_i & \mathrm{Y}_i - \lambda\beta_{ii}y_i \\ x_j & \mathrm{X}_j - \lambda\alpha_{ji}y_i \qquad (j \neq i) \\ y_j & \mathrm{Y}_j - \lambda\beta_{ji}y_i \end{vmatrix},$$

$$\begin{array}{c} V_{ik\rho}^{-1}\alpha\ V_{ik\rho} = \\ (i,\ k \neq 0) \end{array}\left|\begin{array}{ll} x_i & X_i + \rho X_k - \rho\alpha_{ii}x_k + \dot\rho\alpha'_{ik}y_i - \rho^2\alpha_{ki}x_k + \rho\dot\rho\alpha'_{kk}y_i \\ y_i & Y_i - \rho\beta_{ii}x_k + \dot\rho\beta'_{ik}y_i \\ x_k & X_k - \rho\alpha_{ki}x_k + \dot\rho\alpha'_{kk}y_i \\ y_k & Y_k - \dot\rho Y_i - \rho\beta_{ki}x_k + \dot\rho\beta'_{kk}y_i + \rho\dot\rho\beta'_{ii}x_k - \dot\rho^2\beta'_{ik}y_i \\ x_j & X_j - \rho\alpha_{ji}x_k + \dot\rho\alpha'_{jk}y_i \qquad (j \neq i,\ k) \\ y_j & Y_j - \rho\beta_{ji}x_k + \dot\rho\beta'_{jk}y_i \end{array}\right|,$$

$$\begin{array}{c} U_{ik\rho}^{-1}\alpha\ U_{ik\rho} = \\ (i,\ k \neq 0) \end{array}\left|\begin{array}{ll} x_i & X_i + \rho Y_k - \rho\alpha_{ii}y_k - \dot\rho\alpha_{ik}y_i - \rho^2\beta_{ki}y_k - \rho\dot\rho\beta_{kk}y_i \\ y_i & Y_i - \rho\beta_{ii}y_k - \dot\rho\beta_{ik}y_i \\ x_k & X_k + \dot\rho Y_i - \rho\alpha_{ki}y_k - \dot\rho\alpha_{kk}y_i - \rho\dot\rho\beta_{ii}y_k - \dot\rho^2\beta_{ik}y_i \\ y_k & Y_k - \rho\beta_{ki}y_k - \dot\rho\beta_{kk}y_i \\ x_j & X_j - \rho\alpha_{ji}y_k - \dot\rho\alpha_{jk}y_i \qquad (j \neq i,\ k) \\ y_j & Y_j - \rho\beta_{ji}y_k - \dot\rho\beta_{jk}y_i \end{array}\right|,$$

$$\begin{array}{c} W_{ik\rho}^{-1}\alpha W_{ik\rho} = \\ (i,\ k \neq 0) \end{array}\left|\begin{array}{ll} x_i & X_i + \rho\alpha'_{ii}x_k + \dot\rho\alpha'_{ik}x_i \\ y_i & Y_i + \rho X_k + \rho\beta'_{ii}x_k + \dot\rho\beta'_{ki}x_i + \rho^2\alpha'_{ki}x_k + \rho\dot\rho\alpha'_{kk}x_i \\ x_k & X_k + \rho\alpha'_{ki}x_k + \dot\rho\alpha'_{kk}x_i \\ y_k & Y_k + \dot\rho X_i + \rho\beta'_{ki}x_k + \dot\rho\beta_{kk}x_i + \rho\dot\rho\alpha'_{ii}x_k + \dot\rho^2\alpha'_{ik}x_i \\ x_j & X_j + \rho\alpha'_{ji}x_k + \dot\rho\alpha'_{jk}x_i \qquad (j \neq i,\ k) \\ y_i & Y_j + \rho\beta'_{ji}x_k + \dot\rho\beta'_{jk}x_i \end{array}\right|,$$

ainsi que les substitutions $\alpha^{-1}u_{i\lambda}^{-1}\alpha u_{i\lambda}$, $\alpha^{-1}V_{ik\rho}^{-1}\alpha V_{ik\rho}$, $\alpha^{-1}U_{ik\rho}^{-1}\alpha U_{ik\rho}$, $\alpha^{-1}W_{ik\rho}^{-1}\alpha W_{ik\rho}$, qui se déduisent dss précédentes en y remplaçant, dans les fonctions substituées aux variables, X_i, Y_i par x_i, y_i et x_i, y_i par X'_i, Y'_i (**3**).

Tout d'abord Γ contient des α qui ne sont pas des multiplications, car les conditions que α, $u_{i\lambda}^{-1}\alpha u_{i\lambda}$, $V_{ik\rho}^{-1}\alpha V_{ik\rho}$ ($i \geqq 0$) soient des multiplications donnent respectivement $\alpha_{ii}\beta'_{ii} = 1$, $\alpha_{ii} = \beta'_{ii}$, $\alpha_{kk} = \alpha_{ii}$, $\alpha_{00} = \alpha_{ii}$ (si $\eta = 1$), donc $\alpha = 1$ ou d.

Soit donc α *une substitution de* Γ *autre qu'une multiplication.* Si $\eta = 1$ et si tous les coefficients non diagonaux autres que les α_{i0}, β_{i0} sont nuls, les équations (4) et (6) (pour $j = 0$, $k = 1, \ldots, \nu$) montrent que ces derniers sont aussi nuls. Donc un des autres coefficients non diagonaux est $\neq 0$. Donc, en transformant au besoin α par une $T'^{r}_{1k}\tau^{s}_{1}$

$(r, s = 0, 1)$, *on peut supposer qu'un des* α_{j1}, β_{j1} *autres que* α_{11} *est* $\neq 0$.

Je dis maintenant que Γ *contient, hors de* J, *une* α *où les* α_{j1}, β_{j1} *autres que* α_{11}, β_{11} *sont tous nuls*, β_{11} *étant* $\neq 0$. Prenons en effet dans Γ, hors de J, une α où ces α_{j1}, β_{j1} $(j \neq 1)$ ne soient pas tous nuls. Si α_{01} est le seul d'entre eux $\neq 0$, α_{11} et β_{11} sont, d'après (4), tous deux $\neq 0$; une transformée [1] de α par $U_{01\rho}$ [où β_{11}, α_{j1}, β_{j1} $(i > 1)$ sont conservés tandis que α_{01} est remplacé par $\alpha_{01} + \rho\beta_{11}$] aura donc la forme voulue (elle ne sera pas dans J puisque $\beta_{11} \neq 0$). Si un des α_{j1}, β_{j1} où $j \neq 0$ est $\neq 0$, on peut, en transformant au besoin par une τ_j, supposer que c'est un β_{j1}. Soit donc (en transformant au besoin par une T_{2j}) $\beta_{21} \neq 0$. Si maintenant $\beta_{11} = 0$, on le rendra $\neq 0$ en transformant par une $V_{21\rho}$ telle que $\rho\dot{\rho}\beta_{22}$ soit $\neq \rho\beta_{12} + \dot{\rho}\beta_{21}$, ou bien par les trois opérations suivantes : 1° une transformation par $U_{12\rho}$ qui rendra α_{11} arbitraire; 2° le remplacement de α par $\alpha^{-1} u_{1\lambda}^{-1} \alpha u_{1\lambda}$ qui substitue $\lambda(1 - \alpha_{11}\dot{\alpha}_{11})$ à α'_{11}; 3° une transformation par τ_1. En transformant alors par des V_{1j}, U_{1j} où $j \neq 1$, on annulera les β_{j1}, α_{j1} où $j \neq 1$ sans altérer β_{11}.

Dès lors Y'_1 se réduit à $-\beta_{11}x_1 + \dot{\alpha}_{11}y_1$ et $\alpha^{-1} u_{1\lambda}^{-1} \alpha u_{1\lambda}$ à

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & (1 + \lambda\alpha_{11}\dot{\beta}_{11} + \lambda^2\beta_{11}\dot{\beta}_{11})x_1 + \lambda(1 - \alpha_{11}\dot{\alpha}_{11} - \lambda\dot{\alpha}_{11}\beta_{11})y_1 \\ y_1 & \lambda\,\beta_{11}\dot{\beta}_{11}\;x_1 + \lambda(1 - \lambda\dot{\alpha}_{11}\beta_{11})y_1 \end{vmatrix},$$

les variables non écrites étant inaltérées, et $\beta_{11} \neq 0$. D'après (4), $\alpha_{11}\dot{\beta}_{11} = \beta_{11}\dot{\alpha}_{11}$, en sorte que *les coefficients de* β *sont réels* comme il le faut (5). Donc, en prenant au besoin β pour α, *on peut supposer* α_{11} *et* β_{11} *réels* $\neq 0$.

Soit alors $U^i \equiv U(2, \pi)$ (5) le groupe des substitutions de $H^0(n, \pi)$ qui laissent inaltérées les variables autres que x_i, y_i $(i \neq 0)$, $D^i = \{m_{i,-1}\}$ son g_2 normal et J' le p. g. c. d. de Γ, J. Comme β est dans U^1, hors de D^1J' (en supposant $\lambda \neq 0$), le p. g. c. d. de Γ, U^1J', normal dans U^1J', est $> D^1J'$. Donc le p. g. c. d. de $\Gamma|J'$, $U^1J'|J'$, normal

---

[1] Cette transformation de α et celles qui vont suivre produisent sur les α_{j1}, β_{j1} où $j \neq 1$ les mêmes changements que la simple multiplication à droite de α par la transformante.

dans $U^1 J'|J'$, est $> D^1 J'|J'$. Or, si π est > 3, $U^1 J'|J'$ est simple. *Donc, si* $\pi > 3$, Γ *contient* U^1 *et de même* $U^2, \ldots, U^\nu$.

Soit d'abord $\pi > 3$. Γ, contenant les m_i et les v_i (qui sont dans les U^i), contient $m_{i\lambda}^{-1} V_{ik\rho} m_{ik} V_{ik\rho}^{-1} = V_{ik,\rho(\lambda-1)}$ [*cf.* (19)] et

$$m_{1\lambda} V_{01\rho} m_{1\lambda}^{-1} V_{01\rho}^{-1} = V_{01,\rho\lambda} V_{01\rho}^{-1} = V_{01,\rho(\lambda-1)} v_{1,b(1-\lambda)\rho\rho} \qquad [cf. (19), (11), (14)],$$

et par suite tous les V_{jk} $(j \geqq 0)$. Étant normal, il contient encore les u_i. Il contient donc tous les générateurs de H^0 (**6**, **8**). *Donc, pour* $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* H *non contenu dans* J *est* $\geqq H^0$. On voit de même, en remplaçant dans ce qui précède H par H^0 et J par J^0, que, *pour* $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* H^0 *non contenu dans* J^0 *coïncide avec* H^0.

Soit $\pi \leqq 3$. On sait seulement alors que Γ, diviseur normal de H non $\leqq J$ (ou diviseur normal de H^0 non $\leqq J^0$), contient β où l'on peut supposer α_{11} et β_{11} réels $\neq 0$. Donc α_{11}, β_{11} et λ (supposé aussi $\neq 0$) sont égaux à ± 1, et, en posant $\alpha_{11}\beta_{11} = \delta$,

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & (\lambda\delta - 1)x_1 - \delta y_1 \\ y_1 & \lambda x_1 + (1 - \lambda\delta) y_1 \end{vmatrix} \qquad (\lambda = \pm 1, \delta = \pm 1).$$

Soit $\pi = 3$. En prenant $\lambda = \delta$ et $\lambda = -\delta$ on a deux substitutions qui engendrent le $g_8 Q^1$ normal dans U^1 (*S.*, 83). Donc Γ contient Q_1 et de même le $g_8 Q^1$ normal dans U^i. Donc Γ contient les τ_i, les m_i, et par suite, comme pour $\pi > 3$ (en supposant, ce qui est permis, $b = 0$), tous les V_{jk} $(j \geqq 0)$. Étant normal, il contient encore les U_{jk}, W_{jk} et, d'après (12), les u_i, v_i. Il contient donc tous les générateurs de H_0 (**6**, **8**).

Soit $\pi = 2$. Alors $\beta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = \tau_1 u_{11}$, et Γ contient $\tau_i u_{i1} = v_{i1} \tau_i$, donc, si $n \geqq 4$,

$$(\tau_i u_{i1})^{-1} V_{ik\rho}^{-1} \tau_i u_{i1} V_{ik\rho} = W_{ik\rho} v_{ki} = v_{ki} W_{ik\rho},$$

donc

$$W_{ik\rho} v_{k1}. v_{k1} W_{ik\sigma} = W_{ik,\rho+\sigma} \qquad (i, k \neq 0),$$

dans toutes les W_{ik}, V_{ik}, U_{ik}, donc aussi les $V_{0k\rho} V_{ki\sigma} V_{0k\rho}^{-1}$, donc, d'après (18), les V_{0i} et aussi, d'après (13), les u_i, v_i, donc les τ_i. Donc, pour $n \geqq 4$, $\Gamma = H^0$.

Ainsi, en exceptant le cas où $\pi = 2$ *avec* $n \leqq 3$, *tout diviseur normal de* $\mathrm{H}(n, \pi)$ *ou de* $\mathrm{H}^0(n, \pi)$ *non contenu dans* J *est* $\geqq \mathrm{H}^0$. *Alors* $\mathcal{H}^0(n, \pi) \equiv \mathrm{H}^0 | \mathrm{J}^0$ *est simple, et* J *est le central de* H, J^0 *celui de* H^0. $\mathrm{H}^0(2, 2) \equiv \mathrm{U}(2, 2)$ *est isomorphe au* g_6 *symétrique* (*S.*, 83), et l'on va voir que le $g_{216}\mathrm{H}^0(3, 2)$ *est résoluble* [1].

On vérifie d'ailleurs directement, en développant les conditions $\alpha \mathrm{V}_{ik\lambda} = \mathrm{V}_{ik\lambda}\alpha$, $\alpha \mathrm{U}_{ik\lambda} = \mathrm{U}_{ik\lambda}\alpha$ $(i, k \geqq 0)$, ou en se servant (pour i, $k \neq 0$) des expressions données de $\mathrm{V}_{ik\lambda}^{-1}\alpha\mathrm{V}_{ik\lambda}$, $\mathrm{U}_{ik\lambda}^{-1}\alpha\mathrm{U}_{ik\lambda}$, que *toute substitution* α *permutable à chaque substitution de* H *est une similitude. Donc le central de* H' *est* I'.

14. *Soit donc* $\pi = 2$, $n = 3$. Alors $\upsilon^2 + \upsilon + 1 = 0$, $\omega = 1$. Γ contient

$$\beta^{-1}\mathrm{V}_{01\rho}^{-1}\beta\mathrm{V}_{01\rho} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \dot{\upsilon}y_1 + \dot{\rho}x \\ y_1 & \upsilon x_1 + y_1 + \dot{\upsilon}\dot{\rho}x \\ x & \rho x_1 + \upsilon\rho y_1 \end{vmatrix}.$$

Prenons les variables $y = \upsilon x_1 + y_1$, $z = x_1 + \upsilon y_1$ $(x_1 = y + \upsilon z$, $y_1 = \dot{\upsilon}y + z)$ qui ramènent h à la forme $\varepsilon = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$ (*cf.* **2**), et convenons de désigner par les mêmes lettres les substitutions de H^0 et leurs expressions respectives par les variables de E^0. On a alors (l'ordre des variables étant x, y, z) :

$$\beta = |x, \upsilon y, \dot{\upsilon}z|, \qquad \beta^{-1}\mathrm{V}_{01\rho}^{-1}\beta\mathrm{V}_{01\rho} = |\rho z, \dot{\rho}x, y|,$$
$$(\beta^{-1}\mathrm{V}_{011}^{-1}\beta\mathrm{V}_{011})^2 = \theta = |y, z, x|.$$

Γ, contenant θ et $\beta = \beta_1$ $(\theta^3 = \beta^3 = 1)$, contient aussi $\theta\beta\theta^{-1} = |\dot{\upsilon}x, y, \upsilon z| = \beta_2$, $\theta^{-1}\beta\theta = |\upsilon x, \dot{\upsilon}y, z| = \beta_3$ et $\beta_1\beta_2^2 = |\upsilon x, \upsilon y, \upsilon z| = \delta$ qui engendre J^0. Il est clair que $\{\delta, \beta\}$ est un g_9 abélien principal, normal dans le g_{27} $\{\delta, \beta, \theta\} = \{\beta, \theta\} = \mathrm{P}$ défini par les équations de $\{\delta, \beta\}$ jointes à $\theta^3 = 1$, $\theta^{-1}\beta\theta = \beta\delta$, $\theta\delta = \delta\theta$. Je dis que P est normal dans A^0. Comme $u_{11} = \tau_1\beta$, il suffit de montrer que P est permutable à τ_1 et à $\mathrm{V}_{01\rho}$. Or, en posant $\tau_1 = \zeta_1 = \zeta = |x, z, y|$, $\theta\zeta\theta^{-1} = \zeta_2 = |z, y, x|$,

---

[1] D'ailleurs $216 = 2^3.3^3$, et tout groupe dont l'ordre n'a que deux facteurs premiers distincts est résoluble, d'après un théorème dû à M. Burnside [*P. L. M. S.*, 2e série, t. I, 1904, p. 389].

$\theta^{-1}\zeta\theta = \zeta_3 = |y, x, z|$ $(\zeta_1\zeta_2 = \zeta_3\zeta_1 = \theta)$ et

$$V_{01\rho} = V_\rho = |x + \rho y + \dot{\upsilon}\rho z,\ \dot{\rho} x + \dot{\upsilon} y + z,\ \upsilon\dot{\rho} x + \dot{\upsilon} y + \dot{\upsilon} z|,$$

on a

$$\zeta_i\theta\zeta_i = \theta^2, \qquad \zeta_i\beta_i\zeta_i = \beta_i^2, \qquad \zeta_i\beta_k\zeta_i = \beta_l^2 \qquad (i,\ k,\ l \text{ distincts}),$$

$$V_1^{-1}\beta V_1 = \theta^2\beta\delta^2, \qquad V_1^{-1}\theta V_1 = \theta^2\beta^2\delta, \qquad V_\upsilon^{-1}\beta V_\upsilon = \theta^2\beta^2, \qquad V_\upsilon^{-1}\theta V_\upsilon = \theta\beta^2\delta,$$

$$V_{\upsilon^2} = V_{1+\upsilon} = V_1 V_\upsilon v_{11} = V_1 V_\upsilon^3 = V_1 V_\upsilon^{-1} = V_\upsilon V_1.$$

Ainsi P *est normal dans* A^0. *De plus* $|V_1, V_\upsilon| = Q$ *est un* g_8 *des quaternions défini par* $V_1^4 = V_\upsilon^4 = 1$, $V_\upsilon^2 = V_1^2$ $(= \beta\zeta = v_{11})$, $V_\upsilon^{-1} V_1 V_\upsilon = V_1^3$, et $A^0 = PQ$. *Les équations de* A^0 *résultent évidemment de ce qui précède.*

Tout diviseur normal X *de* A^0 *non contenu dans* J^0 *contient le* g_{27} *sylowien normal* P. En effet, l'ordre du p. g. c. d. de Γ, P est > 1, car les équations précédentes montrent qu'aucun diviseur de Q n'est normal dans A^0. Donc Γ contient J^0 (*E.*, 152). Or on vérifie de suite sur les équations précédentes que tout diviseur normal > 1 de $A^0 | J^0$ contient $P | J^0$ [1].

On remarquera que le g_{54} $|P, \zeta|$ contient $u_{11} = \zeta\beta = |x, \upsilon z, \dot{\upsilon} y|$, $v_{11} = \beta\zeta = |x, \dot{\upsilon} z, \upsilon y|$ et $V_\rho^2 = v_{11}$ [*cf.* (**11**)].

Désignons par xyz le point de coordonnées *homogènes* x, y, z, et écrivons respectivement $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v$ pour 001, $\upsilon^2 01$, 101, $\upsilon^2\upsilon^2 1$, $1\upsilon 1$, $\upsilon 01$, $0\upsilon^2 1$, $\upsilon\upsilon 1$, $\upsilon\upsilon^2 1$, $0\upsilon 1$, $\upsilon 11$, $1\upsilon^2 1$, $\upsilon^2\upsilon 1$, 111, $\upsilon^2 11$, 011, $\upsilon^2 10$, $\upsilon 10$, 110, 010, 100 (ce sont les symboles de $\mathcal{A}^0$). On a alors, en désignant encore, d'une manière générale, par la même lettre une substitution de A^0 et son action sur les symboles $a, b, \ldots, v$:

$$\zeta = br.ct.fs.gk.q.au.de.hm.in.l.o.p.v,$$
$$\zeta_3 = bg.cq.fk.rs.t.el.in.pm.uv.a.d.h.o,$$
$$\beta = bcf.gkq.rst.del.hpm.ino.a.u.v,$$
$$\theta = bks.cqt.grf.auv.del.hmp.i.n.o = \zeta_3\zeta,$$
$$V_1 = bqtk.cfsr.g.aeul.hnpo.dv.im,$$
$$V_\upsilon = brtf.cqsk.g.ahup.eoln.di.mv \quad [2].$$

---

[1] On peut se servir aussi de la représentation de $A^0 | J^0$ en g^9 qui a déjà été rencontrée (*S.*, 73, p. 101; $A^0 | J_0$ est isomorphe au g_{72}, non métacyclique ayant un g_9 non cyclique normal) et qu'on va retrouver dans un instant.

[2] *Cf. S.*, **79** et **109** où les notations $\upsilon, \zeta, \zeta_3, \beta$ sont remplacées respectivement par i, ζ, ρ, a_0.

Ce sont les générateurs du g_{72} $\mathcal{A}^0 \equiv A^0 | J^0$. D'après ce qui précède, *tout diviseur normal de* $\mathcal{A}^0$ *contient le* $g_9 \{ \beta, \theta \}$.

$\mathcal{A}^0$ a deux systèmes d'intransitivité, l'un q_0 de degré 9 formé de b, c, f, g, k, q, r, s, t, l'autre q_1 de degré 12 formé de a, d, e, h, i, l, m, n, o, p, u, v. Le diviseur $\mathcal{X}^0$ fixant g est le $g_8 \{ V_1, V_\upsilon \}$. Le diviseur $\mathcal{X}_1^0$ fixant v est le $g_6 \{ \beta, \zeta \}$. On réduit $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}^0$ en adjoignant à $\mathcal{A}^0$ la substitution

$$s_\upsilon = | x, y, \upsilon z | = bfc.gkq.r.s.t.dho.epi.lmn.a.u.v.$$

$\mathcal{A}$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathcal{A}^0$. Mais les diviseurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_1$ de $\mathcal{A}$ qui fixent respectivement g et v n'ont pas les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathcal{X}^0$ et $\mathcal{X}_1^0$. Le constituant de $\mathcal{A}$ (ou *a fortiori* de $\mathcal{A}^0$) qui a pour champ q_1 a les quatre systèmes d'imprimitivité *auv*, *del*, *hmp*, *ino*. Le constituant de $\mathcal{A}^0$ dont le champ est q_0 est évidemment primitif [1].

15. Soit $P_{A(n,\pi)} = P = P_0$ le p. p. c. m. des V_{1k}, U_{1k} $(k = 2, \ldots, \nu)$, U_{10}, u_1. *En désignant par* $\{ u_1 \}$ *le* g_π *abélien principal dérivé des* u_1 (*normaux dans* P), $P | \{ u_1 \}$ *est un* $g_{\pi^{2n-1}}$ *abélien principal* (*cf. E.*, 142-145 *pour* $\pi = p$). *Les équations de* P *sont formées des équations de* $\{ u_1 \}$ *jointes à celles des relations du n°* **7** *où figurent les seuls générateurs de* P; car ces équations définissent un groupe d'ordre $\leqq (P, 1)$ (*E.*, 18, 19) et sont vérifiées par P.

Soit P_1 le groupe déduit de H_1 (4) comme P de H, et formons de même successivement les groupes P_2, ... Toute substitution de P_i est permutable à P_{i-1} (7), en sorte que $PP_1 \ldots P_{\nu-1} = \mathbf{P}_{A(n,\pi)} = \mathbf{P}$ est un $g_{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ sylowien de H.

Écrivons un instant $U_{ii\lambda}$ pour $u_{i\lambda}$ et $U_{i,\nu+1,\rho}$ pour $U_{i0\rho}$, désignons par ν_1 la plus haute valeur du second indice de U_{ik} dans P (donc ν_1 est $\geqq \nu$, et $\nu + \nu_1 = n$), et formons le tableau triangulaire

$$\begin{array}{cccccccccc}
U_{11} & U_{12} & U_{13} & \ldots & U_{1\nu_1} & V_{1\nu} & V_{1,\nu-1} & \ldots & V_{13} & V_{12} \\
 & U_{22} & U_{23} & \ldots & U_{2\nu_1} & V_{2\nu} & V_{2,\nu-1} & \ldots & V_{23} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
 & & U_{ii} & \ldots & U_{i\nu_1} & V_{i\nu} & V_{i,\nu-1} & \ldots & V_{i,i+1}. & \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & &
\end{array}$$

(1) On trouvera des généralisations de ces propriétés dans un article déjà cité (*Comptes rendus*, t. 161, p. 553) et dans un Mémoire ultérieur.

la dernière ligne se réduisant à $U_{\nu\nu}$ si $\nu_1 = \nu$, et aux deux termes $U_{\nu\nu}$, $U_{\nu,\nu+2}$ si $\nu_1 = \nu + 1$, et les V disparaissent si $\nu = 1$. Appelons $s^{\text{ième}}$ *transversale* la rangée de termes (parallèle au côté droit du triangle) formée du $s^{\text{ième}}$ terme de la première ligne, du $(s-2)^{\text{ième}}$ de la seconde, ... du $[s-2(i-1)]^{\text{ième}}$ de la $i^{\text{ième}}$, ... *Pour* $n \leqq 3$, **P** *est abélien. Pour* $n > 3$, *le* $s^{\text{ième}}$ *central* (*E.*, 94) C_s *de* **P** *est le p. p. c. m. des* U_{ik}, V_{ik} *des s premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i+k$ *est* $\leqq s+1$ *et des* V_{ik} *où* $k-i$ *est* $\geqq n-s$: *l'ordre de* C_s *est alors* $\pi^{\frac{s(s+1)}{2}}$. Montrons que si le théorème est vrai pour C_s $(C_0 = 1)$, il l'est pour C_{s+1}. Soit ξ un élément de C_{s+1} hors de C_s, exprimé par les générateurs de **P** en faisant passer ceux de P_i avant ceux de P_{i+1}. Si ξ contient (dans l'expression considérée) un V_{kl} hors de C_s, $l-k$ est $\leqq n-s-1$. Or, pour $k>1$, $V_{k-1,k}$ transforme V_{kl} en $V_{k-1,l}V_{kl}$. Pour que $C_s\xi$ soit permutable à $V_{k-1,k}$, il faut donc que $V_{k-1,l}$ soit dans C_s, d'où $l-k \geqq n-s-1$. Donc $l-k = n-s-1$. Pour $k=1$ et $l=\nu$, la permutabilité avec $V_{l,l+1}$ conduit de même à $l-k=n-s-1$. Pour $k=1$ et $l=\nu$, la permutabilité avec $U_{\nu\nu_1}$ exige que C_s contienne $U_{1\nu_1}$ d'où $1+\nu_1 \leqq s+1$, et de même $l-k=n-s-1$. Si ξ contient un U_{kl} ($k \leqq l$ si $l \leqq \nu$; $k<l$ si $l>\nu$) hors de C_s, $k+l$ est $\geqq s+2$. Or, pour $k>1$, $V_{k-1,k}$ transforme U_{kl} en $U_{k-1,l}U_{kl}$ si $l \leqq \nu$ et $k<l$, et en $U_{k-1,k}U_{k-1,l}U_{kl}$ si $l>\nu$ ou si $k=l$. Donc $k-1+l$ est $\leqq s+1$, et $k+l=s+2$. Pour $k=1$ et $1<l\leqq\nu$, $V_{l-1,l}$ transforme U_{1l} en $U_{1,l-1}U_{1l}$, d'où $l \leqq s+1$, et de même $k+l=s+2$. Pour $k=l=1$, la condition $k+l \geqq s+2$ donne $s=0$, d'où encore $k+l=s+2$. Pour $k=1$, $l=\nu+1$ et $\nu>1$, $U_{\nu l}$ transforme U_{kl} en $U_{1\nu}U_{kl}$, d'où $1+\nu \leqq s+1$, et encore $k+l=s+2$. Pour $k=\nu=1$ et $l=2$, **P** est abélien. Donc, pour $n>3$, ξ ne doit contenir que les générateurs de l'énoncé, et cela suffit, car alors tout générateur de **P** transforme tout générateur de ξ en un élément de $C_s\xi$. L'ordre de C_s se calcule en comptant les éléments à prendre dans chaque ligne du tableau rectangulaire.

Les substitutions de **P** ont la forme générale

$$\alpha_{\mathbf{P}} = \left\{ \begin{array}{cc|cc|cc|c} 1 & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \alpha_{13} & \alpha'_{13} & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & \alpha'_{21} & 1 & \alpha'_{22} & \alpha_{23} & \alpha'_{23} & \ldots \\ 0 & \beta'_{21} & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \hline 0 & \alpha'_{31} & 0 & \alpha'_{32} & 1 & \alpha'_{33} & \ldots \\ 0 & \beta'_{31} & 0 & \beta'_{32} & 0 & 1 & \ldots \\ \hline . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & \ldots \end{array} \right\} \text{(1)},$$

les coefficients situés au-dessus de la diagonale (ou ceux situés au-dessous) étant arbitraires, et les autres étant déterminés par ceux-là d'après les relations (4)-(6) [ou (8)-(10)].

Toute substitution λ de **H** permutable à **P** vérifie $\alpha_{\mathbf{P}}\lambda = \lambda\gamma_{\mathbf{P}}$, $\gamma_{\mathbf{P}}$ étant dans **P**. Supposons que λ se déduise de la substitution α du n° **3** en remplaçant α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} par λ_{ik}, λ'_{ik}, μ_{ik}, μ'_{ik} respectivement. La comparaison des coefficients de y_1 et de x_2 dans les fonctions que $\alpha_{\mathbf{P}}\lambda$ et $\lambda\gamma_{\mathbf{P}}$ substituent à y_1 donne

$$\mu_{11}\alpha'_{11} + \mu_{12}\alpha'_{21} + \mu'_{12}\beta'_{21} + \mu_{13}\alpha'_{31} + \mu'_{13}\beta'_{31} + \ldots = 0, \qquad \mu_{11}\alpha_{12} = 0.$$

Or on peut supposer α_{12} arbitraire. Donc $\mu_{11} = 0$. En prenant alors pour $\alpha_{\mathbf{P}}$ une substitution où α'_{21}, β'_{21} soient arbitraires, on voit que μ_{1j}, μ'_{1j} sont nuls pour $j \neq 1$. Alors, d'après (8) et (10) les λ_{j1}, μ_{j1} où $j \neq 1$ sont nuls, et $\lambda_{11}\mu'_{11} = 1$. En multipliant λ à droite par une substitution de **P** on peut annuler les λ'_{j1}, μ'_{j1} où $j \neq 1$. Alors, d'après (5) et (6), tous les coefficients des deux premières lignes et colonnes sont nuls sauf λ_{11} et μ'_{11} qu'on réduira à 1 en multipliant à droite par une m_1. La substitution obtenue est alors dans H_1. En continuant ainsi on voit que λ est dans **MP**, **M** étant le p. p. c. m. (abélien) des m_j ($j \geqq 0$). *Donc* **MP** *est le normalisant de* **P** *dans* H. *L'ordre de* **M** *est évidemment* $(\pi^2 - 1)^\nu$ *si* $n = 2\nu$, *et* $(\pi^2 - 1)^\nu(\pi + 1)$ *si* $n = 2\nu + 1 > 1$.

(1) En rangeant les variables dans l'ordre $y_1, \ldots, y_\nu, x, x_\nu, \ldots, x_1$, les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont tous nuls.

Son p. g. c. d. $\mathbf{M}^0$ *avec* H^0 *est d'indice* $\pi+1$ *dans* $\mathbf{M}=\Sigma_0^\pi \mathbf{M}^0 s$, *s ayant le même sens qu'au n°* **2**. *Le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* H^0 *est* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$. $\mathbf{M}$ *est évidemment* $>J$, *et* $\mathbf{M}^0 > J^0$.

$\mathbf{M}$ *est son propre normalisant dans* $\mathbf{MP}$. Car une relation de la forme $(\mu\alpha_{\mathbf{P}})^{-1}\mu_0\mu\alpha_{\mathbf{P}}=\mu_1$, μ, μ_0, μ_1 étant dans $\mathbf{M}$, entraînerait, puisque $\mathbf{M}$ est abélien, $\mu_0\alpha_{\mathbf{P}}=\alpha_{\mathbf{P}}\mu_1$; d'où, comme on le voit directement, $\mu_0=\mu_1$, et, μ_0 parcourant $\mathbf{M}$, $\alpha_{\mathbf{P}}=1$.

III. — Groupe gauche.

16. Soit maintenant $\bar{a}=-a$ et $\alpha a\bar{\alpha}=fa$ (d'où $|\alpha|^2=f^n$). Supposons a réduite à la forme canonique $\Sigma_1^\nu(x_i y'_i - y_i x'_i)$ $(n=2\nu)$ (*E.*, 195, 201, 202; *cf. S.*, p. 225), les variables de la première série étant $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$, et les variables correspondantes de la seconde $x'_1, y'_1, \ldots, x'_\nu, y'_\nu$ (cogrédientes à $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$). Le groupe A sera dit alors *groupe gauche n-aire de* $\mathfrak{S}$, et le groupe $\mathcal{A}$ *groupe gauche homogène ou fractionnaire n-aire de* $\mathfrak{S}$. Je préciserai ces formes de A, $\mathcal{A}$ en remplaçant partout les lettres A, $\mathcal{A}$ par G, $\mathcal{G}$.

Posons

$$\gamma=\begin{vmatrix} x_i & \iota x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix},\qquad \mu_\rho=\begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1}y_i \end{vmatrix}\qquad (i=1,\ldots,\nu).$$

Il est clair que $G'=\Sigma_0^{\pi-2}G\gamma^k$, et que $G\gamma^k$ est formé des substitutions de G' qui multiplient a par ι^k. $|\gamma|$ est premier à G, tandis que le p. g. c. d. de G, I est D. *Si donc p est* >2, γ est hors de GI; mais $\gamma^2=\mu_\iota[\iota]$ est dans GI, et $G'=GI+GI\gamma$. *Si* $p=2$, $G'=GI$. Pour $p\geqq 2$, $GI=G''$ est le groupe des substitutions qui multiplient a par un carré.

Ici $\mathcal{G}'=G'|I$, $\mathcal{G}=GI|I\equiv G|D$. Donc, *si* $p>2$, $\mathcal{G}'|\mathcal{G}\equiv G'|GI$ est d'ordre 2, et $(\mathcal{G}'1)=(G,1)$. *Si* $p=2$, $\mathcal{G}'=\mathcal{G}\equiv G$.

17. Pour qu'une substitution

$$\alpha=\begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}x_k+\alpha'_{ik}y_k)=X_i \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik}x_k+\beta'_{ik}y_k)=Y_i \end{vmatrix}\qquad (i,k=1,\ldots,\nu)$$

multiplie a par f, il faut et suffit que l'on ait

$$(1)\quad \Sigma_i(\alpha_{ij}\beta'_{ik}-\beta_{ij}\alpha'_{ik})=\begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k \\ f & \text{si } j=k\end{cases}\qquad (i,j,k=1,\ldots,\nu).$$
$$(2)\quad \Sigma_i(\alpha_{ij}\beta_{ik}-\beta_{ij}\alpha_{ik})=\Sigma_i(\alpha'_{ij}\beta'_{ik}-\beta'_{ij}\alpha'_{ik})=0$$

Comme ici $a^2=-\varepsilon$, ε étant la matrice unité d'ordre n, l'équaquation $\alpha a\bar{\alpha}=fa$ donne $f\alpha^{-1}=-a\bar{\alpha}a$, d'où

$$f\alpha^{-1}=\left|\begin{matrix} x_i & \Sigma_k(\beta'_{ki}x_k-\alpha'_{ki}y_k)=X'_i \\ y_i & \Sigma_k(-\beta_{ki}x_k+\alpha_{ki}y_k)=Y'_i\end{matrix}\right|\qquad (i,k=1,\ldots,\nu),$$

et $\bar{\alpha}a\alpha=fa$ qui montre que G′ (*et de même* G) *contient la transposée de chacune de ses substitutions.*

Les conditions analogues à (1), (2) écrites pour $\bar{\alpha}$ ou pour α^{-1}, *a priori* équivalentes à (1), (2) sont (α^{-1} multiplie a par f^{-1})

$$(3)\quad \Sigma_i(\alpha_{ji}\beta'_{ki}-\beta_{ki}\alpha'_{ji})=\begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k \\ 1 & \text{si } j=k\end{cases}\qquad (i,j,k=1,\ldots,\nu).$$
$$(4)\quad \Sigma_i(\alpha_{ji}\alpha'_{ki}-\alpha'_{ji}\alpha_{ki})=\Sigma_i(\beta_{ji}\beta'_{ki}-\beta'_{ji}\beta_{ki})=0$$

Ces formules ne sont d'ailleurs qu'un cas particulier de celles du n° **3**, celui où $n=2\nu$ et où α est dans $\mathfrak{S}$.

18. Désignons par $(1)_l$, $(2)_l$, $(3)_l$, $(4)_l$ ce que deviennent (1), (2), (3), (4) pour $j=k=l$.

G *contient une* α *dont les deux premières colonnes sont formées d'une solution arbitraire de* $(1)_1$ *pour* $f=1$. Car soit τ une substitution n-aire ayant les deux premières colonnes voulues. Elle transforme a en $(x_1+u)(y'_1+v')-(y_1+v)(x'_1+u')+a_1$, $u, v, a_1\ (=-\bar{a}_1)$ ne contenant ni x_1 ni y_1, et u', v' se déduisant de u, v par l'accentuation des variables. Si donc τ_1 est une substitution qui remplace x_1, y_1 par x_1-u, y_1-v et dont l'action sur x_2, y_2, ... canonise a_1, $\tau_1\tau$ répond à la question. *Les substitutions de cette sorte forment le complexe* $G_1\alpha_0$, α_0 *étant l'une d'elles, et* G_1 *le diviseur de* G *formé des substitutions qui remplacent les* x_i, y_i *où* $i>1$ *par des fonctions de ces seules variables et* x_1, y_1 *par* x_1+X, y_1+Y, X *et* Y *ne dépendant pas de* x_1, y_1 (*cf.* **4**). Or les conditions (1), (2) où l'on fait un des seconds indices égal à 1 montrent que $X = Y = 0$, et que G_1 *est le groupe des substitutions de* $a - (x_1 y'_1 - y_1 x'_1)$, *et est par suite semblable à* $G(n-2, \pi)$.

De même les substitutions de G *dont les deux premières lignes forment une solution donnée de* $(3)_1$ *forment le complexe* $\alpha_0 G_1$, α_0 *étant l'une d'elles, qui existe toujours.*

Comme $(1)_1$ a $\pi^{n-1}(\pi^n - 1)$ solutions (*E.*, 44, 45; on le voit d'ailleurs ici immédiatement), il résulte de là que l'*ordre de* $G(n, \pi)$ *est* $\pi^{\nu^2}\Pi_1^\nu(\pi^{2i}-1)$.

19. G contient évidemment toutes celles des substitutions de $H^0(2\nu, \pi)$ indiquées au n° **6** pour lesquelles ρ est dans $\mathfrak{S}$, et ces substitutions vérifient les relations du n° **7** où ne figure pas l'indice 0.

G *dérive des* τ_i, *des* $u_{i\lambda}$ *et des* $V_{ik\lambda}$ (λ *réel*). Admettons-le en effet pour les valeurs de n inférieures à celle considérée. Il suffit de montrer que, α étant dans G, on peut, en la multipliant à droite par des τ_i, u_i, V_{ik}, la réduire à une substitution de G_1. Or les α_{i1}, β_{i1} n'étant pas tous nuls, on peut en multipliant α à droite par une V, une U, une u ou une m, rendre α_{11} égal à 1, puis, de même, par les V, annuler tous les α_{i1} où $i \neq 1$. On annulera β_{11} par une v, et les β_{i1} où $i \neq 1$ par les W. Alors, d'après (1), $\beta'_{11} = 1$. On pourra donc, par les V, annuler les β'_{i1} où $i \neq 1$. On annulera ensuite α'_{11} par une u, et les α'_{i1} où $i \neq 1$ par les U.

Donc toute substitution de G *a un déterminant égal à* 1 (comme les τ, u, V), *et toute substitution de* G' *qui multiplie a par* ι^k *a un déterminant égal à* $\iota^{k\nu}$. *Donc* $G(2, \pi) = U(2, \pi)$ (*S.*, 74).

20 [1]. Cherchons les p. g. c. d. respectifs Γ et Γ' de $G(n, \pi^2)$ et $G'(n, \pi^2)$ avec $H(n, \pi)$. Toute substitution α de Γ' devra vérifier, en même temps que les équations (4)-(6) du n° **5** (avec $f = 1$, $\eta = 0$), les équations (1)-(4) du n° **17**. En particulier les deux systèmes linéaires formés, l'un des systèmes (5) et (6) du n° **5** où l'on regarde k comme fixe (et $f = 1$, $\eta = 0$), l'autre du système (1) et du second système (2) du n° **17** où l'on regarde aussi k comme fixe, déterminent

---

(1) *Comparer* Dickson, *Linear groups*, **131**.

l'un β'_{ik}, α'_{ik}, l'autre $f^{-1}\beta'_{ik}$, $f^{-1}\alpha'_{ik}$ par les mêmes équations. Donc, $\alpha'_{ik}=f\alpha'_{ik}$, $\beta'_{ik}=f\beta'_{ik}$, et de même $\alpha_{ik}=f\alpha_{ik}$, $\beta_{ik}=f\beta_{ik}$. *Donc d'abord* Γ, *qui correspond à* $f=1$, *est dans* $\mathfrak{S}$, *et ses matrices coïncident avec celles de* $G(n,\pi)$ [les variables de $G(n,\pi)$ différant de celles de $G(n,\pi^2)$, $G(n,\pi)$ n'est qu'un constituant de Γ isomorphe à Γ; mais aucune confusion n'étant à craindre, j'identifierai ici Γ avec $G(n,\pi)$. Ensuite, e désignant un élément $\neq 0$ de α, $f=e\bar{e}^{-1}=e^{1-\pi}$ est une puissance de $\iota'^{\pi-1}$. Or $\mu_{\nu'}$ multiplie précisément a par $\iota'^{1-\pi}$. *Donc, en posant* $\{\mu_{\nu'}\}=M$, $\Gamma'=\Gamma M$, et $(\Gamma',\Gamma)=\pi+1$. Il est clair que Γ' *contient* J, dont chaque substitution multiplie a par une puissance de $\iota'^{2(\pi-1)}$.

Le normalisant $\overline{G}(n,\pi)$ *de* $G(n,\pi)$ *dans* $H(n,\pi)$ *coïncide avec* Γ'. En effet, soit s une substitution de H permutable à G, et $\alpha s=s\alpha'$, α et α' étant dans G. Alors $\alpha s a \bar{s}\bar{\alpha}$ coïncide avec $s\alpha' a \bar{\alpha}'\bar{s}=sa\bar{s}$. Donc $sa\bar{s}=a'(=-\bar{a}')$ est invariante par toute substitution de G. Or, soit

$$a'=\Sigma_{ik}[x_i(a_{ik}x'_k+a'_{ik}y'_k)+y_i(b_{ik}x'_k+b'_{ik}y'_k)].$$

On voit directement que, pour que a' soit invariante par m_i, quel que soit i, il faut que a' ait la forme $\Sigma_i f_i(x_iy'_i-y_ix'_i)$ et que, pour que a' soit encore invariante par les V_{ik}, il faut que les f_i soient égaux. Donc s est dans Γ'.

Soit $\overline{\mathcal{G}}\equiv\overline{G}\,|\,J$ *le groupe déduit de* G *en y regardant les variables comme homogènes. Le normalisant de* $\mathcal{G}\equiv GJ\,|\,J\equiv G\,|\,D$ *dans* $\mathcal{H}\equiv H\,|\,J$ *est* $\overline{\mathcal{G}}$. *Si* $p>2$, $(\overline{\mathcal{G}'},1)=2(\mathcal{G},1)$. *Si* $p=2$, $(\overline{\mathcal{G}},1)=(\mathcal{G},1)$.

Le normalisant $\overline{G^0}$ de G dans H^0 est le p. g. c. d. de $\overline{G}$, H^0. Or G divise H^0, et pour que le déterminant $\iota'^{k\nu(1-\pi)}$ de $\mu_{\nu'}^k$ soit égal à 1, il faut que k soit multiple de $\frac{\pi+1}{\pi'_1}$, π'_1 étant le p. g. c. d. de $\pi+1$, ν. *Donc, si* M^0 *est le diviseur d'ordre* π'_1 *de* M (*c'est-à-dire le p. g. c. d. de* M, H^0), $\overline{G^0}=GM^0$, et $(\overline{G}^0,1)=\pi'(G,1)$.

Soit $\overline{\mathcal{G}^0}\equiv\overline{G^0}\,|\,J^0$ *le groupe déduit de* $\overline{G^0}$ *en y regardant les variables comme homogènes. Le normalisant de* $\mathcal{G}\equiv GJ^0\,|\,J^0\equiv G\,|\,D$ *dans* $\mathcal{H}^0\equiv H^0\,|\,J^0$ *est* $\mathcal{G}^0$. *Si* $p>2$, *et si* $\pi'_1=\pi_1$, $(\overline{\mathcal{G}^0},1)=2(\mathcal{G},1)$. *Si* $p=2$ *ou si* $2\pi'_1=\pi_1$, $(\overline{\mathcal{G}_0},1)=(\mathcal{G},1)$.

21. On a vu que $G(2, \pi) = U(2, \pi)$ (**19**). Pour $n > 2$, $\pi > 2$, on voit comme au n° **10** [1] que $G|D$ est simple. Pour $n > 2$, $\pi = 2$, on voit de même que tout diviseur normal Γ de G non contenu dans D contient les $W_{ik_1} v_{k_1} = v_{k_1} W_{ik_1}$ donc, si $n \geqq 6$, les $W_{ik_1} v_{k_1} . v_{k_1} W_{kl_1} = V_{il_1}^{-1} W_{ik_1} V_{il_1}$ (**7**), donc les W_{ik} et par suite, encore de même, les V_{ik}, U_{ik}, u_i, τ_i, donc G.

Ainsi, en exceptant $G(2, 2) = U(2, 2)$, $G(2, 3) = U(2, 3)$ *et* $G(4, 2)$ *qui va être étudié, tout diviseur normal de* $G(n, \pi)$ *non contenu dans* D *coïncide avec* G; *alors* $\mathcal{G}(n, \pi) \equiv G|D$ *est simple, et* D *est le central de* G (*donc, si* $p > 2$, $\mathcal{G}' \not\equiv G$).

On vérifie d'ailleurs comme au n° **10** que *toute substitution* α *permutable à chaque substitution de* G *est une similitude. Donc le central de* G' *est* I.

22. $G(4, 2)$ *est isomorphe au* g^6 *symétrique* [2]. — En effet, $G(4, 2)$ est un g_{720}^{15} divisant le g^{15} $L(4, 2)$. Or, en désignant par $\mathcal{S}_k$ et $\mathcal{A}_k$ le symétrique et l'alterné de champ 1, ..., k, $L(4, 2) \equiv \mathcal{A}_8$ (*S.*, 70). Donc G est isomorphe à un g_{720}^{8} pair Γ. Si Γ était transitif, il serait primitif, 720 ne divisant ni $4!\,2^4$ ni $2(4!)^2$ (*S.*, 32); mais alors le g_{90}^{7} fixant un symbole serait de degré effectif 7 et contiendrait des s_5 et des s_3^6 [s'il contenait des s_3^3, Γ devrait être semblable à $\mathcal{A}_8$ (*S.*, 42)]; il serait donc transitif tandis que 7 ne divise pas 90. Donc Γ est intransitif, et si les degrés de ses constituants transitifs sont α_1, α_2, ... ($\alpha_i \geqq \alpha_{i+1} \geqq 1$; $\Sigma \alpha_i = 8$), 720 divise $\Pi(\alpha_i!)$, d'où $\alpha_1 = 6$. On peut donc supposer que Γ divise $\{\mathcal{S}_6, 78\}$, et comme Γ est un g_{720}^{8} pair, il ne peut être que le diviseur pair maximum $\mathcal{S}'_6 \equiv \mathcal{S}_6$ de $\{\mathcal{S}_6, 78\}$. On voit par là que *tous les* g_{720}^{8} *de* $\mathcal{A}_8$ *sont conjugués dans* $\mathcal{S}_8$ *et par suite dans* $\mathcal{A}_8$ (car le normalisant de Γ par exemple dans $\mathcal{S}_8$, contenant 12, Γ a le même nombre de conjugués dans $\mathcal{S}_8$ et $\mathcal{A}_8$.

Voici une autre démonstration qui fournit une correspondance de

---

(1) Le second procédé employé au n° **10** pour rendre $\beta_{11} \not\equiv 0$ est seul applicable ici.

(2) M. Jordan a établi ce théorème (*Traité*, n° **335**) à l'aide des groupes de Steiner. On en trouvera encore une preuve indirecte dans une Note déjà citée du 8 novembre 1915 (*Comptes rendus*, t. **161**, p. 553).

générateurs. $\mathfrak{s}_6$ est défini ($S.$, 69) par

$$(5)\quad \begin{cases} s_h^2=(s_i s_{i+1})^3=(s_j s_{j+k})^2=1 \\ (h=1,\ldots,5;\ i=1,2,3,4;\ j=1,2;\ k=2,\ldots,4-j). \end{cases}$$

Or les substitutions τ_1, u_1, u_2, τ_2, $\tau_1 v_2 V_{21} U_{12} v_2$, prises respectivement pour $s_1, \ldots, s_5$, les vérifient. Donc leur p. p. c. m., qui est d'ordre > 2, est isomorphe à $\mathfrak{s}_6$ ($S.$, 66) (¹).

On arrive au même résultat en prenant pour $s_1, \ldots, s_5$ respectivement les substitutions $v_1 v_2 U_{12} v_1 v_2$, $\tau_2 v_1 u_2 u_1 T_{12}$, $W_{12} V_{12} v_2$, $v_1 W_{12} V_{21}$, $u_2 V_{21} U_{12}$.

Il est utile de montrer comment on arrive à ces deux correspondances de générateurs, et comment la seconde conduit à une correspondance *simultanée* des générateurs de $L(4, 2)$, $G(4, 2)$ avec ceux de $\mathcal{A}_8$, $\mathfrak{s}'_6$ [donc de nouveau à l'isomorphisme de $L(4, 2)$ avec $\mathcal{A}_8$].

Les $\mathfrak{s}_2$ impaires de $\mathfrak{s}_6$ se divisent en deux classes, l'une C_1 formée des $\mathfrak{s}_2^2$, l'autre C_2 des $\mathfrak{s}_2^6$. A une $\mathfrak{s}_2$ quelconque $s_{\rho 1}$ de C_ρ on peut en joindre quatre autres $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ (de C_ρ) telles que $s_{\rho 1}, \ldots, s_{\rho 5}$ prises pour $s_1, \ldots, s_5$ vérifient (5). Car on peut toujours écrire $s_{11}=12$, $s_{13}=34$, $s_{15}=56$; alors s_{12}, déplaçant un des symboles déplacés par s_{11} et un des symboles déplacés par s_{13}, mais ne déplaçant aucun de ceux déplacés par s_{15}, peut s'écrire 23; s_{14} peut s'écrire 45; et ces substitutions vérifient (5). De même on peut toujours écrire $s_{21}=12.34.56$, $s_{23}=12.35.46$ (s_{23} a un cycle commun avec s_{21}). Alors $s_{25}=12.36.45$; s_{22}, ayant un cycle commun avec s_{25}, mais n'en ayant aucun avec s_{21} ou s_{23}, peut s'écrire (en transformant au besoin tout par s_{21}, s_{23} ou s_{25}) 15.24.36; alors s_{24} a l'une des deux formes 34.26.15, 56.13.24, et (en transformant au besoin tout par s_{25}) on peut supposer que $s_{24}=13.24.56$. Les s_{2l} vérifiant (5) comme les s_{1l}, *$\mathfrak{s}_6$ a un automorphisme où $s_{11}, \ldots, s_{15}$ répondent à $s_{21}, \ldots, s_{25}$ respectivement.*

En posant

$$\alpha=12=s_{11},\qquad \beta=13=\alpha s_{12}\alpha,\qquad \gamma=14=\beta s_{13}\beta,$$
$$\delta=15=\gamma s_{14}\gamma,\qquad \varepsilon=16=\delta s_{15}\delta,$$

(¹) Dickson, *Linear groups*, 118.

(aux générateurs α, β, γ, δ, ε de s_6 répondent respectivement, dans l'automorphisme considéré,

$$\alpha' = 12.34.56 = s_{21}, \qquad \beta' = 13.26.45 = \alpha' s_{22} \alpha',$$
$$\gamma' = 14.25.36 = \beta' s_{23} \beta', \qquad \delta' = 15.23.46 = \gamma' s_{24} \gamma'.$$
$$\varepsilon' = 16.24.35 = \delta' s_{25} \delta'),$$

on a

$$(6) \qquad \begin{cases} s_{21} = \alpha s_{13} s_{15}, \quad s_{22} = \alpha\gamma\alpha.\delta.\beta\varepsilon\beta, \quad s_{23} = \beta\delta\beta.\gamma\varepsilon\gamma.\alpha, \\ s_{24} = \alpha\gamma\alpha.s_{15}\beta, \quad s_{25} = s_{14}.\beta\varepsilon\beta.\alpha, \end{cases}$$

et les s_{1l} s'expriment par les s_{2l} comme les s_{2l} par les s_{1l}. *L'automorphisme est donc d'ordre* 2.

Considérons maintenant les s_2 de $\mathcal{A}_8$. Elles forment deux classes, l'une de s_2^4, l'autre de s_2^8. Tout g_{720}^8 pair de $\mathcal{A}_8$, pouvant être identifié avec s_6', a aussi deux classes de s_2, l'une C_1 représentée par 12.78, l'autre C_2 par 12.34.56.78. Au point de vue abstrait ces deux classes ont ceci de commun qu'à une s_2 quelconque $s_{\rho 1}$ de C_ρ on peut en adjoindre quatre, $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ vérifiant (5) et ceci de distinct que, si $\rho = 1$, il existe une s_3 $s_{\rho 0}$ vérifiant

$$(7) \qquad s_{\rho 0}^3 = (s_{\rho 0} s_{\rho 1})^3 = (s_{\rho 0} s_{\rho l})^2 = 1 \qquad (l = 2, \ldots, 5),$$

tandis que, si $\rho = 2$, il n'y en a pas. En effet, si $s_{\rho 0}$ existe, elle doit, d'après (7), déplacer 7 et 8 (sans quoi $s_{\rho 0} s_{\rho 1}$ aurait un cycle d'ordre $\neq 3$ contenant 7 et 8), et par suite fixer un au moins des symboles 2, 3, 4, 5, 6. Mais $s_{\rho 0}$ doit être transformée en $s_{\rho 0}^{-1}$ par $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ dont le p. p. c. m. permute transitivement 2, 3, 4, 5, 6. Donc $s_{\rho 0}$ les fixe tous. Donc $s_{\rho 0} = (178)^{\pm 1}$, et $\rho = 1$. $\mathcal{A}_8$ dérive de $s_{10}, s_{11}, \ldots, s_{15}$ et est défini par (5) et (7) (*S.*, 69).

Admettons maintenant qu'il y ait, entre L(4, 2), G(4, 2) d'une part, et $\mathcal{A}_8$, s_6' d'autre part, une correspondance isomorphique simultanée, et cherchons à la réaliser. Je désignerai les objets correspondant à $s_{\rho i}$, C_ρ dans L par les mêmes lettres que dans $\mathcal{A}_8$. On aperçoit de suite dans G quatre substitutions semblables pouvant jouer le rôle de $s_{\rho 1}$, $s_{\rho 2}$, $s_{\rho 4}$, $s_{\rho 5}$ relativement aux équations (5) (on verra plus loin que ces substitutions sont conjuguées, et que $\rho = 2$). Ce sont, en désignant (cf. *S.*, 69) respectivement les points 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111 par *b*,

$c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q,$

$$\begin{aligned}
s_{\rho 1} &= \tau_1 = bc.gi.hk.op.d.e.f.l.m.n.q,\\
s_{\rho 2} &= u_1 = cf.im.kn.pq.b.d.e.g.h.l.o,\\
s_{\rho 4} &= u_2 = el.ho.kp.nq.b.c.d.f.g.i.m,\\
s_{\rho 5} &= \tau_2 = de.gh.ik.mn.b.c.f.l.o.p.q.
\end{aligned}$$

$s_{\rho 3}$ doit leur être semblable et engendrer avec $s_{\rho 1}$, $s_{\rho 5}$ un g_8^{15} abélien Y de classe 8 (*S.*, 82). Donc $s_{\rho 3}$ échange entre eux les systèmes d'intransitivité f, l, q, bc, de, mn, op, $ghik$ de $|s_{\rho 1}, s_{\rho 5}|$. Si $s_{\rho 3}$ déplace un symbole du seul système de degré 4, Y a un constituant régulier (*S.*, 57) de champ $ghik$, et $s_{\rho 3} = gk.hi\ldots$ Mais alors $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (ngk)(him)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe m et n. De même $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (hio)(kgp)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe o et p. Donc $s_{\rho 3}$, qui permute entre eux f, l, q (systèmes de degré 1) et qui ne peut fixer q ($s_{\rho 2}s_{\rho 3}$ aurait le cycle pq) a l'un des cycles fq, lq; dans le premier cas $s_{\rho 2}s_{\rho 3}$ aurait le cycle $cqpf\ldots$ d'ordre > 3, et dans le second cas $s_{\rho 3}s_{\rho 4}$ aurait le cycle $lnqe\ldots$ Donc $s_{\rho 3}$ fixe g, h, i, k. Si $s_{\rho 3} = fl\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (clf)\ldots$, $s_{\rho 4}s_{\rho 3} = (efl)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe c et e, donc b et d, tandis que la classe de G est 8. Si $s_{\rho 3} = lq\ldots$ ou $fq\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (plq)\ldots$ ou $(pfq)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe p, donc o, d'où $s_{\rho 4}s_{\rho 3} = (ho)\ldots$ Donc $s_{\rho 3}$ fixe g, h, i, k, f, l, q et déplace les huit autres symboles. Si $s_{\rho 3} = bc\ldots$, $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (bc)\ldots$; si $s_{\rho 3} = bd\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (bd)\ldots$; si $s_{\rho 3} = be\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (be)\ldots$; si $s_{\rho 3} = bm\ldots$, $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (bm)\ldots$; si $s_{\rho 3} = bn\ldots$, donc $= bn.cm\ldots$, $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (cm)$; si $s_{\rho 3} = bo\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (bo)\ldots$; donc $s_{\rho 3} = bp.co\ldots$ Si $s_{\rho 3} = de\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (de)\ldots$ Donc

$$s_{\rho 3} = bp.co.dn.em.f.g.h.i.k.l.q = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ y_1 & x_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + y_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + x_2 \end{vmatrix} = \tau_1 \nu_2 V_{21} U_{12} \nu_2.$$

Donc $G(4, 2) \equiv \mathfrak{s}_6$. *Donc* G *n'a que deux classes de* s_2. *Donc*, G *contenant, on va le voir, des* s_2^{12}, $s_{\rho 1}$, ..., $s_{\rho 5}$ *sont conjuguées.*

Pour déterminer ρ, cherchons une s_3 $s_{\rho 0}$ vérifiant (7). $s_{\rho 0}$, devant être transformée par $s_{\rho 2}$, ..., $s_{\rho 5}$ en $s_{\rho 0}^{-1}$, ne peut avoir de cycle de la forme $b\xi\eta$, car toutes les déterminations possibles de ξ conduisent à des impossibilités. Donc $s_{\rho 0}$ fixe b, et par suite aussi les 10 symboles

$b, d, e, i, k, l, m, n, p, q$ qui forment un système d'intransitivité de $\{s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}\}$. Les 5 symboles restants formant un second système d'intransitivité du même groupe, $s_{\rho 0}$, qui en fixe nécessairement deux, les fixe tous. *Donc $s_{\rho 0}$ n'existe pas, et* $\rho = 2$.

On a alors, d'après (6),

$$s_{11} = bo.cp.dm.en.gk.hi.f.l.q = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + x_2 + y_2 \\ y_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + y_2 \end{array} \right| = v_1 v_2 \mathrm{U}_{12} v_1 v_2,$$

$$s_{12} = be.cl.df.gn.iq.ko.h.m.p = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_2 + y_2 \\ y_1 & x_2 \\ x_2 & y_1 \\ y_2 & x_1 + y_1 \end{array} \right| = \tau_2 v_1 u_1 u_2 \mathrm{T}_{12},$$

$$s_{13} = bh.ck.dm.gp.io.lq.e.f.n = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + x_2 \\ y_1 & y_1 + x_2 \\ x_2 & x_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + y_2 \end{array} \right| = \mathrm{W}_{12} \mathrm{V}_{12} v_2,$$

$$s_{14} = bo.di.ek.fq.gn.hm.c.l.p = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_2 \end{array} \right| = v_1 \mathrm{W}_{12} \mathrm{V}_{21},$$

$$s_{15} = bg.ci.en.hp.ko.lq.d.f.m = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + y_2 \\ y_1 & y_1 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + x_2 \\ y_2 & y_2 \end{array} \right| = u_2 \mathrm{V}_{21} \mathrm{U}_{12}.$$

$\{s_{12}, \ldots, s_{15}\}$ étant transitif, s_{10} est une s_3^{15}, et les divers essais possibles montrent que le cycle contenant f est flq ou fql, et que tous les autres cycles de s_{10} sont déterminés par celui-là. En échangeant au besoin s_{10} et s_{10}^2, on a

$$s_{10} = beh.cdi.flq.gpn.kom = \left| \begin{array}{ll} x_1 & y_2 \\ y_1 & x_2 \\ x_2 & y_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_2 \end{array} \right|.$$

$s_{11}, \ldots, s_{15}$ et s_{10} vérifiant (5) et (7), la double correspondance isomorphique annoncée est établie.

Comme $s_{21}, \ldots, s_{25}$ répondent à des transpositions de $\mathfrak{s}_6$, le $\mathfrak{g}_{360}$ simple G^0 de G est formé de toutes les substitutions qui sont des produits d'un nombre pair de s_{2i}. En particulier G^0 *contient la* $s_3\, u_1 \tau_1$, *mais ne contient pas*

$$V_{12} = s_{21} s_{25} s_{22} s_{21} s_{23} . s_{25} s_{24} s_{23} s_{22} s_{21} . s_{23}.$$

G (4, 2) *est semblable au* g_{720}^{15} *primitif formé des substitutions opérées par* $\mathfrak{s}_6$ *sur les* 15 *combinaisons des* 6 *symboles* 2 *à* 2 (*S.*, 48) (¹). En effet, si l'on fait correspondre $s_{21}, \ldots, s_{25}$ à 12, 23, 34, 45, 56 respectivement, et si l'on cherche à identifier chaque combinaison avec un des symboles $b, \ldots, q$, de manière que $s_{21}, \ldots, s_{25}$ fixent les mêmes combinaisons que 12, 23, 34, 45, 56, on voit aisément que l'identification est possible mais d'une seule manière : il faut identifier 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 avec $f, c, e, h, g, b, p, k, i, q, n, m, d, e, l$ respectivement.

Les substitutions $s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}$ correspondant à 12, 23, 34, 56 de $\mathfrak{s}_6$, leur p. p. c. m. X correspond au $\mathfrak{g}_{48}\,\{\mathfrak{s}_4, 56\}$. Donc X est le $\mathfrak{g}_{48}$ fixant l dans G (4, 2). X a les deux systèmes d'intransitivité $bcfopq$, $deghikmn$ et un $\mathfrak{g}_8$ normal correspondant à $\{12.34, 13.42, 56\}$.

(¹) Plus généralement, *toutes les représentations du symétrique* $\mathfrak{S}$ *ou de l'alterné* $\mathcal{A}$ *de champ* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *en* g^{15} *transitif sont semblables*. En effet, on a vu que $\mathfrak{S}$ a un automorphisme qui fait correspondre à ses générateurs 12, 13, 14, 15, 16 respectivement les générateurs 12.34.56, 13.26.45, 14.25.36, 15.23.46, 16.24.35 (on le vérifie d'ailleurs directement sur les équations de $\mathfrak{S}$); donc au $\mathfrak{g}_{48}\{12, 13, 14, 56\} = T$, le $\mathfrak{g}_{48}\{12.34.56, 13.26.45, 14.25.36, 12.45.36\} = T'$ (56 est la transformée de 16 par 15). T et T' ne sont pas conjugués, car T a le $\mathfrak{g}_3\{123\}$, et T' le $\mathfrak{g}_3\{164.235\}$. Le p. g. c. d. de T, $\mathcal{A}$ est $B = \{12.56, 13.56, 14.56\}$, et celui de T', $\mathcal{A}$ est $B' = \{35.46, 16.23, 15.24\}$. D'ailleurs T est le seul $\mathfrak{g}_{48}$ de $\mathfrak{S}$ contenant B, car un tel $\mathfrak{g}_{48}$, ayant les constituants symétriques $\{56\}$, $\{12, 13, 14\}$, est leur produit direct. Par suite T' est le seul $\mathfrak{g}_{48}$ de $\mathfrak{S}$ contenant B'. Donc, T et T' n'étant pas conjugués dans $\mathfrak{S}$, B et B' ne le sont pas non plus. Or $\mathcal{A}$ n'a que deux systèmes de $\mathfrak{g}_{24}$ conjugués (*voir*, par exemple, Dickson, *Linear groups*, 260) représentés par B et B'. *Donc* $\mathfrak{S}$ *n'a que deux systèmes de* g_{48} *conjugués représentés par* T *et* T', car si T'' en représentait un troisième, le p. g. c. d. B'' de T'', $\mathcal{A}$ devrait être conjugué de B ou de B', et T'', déterminé par B'', serait conjugué de T ou de T'. De là résulte le théorème (*S.*, 54).

D'après ce qui a été dit de $\mathcal{A}_8$, tout g^{15}_{720} G' de L y est conjugué de G. Donc G' a un invariant bilinéaire a' et se transforme en G quand on prend des variables ramenant a' à la forme canonique a. G' étant donné, on peut déterminer a' par la méthode des coefficients indéterminés, et l'on sait effectuer un changement de variables ramenant a' à a (*E.*, 195).

23. Soit $P_{A(n,\pi)} \doteq \mathbf{P} = P_0$ le p. p. c. m. des V_{1k}, U_{1k} $(k = 2, \ldots, \nu)$, u_1. *En désignant par* $\{u_1\}$ *le* g_π *abélien principal dérivé des* u_1 *(tous normaux dans* P*),* $P|\{u_1\}$ *est un* $g_{\pi^{n-2}}$ *abélien principal (si* $p = 2$, P *est un* $g_{\pi^{n-1}}$ *abélien principal). Les équations de* P *se lisent sur celles indiquées au n°* **15**.

Soit P_1 le $g_{\pi^{n-3}}$ analogue à P dans G_1, et formons de même successivement les groupes $P_2, \ldots$. Toute substitution de P_i est permutable à P_{i-1}, en sorte que $PP_1 \ldots P_{\nu-1} = \mathbf{P}_{A(n,\pi)} = \mathbf{P}$ est un $g_{\pi^{\nu^2}}$ sylowien de G.

Si $n = 2$, $\mathbf{P} = \{u_1\}$ *est abélien. Si* $n > 2$, en adoptant les mêmes notations qu'au n° **15**, on démontre de même que, *pour* $p > 2$, *le* $s^{\text{ième}}$ *central* C_s de $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des* U_{ik}, V_{ik} *figurant dans les s premières transversales du même tableau triangulaire (ici* $\nu_1 = \nu$*), c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i + k \leqq s + 1$ *et des* V_{ik} *où* $k - i \geqq n - s$. *L'ordre de* C_{2r-1} *est* π^{r^2}, *et celui de* C_{2r} *est* $\pi^{r(r+1)}$, *c'est-à-dire que l'ordre de* C_s *est* π^σ, σ *étant le plus grand entier* $\leqq \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$.

Pour $p = 2$, *le* $s^{\text{ième}}$ *central* C_s *de* $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des* U_{ik}, V_{ik} *figurant dans les* $s + 1$ *premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i + k \leqq s + 2$ *et des* V_{ik} *où* $k - i \geqq n - s - 1$. *L'ordre de* C_s *est donc* $\pi^{\sigma+1}$. La différence provient de ce que les U_{kl} admissibles dans C_1 sont ici les U_{11} et les U_{12}, U_{12} étant permutable à V_{12}.

Les substitutions de $\mathbf{P}$ ont la forme générale indiquée au n° **15**, et toute substitution de G ayant cette forme est dans $\mathbf{P}$ (*cf.* **15**). On voit de même ici que *le normalisant de* $\mathbf{P}$ *est* **MP**, **M** *étant le* $g_{(\pi-1)^\nu}$ *p. p. c. m. des* m_i, et que $\mathbf{M}$ $(> D)$ *est son propre normalisant dans* **MP**.

IV. — Groupes quadratiques.

24. Supposons que a soit la forme quadratique à n variables (*E.*, 44, 45)

$$(1) \qquad a = \varphi + \psi, \qquad \varphi = \Sigma_1^{\nu} x_i y_i, \qquad \psi = \psi(x, y) = bxy + cx^2 + c'y^2,$$

b, c, c' étant dans $\mathfrak{S}$, et $b^2 - 4cc' = \delta$ étant $\neq 0$ à moins que $b = cc' = 0$. Je poserai $x = x_0$, $y = y_0$ et, si n est pair, $n = 2\nu'$. Je désignerai par $A''(n, \pi, a)$ le groupe des substitutions qui multiplient a par un carré ($A'' = A'$ si $p = 2$), et par N un non carré quelconque de $\mathfrak{S}$.

Si $n = 2\nu'$, et si ψ est irréductible dans $\mathfrak{S}$ (je dirai alors que a est de la *seconde classe* ou du *second type*), je prendrai pour υ une racine de $\psi(\upsilon, 1)$. Soit alors $\varkappa = \varkappa_0 + \upsilon\varkappa_1$ ($\varkappa_0$ et $\varkappa_1$ étant dans $\mathfrak{S}$) une solution quelconque de $\varkappa\dot{\varkappa} = c$, c'est-à-dire de $\psi(\varkappa_0, -\varkappa_1) = c$ (*cf. E.*, 44, 45), et posons

$$(2) \quad \begin{cases} x_{\nu'} = \varkappa(x - \upsilon y), \qquad y_{\nu'} = \dot{\varkappa}(x - \dot{\upsilon} y) = \dot{x}_{\nu'} \qquad (\nu' = \nu + 1), \\ \text{d'où} \\ c\omega x = -\dot{\varkappa}\dot{\upsilon} x_{\nu'} + \varkappa\upsilon y_{\nu'}, \qquad c\omega y = -\dot{\varkappa} x_{\nu'} + \varkappa y_{\nu'} \qquad (\omega = \upsilon - \dot{\upsilon}). \end{cases}$$

On aura

$$(3) \qquad \psi = x_{\nu'} y_{\nu'}, \qquad a = \Sigma_1^{\nu'} x_i y_i,$$

et la substitution réelle γ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par ι et $x_{\nu'}$ par une racine ξ de $\xi^{\pi+1} = \iota$ (donc $y_{\nu'} = \dot{x}_{\nu'}$ par ξ^{π}) sans altérer les autres variables multiplie a par ι. La substitution réelle μ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par ι, $y_1, \ldots, y_\nu$ par ι^{-1} et $x_{\nu'}$ par $\xi^{1-\pi}$ (donc $y_{\nu'}$ par $\xi^{\pi-1}$) est évidemment dans A, et $\gamma^2 = \mu[\iota]$. Donc γ^2 est dans $A'' = A1$, et, si $p > 2$, $A' = A'' + A''\gamma$ (*cf.* **16**).

Si $n = 2\nu'$, et si ψ est réductible dans $\mathfrak{S}$ (je dirai alors que a est de la *première classe* ou du *premier type*), on pourra supposer, ou bien que $\nu' = \nu$ et que $\psi = 0$, ou bien que $\nu' = \nu + 1$ et que ψ est $\neq 0$. Dans la seconde hypothèse on peut réduire ψ à xy; mais on peut aussi, en désignant par k, k' deux éléments de $\mathfrak{S}$ vérifiant $kk' = c$ et par u, u' les racines réelles de $\psi(u, 1)$, écrire les équations déduites de (2), (3) par la substitution de k, k', u, u' à $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, υ, $\dot{\upsilon}$ respectivement (en omettant $y_{\nu'} = \dot{x}_{\nu'}$); car $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, υ, $\dot{\upsilon}$ n'interviennent dans le calcul que comme vérifiant les relations $\upsilon + \dot{\upsilon} = -\frac{b}{c}$, $\upsilon\dot{\upsilon} = \frac{c'}{c}$, $\varkappa\dot{\varkappa} = c$ vérifiées ici par k, k', u, u'. Alors la substitution γ qui multiplie $x_1, \ldots, x_{\nu'}$, par ι sans altérer les y multiplie a par ι. La substitution μ qui multiplie $x_1, \ldots, x_{\nu'}$ par ι et $y_1, \ldots, y_{\nu'}$ par ι^{-1} est dans A, et $\gamma^2 = \mu[\iota]$. Donc γ^2 est encore dans $A'' = A'$, et, si $p > 2$, $A' = A'' + A''\gamma$.

Ainsi, pour n pair, $A' = \Sigma_0^{\pi-2} A\gamma^h$, $A\gamma^h$ *étant le complexe des substitutions qui multiplient a par ι^h.*

Si $n = 2\nu + 1$, on peut supposer que $\psi = cx^2$ (a sera dite de la *première classe* ou du premier type si c est carré, de la *seconde classe* ou du *second type* si c est non carré). Écrivons $a_c = \varphi + cx^2$. Si $p \neq 2$, a_c est équivalente à a_1 ou à a_N qui ne sont pas équivalentes (*E.*, 44). Mais le changement de variables $y_i = Ny'_i$ ($i = 1, \ldots, \nu$) transforme évidemment le groupe propre et le groupe total de a_1 en ceux de a_N. On peut donc laisser c indéterminé. Pour $p \neq 2$, aucune substitution α ne peut multiplier a par ι^h si h est impair, car $|\alpha a \bar{\alpha}| = |a||\alpha|^2$ (*cf.* **1**) devrait être égal à $|a|\iota^{nh}$. Mais la substitution γ qui multiplie chaque variable par ι multiplie a par ι^2.

Ainsi, pour n impair, si $p \neq 2$, $A' = A'' = AI = \Sigma_0^{\frac{\pi-3}{2}} A\gamma^h$; *si* $p = 2$, $A' = A'' = AI = \Sigma_0^{\pi-2} A\gamma^h$; *dans les deux cas* $A\gamma^h$ *est formé des substitutions qui multiplient a par ι^{2h}.*

Par définition $\mathcal{A}' = A'|I$, et $\mathcal{A} = AI|I = A''|I = A|D$. Donc $\mathcal{A}'|\mathcal{A} \equiv A'|AI$. Si donc $p > 2$ et $n = 2\nu'$, $(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = 2$. Si $p > 2$ et $n = 2\nu + 1$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Si $p = 2$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A} = A$.

L'étude de A^0 et de $\mathcal{A}^0$ sera faite plus loin (**32**).

Pour préciser, lorsque cela sera utile, le groupe de la forme $a = \varphi + \psi$, *ψ étant irréductible ou nulle pour n pair*, je remplacerai les lettres A, $\mathcal{A}$ par Q, $\mathcal{Q}$, et j'ajouterai au besoin à Q ou $\mathcal{Q}$ l'indice inférieur 0, 1 ou 2 selon que ψ dépendra de 0, 1 ou 2 variables; le groupe de ψ sera désigné par Ψ ($\Psi = 1$ si $\psi = 0$), et le p. g. c. d. de Ψ, A^0 par Ψ^0. Enfin, dans le cas où ψ est irréductible, je remplacerai les lettres A, $\mathcal{A}$, Q, $\mathcal{Q}$, Ψ par $\bar{A}$, $\bar{\mathcal{A}}$, $\bar{Q}$, $\bar{\mathcal{Q}}$, $\bar{\Psi}$ lorsqu'il sera utile de préciser que les variables choisies sont $x_1, y_1, \ldots, x_{\nu'}, y_{\nu'}$. Mais quand aucune confusion n'est à craindre, j'identifierai les groupes et les substitutions des variables $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, x, y$ avec leur action sur $x_1, y_1, \ldots, x_{\nu'}, y_{\nu'}$, cette action étant dite leur *forme imaginaire*, et leur action sur $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, x, y$ leur *forme réelle*.

25. *Si $n=1$ et si $a=x^2$*, $A=Q=Q_1$ se réduit évidemment à D.

Si $n=2$, on peut supposer que $a=x_1y_1$ (en faisant $\nu=1$) ou que $a=\psi$, ψ étant irréductible (alors $\nu=0$).

Si $a=x_1y_1$ (avec $\nu=\nu'=1$), on voit directement que $A=Q=Q_0$ *dérive des substitutions* $m_{1\iota}=|\iota x_1, \iota^{-1}y_1|$, $t_1=|y_1, x_1|$ *(l'ordre des variables étant x_1, y_1) et est diédral d'ordre* $2(\pi-1)$. A' *est défini par les équations de* A *jointes à* $\gamma^{\pi-1}=1, \gamma m_{1\iota}=m_{1\iota}\gamma, \gamma^{-1}t_1\gamma=t_1m_{1\iota}$, *ou par les équations du produit direct* $\{m_{1\iota}\}\{\gamma\}$ *jointes à* $t_1^2=1$, $t_1m_{1\iota}t_1=m_{1\iota}^{-1}$, $t_1\gamma t_1=\gamma m_{1\iota}^{-1}$.

Si $a=\psi$, ψ étant irréductible (*donc* $\nu=0$, $\nu'=1$), en posant de même $m_{1\rho}=|\rho x^{-1}, \rho^{-1}y_1|$ ($m_{1\rho}$ n'a donc plus, pour ρ imaginaire, le même sens qu'au n° **2**), $t_1=|y_1, x_1|$, le groupe $A(2,\pi^2)$ de $\psi=x_1y_1$ *dans* $\mathfrak{S}'$ est donc $\{m_{1\iota}, t_1\}$. Pour qu'une substitution $m_{1\rho}t_1^0$ soit dans $\overline{A}(2,\pi)$, il faut et suffit que $\rho^{-1}=\dot\rho$, donc que $\rho^{\pi-2}=1$. *Donc* $\overline{A}(2,\pi)=\overline{Q}(2,\pi)=\overline{Q_2}(2,\pi)=\{m_{1\sigma}, t_1\}$, *$\sigma$ étant d'ordre* $\pi+1$. $\overline{A}(2,\pi)$ *est diédral d'ordre* $2(\pi+1)$. A' *est défini par les équations de* A *jointes à* $\gamma^{\pi-1}=m_{1,\xi^{\pi-1}}, \gamma m_{1\sigma}=m_{1\sigma}\gamma, \gamma^{-1}t_1\gamma=t_1m_{1,\xi^{1-\pi}}$, *$\xi$ ayant le même sens qu'au n°* **24**, *ou, en prenant ξ tel que* $\xi^{\pi-1}=\sigma$ *(en même temps que* $\xi^{\pi+1}=\iota$*) par* $\gamma^{\pi^2-1}=t_1^2=1$, $t_1\gamma t_1=\gamma^\pi$.

Passons aux variables x, y, et soit $s=s_0+\upsilon s_1$ (s_0 et s_1 étant réels) une puissance de σ. La condition nécessaire $s^{\pi+1}=1$ ou $s\dot s=1$ équivaut à $\psi(s_0, -s_1)=1$, et s vérifie l'équation $s^2+b's+1$, en posant $b'=\frac{b}{c}s_1-2s_0$.

Supposons d'abord s non réel et $p>2$. Si l'ordre de s divise $\frac{1}{2}(\pi+1)$, *s est le carré d'une racine ρ de* $\rho^{\pi+1}=1$, *et* $2-b'=(\rho+\rho^\pi)^2$ *est carré dans* $\mathfrak{S}$. *Si inversement* $2-b'$ *est un carré* β^2 *de* $\mathfrak{S}'$, *et si l'on pose* $s=\rho^2$, *on a* $\rho^2\pm\beta\rho+1=0$; *donc ρ est dans $\mathfrak{S}'$ hors de $\mathfrak{S}$ (sans quoi s serait réel), et* $\rho^{\pi+1}=1$.

Si s est réel, $s = \pm 1$ ($s^{\pi+1} = s^{\pi-1} = 1$; alors $b' = \pm 2$), et, si $s = -1$ avec $p > 2$, son ordre 2 ne divise $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ que pour $\pi \equiv 3 \bmod 4$.

L'action de m_{1s} sur x, y est

$$m_{1s} = m_{0s_0s_1} = \left| \begin{array}{ll} x & s_0 x + \dfrac{c'}{c} s_1 y \qquad\quad = \mathrm{X} \\ y & -s_1 x + \left(s_0 - \dfrac{b}{c} s_1\right) y = \mathrm{Y} \end{array} \right| .$$

$m_0 s_0 s_1$ n'est une multiplification que si $s_1 = 0$, donc $s_0^2 = 1$; alors $m_{0s_0s_1} = |s_0 x, s_0 y|$, et j'écrirai aussi m_{0s_0} pour m_{0s_00}. Pour que, en dehors de ce cas, X ou Y soit monome, il faut, dans les deux hypothèses, que $c' s_1^2 = c$, c'est-à-dire que cc' soit carré. Pour que X et Y soient monomes sans que $m_{0s_0s_1}$ soit une multiplication, il faut et il suffit que $s_0 = b = 0$; mais alors, cc' étant carré, ψ n'est irréductible que si -1 est non carré.

En posant $\varkappa\dot{\varkappa}^{-1} = q\,(q\dot{q} = 1)$, l'action de $t_1 m_{1q}$ sur x, y est

$$t_0 = t_1 m_{1q} = \left| \begin{array}{ll} x & x + \dfrac{b}{c} y \\ y & -y \end{array} \right| \qquad (t_0^2 = 1).$$

Les générateurs $m_{0s_0s_1}$, t_0 de $\mathrm{A} = \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_2$ sont, comme il convient, indépendants de $\varkappa$, ce qui n'a pas lieu pour $t_1 = m_{1q} t_0$.

Tout $\mathbf{e}_2$ de A hors de $\{m_{1\sigma}\}$ a la forme

$$t_0 m_{0s_0s_1} = \left| \begin{array}{ll} x & s_0 x + \dfrac{b s_0 - c' s_1}{c} y = \mathrm{X} \\ y & -s_1 x - \quad s_0 y \qquad = \mathrm{Y} \end{array} \right| \qquad (E., 20),$$

qui ne peut se réduire à une multiplication que si $s_1 = 0$, donc $s_0^2 = 1$ et $b = 0$ (mais alors ψ n'est irréductible que si $-cc'$ est non carré). Pour que, en dehors de ce cas, X et Y soient monomes, il faut et suffit que $s_0 = 0$, donc que cc' soit carré. Si donc cc' est carré, on peut remplacer le générateur t_0 par $t_0 m_{1,-\upsilon g} = |g^{-1} y, gx| \left(g^2 = \dfrac{c}{c'}\right)$. Pour que, en dehors de ces cas, X ou Y soit monome, il faut et suffit que

$bs_0 = c's_1$, d'où $s_0^2 = 1$. La substitution

$$u_0 = t_0 m_{0,-1,-\frac{b}{c'}} = \begin{vmatrix} x & -x \\ y & y + \frac{b}{c'} x \end{vmatrix} \qquad (u_0^2 = 1)$$

est analogue à t_0, et $t_0 m_{0,1,\frac{b}{c'}} = u_0 m_{0,-1}$.

L'action de γ sur x, y est, en posant $\xi + \xi_0 + \upsilon\xi_1$ (ξ_0, ξ_1 réels),

$$\gamma = \begin{vmatrix} x & \xi_0 x + \frac{c'}{c}\xi_1 y \\ y & -\xi_1 x + \left(\xi_0 - \frac{b}{c}\xi_1\right) y \end{vmatrix}.$$

En prenant au besoin pour a une forme équivalente, on peut toujours supposer que $c' = c$ ($E.$, 45), d'où $\upsilon^{\pi+1} = 1$, et remplacer alors t_0 par $t'_0 = t_0 m_{1,-\upsilon} = t_1 m_{1,-\upsilon q} = |y, x|$. De même, en changeant au besoin de variables, on peut supposer que $\xi = \upsilon$, donc $c' = \iota c$, et remplacer alors γ par $\gamma' = m_{0,-1} t_0 \gamma = |\iota y, x|$.

Remarque. — *Supposons que* $a = \psi = bxy + cx^2 + c'y^2$, ψ *étant réductible dans* $\mathfrak{S}$ *avec* $c \neq 0$, et définissons k, k', u, u', x_1, y_1 comme au n° **24**, puis s_0 et s_1 par $s = s_0 + us_1$, $s^{-1} = s_0 + u's_1$, en regardant s comme donné. On pourra conserver les définitions précédentes de $m_{0 s_0 s_1} = m_{1s}$, t_1, t_0, t'_0, u_0 et les formules de changements de variables (même celles qui donnent $c' = c$) en remplaçant partout $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, υ, $\dot{\upsilon}$, $\dot{q}$ par k, k', u, u', $q' = k'k^{-1}$, car s, s_0, s_1 et $\dot{q}$ n'ont été employés que comme vérifiant $s = s_0 + \upsilon s_1$, $s^{-1} = s_0 + \dot{\upsilon} s_1$, $\dot{q} = \dot{\varkappa}\varkappa^{-1}$.

Le cas où $a = \psi = xy$ coïncide, à un changement de notation près, avec celui où $a = x_1 y_1$. A dérive alors de $m_{0\iota} = |\iota x, \iota^{-1} y|$, $t_0 = |y, x|$.

26. Soit $n > 2$, et

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}x_k + \alpha'_{ik}y_k) = X_i \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik}x_k + \beta'_{ik}y_k) = Y_i \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu, 0)$$

une substitution de A', en convenant de supprimer toutes les quantités relatives à x ou à y si x ou y ne figure pas dans a. La considération des coefficients de $x_j y_k$, $x_j x_k$, $y_j y_k$, x_j^2, y_j^2 donne, en désignant par b_{jk}, c_j, c'_j les coefficients respectifs de $x_j y_k$, x_j^2, y_j^2 ($j, k \geqq 0$; $c_0 = c$, $b_0 = b$, $c'_0 = c'$) dans a les relations (*cf.* **1**)

$$(4)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta'_{ik}+\beta_{ij}\alpha'_{ik})+\alpha_{0j}(b\beta'_{0k}+2c\alpha'_{0k})+\beta_{0j}(b\alpha'_{0k}+2c'\beta'_{0k})=fb_{jk},$$

$$(5)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta_{ik}+\beta_{ij}\alpha_{ik})+\alpha_{0j}(b\beta_{0k}+2c\alpha_{0k})+\beta_{0j}(b\alpha_{0k}+2c'\beta_{0k})=0 \quad (j\neq k),$$

$$(6)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\beta'_{ik}+\beta'_{ij}\alpha'_{ik})+\alpha'_{0j}(b\beta'_{0k}+2c\alpha'_{0k})+\beta'_{0j}(b\alpha'_{0k}+2c'\beta'_{0k})=0 \quad (j=k),$$

$$(7)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\alpha_{ij}\beta_{ij}+\psi(\alpha_{0j},\beta_{0j})=fc_j,$$

$$(8)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\alpha'_{ij}\beta'_{ij}+\psi(\alpha'_{0j},\beta'_{0j})=fc'_j,$$

où $j, k = 1, \ldots, \nu, 0$.

Pour $p = 2$ et $b = 1$, les équations (4), (5), (6) coïncident (à un changement près des indices) avec les équations (1), (2) du n° **17**. *Donc, pour* $p = 2$, $Q_0(2\nu, \pi)$ *et* $Q_2(2\nu + 2, \pi)$ *sont respectivement semblables à des diviseurs de* $G(2\nu, \pi)$ *et* $G(2\nu + 2, \pi)$. Je dirai que $Q_0(2\nu, \pi)$ et $Q_2(2\nu, \pi)$ sont respectivement, *pour* $p = 2$, le *premier groupe lévoquadratique* et le *second groupe lévoquadratique à* 2ν *variables.*

Soit

$$\alpha^{-1} = \left| \begin{matrix} x_i & \Sigma_k(A_{ik}x_k + A'_{ik}y_k) = X'_i \\ y_i & \Sigma_k(B_{ik}x_k + B'_{ik}y_k) = Y'_i \end{matrix} \right| \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu, 0),$$

en convenant toujours de supprimer les quantités relatives à x ou à y si x ou y ne figure pas dans a.

Pour $p \neq 2$, on a $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, d'où $f\alpha^{-1} = a\bar{\alpha}a^{-1} = 2a.\bar{\alpha}.(2a)^{-1}$, c'est-à-dire

$$(9)\quad fA_{ik} = \beta'_{ki}, \qquad fA'_{ik} = \alpha'_{ki}, \qquad fB_{ik} = \beta_{ki}, \qquad fB'_{ik} = \alpha_{ki} \qquad (i, k \neq 0).$$

Si $\psi = 0$, α^{-1} est explicitement déterminée par (9).

Si $\psi = cx^2$, on a en outre

$$(10)\qquad fA_{i0} = 2\alpha'_{0i}c, \qquad fB_{i0} = 2\alpha_{0i}c \quad (i = 1, \ldots, \nu),$$

$$(11)\qquad 2cfA_{0k} = \beta_{k0}, \qquad 2cfA'_{0k} = \alpha_{k0} \quad (k = 1, \ldots, \nu), \quad fA_{00} = \alpha_{00}.$$

Si $\delta \neq 0$, on a, avec (9).

$$
(12)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
f\mathrm{A}_{i0} = \beta'_{0i} b + 2\alpha'_{0i} c, & f\mathrm{A}'_{i0} = \alpha'_{0i} b + 2\beta'_{0i} c' \\
f\mathrm{B}_{i0} = \beta_{0i} b + 2\alpha_{0i} c, & f\mathrm{B}'_{i0} = \alpha_{0i} b + 2\beta_{0i} c' \\
\delta f\mathrm{A}_{0k} = \beta'_{k0} b - 2\beta_{k0} c', & \delta f\mathrm{A}'_{0k} = \alpha'_{k0} b - 2\alpha_{k0} c' \\
\delta f\mathrm{B}_{0k} = \beta_{k0} b - 2\beta'_{k0} c, & \delta f\mathrm{B}'_{0k} = \alpha_{k0} b - 2\alpha'_{k0} c
\end{array}\right\} (i, k \neq 0),
$$

$$
\begin{array}{ll}
\delta f\mathrm{A}_{00} = \beta'_{00} b^2 + 2\alpha'_{00} bc - 2\beta_{00} bc' - 4\alpha_{00} cc', & \delta f\mathrm{A}'_{00} = \alpha'_{00} b^2 - 2(\alpha_{00} - \beta'_{00}) bc' - 4\beta_{00} c'^2, \\
\delta f\mathrm{B}_{00} = \beta_{00} b^2 + 2(\beta'_{00} - \alpha_{00}) bc - 4\alpha'_{00} c^2, & \delta f\mathrm{B}'_{00} = \alpha_{00} b^2 - 2\alpha'_{00} bc + 2\beta_{00} bc' - 4\beta'_{00} cc'.
\end{array}
$$

Soit $p = 2$. — Comme les valeurs (9), (10), (12) des A_{ik}, A'_{ik}, B_{ik}, B'_{ik} vérifient $\alpha\alpha^{-1} = 1$ dans tout champ où ces valeurs ont un sens, et que chaque ligne de coefficients de α^{-1} est fournie par un système d'équations de déterminant $|\alpha|$ (système qui forme une partie de $\alpha\alpha^{-1} = 1$), elles conviennent encore au cas $p = 2$, et il reste seulement, si $\psi = cx^2$, à résoudre le système

$$
(13)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\Sigma_k \mathrm{A}_{0k}\alpha_{ki} + \mathrm{A}'_{0k}\beta_{ki}) + \mathrm{A}_{00}\alpha_{0i} = c_i, \\
\Sigma_k \mathrm{A}_{0k}\alpha'_{ki} + \mathrm{A}'_{0k}\beta_{ki}) + \mathrm{A}_{00}\alpha'_{0i} = 0
\end{array}\right.
$$

relativement aux A_{0k}, A'_{0k}. Or remarquons que, pour $p = 2$, $\psi = cx^2$, (7) et (8) déterminent les α_{0k}, α'_{0k} où $k \neq 0$ et α_{00} par les autres coefficients, parmi lesquels les α_{i0}, β_{i0} ne figurent que dans celles des équations (4), (5) où $j = 0$ [(5) est ici symétrique en j et k; (4) disparaît pour $k = 0$, et (6) pour $k = 0$ ou $j = 0$].

On peut donc supposer que les α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik}, où i et k sont $\neq 0$, ne sont assujettis qu'à celles des équations (4), (5), (6) où j et k sont $\neq 0$, c'est-à-dire que *leur matrice* M *est une matrice de* $\mathrm{G}(2\nu, \pi)$, et α_{i0}, $\beta_{i0} (i \neq 0)$ qu'à celles des équations (4), (5) où $j = 0$; et comme la matrice de ces dernières équations est M de déterminant 1, $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$ [d'ailleurs A_{i0} et $\mathrm{B}_{i0} (i \neq 0)$ étant nuls d'après (10), il en est de même *a priori* de α_{i0}, $\beta_{i0} (i \neq 0)$]. Donc, d'après (7), $\alpha_{00} = 1$. Donc, la première équation (13) donne, pour $i = 0$, $\mathrm{A}_{00} = 1$ (cela résulte aussi *a priori* de $\alpha_{00} = 1$). Omettons, dans (13), les équations relatives à $i = 0$, remplaçons A_{00} par 1, multiplions la première et la seconde équation une première fois par β'_{li} et β_{li} respectivement, une seconde fois par α'_{li} et α_{li}, et sommons chaque fois en i. On aura, d'après les équations (3) et (4) du n° **17**,

$$
(14)\quad f\mathrm{A}_{0k} = \Sigma_i(\alpha_{0i}\beta'_{ki} + \beta_{ki}\alpha'_{0i}), \qquad f\mathrm{A}'_{0k} = \Sigma_i(\alpha_{0i}\alpha'_{ki} + \alpha_{ki}\alpha'_{0i}).
$$

Mais comme $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$ $(i \neq 0)$ et que α_{0k}, α'_{0k} sont déterminés par M, on voit que, *pour* $p = 2$, $Q(2\nu + 1, \pi)$ *est isomorphe à son action sur* $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$ *qui est* $G(2\nu, \pi)$. *On peut donc omettre les groupes* $A(2\nu + 1, \pi)$ *pour* $p = 2$.

Représentons par $Bxy + Cx^2 + C'y^2 = \Psi(x, y)$ ([1]) la forme 0 si $\psi = 0$ $(p \geqq 2)$, la forme $\frac{x^2}{4c}$ si $\psi = cx^2$ $(p > 2)$, la forme $-\delta^{-1}\psi(y, -x)$ si $\delta \neq 0$ $(p \geqq 2)$, et par B_{jk}, C_j, C'_j les coefficients de $x_j y_k$, x_j^2, y_j^2 dans $\varphi + \Psi$. Les conditions (4)-(8), écrites pour α^{-1} (qui multiplie a par f^{-1}), donnent alors ([2]), *en supposant* $p \neq 2$ *si* $\psi = cx^2$, les relations, *a priori* équivalentes,

$$(15)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\beta'_{ji} + \beta_{ji}\alpha'_{ki}) + \alpha_{k0}(B\beta'_{j0} + 2C\beta_{j0}) + (B\beta_{j0} + 2C'\beta'_{j0})\alpha'_{k0} = fB_{kj},$$

$$(16)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\alpha'_{ji} + \alpha_{ji}\alpha'_{ki}) + \alpha_{k0}(B\alpha'_{j0} + 2C\alpha_{j0}) + (B\alpha_{j0} + 2C'\alpha'_{j0})\alpha'_{k0} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(17)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\beta_{ki}\beta'_{ji} + \beta_{ji}\beta'_{ki}) + \beta_{k0}(B\beta'_{j0} + 2C\beta_{j0}) + (B\beta_{j0} + 2C'\beta'_{j0})\beta'_{k0} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(18)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\alpha_{ji}\alpha'_{ji} + \Psi(\alpha_{j0}, \alpha'_{j0}) = fC_j,$$

$$(19)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\beta_{ji}\beta'_{ji} + \Psi(\beta_{j0}, \beta'_{j0}) = fC'_j.$$

En comparant (15)-(19) à (4)-(8), on voit que, si $\Psi = \psi$, A et A′ contiennent la transposée de chacune de leurs substitutions. La condition $\Psi = \psi$ est toujours remplie si $\psi = 0$ ou si $\pi = 2$. Si $\delta \neq 0$, elle équivaut à $\delta = 1$, $c' = -c$, et pour $p = 2$, on peut toujours la supposer remplie (*E.*, 45).

([1]) On ne confondra pas la forme Ψ avec le groupe Ψ de ψ.

([2]) En désignant les premiers membres de (15), (16), (17), (18), (19) respectivement par w_{kj}, $u_{kj}(= u_{jk})$, $v_{kj}(= v_{jk})$, u_j, v_j, on obtient d'abord directement

$$w_{kj} = u_{kj} = v_{kj} = 0 \qquad (j, k \neq 0),$$

$$\left\{\begin{aligned} b w_{0k} + 2c' v_{k0} &= 0 \\ 2c w_{0k} + b v_{k0} &= 0 \end{aligned}\right. \quad (k \neq 0), \qquad \left\{\begin{aligned} b w_{k0} + 2c u_{k0} &= 0 \\ 2c' w_{k0} + b u_{k0} &= 0 \end{aligned}\right. \quad (k \neq 0),$$

$$\left\{\begin{aligned} (4cc' + b^2) w_{00} + 4bc u_0 + 4bc' v_0 &= b, \\ 2bc w_{00} + 4c^2 u_0 + b^2 v_0 &= c, \\ 2bc' w_{00} + b^2 u_0 + 4c'^2 v_0 &= c', \end{aligned}\right.$$

d'où $w_{0k} = w_{k0} = u_{k0} = v_{k0} = 0$ $(k \neq 0)$, $w_{00} = B$, $u_0 = C$, $v_0 = C'$ (le déterminantdu dernier système est $-\delta^3$).

27. Désignons par $(4)_l$, $(7)_l$, $(8)_l$, $(15)_l$, $(18)_l$, $(19)_l$ ce que deviennent les équations (4), (7), (8), (15), (18), (19) respectivement quand on y fait $j = k = l$.

A *contient une substitution* α *dont les colonnes répondant à* x_l, y_l *forment une solution donnée de* $(7)_l$, $(4)_l$, $(8)_l$ *pour* $f = 1$.

On démontre ce théorème comme le théorème analogue du n° **4**, $F(x_l, y_l)$ étant ici la forme $x_l y_l$, si $l \neq 0$, et la forme ψ si $l = 0$ (¹) : a_l est encore équivalent à $a - F(x_l, y_l)$, car sans cela les deux équations $a = 0$ et $F(x_l, y_l) + a_l = 0$, dont les premiers membres sont équivalents, n'auraient pas, pour chaque système de valeurs de x_l, y_l le même nombre de solutions dans les autres variables.

Comme au n° **4**, *les substitutions* α *de cette sorte forment le complexe* $A_l \alpha_0$, α_0 *étant l'une d'elles, et* A_l *le groupe de* $a - F(x_l, y_l)$.
De même les substitutions de A *dont les lignes répondant à* x_l, y_l *constituent une solution donnée de* $(18)_l$, $(15)_l$, $(19)_l$ *pour* $f = 1$ *forment le complexe* $\alpha_0 A_l$, α_0, *étant l'une d'elles, qui existe toujours.*

Or pour $n > 1$ et $l = 1$, le nombre des solutions autres que 0, 0, ..., 0, de $(7)_1$ est $\pi^{2\nu} - 1$ pour $n = 2\nu + 1$ ($\psi = cx^2$, $p \neq 2$) et $(\pi^{\nu'} - \theta)(\pi^{\nu'-1} + \theta)$ pour $n = 2\nu'$ ($\theta = 1$ si $\psi = 0$ ou si ψ est réductible; $\theta = -1$ si ψ est irréductible; si donc p est $\neq 2$, θ est le caractère quadratique de δ) (*E.*, 44, 45). Il s'agit alors de calculer le nombre m_Σ des solutions de $(4)_1$, $(8)_1$ répondant à une solution autre que 0, 0, ..., 0 de $(7)_1$ [à la solution 0, 0, ..., 0 de $(7)_1$ ne répond aucune

---

(¹) Si $l = 0$ et $\delta \neq 0$, $a' = \tau a \bar{\tau}$ a, d'après la construction de τ, la forme

$$\psi + xX + yY + Z,$$

X, Y et Z ne dépendant pas de x, y. On identifie cette forme avec

$$\psi(x + u, y + v) + a_l$$

en déterminant u, v par $2cu + bv = X$, $bu + 2c'v = Y$.

solution de $(4)_1, (8)_1$]. Or, on voit comme au n° **4** que m_Σ est indépendant de Σ. En prenant pour Σ la solution $1, 0, \ldots, 0$, $(4)_1$ donne $\beta'_{11}=1$; on peut alors prendre arbitrairement les α'_{i1}, β'_{i1} où i est $\neq 1$, α'_{11} étant alors déterminé par $(8)_1$. Donc $m_\Sigma = \pi^{n-2}$. *Donc l'ordre de* $A(n, \pi)$, *qui est* 2 *pour* $n=1$, *et* $2(\pi-\theta)$ *pour* $n=2$ (**25**), *est* $2\pi^{\nu^2}\Pi_1^\nu(\pi^{2i}-1)$ *pour* $n=2\nu+1$ $(p>2)$, *et* $2\pi^{\nu'(\nu'-1)}(\pi^{\nu'}-\theta)\,\Pi_1^{\nu'-1}(\pi^{2i}-1)$ *pour* $n=2\nu'>2$ $(p\geqq 2)$.

Si $p>2$, on peut réduire $a=(a_{ik})$ à $\Sigma_1^{n-1}x_i^2+cx^2$ ($c=1$ ou N). Pour que $\alpha=(\alpha_{ik})$ soit dans A', il faut et suffit que

$$\Sigma_{i=1}^{n-1}\alpha_{ij}\alpha_{ik}+c\alpha_{nj}\alpha_{nk}=fa_{jk}.$$

La condition analogue relative à α^{-1} est, en posant $a^{-1}=(a'_{ik})$,

$$\Sigma_{i=1}^{n-1}\alpha_{ji}\alpha_{ki}+c^{-1}\alpha_{jn}\alpha_{kn}=fa'_{jk}.$$

On voit de même que les substitutions de A *dont la première colonne* (*ligne*) *est une solution donnée de*

$$\Sigma_1^{n-1}\alpha_{i1}^2+c\alpha_{n1}^2=1 \qquad (\Sigma_1^{n-1}\alpha_{1i}^2+c^{-1}\alpha_{1n}^2=1)$$

forment le complexe $A_1\alpha_0(\alpha_0 A_1)$, α_0 *étant l'une d'elles, qui existe toujours, et* A_1 *le groupe de* $a-x_1^2$. On déduit plus simplement de là l'ordre de A.

28. A (n, π) contient évidemment, outre les générateurs réels déjà indiqués (**25**) de Ψ (t_0 désignera $|x, -x|$, si $\psi=cx^2$, et $|y, -y|$, si $\psi=c'y^2$) les substitutions

$$t_i=\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i\end{vmatrix},\qquad m_{i\lambda}=\begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1}y_i\end{vmatrix},\qquad V_{ik\lambda}=\begin{vmatrix} x_i & x_i+\lambda x_k \\ y_k & y_k-\lambda y_i\end{vmatrix},$$

$$V_{0k\lambda}=\begin{cases}\begin{vmatrix} x & x+\lambda x_k \\ y_k & y_k-b\lambda y-2c\lambda x-c\lambda^2 x_k\end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } x,\\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } x,\end{cases}$$

$$V_{k0\lambda}=\begin{cases}\begin{vmatrix} y & y-\lambda y_k \\ x_k & x_k+b\lambda x+2c'\lambda y-c'\lambda^2 y_k\end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } y,\\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } y\end{cases}$$

(i, $k \neq 0$; α réel; les variables non écrites sont inaltérées) et leurs combinaisons

$$t_{jj'} = t_{j'j} = t_j t_{j'} \quad (j \neq j';\ j, j' = 0, \ldots, \nu), \qquad d_{ik} = m_{i,-1} m_{k,-1},$$

$$U_{ik\lambda} = U_{ki,-\lambda} = t_k V_{ik\lambda} t_k = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda y_k \\ x_k & x_k - \lambda y_i \end{vmatrix},$$

$$W_{ik\lambda} = W_{ki,-\lambda} = t_i V_{ik\lambda} t_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda x_i \end{vmatrix} \quad ({}^1),$$

$$U_{0k\lambda} = U_{k0,-\lambda} = t_k V_{0k\lambda} t_k = \begin{cases} \begin{vmatrix} x & x + \lambda y_k \\ x_k & x_k - b\lambda y - 2c\lambda x - c\lambda^2 y_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } x, \\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } x, \end{cases}$$

$$W_{0k\lambda} = W_{k0,-\lambda} = t_k V_{k0,-\lambda} t_k = \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y + \lambda x_k \\ y_k & y_k - b\lambda x - 2c'\lambda y - c'\lambda^2 x_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } y, \\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } y, \end{cases}$$

$$R_{ik\lambda} = R_{ki,-\lambda^{-1}} = R_{ik,-\lambda} d_{ik} = V_{ik\lambda} V_{ki,-\lambda^{-1}} V_{ik\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_k \\ y_i & \lambda^{-1} y_k \\ x_k & -\lambda^{-1} x_i \\ y_k & -\lambda y_i \end{vmatrix} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$\begin{aligned} S_{ik\lambda} &= S_{ki,-\lambda} = t_k R_{ik\lambda} t_k = t_i R_{ik,\lambda^{-1}} t_i \\ &= U_{ik\lambda} W_{ik,\lambda^{-1}} U_{ik\lambda} = W_{ik,\lambda^{-1}} U_{ik\lambda} W_{ik,\lambda^{-1}} = \end{aligned} \begin{vmatrix} x_i & \lambda y_k \\ y_i & \lambda^{-1} x_k \\ x_k & -\lambda y_i \\ y_k & -\lambda^{-1} x_i \end{vmatrix} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$\begin{aligned} T_{ik} &= m_{k\lambda}^{-1} m_{i,-\lambda} R_{ik\lambda} = R_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda} \\ &= t_{ik} m_{k\lambda} m_{i,-\lambda} S_{ik\lambda} = S_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda}^{-1} t_{ik} = \end{aligned} \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \\ x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{vmatrix} \quad (i,\ k \neq 0).$$

---

(1) Les définitions précédentes, celles qui vont suivre et leurs conséquences gardent évidemment leur valeur si λ est hors de $\mathfrak{S}$. Elles sont alors relatives à un groupe $A(n, \pi^i)$ où i est > 1. On voit que, si ρ dans $\mathfrak{S}$, $m_{1\rho}$, $V_{ik\rho}$, $U_{ik\rho}$, $W_{ik\rho}$ coïncident respectivement avec les substitutions $\overline{m}_{i\rho}$, $V'_{ik\rho}$, $U'_{ik\rho}$, $W'_{ik\rho}$ du n° 9. Cela n'a plus lieu si ρ est hors de $\mathfrak{S}$.

Il sera parfois commode de négliger le dernier indice dans les substitutions m, V, U, W, et les deux derniers dans $m_{0s_0s_1}$.

Il résulte des formules précédentes que t_{ik}, *pour* i *et* $k \neq 0$, *transforme* $V_{ik\lambda}$ *en* $V_{ki-\lambda}$, *et* $U_{ik\lambda}$ *en* $W_{ik\lambda}$. De même, en posant $\tau = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$, et en écrivant $t_0^{(c)}$, $u_0^{(c')}$, $V_{0k\lambda}^{(c)}$, $V_{k0\lambda}^{(c')}$, $U_{0k\lambda}^{(c)}$, $W_{0k\lambda}^{(c')}$ pour t_0, u_0, $V_{0k\lambda}$, $V_{k0\lambda}$, $U_{0k\lambda}$, $W_{0k\lambda}$ afin de mettre en évidence le paramètre c ou c' dont dépendent les substitutions, la s_2 τt_k (qui transforme ψ en $\psi' = bxy + c'x^2 + cy^2$, donc Ψ en Ψ', Ψ' étant le groupe de ψ') transforme $t_0^{(\gamma)}$ en $u_0^{(\gamma)}$, $V_{0k\lambda}^{(\gamma)}$ en $V_{k0,-\lambda}^{(\gamma)}$ et $U_{0k\lambda}^{(\gamma)}$ en $W_{0k\lambda}^{(\gamma)}$. Cette remarque permet de déduire de chaque relation entre les V, U, W une nouvelle relation analogue.

29. Les substitutions ainsi définies vérifient, outre les équations de Ψ (**25**), les relations suivantes (¹) :

$$(20) \left\{ \begin{array}{lll} t_j^2 = V_{jj'\lambda}^p = 1, & V_{jj'\lambda}^{-1} = V_{jj',-\lambda} & (j, j' = 0, \ldots, \nu), \\ R_{ik\lambda}^2 = S_{ik\lambda}^2 = d_{ik}, & R_{ik\lambda}^4 = S_{ik\lambda}^4 = 1 & (i, k = 1, \ldots, \nu); \end{array} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} t_i m_{i\lambda} t_i = m_{i\lambda}^{-1}, & t_0 m_{0s_0s_1} t_0 = m_{0s_0s_1}^{-1} \\ t_{ik} V_{ik\lambda} t_{ik} = V_{ki,-\lambda}, & t_{ik} U_{ik\lambda} t_{ik} = W_{ik\lambda} \end{array}\right\} \quad (i, k \neq 0); \\ \left.\begin{array}{ll} m_{i\mu}^{-1} V_{ij\lambda} m_{i\mu} = W_{ij,\lambda\mu}, & m_{k\mu}^{-1} V_{jk\lambda} m_{k\mu} = V_{jk,\frac{\lambda}{\mu}} \\ m_{i\mu}^{-1} W_{ij\lambda} m_{i\mu} = W_{ij,\frac{\lambda}{\mu}}, & m_{k\mu}^{-1} U_{jk\lambda} m_{k\mu} = U_{jk,\lambda\mu} \end{array}\right\} \quad (j \lesseqgtr 0); \\ \text{si } \psi = cx^2, \quad t_0 V_{0k\lambda} t_0 = V_{0k,-\lambda}; \qquad \text{si } \psi = c'y^2, \quad t_0 V_{k0\lambda} t_0 = V_{k0,-\lambda}; \\ \text{si } \delta \neq 0, \qquad t_0 V_{0k\lambda} t_0 = V_{0k\lambda}, \qquad t_0 V_{k0\lambda} t_0 = V_{k0\lambda} U_{k0,-\frac{b\lambda}{c}}, \\ \left.\begin{array}{l} m_{0s_0s_1}^{-1} V_{0k\lambda} m_{0s_0s_1} = V_{0k,\lambda s_0} W_{0k,-\lambda s_1} \\ m_{0s_0s_1}^{-1} V_{k0\lambda} m_{0s_0s_1} = V_{k0,\left(s_0 - \frac{b}{c} s_1\right)\lambda} U_{k0,\frac{c'}{c} s_1 \lambda} \end{array}\right\} \quad [\psi(s_0, -s_1) = c]; \\ \qquad (\text{si } c' = c, \ t'_0 V_{0k\lambda} t'_0 = W_{0k\lambda}, \ t'_0 V_{k0\lambda} t'_0 = U_{k0\lambda}); \end{array} \right.$$

(¹) Les formules (23), (25), (27) se tirent respectivement des formules (22), (24), (26) en transformant ces dernières par des t; (28) résulte de (22) et (23); la seconde et la quatrième des relations (24) sont les transformées de la première et de la troisième par τt_{ik} : la dernière des relations 26) est la transformée de la précédente par τt_k.

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{c} V_{ik\lambda}V_{il\mu} = V_{il\mu}V_{ik\lambda} \qquad (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ V_{kl\lambda}^{-1}V_{ik\mu}V_{kl\lambda} = V_{ik\mu}V_{il,-\lambda\mu} \\ V_{ik\lambda}^{-1}V_{ki\mu}V_{ik\lambda} = V_{ki,\frac{\varphi}{\lambda^2\mu}}^{-1}\, m_{k,-\lambda^2\mu}\, m_{i,\lambda^2\mu}^{-1}\, T_{ik}\, V_{ki,\frac{\varphi'}{\lambda^2\mu}}^{-1} \quad (^1) \\ (\varphi = 1 + \lambda\mu,\ \varphi' = 1 - \lambda\mu) \end{array}\right\} \quad (i, k, l \neq 0);$$

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{c} V_{kl\lambda}V_{il\mu} = V_{il\mu}V_{kl\lambda}, \\ V_{ik\lambda}U_{il\mu} = U_{il\mu}V_{ik\lambda}, \qquad V_{kl\lambda}W_{il\mu} = W_{il\mu}V_{kl\lambda} \\ U_{ik\lambda}U_{il\mu} = U_{il\mu}U_{ik\lambda}, \qquad W_{ik\lambda}W_{il\mu} = W_{il\mu}W_{ik\lambda} \\ \text{(dans ces cinq formules, } k \text{ peut être égal à } l\text{)} \\ U_{kl\lambda}^{-1}V_{ik\mu}U_{kl\lambda} = V_{ik\mu}U_{il,-\lambda\mu} \\ W_{kl\lambda}^{-1}U_{ik\mu}W_{kl\lambda} = U_{ik\mu}V_{il,-\lambda\mu} \\ V_{kl\lambda}^{-1}W_{ik\mu}V_{kl\lambda} = W_{ik\mu}W_{il,-\lambda\mu} \end{array}\right\} \quad (i, k, l \neq 0);$$

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{c} V_{0k\lambda}V_{ik\mu} = V_{ik\mu}V_{0k\lambda}, \qquad V_{k0\lambda}V_{ki\mu} = V_{ki\mu}V_{k0\lambda} \\ V_{ki\mu}^{-1}V_{0k\lambda}V_{ki\mu} = W_{ik,c\lambda^2\mu}V_{0i,-\lambda\mu}V_{0k\lambda} \\ V_{ik\mu}^{-1}V_{k0\lambda}V_{ik\mu} = U_{ik,c\lambda^2\mu}V_{i0,\lambda\mu}V_{k0\lambda} \end{array}\right\} \quad (i, k \neq 0);$$

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{c} U_{0k\lambda}U_{ik\mu} = U_{ik\mu}U_{0k\lambda}, \qquad W_{k0\lambda}W_{ki\mu} = W_{ki\mu}W_{k0\lambda} \\ U_{0k\lambda}V_{ki\mu} = V_{ki\mu}U_{0k\lambda}, \qquad W_{k0\lambda}V_{ik\mu} = V_{ik\mu}W_{k0\lambda} \\ V_{0k\lambda}W_{ik\mu} = W_{ik\mu}V_{0k\lambda}, \qquad V_{k0\lambda}U_{ki\mu} = U_{ki\mu}V_{k0\lambda} \\ W_{ki\mu}^{-1}U_{0k\lambda}W_{ki\mu} = V_{ki,-c\lambda^2\mu}V_{0i,-\lambda\mu}U_{0k\lambda} \\ V_{ik\mu}^{-1}U_{0k\lambda}V_{ik\mu} = U_{ik,-c\lambda^2\mu}U_{0i,\lambda\mu}U_{0k\lambda} \\ U_{ik\mu}^{-1}V_{0k\lambda}U_{ik\mu} = V_{ik,-c\lambda^2\mu}U_{0i,\lambda\mu}V_{0k\lambda} \\ U_{ik\mu}^{-1}W_{k0\lambda}U_{ik\mu} = V_{ik,-c'\lambda^2\mu}V_{i0,\lambda\mu}W_{k0\lambda} \\ V_{ki\mu}^{-1}W_{k0\lambda}V_{ki\mu} = W_{ik,c'\lambda^2\mu}W_{0i,\lambda\mu}W_{k0\lambda} \\ W_{ik\mu}^{-1}V_{k0\lambda}W_{ik\mu} = V_{ki,c'\lambda^2\mu}W_{i0,\lambda\mu}V_{k0\lambda} \end{array}\right\} \quad (i, k \neq 0);$$

---

(1) En remplaçant $m_{k,-\lambda^2\mu}\, m_{i,\lambda^2\mu}^{-1}\, T_{ik}$ par $R_{ki,\lambda^{-2}\mu^{-1}}$, on réduit le second membre à $V_{ki,\lambda^{-1}}^{-1}V_{ik,-\lambda^2\mu}V_{ki,\lambda^{-1}}$, c'est-à-dire que $V_{ik\lambda}^{-1}V_{ki\mu}V_{ik\lambda}$ ne change pas quand on remplace respectivement i, k, λ, μ par k, i, λ^{-1}, $-\lambda^2\mu$, ce qui échange φ et φ'.

Si $\varphi \neq 0$, on a encore la formule

$$V_{ik\lambda}^{-1}V_{ki\mu}V_{ik\lambda} = V_{ik,-\frac{\lambda^2\mu}{\varphi}}V_{ki,\mu\varphi}\, m_{k\varphi}^{-1}\, m_{i\varphi},$$

d'où, par les changements précédents, si $\varphi' \neq 0$,

$$V_{ik\lambda}^{-1}V_{ki\mu}V_{ik\lambda} = V_{ki,\frac{\mu}{\varphi'}}V_{ik,-\lambda^2\mu\varphi'}\, m_{i\varphi'}^{-1}\, m_{k\varphi'}.$$

$$
(26)\left\{
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad V_{k0\lambda}\,U_{k0\mu} = U_{k0\mu}\,V_{k0\lambda},\\
V_{0l\mu}^{-1}\,V_{k0\lambda}\,V_{0l\mu} = V_{kl,-b\lambda\mu}\,V_{k0\lambda}, \qquad V_{l0\mu}^{-1}\,V_{k0\lambda}\,V_{l0\mu} = U_{kl,2c'\lambda\mu}\,V_{k0\lambda},\\
\qquad\qquad V_{0l\mu}^{-1}\,U_{0k\lambda}\,V_{0l\mu} = V_{kl,2c\lambda\mu}\,U_{0k\lambda},\\
V_{0k\lambda}^{-1}\,V_{k0\mu}\,V_{0k\lambda} = m_{0s_0s_1}\,m_{k\varphi}\,U_{0k,-c\lambda\mu^2}\,V_{k0,\frac{\mu(1-b\lambda\mu)}{\varphi^2}}\,W_{k0,\frac{c\lambda^2\mu}{\varphi}}\,V_{0k,\frac{\lambda\mu^2(cc'\lambda\mu-b)}{\varphi}},\\
s_0 = \dfrac{1-cc'\lambda^2\mu^2}{\varphi}, \qquad s_1 = \dfrac{c\lambda\mu(2-b\lambda\mu)}{\varphi} \qquad [\psi(s_0,-s_1)=c],\\
\qquad\qquad \varphi = 1 - b\lambda\mu + cc'\lambda^2\mu^2 \qquad (\partial \neq 0);\\
V_{0k\lambda}^{-1}\,U_{0k\mu}\,V_{0k\lambda} = \left\{
\begin{array}{ll}
U_{0k,\frac{\mu}{\varphi}}\,V_{0k,c\lambda^2\mu\varphi}\,m_{k\varphi^2} & \text{si } \varphi = 1 + c\lambda\mu \text{ est } \neq 0 \text{ (1)},\\
U_{0k,\frac{2}{c\lambda}}\,m_{k,-c\lambda^2}\,m_{0,-1}^{\varepsilon}\,t_{0k} & \text{si } \varphi = 0\\
\multicolumn{2}{l}{\quad(\varepsilon = 1 \text{ si } \psi \text{ dépend de } y;\ \varepsilon = 0 \text{ si } \psi = cx^2);}
\end{array}\right.\\
V_{k0\lambda}\,W_{0k\mu}\,V_{k0\lambda}^{-1} = \left\{
\begin{array}{ll}
W_{0k,\frac{\mu}{\varphi'}}\,V_{k0,-c'\lambda^2\mu\varphi'}\,m_{k\varphi'^2}^{-1} & \text{si } \varphi' = 1 + c'\lambda\mu \text{ est } \neq 0,\\
W_{0k,\frac{2}{c'\lambda}}\,m_{k,-c'\lambda^2}^{-1}\,m_{0,-1}^{\varepsilon}\,u_0\,t_k & \text{si } \varphi' = 0\\
\multicolumn{2}{l}{\quad(\varepsilon = 1 \text{ si } \psi \text{ dépend de } x;\ \varepsilon = 0 \text{ si } \psi = c'y^2);}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
(27)\left\{
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{V_{0k\lambda}\,W_{0k\mu} = W_{0k\mu}\,V_{0k\lambda},}\\
V_{0l\mu}^{-1}\,W_{k0\lambda}\,V_{0l\mu} = W_{lk,b\lambda\mu}\,W_{k0\lambda}, & V_{0l\mu}\,V_{0k\lambda}\,V_{0l\mu} = W_{kl,2c\lambda\mu}\,V_{0k\lambda},\\
U_{0l\mu}^{-1}\,V_{k0\lambda}\,U_{0l\mu} = U_{lk,b\lambda\mu}\,V_{k0\lambda}, & U_{0l\mu}^{-1}\,U_{0k\lambda}\,U_{0l\mu} = U_{kl,2c\lambda\mu}\,U_{0k\lambda},\\
V_{l0\mu}^{-1}\,W_{k0\lambda}\,V_{l0\mu} = V_{lk,-2c'\lambda\mu}\,W_{k0\lambda}, & W_{l0\mu}^{-1}\,V_{k0\lambda}\,W_{l0\mu} = V_{kl,2c'\lambda\mu}\,V_{k0\lambda},\\
U_{0l\mu}^{-1}\,W_{k0\lambda}\,U_{0l\mu} = V_{lk,b\lambda\mu}\,W_{k0\lambda}, & W_{l0\mu}^{-1}\,W_{k0\lambda}\,W_{l0\mu} = W_{kl,2c'\lambda\mu}\,W_{k0\lambda};
\end{array}\right.
$$

$$
(28)\qquad
\begin{array}{l}
R_{ik\lambda}\,S_{ik\mu} = S_{ik\mu}\,R_{ik\lambda}\\
\quad = (V_{ik\lambda}\,U_{ik\mu})\left(V_{ki,\frac{-1}{\lambda}}\,W_{ik,\frac{1}{\mu}}\right)(V_{ik\lambda}\,U_{ik\mu}) =
\end{array}
\left|\begin{array}{ll}
x_i & -\lambda\mu\,y_i\\
y_i & -\dfrac{1}{\lambda\mu}\,x_i\\
x_k & -\dfrac{\mu}{\lambda}\,y_k\\
y_k & -\dfrac{\lambda}{\mu}\,x_k
\end{array}\right|;
$$

---

(1) En changeant λ en $-\lambda$, et en posant $\mu(1-c\lambda\mu) = \mu'$, $\dfrac{\lambda}{1-c\lambda\mu} = \lambda'$ (d'où $\lambda'\mu' = \lambda\mu$), on peut écrire cette équation sous la forme

$$V_{0k\lambda}\,U_{0k\mu} = m_{k,\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}\,U_{0k\mu'}\,V_{0k\lambda}.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{R}_{ik\lambda}\mathrm{S}_{ik\mu})^2 = 1, \qquad \mathrm{R}_{ik\lambda}\mathrm{S}_{ik\mu} = t_{ik}\, m_{i,-\lambda\mu}\, m_{k,-\frac{\mu}{\lambda}}, \\ t_{ik} = \mathrm{R}_{ik1}\mathrm{S}_{ik,-1} = \mathrm{R}_{ik,-1}\mathrm{S}_{ik1}, \qquad m_{i\lambda^2} = t_{ik}\mathrm{R}_{ik\lambda}\mathrm{S}_{ik,-\lambda}, \\ m_{i\lambda}m_{k\lambda}^{-1} = \mathrm{R}_{ik,-1}\mathrm{R}_{ik\lambda}, \qquad m_{i\lambda}m_{k\lambda} = \mathrm{S}_{ik,-1}\mathrm{S}_{ik\lambda}, \\ m_{i,\frac{\mu}{\lambda}}\, m_{k,\frac{\lambda}{\mu}} = \mathrm{R}_{ik,-\lambda}\mathrm{R}_{ik\mu} = \mathrm{V}_{ki\sigma'}\mathrm{V}_{ik\rho'}\mathrm{V}_{ki\sigma}\mathrm{V}_{ik\rho}, \\ 1 + \rho\sigma = 1 + \rho'\sigma' = \dfrac{\mu}{\lambda}, \qquad \rho' = -\dfrac{\rho\lambda}{\mu}, \qquad \sigma' = -\dfrac{\sigma\mu}{\lambda}, \\ \text{d'où, en transformant par } t_k, \\ m_{i,\frac{\mu}{\lambda}}\, m_{k,\frac{\mu}{\lambda}} = \mathrm{S}_{ik,-\lambda}\mathrm{S}_{ik\mu} = \mathrm{W}_{ki\sigma'}\mathrm{U}_{ik\rho'}\mathrm{W}_{ki\sigma}\mathrm{U}_{ik\rho}. \end{array}\right.$$

30. A(n, π) *dérive de* Ψ, *des* t, *des* m *et des* V (*cf.* **8**). En effet, soit α une substitution de A, et reprenons les notations du n° **26**. Les éléments de la première colonne de α n'étant pas tous nuls, on peut, en multipliant à droite par une V, une U [1] ou une $m_{1\lambda}t_1^\theta$ ($\theta = 0$ ou 1), rendre α_{11} égal à 1, puis de même, par les V et les W, annuler les α_{i1}, β_{i1} où $i \neq 1$. Alors, d'après (7), $\beta_{11} = 0$, et, d'après (4), $\beta'_{11} = 1$. On pourra donc, par les V et les U, annuler les β'_{i1}, α'_{i1} où $i \neq 1$. Alors, d'après (8), $\alpha'_{11} = 0$, et l'on est ramené à une substitution de A_1 (**27**).

Donc, toute substitution de A(n, π) *a un déterminant égal à* ± 1 (pour $p \neq 2$, cela résultait déjà de $\alpha a \bar{\alpha} = a$, d'où $|\alpha|^2 = 1$). *Donc, pour* $p \gtrless 2$, *le p. g. c. d. de* A, I *est* D, *ce qui détermine l'ordre de* $\mathcal{A}$.

31. Pour obtenir de même un système de générateurs de $\overline{\mathrm{Q}}_2(n, \pi)$, il suffit d'exprimer les générateurs de Ψ et les V_{0i}, V_{i0} par les générateurs de $\mathrm{Q}_0(n, \pi^2)$. Or, d'après le n° **25**, en écrivant $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$, $t_{\nu'}$, $m_{\nu'\sigma}$ ($\nu' = \nu + 1$) pour x_1, y_1, t_1, $m_{1\sigma}$, on a d'abord

$$m_{0s_0s_1} = m_{\nu's}, \qquad s = s_0 + \upsilon s_1, \qquad \psi(s_0, -s_1) = c \qquad (s_0,\ s_1 \text{ réels}),$$
$$t_0 = t_{\nu'}m_{\nu'q}, \qquad q = \varkappa\dot{\varkappa}^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad q\dot{q} = 1$$
$$(\text{si } c' = c, \text{ donc } \upsilon\dot{\upsilon} = 1,\ t'_0 = t_{\nu'}m_{\nu',-q\upsilon}).$$

---

[1] Si $\delta \gtrless 0$, $2c\alpha_{01} + b\beta_{01}$ et $b\alpha_{01} + 2c'\beta_{01}$ ne peuvent s'annuler à la fois. Si donc, pour $\delta \gtrless 0$, les α_{i1}, β_{i1} où $i \gtrless 0$ sont nuls, on pourra rendre α_{11} égal à 1 en multipliant à droite par une U_{01} ou une V_{10}.

Déterminons maintenant $\rho = \rho_0 + \upsilon\rho_1$ (ρ_0 et ρ_1 réels) par les conditions

$$\varkappa\rho\upsilon - \dot{\varkappa}\dot{\rho}\dot{\upsilon} = c\lambda(\upsilon - \dot{\upsilon}), \qquad \varkappa\rho - \dot{\varkappa}\dot{\rho} = c\mu(\upsilon - \dot{\upsilon}),$$

λ et μ étant arbitraires dans $\mathfrak{S}$ (le déterminant de ces équations en ρ_0, ρ_1 est δc^{-1}), d'où

$$\varkappa\rho + \dot{\varkappa}\dot{\rho} = 2c\lambda + b\mu, \qquad \varkappa\rho\upsilon + \dot{\varkappa}\dot{\rho}\dot{\upsilon} = -2c'\mu - b\lambda, \qquad \rho\dot{\rho} = \psi(\lambda, \mu).$$

On aura

$$(30)\quad P_{i\rho} = V_{i\nu'\rho}U_{i\nu'\dot{\rho}} = U_{i\nu'\dot{\rho}}V_{i\nu'\rho} = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \rho\dot{\rho}y_i + \rho x_{\nu'} + \dot{\rho}y_{\nu'} \\ x_{\nu'} & x_{\nu'} - \dot{\rho}y_i \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} - \rho y_i \end{vmatrix} = U_{i0\lambda}V_{i0\mu},$$

d'où, en transformant par t_i et en changeant λ, μ en $-\lambda$, $-\mu$,

$$(31)\quad \begin{aligned} O_{i\rho} &= t_i P_{i,-\rho} t_i \\ &= W_{\nu' i\rho}V_{\nu' i\dot{\rho}} = V_{\nu' i\dot{\rho}}W_{\nu' i\rho} = \end{aligned} \begin{vmatrix} y_i & -\rho\dot{\rho}x_i + y_i - \rho x_{\nu'} - \dot{\rho}y_{\nu'} \\ x_{\nu'} & x_{\nu'} + \dot{\rho}x_i \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} + \rho x_i \end{vmatrix} = V_{0i\lambda}W_{0i\mu} \quad (^1).$$

En faisant λ ou μ nul, on obtient l'expression de $V_{i0\mu}$, $V_{0i\lambda}$, $U_{i0\lambda}$, $W_{0i\mu}$ par les générateurs de $Q_0(n, \pi^2)$. Mais comme le p. p. c. m. $\overline{P}_i$ des $P_{i\rho}$ ($P_{i\rho}$ contient deux paramètres réels) coïncide avec celui P_i des $V_{i0\mu}$, $U_{i0\lambda}$ (abélien principal d'ordre π^2), *on peut prendre pour générateurs de* $\overline{Q}_2(n, \pi)$ *les* $P_{i\rho}$, *joints aux générateurs de* $Q_0(n-2, \pi)$ *et de* Ψ.

Remarque. — Supposons ψ réductible, δ et c étant $\neq 0$. Définissons u, u', k, k', s comme aux n^{os} **24** et **25**, et posons $r = r_0 + ur_1$, $r' = r_0 + u'r_1$. Écrivons encore $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$, $t_{\nu'}$, $m_{\nu'\sigma}$ ($\nu' = \nu + 1$) pour x_1, y_1, t_1, $m_{1\sigma}$. On pourra conserver les formules précédentes en y remplaçant υ, $\dot{\upsilon}$, $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, ρ, $\dot{\rho}$, ρ_0, ρ_1 par u, u', k, k', r, r', r_0, r_1 (r_0 et r_1 sont déterminés par r et r', et inversement). Mais ici $V_{i\nu' r}$, $V_{\nu' i r'}$, $U_{i\nu' r}$, $W_{\nu' i r}$, qui conservent $\Sigma_1^{\nu'} x_i y_i$ s'expriment *a priori* par les x_i, y_i,

(1) On voit directement que $V_{i\nu'\rho}U_{i\nu'\sigma}$ n'est dans $\mathfrak{S}$ que si $\sigma = \dot{\rho}$.

x, y en substitutions de A, et pour préciser,

$$V_{i\nu' r} = U_{i0,\lambda_1 u}\, V_{i0\lambda_1}, \qquad \lambda_1 = \frac{kr}{c(u-u')};$$

$$V_{\nu' i r'} = V_{0i,\lambda'_1 u'}\, W_{i0\lambda'_1}, \qquad \lambda'_1 = \frac{k' r'}{c(u'-u)}.$$

52. *Supposons ψ irréductible. Des formules* (28)-(31), *en posant* $-\rho\dot{\rho} = \chi$, $-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = s\,(s\dot{s} = 1)$, *il résulte que* $t_{i\nu'} m_{\iota\chi} m_{\nu' s} = P_{i\rho} t_i P_{i,-\frac{\rho}{\chi}} t_i P_i$ *est réelle.*

Si $s = 1$, *le système des équations en* ρ *équivaut à* $\rho^2 = \chi$, $\rho\dot{\rho} = -\chi$ *et est compatible toujours et seulement si* $\chi\delta$ (¹) *est carré dans* $\mathfrak{S}$.

Si $s = -1$, *la condition de compatibilité est que* $-\chi$ *soit carré dans* $\mathfrak{S}$.

Si s *est* $\neq \pm 1$ (*donc* $\neq \dot{s}$) *et vérifie* $s^2 + b's + 1 = 0$, l'équation $-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = s$ revient, en posant $\rho = \rho'_0 + s\rho'_1$ (ρ'_0, ρ'_1 réels) et $\rho_2 = \frac{\rho'_0}{b'+1}$, à $\rho = \rho_2(1-\dot{s})$, et l'équation $-\rho\dot{\rho} = \chi$ à $\rho_2^2 = \frac{\chi(2-b')}{b'^2-4}$. *La condition de compatibilité équivaut donc à celle que* $\chi\delta(2-b')$ *ou* $\chi\delta(s+s^{-1}+2)$ *soit carré dans* $\mathfrak{S}$. *En particulier :* 1° *si* $p > 2$, *et si* $\chi\delta$ *est carré, la condition revient à celle que l'ordre de* s *divise* $\frac{\pi+1}{2}$, *c'est-à-dire que* s *soit le carré d'une racine d'équation quadratique réciproque* (*irréductible puisque* $s \neq \dot{s}$) (*cf.* **25**); 2° *si* $s = q$, *la condition est que* $\chi\delta c$ *soit carré, et cela même si* $q = \pm 1$ (car si $q = 1$, c est carré dans $\mathfrak{S}$, et si $q = -1$, $-c = \varkappa^2$ est non carré dans $\mathfrak{S}$); 3° *si* $s = -\upsilon$, *la condition est que* $\chi\delta c(b+2c)$ *soit carré dans* $\mathfrak{S}$.

On a donc, d'après ce qui précède, $M\delta$ désignant un carré de $\mathfrak{S}$, l'expression par les V_{0i}, V_{i0}, U_{0i}, W_{0i} :

(¹) δ est introduit ici en vue du cas où ψ est réductible, qui sera étudié tout à l'heure.

1° De $m_{\nu' s} = (m_{iM}^{-1} t_{i\nu'})(t_{i\nu'} m_{iM} m_{\nu' s})$ si l'ordre de s divise $\frac{\pi+1}{2}$, ou si $s = -1$ et $\pi \equiv 3 \pmod 4$ (*cf.* **39**) [1];

2° De $t_{0i} m_{i,cM} = t\ \ m_{i,cM} m_{\nu' q}$;

3° Si $c' = c$, de $t_i t'_0 m_{i,b-2c} = \left(t_{i\nu'} m_{i,\frac{c}{M}} m_{\nu' q}\right)\left(m_{i,\frac{M}{c^2}} t_{i\nu'}\right) t_{i\nu'} m_{i,c(b-2c)} m_{\nu'_1-\nu})$.

Remarque I. — Supposons ψ réductible, δ et c étant $\neq 0$ [2]. Les résultats précédents subsistent en y remplaçant, comme au n° **31**, υ, $\dot{\upsilon}$, $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, ρ, $\dot{\rho}$, ρ_0, ρ_1 par u, u', k, k', r, r', r_0, r_1 et $\dot{s}$ par $s' = s^{-1}$ (réel). On le voit par des raisonnements tout semblables.

Remarque II. — Soit $\psi = cx^2$. Alors $t_0 = |x, -x|$, et l'on a

$$t_{0k} m_{k,-c\lambda^2} = m_{k,-\frac{1}{c\lambda^2}} t_{0i} = U_{0k\lambda} V_{0k,\frac{1}{c\lambda}} U_{0k\lambda}.$$

En transformant par τt_k (*cf.* **28, 29**), on a une formule analogue pour $t_{0k} m_{k,-c'\lambda^2}$ si $\psi = c'y^2$.

33. Il est clair que $Q_0(n, \pi)$ et $Q_1(n, \pi)$ (n ayant la parité de l'indice de Q) divisent $\overline{H}(n, \pi)$ (**9**). Cherchons les p. g. c. d. respectifs $\Gamma_\eta(n, \pi^2)$, $\Gamma'_\eta(n, \pi^2)$ de $Q_\eta(n, \pi^2)$, $Q'_\eta(n, \pi^2)$ ($\eta = 0, 1$) avec $\overline{H}(n, \pi)$ (*cf.* **20**). Une substitution α de Γ'_η devra vérifier, en même temps que les équations $(\overline{4})$-$(\overline{6})$ du n° **9** (avec $f = 1$), les équations (4)-(8)

---

(1) Dans la quatrième des formules (26), pour que l'ordre de $s = s_0 + \upsilon s_1$ divise $\frac{\pi+1}{2}$ (alors s_1 est $\neq 0$, donc $2 - b\lambda\mu \neq 0$), il faut et suffit que la quantité $h = 2 + 2s_0 - \frac{b}{c} s_1$ soit un carré k^2. Mais comme $\varphi h = (2 - b\lambda\mu)^2 (\neq 0)$, φ est en même temps un carré, et la formule considérée fournit, d'après (29), une expression de $m_{0 s_0 s_1}$ par les V, U, W. Pour que $s = -1$, il faut et suffit que $b\lambda\mu = 2$, et que $\varphi = cc'\lambda^2\mu^2 - 1$, d'où $b^2\varphi = -\delta$. Donc φ n'est alors carré que si $\pi \equiv 3 \pmod 4$: dans ce cas, on a de même, d'après (29), une expression de $m_{0 s_0 s_1}$ par les V, U, W (*cf.* **39**).

(2) On ramène immédiatement le cas où $c = 0$, $c' \neq 0$ au cas $c \neq 0$, et le cas $c = c' = 0$ au cas $\psi = 0$. Il est toujours entendu d'ailleurs que le cas où ψ est réductible ne diffère lui-même que par un changement de variables du cas $\psi = 0$.

du n° **26**. En particulier les deux systèmes linéaires

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\dot{\beta}_{ik}+\beta_{ij}\dot{\alpha}_{ik})+2\eta c\alpha_{0j}\dot{\alpha}_{0k}=2\eta\dfrac{c_j c_k}{c} \\ \qquad (j=0,\ldots,\nu), \\ \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\dot{\beta}_{ik}+\beta'_{ij}\dot{\alpha}_{ik})+2\eta c\alpha'_{0j}\alpha'_{0k}=b_{jk} \\ \qquad (j=1,\ldots,\nu), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta_{ik}+\beta_{ij}\alpha_{ik})+2\eta c\alpha_{0j}\alpha_{0k}=2\eta f\dfrac{c_j c_k}{c} \\ \qquad (j=0,\ldots,\nu), \\ \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\beta_{ik}+\beta'_{ij}\alpha_{ik})+2\eta c\alpha'_{0j}\alpha_{0k}=fb_{jk} \\ \qquad (j=1,\ldots,\nu) \end{cases}$$

où k est supposé fixe, donnent $\dot{\beta}_{ik}=f^{-1}\beta_{ik}$, $\dot{\alpha}_{jk}=f^{-1}\alpha_{jk}$ $(i=1,\ldots,\nu;\ j=0,\ldots,\nu)$. De même $\dot{\beta}'_{ik}=f^{-1}\beta'_{ik}$, $\dot{\alpha}'_{jk}=f^{-1}\alpha'_{jk}$ $(i=1,\ldots,\nu;\ j=0,\ldots,\nu)$.

Donc d'abord Γ_η, *qui correspond à* $f=1$, *coïncide avec* $Q_\eta(n,\pi^2)$. Ensuite f est une puissance de $\iota'^{\pi-1}$, et même, pour n impair, de $\iota'^{2(\pi-1)}$ $\left[\text{car alors } \alpha a\bar{\alpha}=fa\,(p>2),\text{ d'où } |\alpha|^2=f^n,\text{ et } |\alpha|^{\pi+1}=1\ (\mathbf{2}),\text{ donc } f^{n\frac{\pi+1}{2}}=1\right]$.

Soit d'abord $n=2\nu$, *donc* $\eta=0$. Posons $\overline{m}_{i\rho}=\begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \dot{\rho}^{-1}y_i\end{vmatrix}$ (**9**), $\mu_\rho=\Pi_1^\nu\overline{m}_{i\rho}$, $\{\mu_{\iota'}\}=\mathrm{M}$. Comme $\mu_{\iota'}$ multiplie a par $\iota'^{1-\pi}$, on a $\Gamma'_0=\mathrm{M}\Gamma_0$, M étant premier à Γ_0; $(\Gamma'_0,\Gamma_0)=\pi+1$, et Γ'_0 contient J, dont chaque substitution a par $\iota'^{2(\pi-1)}$.

Soit $n=2\nu+1$, *donc* $\eta=1$ *et* $p\neq 2$. Le produit μ de $|x,\iota'^{\pi-1}x|$ par $\Pi_1^\nu\overline{m}_{i\iota'}^2$ multiplie a par $\iota'^{2(\pi-1)}$. Donc $\Gamma'_1=\{\mu\}\Gamma_1$, $\{\mu\}$ étant premier à Γ_1, et $(\Gamma'_1,\Gamma_1)=\frac{1}{2}(\pi+1)$. On a évidemment aussi $\Gamma'_1=\mathrm{J}\Gamma_1$; mais le p. g. c. d. de J, Γ_1 est D, d'ordre 2.

Considérons maintenant $\overline{Q}'_2(n,\pi)$ $(n=2\nu',\ \nu'=\nu+1)$. Soit α une de ses substitutions, et reprenons les notations du n° **26**. D'après la forme de a avec les variables de $\overline{Q}'_2$, les coefficients de α satisfont aux mêmes conditions que si α était dans $Q'_0(n,\pi^2)$. Dans les p. g. c. d. respectifs $\overline{\Gamma}_2(n,\pi)$ et $\overline{\Gamma}'_2(n,\pi)$ de $\overline{Q}_2(n,\pi)$ et $\overline{Q}'_2(n,\pi)$ avec $\overline{H}(n,\pi)$

divisant respectivement $\Gamma_0(n, \pi^2)$ et $\Gamma'_0(n, \pi^2)$. Mais de plus : 1° les α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} où i et k sont $\leqq \nu$ sont réels; 2° X_i et Y_i étant réels pour $i \leqq \nu$, et $x_{\nu'}$ conjugué de $y_{\nu'}$, $\alpha_{i\nu'}$ est conjugué de $\alpha'_{i\nu'}$, et $\beta_{i\nu'}$ de $\beta'_{i\nu'}$; 3° $X_{\nu'}$ étant conjugué de $Y_{\nu'}$, $\alpha_{\nu' i}$ est conjugué de $\beta_{\nu' i} (i \leqq \nu)$, $\alpha'_{\nu' i}$ de $\beta'_{\nu' i} (i \leqq \nu)$, $\alpha_{\nu'\nu'}$ de $\beta'_{\nu'\nu'}$, et $\alpha'_{\nu'\nu'}$ de $\beta_{\nu'\nu'}$.

Or on a, en désignant par e un élément quelconque de α, $e = f\dot{e}$. La relation $\dot{\alpha}_{i\nu'} = \alpha'_{i\nu'} (i \leqq \nu)$, jointe à $\alpha_{i\nu'} = f\dot{\alpha}_{i\nu'}$, $\alpha'_{i\nu'} = f\dot{\alpha}'_{i\nu'}$, donne $\alpha_{i\nu'} = f^2 \alpha_{i\nu'}$. De même $\beta_{i\nu'} = f^2 \beta_{i\nu'}$, $\alpha_{\nu'\nu'} = f^2 \alpha_{\nu'\nu'}$, $\beta_{\nu'\nu'} = f^2 \beta_{\nu'\nu'}$. Donc $f^2 = 1$. Si $f = -1$, l'équation $\dot{e} = fe$ montre que e a la forme $(\upsilon - \dot{\upsilon}) e_0$, e_0 étant réel. La comparaison des relations (4) et (5) pour $k = \nu'$ donne d'ailleurs $(\alpha_{\nu'\nu'} - \beta_{\nu'\nu'})^2 = 1$, ou, en posant $\alpha_{\nu'\nu'} = (\upsilon - \dot{\upsilon}) r$, $\beta_{\nu'\nu'} = (\upsilon - \dot{\upsilon}) s$, ($r$ et s réels), $(r - s)^2 = \delta$, ce qui est absurde. *Donc* $f = 1 \, (p \geqq 2)$, *d'où* $\overline{\Gamma}'_2 = \overline{\Gamma}_2 \leqq Q_0(n, \pi)$, *et de plus, pour* $i \leqq \nu$, $\alpha_{i\nu'} = \alpha'_{i\nu'}$, $\beta_{i\nu'} = \beta'_{i\nu'}$, $\alpha_{\nu' i} = \beta_{\nu' i}$, $\alpha'_{\nu' i} = \beta'_{\nu' i}$, $\alpha_{\nu'\nu'} = \beta'_{\nu'\nu'}$, $\alpha'_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$, *avec* $(\alpha_{\nu'\nu'} - \beta_{\nu'\nu'})^2 = 1$. Il est clair que $\overline{\Gamma}_2$ *contient toutes les substitutions de* $Q_0(n, \pi)$ *qui vérifient ces conditions*, en particulier les $P_{i\lambda}$ où λ est réel et les $m_{\nu' s}$, $m_{\nu' s} t_{\nu'}$ où s est réel, donc égal à ± 1 [car $s^{\pi+1} = 1$ **(23)**].

Or, en multipliant au besoin α à droite par une $P_{i\lambda}$ ou une $O_{i\lambda}$, on peut annuler $\alpha_{\nu'\nu'}$ ou $\beta_{\nu'\nu'}$ [si tous les $\alpha_{i\nu'}$, $\beta_{i\nu'}$ où $i \leqq \nu$ sont nuls, $\alpha_{\nu'\nu'} \beta_{\nu'\nu'} = 0$ d'après (7)]. En multipliant ensuite au besoin à droite par $t_{\nu'}$ et $m_{\nu', -1}$, on peut réduire $\alpha_{\nu'\nu'} = \beta'_{\nu'\nu'}$, à 1, et $\alpha'_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$ à 0. Si alors les $\alpha_{i\nu'}$, $\beta_{i\nu'}$ où $i \leqq \nu$ ne sont pas tous nuls, on les annulera de même tous sauf un à l'aide des V, U, W, puis le dernier à l'aide d'une P. Or, leur nullité entraîne [d'après (5), (6) pour $k = \nu'$] celle des $\alpha_{\nu' i} = \beta_{\nu' i}$, $\alpha'_{\nu' i} = \beta'_{\nu' i}$. *Donc* $\overline{\Gamma}_2$ *dérive de* $Q_0(2\nu, \pi)$, *des* $P_{i\lambda}$ *et de* $\{m_{\nu', -1}, t_{\nu'}\}$.

Pour préciser davantage, *soit d'abord* $p \neq 2$. Remplaçons les variables $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$ par $x = \frac{1}{2}(x_{\nu'} + y_{\nu'})$, $y = \frac{1}{2}(x_{\nu'} - y_{\nu'})$, d'où $\psi = x^2 - y^2$. Convenons en outre de négliger la nature des variables x, y, qui sont imaginaires, et d'identifier les substitutions avec leurs matrices. Alors $P_{i\lambda}$, $O_{i\lambda}$ et $t_{\nu'} m_{\nu', -1}$ deviennent respectivement $U_{i0\lambda}$, $V_{0i\lambda}$, t_0 du groupe de $\Sigma_1^\nu x_i y_i + x^2$. *Donc le p. p. c. m.* $\overline{\Gamma}_2^0$ *de* $Q_0(2\nu, \pi)$, *des* $P_{i\lambda}$, *des* $O_{i\lambda}$ *et de* $t_{\nu'} m_{\nu', -1}$ *est semblable à* $Q_1(2\nu + 1, \pi)$. *Chaque substitution de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *est permutable à*

$t_{\nu'} = |y, -y|$, et l'on verra au n° **34** que $\overline{\Gamma}_2$ *est le produit direct de* $\overline{\Gamma}_2$ *par* $\{t_{\nu'}\}$. *L'indice de* $\overline{\Gamma}_2$ *dans* $Q_0(n, \pi)$ *est* $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu+1} - \pi^\nu)$ (*cf.* **27**).

Soit $p = 2$ (donc $m_{\nu,-} = 1$). Posons $x = x_{\nu'} + y_{\nu'}$, $y = y_{\nu'}$, d'où $\psi = xy + y^2$. Alors, avec les mêmes conventions, $P_{i\lambda}$ et $O_{i\lambda}$ deviennent respectivement $V_{i0\lambda}$, et $W_{0i\lambda}$ du groupe de $\Sigma_1^\nu x_i y_i + y^2$. *Donc le p. p. c. m. de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *de* $Q_0(2\nu, \pi)$, *des* $P_{i\lambda}$ *et des* $O_{i\lambda}$ *est semblable à* $Q_1(2\nu + 1, \pi)$ [$\equiv G(2\nu, \pi)$ (**26**)]. *Chaque substitution de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *est permutable à* $t_{\nu'} = |x, x + y|$, et l'on verra au n° **34** que $\overline{\Gamma}_2$ *est encore le produit direct de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *par* $\{t_{\nu'}\}$. L'indice de $\overline{\Gamma}_2$ dans $Q_0(n, \pi)$ *est ici* $\pi^{2\nu+1} - \pi^\nu$.

On voit d'ailleurs comme au n° **20** que, *dans* $\overline{H}(n, \pi)$, *le normalisant de* $\overline{\Gamma}_\eta$ *est* $\overline{\Gamma}'_\eta(\eta = 0, 1)$, *et celui de* $\overline{\Gamma}_2$, $\overline{\Gamma}'_2 = \overline{\Gamma}_2$.

34. *Soit, pour* $p > 2$, comme précédemment, $A^0(n, \pi)$ *le diviseur de* A *formé des substitutions de déterminant* 1, *donc normal dans* A' : il est clair que $(A, A^0) = 2$. *On peut encore définir* A^0 *comme le p. p. c. m. des substitutions* $t_{jj'}, V_{jj'}, U_{jk}, W_{jk}, m_j(j, j' \geqq 0; k > 0)$, car ce p. p. c. m. A'_0 est évidemment $\leqq A^0$ et permutable à t_j, en sorte que $A'_0 + t_j A'_0$ est un groupe contenant tous les générateurs de A. Si d'ailleurs ψ est irréductible, la forme imaginaire $\overline{A}^0(n, \pi) = \overline{Q}_2^0(n, \pi)$ de A^0 est évidemment le p. g. c. d. de $\overline{Q}$ et de $Q_0^0(n, \pi^2)$.

Pour $p = 2$ (n pair), *la seconde définition que j'adopterai désormais, a un sens;* mais elle ne permet pas d'affirmer de suite que $(A, A^0) = 2$, ni, si $A^0 < A$, que A^0 soit normal dans A'.

Je dis que, même si $p = 2$, $(A, A^0) = 2$ (et l'on verra au n° **39** que A^0 *est encore normal dans* A'). Pour le démontrer, supposons d'abord $\psi = 0$, et considérons la quadrique Φ définie par $\Sigma_1^\nu x_i y_i = 0$, les 2ν coordonnées étant homogènes et variant dans $\mathfrak{S}$. Soit L la variété définie par un système s_ν de ν équations linéaires indépendantes entre les x_i, y_i. Soit ρ le rang du déterminant des coefficients des x_i dans s_ν. Supposons que le déterminant des coefficients de $x_1, \ldots, x_\rho$ dans les ρ premières équations de s_ν soit $\neq 0$, résolvons-les en $x_1, \ldots, x_\rho$, et portons les valeurs de $x_1, \ldots, x_\rho$ dans les $\nu - \rho$ dernières équations : d'après l'hypothèse faite sur le rang, $x_{\rho+1}, \ldots, x_\nu$ disparaîtront de ces $\nu-\rho$ équations. Résolvons le système $s_{\nu-\rho}$ de ces $\nu-\rho$ équations (qui sont indépendantes) par rapport à $\nu-\rho$ des y_i choisis de telle manière que le nombre α des y_i d'indice $\leqq \rho$ soit minimum. On peut évidemment choisir l'ordre des x (qui détermine celui des y d'après l'équation de Φ) de manière que ces $\nu-\rho$ y_i soient $y_1, \ldots, y_\alpha$ $(\alpha \leqq \rho)$, $y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta}$ $(\alpha+\beta=\nu-\rho)$. Comme on vient de le voir, *ces $\nu-\rho$ y_i ne dépendent d'aucun x*. De plus, *si $\alpha \geqq 1$, $y_1, \ldots, y_\alpha$ ne dépendent pas des y_i où i est $> \rho+\beta$*, car si y_i, par exemple, dépendait de $y_{\rho+\beta+1}$, on pourrait résoudre $s_{\nu-\rho}$ en $y_2, \ldots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta+1}$ contre l'hypothèse faite sur α. Je supposerai qu'on a porté dans $x_1, \ldots, x_\rho$ les expressions de $y_1, \ldots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta}$ par les autres y.

Cherchons maintenant les conditions pour que L soit sur Φ (je dirai qu'alors L est une *génératrice* de Φ). Portons pour cela dans $\Sigma_1^\nu x_i y_i = 0$ les expressions obtenues de $x_1, \ldots, x_\rho, y_1, \ldots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta}$. Les termes $\Sigma_1^{\rho+\beta} x_i y_i$ ne fournissent aucun terme $x_k y_k$ où k soit $> \rho+\beta$; car $\Sigma_1^\alpha x_i y_i$ ne fournit aucun terme où y ait un indice $> \rho+\beta$, et il en est de même de $\Sigma_{\alpha+1}^{\rho} x_i y_i$ et $\Sigma_{\rho+1}^{\rho+\beta} x_i y_i$, puisque $y_{\alpha+1}, \ldots, y_\rho$ et $x_{\rho+1}, \ldots, x_{\rho+\beta}$ sont des variables indépendantes. Donc $\rho+\beta=\nu$, $\alpha=0$, et l'on peut supposer que les équations de L ont la forme

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 \;\;= b_{11}\, y_1 + \ldots + b_{1\rho}\, y_\rho + b_{1,\rho+1}\, x_{\rho+1} + \ldots + b_{1\nu}\, y_\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_\rho \;\;= b_{\rho 1}\, y_1 + \ldots + b_{\rho\rho}\, y_\rho + b_{\rho,\rho+1}\, x_{\rho+1} + \ldots + b_{\rho\nu}\, y_\nu, \\ y_{\rho+1} = b_{\rho+1,1}\, y_1 + \ldots + b_{\rho+1,\rho}\, y_\rho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_\nu \;\;= b_{\nu 1}\;\, y_1 + \ldots + b_{\nu\rho}\, y_\rho. \end{array}\right.$$

On voit alors directement que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_1^\nu x_i y_i = 0$ soit identiquement vérifiée par ces expressions est que la matrice (b_{ik}) des coefficients de $y_1, \ldots, y_\rho, x_{\rho+1}, \ldots, x_\nu$ dans (E) soit alternée. Je dirai que ρ est le *genre de* (E) *ou de* L [ρ n'est pas le rang de (b_{ik})] *et de toute variété qui se déduit de* (E) *par une permutation des indices des x et des y.*

Une vérification simple montre que $m_{i\lambda}$ et $V_{ik\lambda}$ ne changent pas le genre de (E) (on distinguera les quatre cas : i, $k \leqq \rho$; $i \leqq \rho$; $k > \rho$; $i > \rho$,

$k \leqq \rho$; i, $k > \rho$), tandis que t_i le fait varier d'une unité [si $i > \rho$, t_i le fait croître de 1, et il en est de même pour $i \leqq \rho$ si un des ν coefficients $b_{i,\rho+1}, \ldots, b_{i\nu}$ tel que b_{ik} est $\neq 0$, puisqu'on peut alors résoudre (E) par rapport à x_k, y_i et aux *autres* x, y des premiers membres; si $b_{i,\rho+1}, \ldots, b_{i\nu}$ sont tous nuls, le genre diminue de 1].

Donc les $t_l V_{ikl} t_l$ et les t_{ik} ne changent pas la parité du genre de (E). *Donc* A^0, *p. p. c. m. de ces substitutions et des* $m_{i\lambda}$, *ne change pas cette parité, tandis que* t_i *la change. Donc, si* $\psi = 0$, $(A, A^0) = 2$.

Si n est pair et $\psi \neq 0$, l'expression des générateurs de A par ceux de $Q_0(n, \pi)$ ou de $Q_0(n, \pi^2)$ selon que ψ est réductible ou non (**24**, **31**, **32**) montre qu'*il en est encore de même.*

Si n est impair ($p > 2$), *on est ramené au cas de n pair*, en considérant A comme un diviseur du groupe $a + y^2$ (pour $\psi = cx^2$).

33. *Arrêtons-nous au cas de n pair*, et disons que les génératrices de genre pair sont *paires*, et forment le *premier système* ou le *système pair*, et que les autres sont *impaires*, et forment le *second système* ou le *système impair*. Il résulte de ce qui précède que, *pour* $p \geqq 2$, *et n pair*, A^0 *est le groupe des substitutions de* A *qui permutent exclusivement entre elles les génératrices de chaque système, tandis que* $t_j A^0$ *échange les systèmes*.

A^0 *permute transitivement les génératrices de chaque système.* Partons en effet d'une génératrice quelconque prise sous la forme (E), en y remplaçant ν par ν' (ψ peut ici être irréductible; on prendra alors $\overline{A}^0$ au lieu de A^0). On peut, par des $V_{1k\lambda}$, $P_{1\nu'\sigma}$ (**31**) [en tenant compte de la dernière équation de (E) si $\nu' > \nu$] annuler $b_{1,\rho+1}, \ldots, b_{1\nu'}$, puis, par t_1, diminuer le genre. En répétant un nombre pair de fois un groupe d'opérations analogue (tout produit de générateurs de A où les t_j figurent un nombre pair de fois est dans A^0), on arrivera à une génératrice de genre $\leqq 1$. Si elle est de genre 0, elle est définie par $y_1 = \ldots = y_{\nu'} = 0$. Si elle est de genre 1, elle est définie par $x_i = 0$, $y_1 = \ldots = y_{i-1} = 0, y_{i+1} = \ldots = y_{\nu'} = 0$, qui se ramène par t_{1i} à $x_1 = 0, y_2 = \ldots = y_{\nu'} = 0$.

On remarquera que l'échange de x_i, y_i dans (E) fournit une génératrice dont l'intersection avec (E) s'obtient en adjoignant à (E) la seule équation $x_i = y_i$, c'est-à-dire dont l'intersection avec (E) a un nombre de dimensions de la parité de $\nu' + 1$. Au contraire soit (E') le système déduit de (E) par une $m_{i\lambda}$, une $V_{i\lambda}$ ou une $P_{i\nu'\sigma}$, en éliminant, s'il y a lieu, $y_{\nu'}$ des $\nu' - 1$ premières équations à l'aide de la $\nu'^{\text{ième}}$. En retranchant de chaque équation de (E') l'équation correspondante de (E) multipliée par un facteur convenable, on peut faire disparaître celui des $x_1, \ldots, x_\rho, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\nu'}$ qui y figure.

Soit (E_0) le système ainsi obtenu. L'intersection de (E), (E') est aussi celle de (E), (E_0). Or, dans (E_0), la matrice des coefficients de $y_1, \ldots, y_\rho, x_{\rho+1}, \ldots, x_{\nu'}$ est alternée, donc de rang pair (*E.*, 195). Donc le nombre des dimensions de l'intersection a la même parité que ν' (1).

Donc deux génératrices sont ou non du même système selon que le nombre des dimensions de leur intersection a ou non la parité de ν'. Donc une substitution α de A *sera ou non dans* A^0 *selon que l'intersection d'une génératrice quelconque et de sa transformée par α aura ou non un nombre de dimensions de la parité de ν'.*

56. Revenons maintenant à la définition de A^0 comme p. p. c. m. des générateurs autres que les $t_j (j \geqq 0)$. On voit, en recourant au besoin à la forme $\overline{A}$ de A quand ψ est irréductible, que, pour $p \geqq 2$ (n étant pair si $p = 2$), *toute expression d'une substitution de* A^0 *par les générateurs de* A *contient un nombre pair de t_j*. Les substitutions de A^0 sont dites *paires*, les autres substitutions de A *impaires;* A^0 sera dit le *groupe pair de a*. La méthode du n° **50** permet de reconnaître effectivement si une substitution est paire ou impaire.

---

(1) On pourrait démontrer d'abord [*cf.* BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, Spoerri, 1907), p. 129-135], comme dans le champ complexe ordinaire, que les génératrices forment deux systèmes, en rangeant dans le même système que l'une d'elles toutes celles qu'on en déduit par la variation des coefficients. La démonstration ne suppose pas que la variation soit continue, mais seulement que, pour $\nu = 1$ et $\psi = 0$, il y a deux systèmes définis comme on vient de le voir, ce qui est clair.

57 (1). *Pour* $p=2$ ($n=2\nu'$), *on peut encore définir* A^0 *comme le groupe des substitutions* α *de* A *qui vérifient*

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} I_\alpha = \Sigma_{ih}\alpha_{ih}\beta'_{ih} + b\Sigma_h \alpha_{0h}\beta'_{0h} \\ \quad + B\,\Sigma_i\alpha_{i0}\beta'_{i0} + Bb\,\alpha_{00}\beta'_{00} + Cc(\alpha_{00}^2 + \beta_{00}^2 + \alpha'^2_{00} + \beta'^2_{00}) = \nu' \\ \qquad (i, h = 1, \ldots, \nu). \end{array}\right.$$

En effet, soit λ la substitution qui se déduit de α en y remplaçant partout α par λ, et β par μ. On trouve, à l'aide des formules (4)-(8), (15)-(19), que $I_{\lambda\alpha} = I_\alpha + I_\lambda + \nu'$ (2).

Donc les substitutions de A qui vérifient (32) forment un groupe Γ,

---

(1) *Comparer* DICKSON, *Linear groups*, 205.

(2) On a d'abord

$$\begin{aligned} I_{\lambda\alpha} = {} & \Sigma_{ijkl}(\alpha_{ik}\beta_{il}\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha_{ik}\beta'_{il}\lambda_{kj}\mu'_{lj} + \beta_{il}\alpha'_{ik}\mu_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha'_{ik}\beta'_{il}\mu_{kj}\mu'_{lj}) \\ & + b\Sigma_{jkl}(\alpha_{0k}\beta_{0l}\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha_{0k}\beta'_{0l}\lambda_{kj}\mu'_{lj} + \beta_{0l}\alpha'_{0k}\mu_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha'_{0k}\beta'_{0l}\mu_{kj}\mu'_{lj}) \\ & + B\,\Sigma_{ikl}(\alpha_{ik}\beta_{il}\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha_{ik}\beta'_{il}\lambda_{k0}\mu'_{l0} + \beta_{il}\alpha'_{ik}\mu_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha'_{ik}\beta'_{il}\mu_{k0}\mu'_{l0}) \\ & + Bb\Sigma_{kl}(\alpha_{0k}\beta_{0l}\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha_{0k}\beta'_{0l}\lambda_{k0}\mu'_{l0} + \beta_{0l}\alpha'_{0k}\mu_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha'_{0k}\beta'_{0l}\mu_{k0}\mu'_{l0}) \\ & + Cc\Sigma_k(\alpha_{0k}^2\lambda_{k0}^2 + \alpha'^2_{0k}\mu_{k0}^2 + \beta_{0k}^2\lambda'^2_{k0} + \beta'^2_{0k}\mu'^2_{k0} + \alpha_{0k}^2\lambda'^2_{k0} + \alpha'^2_{0k}\mu'^2_{k0} + \beta_{0k}^2\lambda_{k0}^2 + \alpha'^2_{0k}\mu_{k0}^2) \\ & \qquad (i, j = 1, \ldots, \nu;\ k, l = 0, \ldots, \nu). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les parties soulignées sont celles qui sont soumises à une transformation. Les termes surmontés d'un trait seront réunis ultérieurement; Σ' indique des sommations où $k \neq l$; Σ'' des sommations où $k < l$.

Considérons Σ_{ijkl}. Dans cette somme, le second et le troisième terme donnent, en transformant $\Sigma_i\alpha_{ik}\beta'_{il}$ d'après (4), et en faisant un échange des indices de C: pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned} & \Sigma'_{ijkl}\beta_{il}\alpha'_{ik}\underline{(\lambda_{lj}\mu'_{kj} + \mu_{kj}\lambda'_{lj})} + b\Sigma'_{jkl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k} + \beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{lj}\mu'_{kj} \\ = {} & B\Sigma'_{ikl}\beta_{il}\alpha'_{ik}(\lambda_{l0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{l0}) + b\Sigma'_{jkl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k} + \beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{lj}\mu'_{kj}; \end{aligned}$$

pour $k = l$,

$$\begin{aligned} & \Sigma_{ijk}(\alpha_{ik}\beta'_{ik}\lambda_{kj}\mu'_{kj} + \underline{\beta_{ik}\alpha'_{ik}}\mu_{kj}\lambda'_{kj}) \\ = {} & \Sigma_{ijk}\alpha_{ik}\beta'_{ik}\underline{(\lambda_{kj}\mu'_{kj} + \mu_{kj}\lambda'_{kj})} \\ & + \Sigma_{jk}\mu_{kj}\lambda'_{kj}[b(\alpha_{0k}\beta'_{0k} + \beta_{0k}\alpha'_{0k}) + 1] + (b-1)\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j} \\ = {} & B\Sigma_{ik}\alpha_{ik}\beta'_{ik}(\lambda_{k0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{k0}) + b\Sigma_{jk}\mu_{kj}\lambda'_{kj}(\alpha_{0k}\beta'_{0k} + \beta_{0k}\alpha'_{0k}) \\ & + \Sigma_{ik}\alpha_{ik}\beta'_{ik} + \Sigma_{jk}\mu_{kj}\lambda'_{kj} + (B-1)\Sigma_i\alpha_{i0}\beta'_{i0} + (b-1)\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j}. \end{aligned}$$

Le premier et le quatrième terme de Σ_{ijkl} donnent :

et les t_j, *qui ne vérifient pas* (32), sont hors de Γ. Donc Γ est $< \mathrm{A}$. D'ailleurs les générateurs de A^0 vérifient (32). Donc Γ est $\geqq \mathrm{A}^0$. Mais $(\mathrm{A}, \mathrm{A}_0)$ est $\leqq 2$. Donc $\Gamma = \mathrm{A}^0$, et $(\mathrm{A}, \mathrm{A}^0) = 2$.

---

pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned}
& \Sigma''_{ijkl}(\alpha_{ik}\beta_{il}\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \underline{\alpha_{il}\beta_{ik}}\lambda_{lj}\lambda'_{kj} + \alpha'_{ik}\beta'_{il}\mu_{kj}\mu'_{lj} + \underline{\alpha'_{il}\beta'_{ik}}\mu_{lj}\mu'_{kj}) \\
= {} & \Sigma''_{ijkl}[\alpha_{ik}\beta_{il}(\underline{\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \lambda_{lj}\lambda'_{lj}}) + \alpha'_{ik}\beta'_{il}(\mu_{kj}\mu'_{lj} + \mu_{lj}\mu'_{kj})] \\
+ {} & b\,\Sigma''_{jkl}[\lambda_{lj}\lambda'_{kj}(\alpha_{0k}\beta_{0l} + \alpha_{0l}\beta_{0k}) + \mu_{lj}\mu'_{kj}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l} + \alpha'_{0l}\beta'_{0k})] \\
= {} & \mathrm{B}\ \Sigma''_{ikl}[\alpha_{ik}\beta_{il}(\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \lambda_{l0}\lambda'_{k0}) + \alpha'_{ik}\beta'_{il}(\mu_{k0}\mu'_{l0} + \mu_{l0}\mu'_{k0})] \\
+ {} & b\,\Sigma''_{jkl}[\lambda_{lj}\lambda'_{kj}(\alpha_{0k}\beta_{0l} + \alpha_{0l}\beta_{0k}) + \mu_{lj}\mu'_{kj}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l} + \alpha'_{0l}\beta'_{0k})];
\end{aligned}$$

pour $k = l$, en transformant $\Sigma_j \lambda_{kj}\lambda'_{lj}$ et $\Sigma_j \mu_{kj}\mu'_{kj}$, puis $\Sigma_i \alpha_{ik}\beta_{ik}$, $\Sigma'_i \alpha'_{ik}\beta'_{ik}$,

$$\begin{aligned}
& \Sigma_k[\psi(\alpha_{0k}, \beta_{0k})\Psi(\lambda_{k0}, \lambda'_{k0}) + \psi(\alpha'_{0k}, \beta'_{0k})\Psi(\mu_{k0}, \mu'_{k0})] \\
& + c\,\Psi(\lambda_{00}, \lambda'_{00}) + c'\,\Psi(\mu_{00}, \mu'_{00}) + \mathrm{C}[\psi(\alpha_{00}, \beta_{00}) + c] + \mathrm{C}'[\psi(\alpha'_{00}, \beta'_{00}) + c'].
\end{aligned}$$

Considérons, dans $\mathrm{I}_{\lambda\alpha}$, $b\,\Sigma_{jkl}$. Le premier terme de cette somme donne :
pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned}
& b\,\Sigma''_{jkl}(\alpha_{0k}\beta_{0l}\underline{\lambda_{kj}\lambda'_{lj}} + \alpha_{0l}\beta_{0k}\lambda_{lj}\lambda'_{kj}) \\
& = b\,\Sigma''_{kl}(\alpha_{0k}\beta_{0l} + \alpha_{0l}\beta_{0k})\lambda_{lj}\lambda'_{kj} + \mathrm{B}\,b\,\Sigma''_{kl}\overline{\alpha_{0k}\beta_{0l}(\lambda_{k0}\lambda'_{l0}} + \lambda_{l0}\lambda'_{k0});
\end{aligned}$$

pour $k = l$, en transformant $\Sigma_j \lambda_{kj}\lambda'_{kj}$,

$$b\,\Sigma_k \alpha_{0k}\beta_{0k}\Psi(\lambda_{k0}, \lambda'_{k0}) + b\,\mathrm{C}\alpha_{00}\beta_{00}.$$

Le quatrième terme de $b\,\Sigma_{jkl}$ donne de même :
pour $k \neq l$,

$$\beta\,\Sigma''_{kl}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l} + \alpha'_{0l}\beta'_{0k})\mu_{lj}\mu'_{kj} + \mathrm{B}\,b\,\Sigma''_{kl}\overline{\alpha'_{0k}\beta'_{0l}(\mu_{k0}\mu'_{l0}} + \mu_{l0}\mu'_{k0});$$

pour $k = l$,

$$b\,\Sigma_k \alpha'_{0k}\beta'_{0k}\Psi(\mu_{k0}, \mu'_{k0}) + b\,\mathrm{C}'\alpha'_{00}\beta'_{00}.$$

Le second et le troisième terme de $b\,\Sigma_{jkl}$ donnent :
pour $k \neq l$, en échangeant k et l dans le premier des deux termes, et en transformant $\Sigma_j \mu_{kj}\lambda'_{lj}$,

$$b\,\Sigma_{jkl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k} + \beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{lj}\mu'_{kj} + \mathrm{B}\,b\,\Sigma'_{kl}\beta_{0l}\alpha'_{0k}(\lambda_{l0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{l0}):$$

pour $k = l$, en transformant $\Sigma_j \lambda_{kj}\mu'_{kj}$,

$$b\Sigma_{jk}(\alpha_{0k}\beta'_{0k} + \beta_{0k}\alpha'_{0k})\mu_{kj}\lambda'_{kj} + b\,\Sigma_k \alpha_{0k}\beta'_{0k}[\mathrm{B}(\lambda_{k0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{k0}) + 1] + b(\mathrm{B} - 1)\alpha_{00}\beta'_{00}.$$

Considérons, dans $\mathrm{I}_{\lambda\alpha}$, $\mathrm{B}\Sigma_{ikl}$. Le premier terme donne de même :

38 (1). Tout changement de variables à coefficients dans $\mathfrak{S}$ qui conserve a conserve *a priori* A et A^0, puisque sa matrice est celle d'une substitution de A. Il conserve donc la parité (**34**) de chaque substitution α de A et celle de I_α.

Toute substitution α *d'ordre impair de* A *est dans* A^0, car α^2 est dans A^0, et α, étant d'ordre impair, est une puissance de α^2.

Dans la forme canonique d'une substitution α *de* A, *la parité du nombre des suites est celle de* α. En effet, prenons les variables canoniques de α qui rendent les comultiplicateurs ($S.$, 5) égaux aux multi-

---

pour $k \neq l$,

$$B\Sigma''_{ikl}\alpha_{ik}\beta_{il}(\lambda_{k0}\lambda'_{l0}+\lambda_{l0}\lambda'_{k0}) + B\,b\,\Sigma''_{kl}(\overline{\alpha_{0l}\beta_{0k}}+\alpha_{0k}\beta_{0l})\overline{\lambda_{l0}\lambda'_{k0}};$$

pour $k = l$,

$$B\Sigma_k\lambda_{k0}\lambda'_{k0}\psi(\alpha_{0k},\ \beta_{0k}) + B\,c\,\lambda_{00}\lambda'_{00}.$$

Le quatrième terme donne :
pour $k \neq l$,

$$B\Sigma''_{ikl}(\mu_{k0}\mu'_{l0}+\mu_{l0}\mu'_{k0})\alpha'_{ik}\beta'_{il} + B\,b\,\Sigma''_{kl}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l}+\overline{\alpha'_{0l}\beta'_{0k})\mu_{l0}\mu'_{k0}};$$

pour $k = l$,

$$B\Sigma_k\mu_{k0}\mu'_{k0}\psi(\alpha'_{0k},\ \beta'_{0k}) + B\,c'\,\mu_{00}\mu'_{00}.$$

Le second et le troisième terme donnent :
pour $k \neq l$,

$$B\Sigma'_{ikl}\beta_{il}\alpha'_{ik}(\lambda_{l0}\mu'_{k0}+\mu_{k0}\lambda'_{l0}) + B\,b\,\Sigma'_{kl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k}+\beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{l0}\mu'_{k0};$$

pour $k = l$,

$$B\Sigma_{ik}\alpha_{ik}\beta'_{ik}(\lambda_{k0}\mu'_{k0}+\mu_{k0}\lambda'_{k0}) + B\Sigma_k[b(\alpha_{0k}\beta'_{0k}+\beta_{0k}\alpha'_{0k})+1]\mu_{k0}\lambda'_{k0} + B(b-1)\mu_{00}\lambda'_{00}.$$

Après ces transformations, en supprimant les termes qui se détruisent, en réunissant les termes surmontés d'un trait, et en séparant les termes dont sont formées les ψ et les Ψ, on obtient aisément

$$\begin{aligned} I_{\lambda\alpha} = {} & \Sigma_{ih}\alpha_{ih}\beta'_{ih} + B\Sigma_i\alpha_{i0}\beta'_{i0} + b\Sigma_h\alpha_{0h}\beta'_{0h} + B\,b\,\alpha_{00}\beta'_{00} \\ & + \Sigma_{jh}\mu_{hj}\lambda'_{hj} + B\Sigma_h\mu_{h0}\lambda'_{h0} + b\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j} + B\,b\,\mu_{00}\lambda'_{00} \\ & + C\,c(\alpha_{00}^2+\beta_{00}^2+\alpha'^2_{00}+\beta'^2_{00}+\lambda_{00}^2+\mu_{00}^2+\lambda'^2_{00}+\mu'^2_{00}), \end{aligned}$$

d'où, en transformant $\Sigma_h\mu_{hj}\lambda'_{hj}$ et $\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j}$, la formule du texte.

(1) *Cf.* Jordan, *Journal de Mathématiques*, 1905, p. 278.

plicateurs. Si tous les multiplicateurs sont égaux à 1, on peut [1] introduire de nouvelles variables ramenant a à la forme canonique et α à une forme où l'on vérifie directement que $I_\alpha - \nu'$ a la parité du nombre des suites de α. Si les multiplicateurs ne sont pas tous égaux à 1, α est le produit de deux substitutions, évidemment échangeables, dont l'une α' s'obtient en remplaçant chaque multiplicateur et chaque comultiplicateur par 1 (α' a donc le même nombre de suites que α), et l'autre α'' en multipliant chaque variable par le multiplicateur de la suite où elle figure dans α. Or α' est d'ordre 2, et α'' d'ordre impair [comme l'exposant auquel appartient chaque multiplicateur $\neq 1$ dans le champ canonique (*S.*, 5) de α]. Donc α' et α'' sont des puissances de α (*E.*, 10) et par suite conservent a. Or quand on repasse aux variables qui réduisent a à son type canonique, α'', étant d'ordre impair, est paire, et l'on est ramené à considérer α'.

Remarque. — On a donc, pour $p = 2$, quatre critères de parité d'une substitution α de A : le premier fourni par l'expression de α en produit de générateurs de A^0; le second par les génératrices de la quadrique $a = 0$; le troisième par la parité de I_α; le quatrième par la parité des exposants des diviseurs élémentaires de $\alpha - s\varepsilon$, ε étant la matrice unité d'ordre n.

D'après les deux derniers critères, *toutes les fois que* A *contient la transposée de chacune de ses substitutions, il en est de même de* A^0. L'emploi de ces quatre critères n'exige que des opérations rationnelles; mais celui du premier et du troisième exige la réduction préalable de a à son type canonique.

39. Je désignerai par $B(n, \pi, a) = B(n, \pi)$ et j'appellerai *groupe réduit de* a : 1° pour $n > 2$, le p. p. c. m. des V_{ik}, U_{ik}, W_{ik} ($i, k = 0, \ldots, \nu$); 2° pour $n = 2$, le p. p. c. m. des m_{1r^2}, m_{1r} étant un générateur de A^0 si a est réductible dans $\mathfrak{S}$, de $\overline{A^0}$ si a est irréductible dans $\mathfrak{S}$; 3° pour $n = 1$, le groupe $1 = A^0$. Le groupe déduit de B, en y supposant les variables homogènes, sera désigné par $\mathfrak{B}(n, \pi, a) = \mathfrak{B}(n, \pi)$. Il sera commode aussi de remplacer la lettre B par R ou R_i quand A

(1) *Voir* DE SÉGUIER, *Journal de Mathématiques*, 1909, p. 1-63.

est remplacé par Q ou Q_i ($i = 0, 1, 2$), et alors $\mathfrak{B}$ sera de même remplacé par $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{A}_i$. Enfin j'écrirai $\overline{B}$, $\overline{R}$, $\overline{R_i}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}_i}$ pour B, R, R_i, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_i$ respectivement, lorsqu'il sera utile de préciser que les variables sont celles de $\overline{A}$ ou de $\overline{\mathfrak{A}}$: les générateurs V_{i0}, V_{0i}, U_{0i}, W_{0i} sont alors remplacés par les $P_{i\rho}$, $O_{i\rho}$ (**31**).

D'après le n° **31**, si ψ est irréductible, $\overline{B}$ est le p. g. c. d. de $\overline{A} = \overline{Q}$ et de $R_0(n, \pi^2)$.

B *est normal dans* A'. On le vérifie directement en transformant les générateurs de B ou de $\overline{B}$ par la substitution γ du n° **24**.

Si $p = 2$, $B = A^0$. Cela résulte des n^{os} **29** et **32** pour $n > 2$, et de la définition de B pour $n = 2$.

Soit $p > 2$ et $n > 1$. A^0, conservant a, permute les points de la quadrique $a = 1$, c'est-à-dire les s_ν solutions de $a = 1$. Si $n = 2\nu'$, $s_\nu = \pi^{2\nu'-1} - \theta\pi^{\nu'-1}$ [$\theta = 1$ si ψ est réductible ou nulle; $\theta = -1$ si ψ est irréductible (*E.*, 44)]. Si $\psi = cx^2$, $s_\nu = \pi^{2\nu} + \theta_c\pi^\nu$ (θ_z désignant le caractère quadratique de z). Le nombre des solutions où $x_1 = y_1 = 0$ est $s_{\nu-1}$.

Soit maintenant $n > 2$, ψ *étant quelconque, ou* $n = 2$ avec $\psi = 0$. m_{1c} fixe les $s_{\nu-1}$ points correspondant aux solutions où $x_1 = y_1 = 0$ et permute les $s_\nu - s_{\nu-1}$ autres par cycles de $\pi - 1$. Mais $\frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{\pi - 1}$ est impair. *Donc l'action de* m_{1c} *sur les points de* $a = 1$ *est une substitution impaire, et celle de* m_{1,c^r} *a la parité de* r. Les V, U, W *étant d'ordre p, leur action est paire. Donc*

$$A^0 = B + m_{1N}B = B + m_{iN}B \qquad (i \neq 0).$$

Soit $n \geq 2$ *et* $\delta \neq 0$. Une substitution $m_{\nu'\sigma}$ d'ordre $\pi = \theta$ fixe les $s_{\nu 0} = \pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}$ points de $a = 1$ pour lesquels $x = y = 0$ et permute les $s_\nu - s_{\nu 0}$ autres par cycles de $\pi - \theta$. Mais $\frac{s_\nu - s_{\nu 0}}{\pi - \theta}$ est impair. *Donc l'action de* m_{ν',σ^r} *sur les points de* $a = 1$ *a la parité de* r. *Donc* $A^0 = B + m_{\nu'\sigma}B$. *En particulier* $m_{\nu',-1} = m_{0,-1}$ *est dans* B *toujours et seulement si* $\pi \equiv \theta \bmod 4$.

La substitution $t_{ik} = R_{ik1}S_{ik,-1}$ ($i, k \neq 0$) est toujours dans B. Mais quand $\psi \neq 0$, t_{0i} n'y est pas toujours. *Si* $\psi \neq 0$ *avec* $\delta c \neq 0$ (*cf.* **32**), $t_{0i}m_{i,cM}$ (δM étant carré) est dans B (**32**). Donc t_{0i} y est toujours et seulement si δc est carré [si $c' = c$, $t_i t'_0 m_{i,b-2c}$ étant dans B (**32**), $t_i t'_0$ y est toujours et seulement si $b - 2c$ est carré]. *Si* $\psi = cx^2$, $t_{0i} m_{i,-c}$ est dans B (**32**). Donc t_{0i} y est toujours et seulement si $-c$ est carré.

De même, $m_{i,-1} T_{ik}$ étant dans B (**28**), T_{ik} y est toujours et seulement si -1 est carré. On a trouvé précédemment (**28, 29, 32**) l'expression par les générateurs de B de $m_{i\lambda}$, $m_{\nu\rho}$, $m_{i\lambda} m_{k\mu}$, $m_{i\lambda} m_{\nu\rho}$, T_{ik}, t_{0i}, $u_0 t_i$, $t'_0 t_i$ quand ces substitutions sont dans B. On trouvera encore au n° **40** une méthode générale pour exprimer toute substitution de B $(4, \pi)$ par les générateurs de ce groupe.

Considérons maintenant la similitude d de multiplicateur -1 que A contient toujours. *Si* $p = 2$, $d = 1$. *Si p est > 2 et n impair* $(\geqq 1)$, *d est hors de* A^0, *et* A *est le produit direct de* A^0 *par* $D = \{d\}$.

Supposons donc $p > 2$ et n pair.

Soit $n \equiv 0 \bmod 4$. *Si* $\psi = 0$, ν est pair, et B *contient d. Si ψ est irréductible, d est hors de* B, car, si $\pi \equiv 1 \bmod 4$, B ne contient pas $m_{0,-1}$ mais contient $m_{i,-1}$, quel que soit i; et si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, B contient $m_{0,-1}$ mais ne contient pas $\Pi_1^\nu m_{i,-1}$, ν étant ici impair. *Si ψ est réductible et* $\delta c \neq 0$, on voit de même que B *contient d*, ce qui est évident *a priori*, puisque B est alors semblable à $R_0(n, \pi)$.

Soit $n \equiv 2 \bmod 4$ $(\geqq 2)$. *Si* $\psi = 0$, ν est impair; *si alors* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, B *contient d*; *si* $\pi \equiv 3 \bmod 4$, *d est hors de* B. *Si ψ est irréductible*, ν est pair; *si alors* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, *d est hors de* B; *si* $\pi \equiv 3 \bmod 4$, B *contient d* (il contient $m_{0,-1}$ et $\Pi_1^\nu m_{i,-1}$). *Si ψ est réductible et* $\delta c \neq 0$, B *contient d toujours et seulement si* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, ce qui est encore évident *a priori*.

Il est clair que quand d est hors de B, A^0 *est le produit direct de* B *par* D.

On voit que, *pour $p > 2$ et n pair* $(\geqq 2)$, B *contient d quand a est équivalente à* $\Sigma_1^n z_i^2$ *et ne le contient pas quand a est équivalente à* $\Sigma_1^{n-1} z_i^2 + N z_n^2$ (*E.*, 44).

Toute substitution α permutable à chaque substitution de B *est une similitude.* On le vérifie directement à l'aide des conditions $\alpha V_{ik\lambda} = V_{ik\lambda}\alpha$, $\alpha U_{ik\lambda} = U_{ik\lambda}\alpha$, $\alpha W_{ik\lambda} = W_{ik\lambda}\alpha$ ($i, k \geqq 0$; on peut aussi employer les générateurs $P_{i\rho}$, $O_{i\rho}$ si ψ est irréductible) (*cf.* **15**).

Donc le central de A′ *est* I, *celui de* A *est* D, *et ceux de* A^0, B *sont leurs p. g. c. d. avec* D.

40 [1]. Désignons d'une manière générale par $L_{x_1 \ldots x_m}(m, \pi)$ $U_{x_1 \ldots x_m}(m, \pi)$ les groupes $L(m, \pi)$, $U(m, \pi)$ de variables $x_1, \ldots, x_m$ (*cf.* **11**), par $s_{x_1 \ldots x_m}$, $r_{x_1 \ldots x_m}$ des substitutions quelconques de $U_{x_1 \ldots x_m}$, par s_ζ, r_ζ les actions respectives de $s_{\xi\eta}$, $r_{\xi\eta}$ sur $\frac{\xi}{\eta} = \zeta$, et par $\mathfrak{V}_\zeta(2, \pi) = \Sigma s_\zeta = \Sigma r_\zeta$ le groupe $\mathfrak{V}(2, \pi)$ de variable ζ.

Supposons $\nu \geqq 2$, et soit $\mathbf{V}_{ik}(\pi) = \mathbf{V}_{ki}(\pi) = \Sigma s$ $(i, k \neq 0)$ le p. p. c. m. des $V_{ik\lambda}$, $V_{ki\lambda}$; l'action de $\mathbf{V}_{ik}$ sur x_i, x_k est $U_{x_i x_k}(2, \pi)$ (*S.*, 83); son action sur y_i, y_k est $U_{y_i y_k}(2, \pi)$, et s est de la forme $s_{x_i x_k} \bar{s}_{y_i y_k}^{-1}$ (en désignant toujours par $\bar{\sigma}$ la transposée de σ). Soit de même $\mathbf{W}_{ik}(\pi) = \mathbf{W}_{ki}(\pi) = \Sigma r$ $(i, k \neq 0)$ le p. p. c. m. des $U_{ik\lambda}$, $W_{ik\lambda}$; l'action de $\mathbf{W}_{ik}$ sur x_i, y_k est $U_{x_i y_k}(2, \pi)$; son action sur y_i, x_k est $U_{y_i x_k}(2\pi)$, et r est de la forme $r_{x_i y_k} \bar{r}_{y_i x_k}^{-1}$.

Il résulte de ces définitions que $\mathbf{V}_{ik} = t_i \mathbf{W}_{ik} t_i \equiv U(2, \pi)$, et que le p. g. c. d. de $\mathbf{V}_{ik}$, $\mathbf{W}_{ik}$ est $D_{ik} = \{ d_{ik} \}$ (**28**).

D'ailleurs $sr = rs$ [2]. On voit donc, en posant $\mathbf{V}_{ik} \mathbf{W}_{ik} = B_{ik}$ et $\frac{x_i}{x_k} = u$, $\frac{x_i}{y_k} = z$, que $B_{ik} | D_{ik}$ est isomorphe au produit direct de $\mathfrak{V}_z = \Sigma s_z$ par $\mathfrak{V}_u = \Sigma r_u$, $D_{ik} s$ répondant à s_z et $D_{ik} r$ à r_u.

Ainsi pour $n = 4$ *et* $\psi = 0$, en faisant dans ce qui précède $i = 1$, et en désignant par φ, ψ les actions respectives de $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}$ et de $\mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}$ sur les rapports des variables, $\mathfrak{B} = \varphi\psi \equiv \mathfrak{V}_z \mathfrak{V}_u$, $V_{12\lambda}$ correspondant à $(z + \lambda)$, $V_{21\lambda}$ à $\left(\frac{z}{\lambda z + 1}\right)$, $U_{12\lambda}$ à $(u + \lambda)$, $W_{21\lambda}$ à $\left(\frac{u}{\lambda u + 1}\right)$. D'ailleurs, en faisant correspondre $\mathfrak{m}_\lambda = \begin{vmatrix} z & \lambda z \\ u & \lambda^{-1} u \end{vmatrix}$ à $m_{2\lambda}$, et $\mathfrak{t} = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$ à t_2, on voit que $\mathfrak{A}^0 \equiv \{ \mathfrak{V}_z \mathfrak{V}_u, \mathfrak{m}_N \}$, et que $\mathfrak{A} \equiv \{ \mathfrak{V}_z \mathfrak{V}_u, \mathfrak{m}_N, \mathfrak{t} \}$.

Si $\pi > 3$, *tout diviseur normal* X *de* A *autre que* D *et* > 1 *est* $\geqq$ B. En effet, supposons d'abord X premier à B. Si le p. g. c. d. X^0 de X, A^0 est > 1 (p est donc ici > 2), X^0 est d'ordre 2, et A^0 est le produit

---

[1] *Comparer* DICKSON, *Linear groups*, 196-198, 174-179.

[2] Si l'on prenait $r_{x_i y_k}$ dans $L_{x_i y_k}$ hors de $U_{x_i y_k}$ ou $s_{x_i x_k}$ dans $L_{x_i x_k}$ hors de $U_{x_i x_k}$, s ne serait plus permutable à r.

direct de B par X^0. Donc $X^0 = D$ (**59**), et ici D divise B. Si $X^0 = 1$, X est d'ordre 2, et A est le produit direct de A^0 par X. Donc p est > 2, et $X = \mathbf{D}$. Supposons X non premier à B. Soit $\mathfrak{X}$ son action sur les rapports des variables, et $\mathfrak{Y}$ le p. g. c. d. de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}$, normal dans $\mathfrak{A}$. Si X est premier à D, $\mathfrak{Y}$ est > 1. Si $\mathfrak{Y}$ est $< \mathfrak{B}$, il coïncide avec $\mathfrak{V}$ ou $\mathfrak{W}$, qui, pour $\pi > 3$, sont simples et non cycliques (*E.*, 72). Or ces groupes ne sont pas normaux dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}$. Donc **B** serait le produit direct de D par $X \equiv \mathfrak{B}$. Mais cela est impossible, car B contient des substitutions dont le carré est d, par exemple la substitution sr où $r = d$ et où $s_{x_1, x_2} = | x_2, -x_1 |$. Donc X est $> \mathbf{D}$. Donc, ici encore, $\mathfrak{Y}$ est > 1. Donc $\mathfrak{Y} = \mathfrak{B}$, et $X \geqq B$.

De même, si $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* $\{ B, r_1 \}$ *ou de* $\{ B, t_1 m_{1N} \}$ *non* $\leqq D$ *est* $\geqq B$.

Si $\pi = 2$ *ou* 3, $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}\mathfrak{W}$ ***a un diviseur normal sylowien*** $\mathfrak{F}$ ***abélien*** *principal d'ordre* 9 *ou* 16 *respectivement.* $\mathfrak{B} | \mathfrak{F}$ est un g_4 carré ou un g_6 non cyclique, et aucun diviseur de $\mathfrak{F}$ ou de $\mathfrak{B} | \mathfrak{F}$ autre que 1, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B} | \mathfrak{F}$ n'est normal dans $\mathfrak{A}$. *Si donc* F *est le diviseur* $> D$ *répondant à* $\mathfrak{F}$ *dans* B, *tout diviseur normal de* A *est* $\geqq$ B, *ou est l'un des groupes* 1, D, F.

Pour $\pi \geqq 2$, *tout diviseur normal* X *de* B *est normal dans* A_0 (cela est clair pour $\pi = 2$, car alors $A^0 = B$). En effet m_1 est permutable à $\mathfrak{V}$, à $\mathfrak{W}$ et à leurs diviseurs normaux, qui sont sylowiens, si $\pi = 3$, donc aussi à l'action $\mathfrak{X}$ de X sur les rapports des variables. Si donc X n'est pas normal dans A^0, il est conjugué d'un diviseur X' de XD. Si D divise X, $X' = X$. Si X est premier à D et si $X' \neq X$, X' contient une substitution ξ de Xd, donc aussi d, qui est une puissance de ξ (*S.*, 83). Donc X, comme X', contient D contre l'hypothèse.

t_{12}, qui ne rentre ni dans la forme s ni dans la forme r, est hors de **V** et de **W** et transforme $V_{12\lambda}$ en $V_{21,-\lambda}$ et $U_{12\lambda} = t_2 V_{12\lambda} t_2$ en $W_{12\lambda} = t_2 V_{21,-\lambda} t_2$. *Donc* $\{ \mathbf{V}, t_{12} \}$ *et* $\{ \mathbf{W}, t_{12} \}$ *sont isomorphes d'ordre* $\frac{2\pi(\pi^2-1)}{\tau}$ ($\tau = 2$ *si* $p > 2$; $\tau = 1$ *si* $p = 2$).

De même $m_{1\lambda}$ est hors de **V** et de **W**, et transforme $V_{12\mu}$ en $V_{12,\lambda\mu}$, $V_{21,-\mu}$ en $V_{21,-\lambda^{-1}\mu}$, $U_{12\mu} = t_2 V_{12\mu} t_2$ en $U_{12,\lambda\mu}$, $W_{12\mu} = t_2 V_{21,-\mu} t_2$ en $W_{12,-\lambda^{-1}\mu}$. *Donc* $\{ \mathbf{V}, m_{1\lambda} \} = \mathbf{V}_\lambda$ *et* $\{ \mathbf{W}, m_{1\lambda} \} = \mathbf{W}_\lambda$ *sont isomorphes d'ordre* $\frac{l\pi(\pi^2-1)}{\tau}$, *l étant l'ordre de* $m_{1\lambda}$.

On a vu (**39**) que t_{12} est toujours dans B, que $m_{1\lambda}$ y est toujours et seulement si λ est carré, et T_{12} toujours et seulement si -1 est carré [on a aussi trouvé (**28**, **29**) l'expression de ces substitutions, lorsqu'elles sont dans B, par les générateurs de B]. Mais on peut ici obtenir directement ces résultats en développant les conditions $sr = t_{12}$, $sr = m_{1\lambda}$, $sr = T_{12}$.

Comme on sait exprimer toute substitution de $U_{\xi\eta}$ par ses générateurs $|\xi + \lambda\eta, \eta|$, $|\xi, \eta + \lambda\xi|$ (*S.*, 83 ; *cf.* **30**), on saura aussi exprimer toute substitution de $B = \mathbf{VW}$ par les V_{12}, V_{21}, U_{12}, W_{12}.

Supposons de nouveau n quelconque $\geqq 4$ mais pair, et ψ irréductible. Soit, dans $\overline{A}$, $\dot{r}_s$ la substitution r de $\mathbf{W}_{i\nu'}(\pi^2)$ où la matrice de $r_{x_i y_{\nu'}}$ est conjuguée de celle de $s_{x_i x_{\nu'}}$ (*$\dot{r}_s$ est donc formée avec les $U_{i\nu'\rho}$, $W_{i\nu'\rho}$ comme s avec les $V_{i\nu'\rho}$, $V_{\nu' i\rho}$*) et $\dot{s}_r$ la substitution s de $\mathbf{V}_{i\nu'}(\pi^2)$ où la matrice de $s_{x_i x_{\nu'}}$ est conjuguée de celle de $r_{x_i y_{\nu'}}$. *Le groupe $\Phi_{i\nu'} = \Sigma s\dot{r}_s = \Sigma r\dot{s}_r$ est homomorphe à $\mathbf{V}_{i\nu'}(\pi^2)$, l'unité de $\Phi_{i\nu'}$ répondant à $D_{i\nu'}$* (si $s\dot{r}_s = 1$, s et $\dot{r}_s$ sont égaux tous deux à $d_{i\nu'}$ ou à 1), *donc isomorphes à $\mho(2, \pi^2)$.*

Avec les variables x_i, y_i, x, y, $s\dot{r}_s$ est une substitution réelle σ, et le groupe $B_{0i}(\pi) = B_{i0}(\pi) = \Sigma\sigma \equiv \mho(2, \pi^2)$ dont $\Phi_{i\nu'} = \overline{B}_{0i}(\pi) = \overline{B}_{i0}(\pi)$ est la forme imaginaire conserve $x_i y_i + \psi$. En prenant d'ailleurs pour s une $V_{i\nu'}$ ou une $V_{\nu' i}$ convenable de $\mathbf{V}_{i\nu'}(\pi^2)$ on obtient pour σ une quelconque des V_{0i}, V_{i0}, U_{0i}, W_{0i} (**31**). *Donc* $B_{0i} \equiv R_2(4, \pi)$.

Ainsi, pour $n = 4$, ψ irréductible dans $\mathfrak{S}$ et $p \geqq 2$, en faisant $i = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^0 \equiv B \equiv \mho(2, \pi^2)$ [ici $A^0 = BD$ (**39**)]. *Aux substitutions* $P_{1\rho}$, $O_{1\rho}$ de $\overline{B}$ *répondent respectivement dans $\mho_z(2, \pi^2)$, par la correspondance indiquée, $z + \rho$ et $\dfrac{z}{1 - \rho z}$.* Or la $s_2(z^\pi)(-z^{-1})$ transforme ces deux dernières substitutions l'une dans l'autre. *Donc $\mathfrak{A} \equiv |B, t_1|$ est isomorphe à $|\mho_z(2, \pi^2), z^\pi|$, t_1 répondant à $(z^\pi)(-z^{-1})$, et la correspondance des éléments de B, $\mho_z$ restant la même.*

Tout diviseur normal X de A ou de A^0 non $\leqq$ D est $\geqq$ B. En effet, si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Si X est premier à $|B, t_1| = B'$, X est d'ordre 2, et A produit direct de B', X, d'où $X = D$ (**39**). Si le p. g. c. d. Y de X, B' est > 1, Y est d'ordre 2, et B' produit direct de B, Y, d'où $Y = D$ (**39**); mais alors d serait dans B', donc dans Bt_1, tandis que $A = BD + BDt_1$.

On sait déjà (**39**) que $m_{1\lambda}$ est dans B toujours et seulement si λ est carré dans $\mathfrak{S}$, que $m_{2\rho}$ est dans $\overline{\mathrm{B}}$ toujours et seulement si $\rho^{\frac{\pi+1}{2}} = 1$, que t_{01} est dans B toujours et seulement si c est non carré (ou $p = 2$), que si $c' = c$, $t_1 t'_0$ y est toujours et seulement si $b - 2c$ est carré [on a, d'après (26), (29) et le n° **32**, l'expression de ces substitutions, lorsqu'elles sont dans B, par les générateurs de B]; et de là résulte que $t_{12} = m_{2q} t_{01}$ *n'est jamais dans* B. Ici encore on obtient directement ces résultats en développant les conditions $s\dot{r}_s = m_{1\lambda}$, $m_{2\rho}$, t_{01}, $t_1 t'_0$, t_{12}. Comme précédemment aussi, l'expression de chaque substitution de $\mathrm{U}_{\xi\eta}(2, \pi^2)$ par ses générateurs $|\xi + \lambda\eta, \eta|$, $|\xi, \eta + \lambda\xi|$ fournit l'expression de la substitution correspondante de $\overline{\mathrm{B}}$ par les V_{12}, V_{21}, U_{12}, W_{12}.

Dans le cas où n est quelconque $\geqq 3$ *mais impair, et* $\psi = cx^2 (p > 2)$, je désignerai par $\mathrm{B}_{0i}(\pi) = \mathrm{B}_{i0}(\pi)$ le p. p. c. m. des $\mathrm{V}_{0i\lambda}$ et des $\mathrm{U}_{0i\lambda}$. Pour $i = 1$, $\mathrm{B}_{0i} = \mathrm{B}(3, \pi)$.

Supposons de suite $n = 3$. A conserve la conique $x_1 y_1 + cx^2 = 0$, et t_1 échange les deux points $x_1 = x = 0$, $y_1 = x = 0$ où elle est coupée par $x = 0$. Les deux droites $x_1 = zx$, $y_1 = -\frac{cx}{z}$, qui passent chacune par un de ces points, se coupent en un point de la conique caractérisé par z. Les actions respectives de $\mathrm{D}t_0$, $\mathrm{D}t_1$, $\mathrm{D}m_{1\lambda}$, $\mathrm{DV}_{01\lambda}$, $\mathrm{DU}_{01\lambda}$ sur z sont les substitutions $-z$, $-\frac{c}{z}$, λz, $\frac{z}{1-\lambda z}$, $z + c\lambda$ (si les actions sur z de deux substitutions α, α' de A sont σ, σ' celle de $\alpha\alpha'$ est $\sigma\sigma'$) dont le p. p. c. m. $\mathfrak{L}(2, \pi)$ (*S.*, 80) est isomorphe à $\mathrm{A}|\mathrm{D} \equiv \mathrm{A}^0$ [$\mathrm{A} = \mathrm{A}^0\mathrm{D}$ (**39**)]. L'action de $dt_1 m_{1c}^{-1} = \mathrm{U}_{01,c}\mathrm{V}_{01}\mathrm{U}_{01,c^{-1}}$ sur z est $-z^{-1}$. Donc $\mathrm{B} \equiv |z+1, -z^{-1}| = \mathfrak{O}(2, \pi)$ (*S.*, 79).

Si $\pi > 3$, *tout diviseur normal* X *de* A *ou de* A^0 *non* $\leqq \mathrm{D}$ *est* $\geqq \mathrm{B}$. En effet, si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Si X est premier à A^0, A est produit direct de A^0, X, et $\mathrm{X} = \mathrm{D}$. Si le p. g. c. d. Y de X, A^0 est > 1, A^0 est produit direct de B, Y, et $\mathrm{Y} = \mathrm{D}$, tandis que d est hors de A^0 (**39**).

Si $\pi = 3$, *les seuls diviseurs normaux de* A *non* $\leqq \mathrm{D}$ *et non* $\geqq \mathrm{B}$ *sont le* g_4 *carré sylowien* F *de* B *et* FD (*dont le p. g. c. d. avec* A^0 *est* F). On le voit de suite en observant que A peut ici se représenter dans les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme le produit direct du g_2 |56| par le symétrique de champ 1, 2, 3, 4, A^0 correspondant à ce symétrique, et B à l'alterné de même champ.

41. D'après ce qui précède B est le p. p. c. m. des B_{ij} $(i=1, \ldots, \nu;$ $j=0, \ldots, \nu)$ en convenant que, si $\psi=0$, $B_{i0}=B_{0i}=1$. On peut simplifier ce résultat. Remarquons d'abord que $\{B_{il}, B_{kl}\}$ $(i, k, l \neq 0;$ $p \geqq 2)$, contenant, d'après (22) et (23), les V_{ik}, V_{ki}, U_{ik}, W_{ik}, *contient* B_{ik}. De même, d'après (25), (26), (27), $\{B_{0l}, B_{kl}\}$ $(k \neq 0; p \geqq 2)$ *contient* B_{0k}, *et, si* $\psi \neq 0$, $\{B_{0k}, B_{0l}\}$ *contient* B_{kl} $(p \geqq 2)$. On peut donc écrire

$$\{B_{k_1k_2}, B_{k_1k_3}, \ldots, B_{k_1k_m}\} = \{B_{k_1k_2}, B_{k_2k_3}, \ldots, B_{k_{m-1}k_m}\} = B_{k_1\ldots k_m},$$

les k_i étant distincts, et l'ordre des indices de $B_{k_1\ldots k_m}$ étant indifférent, en convenant que, si l'un d'eux est nul pour $p>2$ et $\psi=0$, $B_{k_1\ldots k_m}=1$. Pour $m=\nu'$, $B_{k_1\ldots k_m}=B$.

Soit $\nu \geqq 3$. D'après les relations $t_{13}V_{12\lambda}t_{13}=W_{12\lambda}$, $t_{13}V_{21\lambda}t_{13}=U_{21\lambda}$, on a $B=\{\mathbf{V}_{12}, B_{13}, \ldots, B_{1\nu}, B_{10}\}$, et, en continuant ainsi,

$$B=\{\mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \ldots, \mathbf{V}_{1,\nu-1}, B_{1\nu}, B_{10}\}.$$

De même $t_{23}V_{12\lambda}t_{23}=U_{12\lambda}$, et $t_{23}V_{21\lambda}t_{23}=W_{21\lambda}$, d'où $B=\{\mathbf{V}_{12}, B_{23}, \ldots, B_{\nu-1,\nu}, B_{\nu 0}\}$, et, en continuant ainsi,

$$B=\{\mathbf{V}_{11}, \mathbf{V}_{23}, \ldots, \mathbf{V}_{\nu-2,\nu-1}, B_{\nu-1,\nu}, B_{\nu 0}\}=\{B_{01}, B_{12}, \mathbf{V}_{23}, \mathbf{V}_{34}, \ldots, \mathbf{V}_{\nu-1,\nu}\}.$$

Si B_{01} est $\neq 1$, c'est-à-dire si $\psi \neq 0$, B_{01} contient une $t_{01}m_1$ (**39**) qui transforme $\mathbf{V}_{1k}$ en $\mathbf{W}_{1k}$. *Donc si* $\psi \neq 0$, $B=\{B_{01}, \mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \ldots, \mathbf{V}_{1\nu}\}$.

Comme, d'après (23), $\{\mathbf{V}_{ik}, \mathbf{V}_{il}\}$ contient $\mathbf{V}_{kl}$, l'action de $\{\mathbf{V}_{k_1k_2}, \mathbf{V}_{k_1k_3}, \ldots, \mathbf{V}_{k_1k_m}\}=\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m}$ (l'ordre des indices de $\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m}$ étant indifférent) sur $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$ $(k_1, \ldots, k_m \neq 0)$ est $U_{x_{k_1}\ldots x_{k_m}}(m, \pi)$ (*S.*, 83), et si $s_{x_{k_1}\ldots x_{k_m}}$ est l'action d'une substitution s de $\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m}$ sur $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$, son action sur $y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}$ est $\bar{s}^{-1}_{y_{k_1}\ldots y_{k_m}}$ (*cf.* **40**). Donc $\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m} \equiv U(m, \pi)$, et $B=\{B_{01}, \mathbf{V}_{1\ldots\nu}\}$.

Soit i un indice fixe $\neq 0$. $\mathbf{V}_{1\ldots\nu}$ est le p. p. c. m. des $\mathbf{V}_{ik}$ où $k \neq 0, i$, et $t_i\mathbf{V}_{1\ldots\nu}t_i=\mathbf{W}^{(i)}$ celui des $\mathbf{W}_{ik}$ où $k \neq 0$, i. $\mathbf{W}^{(i)}$ est aussi isomorphe à $U(\nu, \pi)$, et son p. g. c. d. avec $\mathbf{V}_{1\ldots\nu}$ contient tous les $t_i\mathbf{V}_{kl}t_i=\mathbf{V}_{kl}$ où k, $l \neq i$, donc $\mathbf{V}_{1\ldots i-1, i+1, \ldots\nu}$.

On remarquera que $\mathbf{V}_{1\dots\nu}$ est le p. p. c. m. de deux groupes abéliens dérivés l'un des V_{12}, V_{13}, ..., $V_{1\nu}$, l'autre des V_{21}, V_{31}, ..., $V_{\nu 1}$.

42. Soit, en supposant $n > 2$, $P_{B(n,\pi)} = P = P_0$ le $g_{\pi^{n-2}}$ abélien principal dérivé des V_{1k}, U_{1k} où $k = 2, \dots, \nu, 0$; P_1 le $g_{\pi^{n-4}}$ analogue à P dans A_1; et formons de même successivement les groupes P_2, ... Toute substitution de P_i est permutable à P_{i-1}, en sorte que, ν'' *étant le plus grand entier* $\leqq \frac{1}{2}(n-1)$, $PP_1 \dots P_{\nu''-1} = \mathbf{P}_{B(n,\pi)} = \mathbf{P}$ *est un* g_{π^s} [$s = \nu'(\nu'-1)$ *si* $n = 2\nu'$; $s = \nu^2$ *si* $n = 2\nu + 1$; s *est donc le plus grand entier* $\leqq \nu''^2$] *sylowien de* B.

Écrivons un instant $U_{i,\nu+1,\lambda}$ pour $U_{i0\lambda}$, $V_{i,\nu+1,\lambda}$ pour $V_{i0\lambda}$, et ν_1, ν_2 respectivement pour les plus hautes valeurs du second indice dans les générateurs U_{ik}, V_{ik} de $\mathbf{P}$ ($\nu_1 + \nu_2 = n$), en supposant que ψ n'ait jamais la forme $c'y^2$ (ν_1 est donc $\geqq \nu_2$), désignons par $\mid U_{ik} \mid$ le p. p. c. m. des U_{ik} si $k < \nu_1$ ou si $k = \nu_1$ avec $\nu_1 = \nu_2 + 1$, et le p. p. c. m. des $U_{i\nu_1}$, $V_{i\nu_1}$ si $k = \nu_1$ avec $\nu_1 = \nu_2$, par $\mid V_{ik} \mid$ le p. p. c. m. des V_{ik}, et considérons le Tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mid U_{12} \mid & \mid U_{13} \mid & \dots & \mid U_{1,\nu_1-1} \mid & \mid U_{1\nu_1} \mid & \mid V_{1,\nu_1-1} \mid & \dots & \mid V_{13} \mid & \mid V_{12} \mid \\
 & \mid U_{23} \mid & \dots & \mid U_{2,\nu_1-1} \mid & \mid U_{2\nu_1} \mid & \mid V_{2,\nu_1-1} \mid & \dots & \mid V_{23} \mid & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & \mid U_{i,i+1} \mid & \dots & \mid U_{i\nu_1} \mid & \dots & \mid V_{i,i+1} \mid & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & & \mid U_{\nu_1-1,\nu_1} \mid . & & & &
\end{array}$$

Appelons $s^{\text{ième}}$ transversale la rangée formée du $s^{\text{ième}}$ terme de la première ligne; du $(s-2)^{\text{ième}}$ de la seconde, ..., du $|s - 2(i-1)|^{\text{ième}}$ de la $i^{\text{ième}}$. *Le* $s^{\text{ième}}$ *central* C_s *de* $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des groupes des* s *premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i+k \leqq s+2$ *et des* V_{ik} *où* $k - i \geqq 2\nu_1 - s - 2$. *Si* $s < \nu_1$, *ou si* $\nu_1 > \nu_2$, *l'ordre de* C_s *est* π^σ, σ *étant le plus grand entier* $\leqq \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$. *Si* $s = \nu_1 + r$ ($r \geqq 0$) *et* $\nu_2 = \nu_1$, *l'ordre de* C_s *est* $\pi^{\sigma+r+2}$. Montrons que si le théorème est vrai pour C_s ($C_0 = 1$), il est vrai pour C_{s+1}. Soit ξ un élément de C_{s+1} hors de C_s, exprimé par les générateurs de $\mathbf{P}$ en faisant passer ceux de P_{i-1} avant ceux de P_i. Si ξ contient (dans l'expression considérée) un V_{kl} hors de C_s, $l - k$ est $\leqq 2\nu_1 - s - 3$. Or, pour $k > 1$, $V_{k-1,k}$ transforme V_{kl} en

$V_{k-1,l}V_{kl}$ si $l \leqq \nu$, et en $U_{k-1,k}V_{k-1,l}V_{kl}$ si $l = \nu + 1$. Pour que $C_s\xi$ soit permutable à $V_{k-1,k}$, il faut donc que $V_{k-1,l}$ soit dans C_s, d'où $l - k \geqq 2\nu_1 - s - 3$. Donc $l - k = 2\nu_1 - s - 3$. Pour $k = 1$ et $l < \nu_2$, la permutabilité de $C_s\xi$ avec $V_{l,l+1}$ exige que $V_{1,l+1}$ soit dans C_s, d'où encore $l - k = 2\nu_1 - s - 3$. Pour $k = 1$ et $l = \nu_2$, la permutabilité de $C_s\xi$ avec $U_{i\nu_2}$ exige que U_{1i} soit dans C_s, d'où $i + 1 \leqq s + 2$, et de même (en faisant $i = \nu_1$ si $\nu_2 = \nu_1 - 1$ et $i = \nu_1 - 1$ si $\nu_2 = \nu_1$) $l - k = 2\nu_1 - s - 3$. Si ξ contient une $U_{kl} (k < l)$ hors de C_s, $k + l$ est $\geqq s + 3$, et la permutabilité de $C_s\xi$ avec $V_{l-1,l}$ ou $U_{l-1,l}$ exige que $k + l = s + 3$. Donc ξ ne doit contenir que les générateurs de l'énoncé, et cela suffit, car alors tout générateur de $\mathbf{P}$ transforme tout générateur γ de ξ en un élément de $C_s\xi$ (si $\gamma = V_{k,\nu+1}$, un $U_{k-1,k}$ peut apparaître; mais alors $\nu_1 = \nu + 1$, $k \leqq \nu$, et $\nu + 1 - k = 2\nu_1 - s - 3$, d'où $2k - 1 \leqq s + 1$). L'ordre de C_s se calcule en comptant les éléments à prendre dans chaque ligne du Tableau, et en observant que, si $\nu_2 = \nu_1$ et $s = \nu_1 + r$, C_s contient les $V_{1\nu_1}, V_{2\nu_1}, \ldots, V_{r+2,\nu_1}$.

Les substitutions de $\mathbf{P}$ ont la forme $\alpha_{\mathbf{P}}$ indiquée au n° **15**, avec une ligne et une colonne relatives à y si $\delta \neq 0$ (¹) et toute substitution

---

(¹) Si l'on range les variables dans l'ordre $y_1, \ldots, y_\nu, y, x, x_\nu, \ldots, x_1$ (en supprimant celles des variables x, y qui ne figurent pas dans ψ) les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont tous nuls. Ceux de cette diagonale sont égaux à 1. Les $n - 1$ coefficients de la rangée parallèle à cette diagonale et située immédiatement au-dessous sont, dans l'ordre des lignes où ils se trouvent :

si $n = 2\nu$,

$$\beta'_{21}, \ \ldots, \ \beta'_{i,i-1}, \ \ldots, \ \beta'_{\nu,\nu-1}, \ \alpha'_{\nu\nu}, \ \alpha'_{\nu-1,\nu}, \ \ldots, \ \alpha_{i-1,i}, \ \ldots, \ \alpha_{12};$$

si $n = 2\nu + 2$,

$$\beta'_{21}, \ \ldots, \ \beta'_{i,i-1}, \ \ldots, \ \beta'_{\nu,\nu-1}, \ \beta'_{0\nu}, \ \alpha'_{00}, \ \alpha_{\nu 0}, \ a_{\nu-1,\nu}, \ \ldots, \ \alpha_{i-1,i} \ \ldots, \ \alpha_{12};$$

si $n = 2\nu + 1$,

$$\beta'_{21}, \ \ldots, \ \beta'_{i,i-1}, \ \ldots, \ \beta'_{\nu,\nu-1}, \ \alpha'_{0\nu}, \ \alpha_{\nu 0}, \ \alpha_{\nu-1,\nu}, \ \ldots, \ \alpha_{i-1,i}, \ \ldots, \ \alpha_{12}.$$

On a dans les trois cas $\alpha_{i-1,i} = -\beta'_{i,i-1}$ pour $i = 2, \ldots, \nu$ (**26**). De plus : si $n = 2\nu$, $\alpha'_{\nu\nu} = 0$; si $n = 2\nu + 2$, $\alpha_{\nu 0} = -\beta'_{0\nu}$ et $\alpha'_{00} = 0$; si $n = 2\nu + 1$, $\alpha_{\nu 0} = -2c\alpha'_{0\nu}$.

Dans le cas $n = 2\nu + 1$, p impair, on peut supposer $c = \frac{1}{2}$.

de B ayant cette forme est dans **P** (*cf.* **15**). On voit encore comme au n° **15** que *le normalisant de* **P** *dans* A^0 *est* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$, $\mathbf{M}^0$ *désignant le p. p. c. m.* (*abélien*) *des* m_j ($j \geqq 0$ *si* $\delta \neq 0$; $j \geqq 1$ *si* $\psi = 0$ *ou si* $\psi = cx^2$). *L'ordre de* $\mathbf{M}^0$ *est* $(\pi - 1)^{\nu}(\pi - \theta)$ *si* $n = 2\nu'$ (θ *ayant le même sens qu'au n°* **27**), *et* $(\pi - 1)^{\nu}$ *si* $n = 2\nu + 1$. $\mathbf{M}^0$ *est son propre normalisant dans* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$. *Si* $p > 2$, *le p. g. c. d.* $\mathbf{M}_B$ *de* $\mathbf{M}^0$, B *est d'indice* 2 *dans* $\mathbf{M}^0 = \mathbf{M}_B + m_{4N}\mathbf{M}_B$. *Le normalisant de* **P** *dans* B *est* $\mathbf{M}_B\mathbf{P}$.

Posons $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}^0, t_0\}$ *si* $\psi \neq 0$, *et* $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}^0, t_\nu\}$ *si* $\psi = 0$. *Le normalisant de* **P** *dans* A *est* **MP** (*cf.* **29**). *Mais si* $p = 2$, **P** *n'est pas sylowien dans* A : *soit alors* $\mathbf{P}' = \{\mathbf{P}, t_0\}$ *si* $\delta \neq 0$, *et* $\mathbf{P}' = \{\mathbf{P}, t_\nu\}$ *si* $\psi = 0$; $\mathbf{P}'$ *est un groupe sylowien de* A *contenant* **P**, *et le normalisant de* $\mathbf{P}'$ *dans* A *est encore* $\mathbf{MP} = \mathbf{M}^0\mathbf{P}'$ (le p. g. c. d. de ce normalisant avec $A^0 = B$ est évidemment le normalisant de **P** dans A^0).

45 [1]. *Pour* $p > 2$, $B(5, \pi)$ *est isomorphe au groupe simple* (**21**) $\mathcal{G}(4, \pi)$ [*pour* $p = 2$, $\mathcal{G}(4, \pi) \equiv G(4, \pi) \equiv A(5, \pi)$ (**26**)]. Soient, en effet, $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ les variables de $G(4, \pi)$, et $\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2$ des variables cogrédientes. Adjoignons aux variables de B la variable auxiliaire inaltérée y. Posons $x + y = -y_3$, $x - y = -x_3$, et identifions les variables $-x_3, \frac{x_2}{\gamma}, -\frac{x_1}{\gamma}, y_1, y_2, y_3$, γ étant une indéterminée $\neq 0$, avec les déterminants (cf. *S.*, 76) $Z_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \eta_1 & \eta'_1 \end{vmatrix}$, $Z_{13} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 \end{vmatrix}$, $Z_{14} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$, $Z_{23} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 \end{vmatrix}$, $Z_{24} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$,

---

[1] *Comparer* DICKSON, *Linear groups*, **189**. *Ce théorème coïncide au fond avec cet autre théorème connu que les coordonnées homogènes des droites de l'espace* S_3 *à trois dimensions peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes des points d'une quadrique* q_4 *dans l'espace à cinq dimensions* [*voir* BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva dégli iperspazi* (Pise, 1907), p. 32-39, 135-140]. En effet, l'action de $\mathcal{G}$ sur les points de S_5 est un groupe conservant q_4 et un plan correspondant à l'invariant de $\mathcal{G}$ dans S_3, donc aussi leur intersection, qui est une quadrique q_3 à cinq variables homogènes. Donc, d'après son ordre, $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathfrak{B}(5, \pi) \equiv B(5, \pi)$. Avec les notations du texte, q_3, intersection de $\Sigma_1^3 x_i y_i = 0$ et de $y = 0$, a pour équation $\Sigma_1^2 x_i y_i + x^2 = 0$.

$Z_{34} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi'_2 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$. Les générateurs $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & -\xi_2 \end{vmatrix}$, $|\xi_1, \xi_1 + \lambda\eta_1|$, $|\xi_2, \xi_2 + \lambda\eta_2|$, $\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_2 + \lambda\xi_1 \\ \eta_1 & \eta_1 - \lambda\eta_2 \end{vmatrix}$ de G opèrent sur x_1, y_1, x_2, y_2, $x = -\frac{1}{2}(x_3 + y_3)$, $y = \frac{1}{2}(x_3 - y_3)$ les substitutions respectives $t_{12} m_{1\gamma} m_{2,-\gamma} T_{12} = S_{12,-\gamma}$, $T_{12} m_{2,-1} = R_{121}$, $U_{12,-\lambda\gamma}$, $V_{21,-\lambda}$, $V^{(\gamma)}_{01,\lambda\gamma^{-1}}$. Or $S_{12,-\gamma} R_{121} = t_{12} m_{1\gamma} m_{2\gamma}$ transforme $U_{12\lambda}$ en $W_{12,\lambda\gamma^{-2}}$, $V_{21\lambda}$ en $V_{12,-\lambda}$, et $V_{01\lambda}$ en $U_{01,\lambda\gamma}$ (pour n impair, $V_{10\lambda} = W_{01\lambda} = 1$). Donc, pour $\lambda = c$, le second combiné (*S.*, 75) $G_2(4, \pi)$ de $G(4, \pi)$ est isomorphe à $B(5, \pi)$ (**43**) qui a le même ordre. Or $G_2 \equiv G|D \equiv \mathcal{G}$ (¹). Pour $\gamma = c = 1$ (*cf.* **24**), G_2 conserve $\Sigma_1^3 x_i y_i$ (*S.*, 76), et de même B, puisque B, laissant y inaltéré, conserve $a - y^2 = \Sigma_1^3 x_i y_i$.

44. *Si* $p > 2$, *et* $n = 2\nu + 1 > 5$, $B(n, \pi)$ *et* $\mathcal{G}(2\nu, \pi)$, *qui ont le même ordre, ne sont pas isomorphes*, car les normalisants de leurs $g_{\pi^{\nu^2}}$ sylowiens n'ont pas le même ordre (**23**, **42**).

45 (²). *Pour* $p \geqq 2$, $R_0(6, \pi)$ *est isomorphe au second combiné* (*S.*, 75) $U_2(4, \pi)$ *de* $U(4, \pi)$. En effet, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 étant les variables de R_0, désignons par ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 les variables de U, et identifions, comme au nº **43** (en faisant $\gamma = 1$), $-x_3$, x_2, $-x_1$, y_1, y_2, y_3 respectivement avec Z_{12}, Z_{13}, Z_{14}, Z_{23}, Z_{24}, Z_{34}. Les générateurs $|\eta_1, \eta_1 + \lambda\eta_2|$, $|\eta_2, \eta_2 + \lambda\eta_1|$, $|\xi_2, \xi_2 - \lambda\eta_1|$, $|\eta_1, \eta_1 - \lambda\xi_2|$ de U opèrent sur les x_i, y_i les substitutions respectives $V_{31\lambda}$, $V_{13\lambda}$, $V_{23\lambda}$, $V_{32\lambda}$, que $t_{12} m_{1\gamma} m_{2\gamma}$ (*cf.* **43**) ou, ce qui revient au même, t_{12} transforme

---

(¹) Voici, d'après les nºˢ **6**, **19**, **28**, un Tableau un peu plus complet de la correspondance définie au texte entre les éléments de $B(5, \pi)$, $\mathcal{G}(4, \pi)$, pour $\gamma = c$:

$\mathcal{G}(4, \pi)$	$\tau_1 = u_{11} v_{1,-1} u_{11}$	$\tau_2 = u_{21} v_{2,-1} u_{21}$	$u_{1\lambda}$	$u_{2\lambda}$	$V_{21\lambda}$	$V_{12\lambda}$	$U_{12\lambda}$
$B(5, \pi)$	$S_{21c} = T_{12} t_{12} m_{1,-c} m_{2c}$	$R_{121} = T_{12} m_{2,-1}$	$U_{12,-\lambda c}$	$V_{21,-\lambda}$	$V_{01,\frac{\lambda}{c}}$	$U_{10\lambda}$	$U_{20\lambda}$

$\mathcal{G}(4, \pi)$	$W_{12\lambda}$	$v_{1\lambda}$	$v_{2\lambda}$	m_{1t}	m_{2t}	$\tau_1 \tau_2$	$\tau_1 \tau_2 m_{1,\frac{1}{6}} m_{2,\frac{1}{2}}$
$B(5, \pi)$	$V_{02,\frac{\lambda}{c}}$	$W_{21,\frac{\lambda}{c}}$	$V_{12,-\lambda}$	$m_{1t} m_{2t}$	$m_{1t}^{-1} m_{2t}$	$t_{12} m_{1c} m_{2c}$	$t_{12} m_{1,\frac{c}{3}} m_{2,\frac{c}{12}}$

(²) *Comparer*, aux nºˢ **45**, **46**, DICKSON, *Linear groups*, 187-188, 206-207.

respectivement en $U_{31\lambda}$, $W_{13\lambda}$, $W_{23\lambda}$, $U_{32\lambda}$. Donc, d'après les résultats déjà obtenus au n° **43**, $R_0 \equiv U_2$.

La structure de $R_0(6, \pi)$ *est alors déterminée par la relation* $\mathcal{V}(4, \pi) \equiv U_2 | D_2 \equiv U | D_1$, D_1 *et* D_2 *étant des groupes cycliques de similitudes* (*divisant respectivement* U *et* U_2) *des ordres suivants :*

Si $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $(D_1, 1) = 4$, $(D_2, 1) = 2$;

Si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, $(D_1, 1) = 2$, $D_2 = 1$;

Si $p = 2$, $D_1 = D_2 = 1$.

De là résulte (**39**) *que* $\mathfrak{R}_0(6, \pi) \equiv \mathcal{V}(4, \pi)$ (¹).

Ainsi $R_0(6, 2) \equiv L(4, 2)$ *est isomorphe au* g^8 *alterné* (cf. *S.*, 70, 79). Pour établir une correspondance des générateurs, désignons par $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q$ les points respectifs 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111 du champ de $L(4, 2)$, et soit $\mathfrak{A}_8$ le g^8 alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (²). Si l'on fait correspondre $c = 132$, $s_1 = 12.34$, $s_2 = 12.45$, $s_3 = 12.56$, $s_4 = 12.67$, $s_5 = 12.78$ de $\mathfrak{A}_8$ aux substitutions respectives

$$c' = bol.cmg.dqn.epi.fkh, \qquad s'_1 = be.cn.dp.gi.lq.mo,$$
$$s'_2 = bl.cb.dq.ep.gf.km, \qquad s'_3 = cn.dg.fk.ip.lo.mq,$$
$$s'_4 = bl.cg.dp.eq.fh.in, \qquad s'_5 = be.dq.fk.gm.io.lp$$

de $L(4, 2)$, on a une correspondance isomorphique de $\mathfrak{A}_8$ à L. Posons maintenant

$$x = 1243567 = s_4 s_3 s_1 s_2 . s_1 c s_1, \qquad x_1 = 1234567 = s_4 s_3 s_2 s_1 . c^2 \quad (^3),$$
$$y = 23.56 = c s_3 c^2, \qquad z = 18.23 = (x_1 s_1 s_2)^{-1} . s_5 . x s_1 s_2, \qquad \tau = 145.267 = y x^2,$$
$$\xi = 14.35 = x y x^{-1}, \quad \eta = 13.45 = \tau^{-1} \xi \tau, \quad \zeta = 27.68 = x^2 z x^{-2}, \quad \theta = 26.78 = \tau^{-1} \zeta \tau,$$
$$\mu = 1852.3647 = z x^4, \qquad \gamma = 12345 = s_2 s_1 c^2, \qquad \delta = 14.56 = s_1 c s_1 . s_3 . (s_1 c s_1)^{-1}.$$

(¹) *Cet isomorphisme résulte d'ailleurs immédiatement du théorème cité dans la première note du n°* **43**. Car, en regardant les coordonnées comme homogènes, les points $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ sont tous sur une quadrique conservée par $\mathcal{V}_2(4, \pi) \equiv \mathcal{V}(4, \pi)$, qui est donc isomorphe à $\mathfrak{R}_0(6, \pi)$, d'après son ordre.

(²) Ces notations et celles qui vont suivre sont celles déjà employées (*S.*, **70**).

(³) La substitution correspondante de L est $x'_1 = bcoikph.\ dmefgnl.\ g$. Celle qui se trouve indiquée à l'endroit cité (*S.*, **70**, p. 92) est fautive et correspond à $s_4 s_3 s_2 s_1 . c$.

En écrivant sur une même ligne les substitutions qui se correspondent dans les isomorphismes indiquées de $R_0(6, 2)$, $L(4, 2)$, $\mathcal{A}_8$, on a le Tableau suivant :

$R_0(6, 2)$	$L(4, 2)$	$\mathcal{A}_8$
V_{21}	$\vert\xi_2, \xi_2+\eta_2\vert = el.ho.kp.nq.b.c.d.f.g.i.m$	$17.24.38.56 = \delta.\eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau.\delta$
U_{12}	$\vert\xi_1, \xi_1+\eta_1\vert = cf.im.kn.pq.b.d.e.g.h.l.o$	$12.38.47.56 = \eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau$
V_{13}	$\vert\eta_2, \eta_2+\eta_1\vert = ck.fn.ip.mq.b.d.e.g.h.l.o$	$15.26.34.78 = \xi\eta\theta$
V_{31}	$\vert\eta_1, \eta_1+\eta_2\vert = ek.hn.lp.oq.b.c.d.f.g.i.m$	$15.32.48.67 = x_1^{-1}.\eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau..x_1$
V_{23}	$\vert\xi_2, \xi_2+\eta_1\vert = ci.fm.kp.nq.b.d.e.g.h.l.o$	$14.27.35.68 = \xi\zeta$
V_{32}	$\vert\eta_1, \eta_1+\xi_2\vert = di.gm.lp.oq.b.c.e.f.h.k.n$	$18.27.36.45 = \gamma^{-3}.\eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau.\gamma^3$
$t_{12}T_{12}$	$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{vmatrix} = bc.gi.hk.op.d.e.f.l.m.n.q$	$17.25.38.46 = \xi\zeta\tau\mu\tau^{-1}$
T_1	$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = de.gh.ik.mn.b.c.f.l.o.p.q$	$12.38.46.57 = x^3\xi\theta x^{-3}$

Pour trouver inversement les substitutions de $R_0(6, 2)$ qui correspondent aux générateurs c, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 de $\mathcal{A}_8$, on remarquera que les substitutions de $\mathcal{A}_8$ répondant aux substitutions $t_{12}T_{12}.T_{12} = t_{12}$, $t_{12}V_{12}W_{12} = \mathbf{a}$, $U_{23}\mathbf{a}U_{23} = \mathbf{b}$, $V_{32}\mathbf{a}V_{32} = \mathbf{c}$, $W_{23}\mathbf{a}W_{23} = \mathbf{d}$, $T_{12}V_{23}\mathbf{a}V_{23}T_{12} = \mathbf{e}$, $V_{32}V_{13}\mathbf{a}V_{13}V_{32} = \mathbf{f}$, $\mathbf{e}\mathbf{b}\mathbf{e}^{-1} = \mathbf{g}$, $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{g} = \mathbf{h}$, $\mathbf{h}t_{12}\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{i}$ de $R_0(6, 2)$ sont respectivement 15.27, 145, 184, 485, 354, 286, 468, 124, 215, 12.57. Aux substitutions $\mathbf{cic}^{-1} = \mathbf{k}$, $\mathbf{fkf}^{-1} = \mathbf{l}$, $\mathbf{ili} = \mathbf{m}$, $\mathbf{fmf}^{-1} = \mathbf{n}$, $\mathbf{d}^{-1}\mathbf{nd} = \mathbf{o}$, $\mathbf{o}^{-1}\mathbf{go}$ de $R_0(6, 2)$ répondent donc respectivement s_5, s_4, s_3, s_2, s_1, c de $\mathcal{A}_8$.

La substitution t_1 de $Q_0(6, 2)$ est permutable à $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, t_{12}. Or, la seule substitution du g^8 symétrique $\mathfrak{S}_8$ de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 qui soit permutable aux substitutions correspondantes de $\mathcal{A}_8$ est 27. D'ailleurs 27 et t_1 *transforment de la même manière les générateurs correspondants de* $\mathcal{A}_8$ *et de* $R_0(6, 2)$. *On a donc une correspondance isomorphique de* $Q_0(6, 2)$ *et* $\mathfrak{S}_8$ (¹).

Mais $\mathfrak{S}_8$ *n'a aucune représentation en* g^{15} *où* $\mathcal{A}_8$ *soit représenté par* $L(4, 2)$. Car, t_1 étant permutable à V_{23}, V_{32}, U_{23}, W_{23}, $\mathbf{a}$, il devrait y avoir dans le champ de $L(4, 2)$ une s_2 permutable aux sub-

(¹) L'isomorphisme de $Q_0(6,2)$ à $\mathfrak{S}_8$ résulte d'ailleurs, d'après ce qui précède, de la théorie générale des automorphismes.

stitutions correspondantes : or, en essayant de la former, on arrive de suite à une impossibilité (¹).

46. *Pour* $p \geqq 2$, $\mathrm{R}_2(6, \pi)$ *est isomorphe au second combiné* (*S.*, 75) $\mathbf{H}_2^0(4, \pi)$ *de* $\mathrm{H}^0(4, \pi)$. En effet, désignons par $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ les variables de H^0, et faisons les mêmes identifications qu'au n° **45**, les x_i, y_i étant ici les variables de $\overline{\mathrm{R}}_2(6, \pi)$ [$\mathbf{H}_2^0$ a donc, comme $\overline{\mathrm{R}}_2$, l'invariant $\Sigma_1^3 x_i y_i$ (*S.*, 75)]. Comme H^0 contient $\mathrm{G}(4, \pi)$, H_2^0 contient toutes les $\mathrm{V}_{12\lambda}$, $\mathrm{V}_{21\lambda}$, $\mathrm{U}_{12\lambda}$, $\mathrm{W}_{12\lambda}$ (**43**), donc aussi, d'après (29), t_{12}. De plus l'action du générateur $\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_1 - \rho\xi_2 \\ \eta_2 & \eta_2 + \rho\eta_1 \end{vmatrix}$ de H^0 sur les x_i, y_i est $\mathrm{V}_{13\rho}\mathrm{U}_{13\rho}$, dont la transformée par t_{12} est $\mathrm{V}_{31\rho}\mathrm{W}_{31\rho}$. Donc H_2^0 contient toutes les $\mathrm{V}_{01\lambda}$, $\mathrm{V}_{10\lambda}$, $\mathrm{U}_{01\lambda}$, $\mathrm{W}_{01\lambda}$ (**31**).

La structure de $\mathrm{R}_2(6, \pi)$ *est alors déterminée* (**2**, **15**; *S.*, 75) *par la relation* $\mathcal{H}^0(4, \pi) \equiv \mathrm{H}^0 | \mathrm{D}^0 \equiv \mathrm{H}_2^0 | \mathrm{D}_2^0$, D^0 *et* D_2^0 *étant des groupes cycliques de similitudes* (*divisant respectivement* H^0 *et* H_2^0) *des ordres suivants :*

Si $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $(\mathrm{D}^0, 1) = 2$, $\mathrm{D}_2^0 = 1$;

Si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, $(\mathrm{D}^0, 1) = 4$, $(\mathrm{D}_2^0, 1) = 2$;

Si $p = 2$, $(\mathrm{D}^0, 1) = (\mathrm{D}_2^0, 1) = 3$.

De là résulte que $\mathfrak{R}_2(6, \pi) \equiv \mathcal{H}^0(4, \pi)$.

Comme $\mathrm{R}_2(6, 2)$ *est isomorphe à* $\mathfrak{R}_0(5, 3)$ (²), *donc à* $\mathcal{G}(4, 3)$ (**45**), *on voit que* $\mathcal{G}(4, 3) \equiv \mathcal{H}^0(4, 2)$.

47. Supposons $n \geqq 5$, et soit Γ un diviseur normal de B, A^0 A ou A' non $\leqq$ I.

Tout d'abord Γ contient des α qui ne sont pas des multiplications, car les conditions que α, $\mathrm{V}_{ik\lambda}^{-1}\alpha\mathrm{V}_{ik\lambda}$, $\mathrm{U}_{ik\lambda}^{-1}\alpha\mathrm{U}_{ik\lambda}$ $(i, k \geqq 0)$, $t_{12}\alpha t_{12}$ [t_{12} est dans B d'après (29)] soient des multiplications donnent

---

(¹) D'ailleurs le diviseur fixant un symbole de $\mathrm{L}(4, 2)$ est isomorphe à un g_{1344}^8 deux fois transitif (*S.*, 70, 78, 105). Au diviseur fixant un symbole de la représentation en question correspondrait donc un g_{2688}^8 deux fois transitif. Or un tel groupe n'existe pas (*S.*, **165**).

(²) *Voir* DICKSON, *Linear groups*, 270-276; DE SÉGUIER, *Comptes rendus*, t. **161**, 8 novembre 1915, p. 553.

(*cf.* **13**) $\alpha_{ii} = \alpha_{kk}$, $\beta'_{ii} = \beta'_{kk}$, $\alpha_{ii} = \beta'_{kk}$ $(i, k \geqq 0)$, $\alpha_{11} = \alpha_{jj}$ $(j \neq 1, 2)$, et, d'après (4), $\alpha_{ii}\beta'_{ii} = 1$, donc $\alpha = 1$ ou d.

Soit donc α une substitution de Γ autre qu'une multiplication. *On peut y supposer non nul un coefficient de second indice $\neq 0$, non situé dans la diagonale.* Sans cela, en effet, les équations (4)-(6) (pour j ou k nul) montrent que les α_{i0}, α'_{i0}, β_{i0}, β'_{i0} où $i \neq 0$ sont tous nuls. Et si, pour $\delta \neq 0$, α'_{00} ou β_{00} était $\neq 0$, $V_{0k\lambda}^{-1}\alpha V_{0k\lambda}$ ou $V_{k0\lambda}^{-1}\alpha V_{k0\lambda}$ a, dans l'une des deux dernières lignes et hors des deux dernières colonnes, un coefficient $\neq 0$.

En transformant maintenant α par une $m_{1,-1}^{r} T_{1k}^{r} t_{12}^{s}$ [$r, s = 0$ ou 1; une substitution de cette forme est toujours dans B (**39**)], on voit qu'on peut supposer non nul un des α_{j1}, β_{j1} autre que α_{11}. Si alors $\psi = cx^2$, l'équation (7) montre qu'un des α_{j1}, β_{j1} autres que α_{11}, α_{01} est $\neq 0$. Si $\delta \neq 0$, et si tous les α_{j1}, β_{j1} où $j > 1$ sont nuls, β_{k1} $(k > 1)$ est remplacé dans $V_{0k\lambda}^{-1}\alpha V_{0k\lambda}$ par $-\lambda(b\beta_{01} + 2c\alpha_{01})$, et dans $W_{0k\lambda}^{-1}\alpha W_{0k\lambda}$ par $-\lambda(b\alpha_{01} + 2c'\beta_{01})$, et ces deux quantités ne peuvent pas être nulles à la fois. *On peut donc supposer, quelle que soit ψ, qu'un des α_{j1}, β_{j1} autres que α_{11}, α_{01}, β_{01} est $\neq 0$.* En transformant au besoin par une $m_{2,-1}^{r} T_{2j}^{r} t_{23}^{s}$ ou une $m_{2,-1}^{r} T_{2j}^{r} t_{02}^{s} m_{2\lambda}$ [$r, s = 0$ ou 1, et λ étant choisi de manière que cette substitution soit dans B (**39**)], *on peut supposer $\beta_{21} \neq 0$. On rendra ensuite $\beta_{11} \neq 0$, en exceptant d'abord les cas où* $A = Q(5, \pi)$ *ou* $Q_2(6, \pi)$, par les trois opérations suivantes (*cf.* **13**) : 1° une transformation par $V_{13\lambda}$ qui, sans altérer β_{21}, rend $\beta_{23} \neq 0$ (elle remplace β_{23} par $\beta_{23} - \lambda\beta_{21}$); 2° une transformation par $U_{13\lambda}$ qui, sans altérer β_{21}, rend $\beta'_{21} \neq 0$ (elle remplace β'_{21} par $\beta'_{21} + \lambda\beta_{23}$); 3° la substitution à α de $\alpha^{-1}V_{21\lambda}^{-1}\alpha V_{21\lambda}$ où β_{11} est remplacé par $\beta_{11} + \lambda^2(\beta_{11}\beta'_{11} - \beta_{12}\beta'_{21})$. Si $A = Q(5, \pi)$ ou $Q_2(6, \pi)$, on rend $\beta_{11} \neq 0$ en substituant aux deux premières opérations une seule transformation par $U_{10\lambda}$ qui rend $\beta'_{21} \neq 0$ (elle remplace β'_{21} par $\beta'_{21} + \lambda\beta_{20} - c\lambda^2\beta_{21}$).

En transformant maintenant par des V_{1j}, U_{1j} on annulera tous les β_{j1}, α_{j1} où $j \neq 1$ (sans altérer β_{11}). Alors, d'après (7), $\alpha_{11} = 0$. D'après (4) et (5) $\alpha'_{11}\beta_{11} = 1$, et tous les α_{1j}, α'_{1j} où $j \neq 1$ sont nuls. Or, $|\alpha|$ étant $\neq 0$, un des déterminants à quatre éléments des colonnes de α_{11}, α'_{12} est $\neq 0$. Donc un des α'_{j2}, β'_{j2} où $j \neq 1$ est $\neq 0$. Comme tout à l'heure on peut y supposer $j \neq 0$. En transformant par une V_{i1} ou une W_{i1} on rendra $\beta'_{12} \neq 0$. En transformant alors par des V_{1j}, U_{1j} on annulera tous les β'_{j2} où $j \neq 1$ et tous les α'_{j2} où $j \neq 1, 2$ ($|\alpha|$ étant $\neq 0$, α'_{22} sera $\neq 0$, d'après ce qu'on vient de voir). On a donc, avec les notations du n° **26**, $Y'_1 = \beta_{11} x_1$, $X'_2 = \beta'_{12} x_1 + \alpha'_{22} y_2$, et par suite (*cf.* **13**)

$$\alpha^{-1} V_{12\lambda}^{-1} \alpha V_{12\lambda} = V_{21,\lambda\beta_{11}\alpha'_{22}} V_{12\lambda}.$$

Cette substitution étant dans $\mathbf{V}_{12}$ (**40**) hors de D_{12}, Γ contient $\mathbf{V}_{12}$.

Prenons maintenant $t_{23}\alpha t_{23}$, ou $m_{2\lambda}^{-1} t_{20} \alpha t_{20} m_{2\lambda}$ si $A = Q(5, \pi)$ ou $Q_2(6, \pi)$ [λ étant tel que $t_{20} m_{2\lambda}$ soit dans B (**39**)] pour α. Alors les α_{j1}, β_{j1} autres que β_{11} sont nuls; de même les α_{j2}, β_{j2} où $j \neq 1$, sauf β_{22}; de même les α_{1j}, α'_{1j} autres que α'_{11}. Mais β_{11}, β_{22}, α'_{11} sont $\neq 0$. Donc $Y'_1 = \beta_{11} x_1$, $Y'_2 = \beta_{12} x_1 + \beta_{22} x_2$, et l'on a

$$\alpha^{-1} U_{12\lambda}^{-1} \alpha U_{12\lambda} = W_{21,\lambda\beta_1\beta_{22}} U_{12\lambda}.$$

Cette substitution étant dans $\mathbf{W}_{12}$ hors de D_{13}, Γ contient $\mathbf{W}_{12}$.

Donc Γ contient B_{12} (**40**) et de même chaque B_{ik} où i, k sont $\neq 0$. D'ailleurs, si $\psi \neq 0$, d'après (25), ou d'après les théorèmes des n^{os} **43-46** (*cf.* **13**, **21**), le p. g. c. d. de Γ, $\{B_{ik}, B_{i0}\}$, normal dans $\{B_{ik}, B_{i0}\}$ et contenant B_{ik}, contient B_{i0} et coïncide avec $\{B_{ik}, B_{i0}\}$. *Donc, quelle que soit* ψ, Γ *est* $\geqq B$.

Donc, pour $n \geqq 5$, *tout diviseur normal de* B, A^0, A *ou* A' *non* $\leqq \Gamma$ *est* $\geqq B$ (¹), *et* $\mathfrak{B} = BD$ D *est simple* (*le cas* $n \leqq 4$ *a été traité au n°* **40**).

48. Considérons, pour $p > 2$, les trois groupes $A^0 = \{B, m_{1N}\}$, $B^1(n, \pi) = \{B, t_1\}$, $B^2(n, \pi) = \{B, t_1 m_{1N}\}$ (²), en convenant de rem-

---

(¹) On retrouve ainsi, pour $n \geqq 5$, que D est le central de A (*cf.* **39**).

(²) Désignons généralement par (Z) l'action d'une partie Z de A sur les s points de $a = 1$ (*cf.* **39**). (B) étant pair et (m_{1N}) impaire (**39**), (B^1) a la parité de (t_1) et (B^2) la parité opposée. Or (t_1) fixe les points de $a = 1$ où $x_1 = y_1$, c'est-à-dire les s' points de $\Sigma_2^\nu x_i y_i + \psi = 1 - x_1^2$ (on calcule s' en faisant la somme des nombres de solutions répondant à chaque valeur de x_1; cf. *E.*, **44**, **45**). Donc (t_1) a la parité de $\frac{1}{2}(s - s')$. Or, en désignant toujours par θ_ξ le caractère quadratique de ξ ($\theta_0 = 1$), si n est impair ($\psi = cx^2$, $p > 2$), $s = \pi^{2\nu} + \theta_c \pi^\nu$, $s' = \pi^{2\nu-1} - \theta_{-c} \pi^{\nu-1}$; si n est pair, $s = \pi^{2\nu'-1} - \theta\pi^{\nu'-1}$ ($\theta = 1$ si ψ est réductible ou nulle; $\theta = -1$ si ψ est irréductible; $p \geqq 2$), et $s' = \pi^{2\nu'-2} + \theta\pi^{\nu'-1}$ si $p > 2$, $s' = \pi^{2\nu'-2}$ si $p = 2$. Pour n impair, on peut se servir de la parité de (d) au lieu de celle de (t_1), d'après les indications qui suivent dans le texte.

placer B^i par $\overline{B}^i$, R^i, $\overline{R}^i$, R^i_k ou $\overline{R}^i_k$ quand B sera remplacé par $\overline{B}$, R, $\overline{R}$, R_k ou $\overline{R}_k$.

Si n est impair, d est hors de A^0, et $A = A^0 D$ (**39**). *Donc un des* B^i *coïncide avec* BD, *et l'autre* $\{B, dm_{1N}\}$ *est premier à* D *et isomorphe à* A^0 (dm_{1N} a le même ordre que m_{1N} et transforme les substitutions de B de la même manière que m_{1N}). Or $t_{01} m_{1,-c} = \tau$ est dans B (**32**). *Donc, en supposant c carré, si* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $d = \tau t_1 m_{1c} \Pi_2^{\nu} m_{i,-1}$ *est dans* B^1; si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, *d est dans* B^2 *pour* ν *pair, dans* B^1 *pour* ν *impair (si c est non carré, il suffit d'échanger dans cet énoncé* B^1 *et* B^2).

Si n est pair, D divise A^0(**39**). Comme la substitution γ du n° **24** transforme t_1 en $t_1 m_{1\rho}$, $\{m_{1\rho}\}$ étant le groupe des m_1 (même pour $n = 2$ et $\psi \neq 0$), *on voit d'abord que* $B^1 \equiv B^2$. *Mais* A^0 *n'est pas isomorphe à* B^1. Cela est clair si $n = 2$. Soit donc $n > 2$. Si D est premier à B, d est dans Bm_{1N}, donc hors de Bt_1 et de $Bt_1 m_{1N}$, donc hors de B^1 et de B^2, et comme D est le central de A, A^0 est $\not\equiv B^1$. Si D est $<$ B, les normalisants de **P** dans A^0 et dans celui des deux groupes B^1, B^2 qui contient $t_{\nu'}$ ($t_{\nu'}$ est dans Bt_1 ou dans $Bt_1 m_{1N}$) sont respectivement $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$ et $\{\mathbf{M}_B\mathbf{P}, t_{\nu'}\}$ (**42**). Or, s'ils étaient isomorphes, $\mathbf{M}^0\mathbf{P} \mid \mathbf{P}$ le serait à $\{\mathbf{M}_B\mathbf{P}, t_{\nu'}\} \mid \mathbf{P}$, donc $\mathbf{M}^0$, qui est abélien, à $\{\mathbf{M}_B, t_{\nu'}\}$ qui ne l'est pas.

Soit par exemple $n = 4$, ψ *étant irréductible*. Alors d est hors de **B** (**39**), et $A^0 = BD$. Soient λ et ρ des éléments de $\mathfrak{S}'$ d'ordres respectifs $\pi - 1$ et $\pi + 1$. Comme $m_{2\rho}$ est dans $Bm_{1\lambda}$ (**40**), $m_{1\lambda} m_{2\rho} = m$ est dans B. En posant d'ailleurs $\alpha\dot{\alpha} = \lambda$, $\alpha\dot{\alpha}^{-1} = \rho$ (ce qui est toujours permis) et (*cf.* **40**) $r = m_{1\alpha} m_{2\alpha}$, $s_r = m_{1\dot{\alpha}} m_{2\dot{\alpha}}^{-1}$, puis $1 + \rho\sigma = \alpha$, $\alpha\rho' = -\rho$, $\sigma' = -\sigma\alpha$, on a $rs_r = m$ et

$$r = W_{12\sigma'} U_{12\rho'} W_{21\sigma} U_{12\rho}, \qquad s_r = V_{12\dot{\sigma}'} V_{12\dot{\rho}'} V_{21\dot{\sigma}} V_{12\dot{\rho}}$$

[la forme réelle de m est fournie par (30), (31), (23)]. Ici **P** dérive des V_{10}, U_{10}; $\mathbf{M}_B = \{m\}$, et $t_2 m t_2 = m^{\pi}$ [1].

---

[1] On sait (*cf.* *S.*, 92) que, pour $p > 2$, il y a exactement trois groupes abstraits distincts d'ordre $\pi^2(\pi^4 - 1)$, non produits directs, ayant un diviseur normal isomorphe à $\mathfrak{V}(2, \pi^2)$. Ces trois groupes sont isomorphes à $\mathfrak{L}(2, \pi^2)$, $\mathfrak{L}'(2, \pi^2) = \{\mathfrak{V}, z^{\pi}\}$, $\mathfrak{L}''(2, \pi^2) = \{\mathfrak{V}, \iota' z^{\pi}\}$, z étant la variable de $\mathfrak{V}$. Soient

V. — Sur le groupe linéaire général.

On peut étudier de la même manière que précédemment le groupe sylowien d'ordre $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}$ de $U(n, \pi)$ ou $L(n, \pi)$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables, et posons $\varepsilon_{i\lambda} = |x_i, \lambda x_i|$, $u_{ik\lambda} = |x_i, x_i + \lambda x_k|$ $(i \neq k)$, les variables non écrites étant inaltérées (il sera souvent commode de supprimer le dernier indice de $u_{ik\lambda}$). On sait que U dérive des u_{ik}, et $L = \Sigma_{k=0}^{\pi-2} U \varepsilon_{i z}^{k}$. Les u_{ik} vérifient les relations

$$u_{hi\lambda} u_{kl\mu} = u_{kl\mu} u_{hi\lambda} \qquad (i \neq k,\ h \neq l;\ k \text{ peut être égal à } h, \text{ et } l \text{ à } i),$$

$$u_{il\mu}^{-1} u_{hi\lambda} u_{il\mu} = u_{hi\lambda} u_{hl,-\lambda\mu} \qquad (h \neq l).$$

Soient P_i le $g_{\pi^{n-i+1}}$ abélien principal, p. p. c. m. des $u_{i,i+1}, \ldots, u_{in}$ $(P_0 = P)$. D'après les formules précédentes P_i est permutable à toute substitution de P_{i+k}. Donc $\mathbf{P} = PP_1 \ldots P_{n-1}$ est un $g_{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ sylowien de U.

Désignons par $\{u_{ik}\}$ le g_π abélien principal, p. p. c. m. des $u_{ik\lambda}$, et considérons le Tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccc}
\{u_{1n}\} & \{u_{1,n-1}\} & \ldots & \{u_{13}\} & \{u_{12}\} \\
\{u_{2n}\} & \{u_{2,n-1}\} & \ldots & \{u_{23}\} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\{u_{n-1,n}\}. & & & &
\end{array}$$

Appelons $s^{\text{ième}}$ transversale la rangée d'éléments (parallèle à l'hypoténuse) formée des $\{u_{ik}\}$ où $k - i = n - s$. *Le* $s^{ième}$ *central de* $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des* $\{u_{ik}\}$ *figurant dans les s premières transversales.* En effet, admettons-le pour $C_0 = 1, C_1, \ldots, C_s$, et soit ξ un élément de C_{s+1} où entre le générateur u_{hi}. Pour que ξ soit permutable à u_{il} mod C_s, il faut que $i - h$ soit $\leqq n - s - 1$, et $l - h \geqq s$ quel que soit $l \geqq i + 1$. Il

---

$\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ les normalisants respectifs [tous d'ordre $\pi^2(\pi^2 - 1)$] d'un g_{π^2} $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \mathfrak{L}''$. $\mathcal{C} | \mathfrak{G} \equiv \{\iota' z\}$ est cyclique, $\mathcal{C}' | \mathfrak{G} \equiv \{\iota'^2 z, z^\pi\}$ diédral, et $\mathcal{C}'' | \mathfrak{G} \equiv \{\iota'^2 z, \iota z^\pi\}$ n'est ni cyclique ni diédral [il n'a qu'un e_2 qui est $(-z)$ et n'est pas abélien]. On a ainsi démontré à nouveau, pour $p > 2$, que $B^2 \equiv \mathfrak{L}'$ (*cf.* **40**).

suffit que la condition soit vérifiée pour $l = i + 1$, d'où $i - h = n - s - 1$. *L'ordre de* C_s *est évidemment* $\pi^{\frac{s(s+1)}{2}}$.

La forme générale des substitutions de P_ρ est $|x_\rho, \Sigma a_{\rho k} x_k|$, $a_{\rho k}$ étant nul pour $k < \rho$ et $a_{\rho\rho}$ égal à 1. *Donc, dans la matrice générale* $a = (a_{ik})$ *de* $\mathbf{P}$, *les* a_{ii}, *sont égaux à* 1, *et les* a_{ik} *où* $k < i$ *sont nuls; les autres sont arbitraires.*

Soit $\alpha = (\alpha_{ik})$ une matrice permutable à $\mathbf{P}$ et $\alpha a = a'\alpha$, a étant arbitraire dans $\mathbf{P}$ et $a' = (a'_{ik})$ étant dans $\mathbf{P}$. La comparaison des termes diagonaux de αa, $a'\alpha$ donne $\Sigma_{\rho=i}^{n} a_{i\rho}\alpha_{\rho i} = \Sigma_{\rho=1}^{i} \alpha_{i\rho} a'_{\rho i}$, d'où, pour $i = 1$, $\Sigma_2^n a_{1\rho}\alpha_{\rho 1} = 0$, et, les $a_{1\rho}$ étant arbitraires, $\alpha_{\rho 1} = 0$ pour $\rho > 1$.

Admettons que $\alpha_{\rho 1} = 0$ pour $\rho > 1$, que $\alpha_{\rho 2} = 0$ pour $\rho > 2$, ..., que $\alpha_{\rho, k-1} = 0$ pour $\rho > k - 1$. L'équation donne, pour $i = k$, $\Sigma_{k+1}^{n} a_{k\rho}\alpha_{\rho k} = 0$, d'où $\alpha_{\rho k} = 0$ pour $\rho > k$.

Donc, en désignant par $\mathbf{M}$ le $g_{(\pi-1)^n}$ abélien p. p. c. m. des ε_{ik}, α est dans $\mathbf{MP}$. *Donc* $\mathbf{MP} = \mathbf{PM}$, *d'ordre* $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}(\pi - 1)^n$, *est le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* L. *En désignant par* $\mathbf{M}^0$ *le p. g. c. d. de* $\mathbf{M}$, U, *on a évidemment* $\mathbf{M} = \Sigma_0^{\pi-2}\mathbf{M}^0 \varepsilon_{11}^k$, *et* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$, *d'ordre* $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}(\pi - 1)^{n-1}$ *est le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* U.

NOTE.

Le cas où n est impair avec $p = 2$, écarté au n° **26**, donne lieu aux remarques suivantes :

En définissant A^0 et B comme pour n pair avec $p = 2$, on a ici, A étant simple, $B = A^0 = A$. La dernière formule du n° **32** fournit d'ailleurs l'expression de $t_k = t_{0k}$ par les générateurs de A^0.

En désignant généralement par $G_{k_1 \ldots k_\nu}(2\nu, \pi)$ ce que devient $G(2\nu, \pi)$ quand on remplace x_i par x_{k_i} et y_i par y_{k_i}, la formule (27) montre que $\{B_{0k}, B_{0l}\}$ *est ici isomorphe au produit direct de* $G_k(2, \pi) = U_{x_k y_k}(2, \pi)$ (**20**) *par* $G_l(2, \pi)$, *donc isomorphe à* B_{kl} (**40**). Le p. g. c. d. Δ_{kl} de $\{B_{0k}, B_{0l}\}$, B_{kl} est formé des substitutions $s = s_k s_l$ (s_i étant dans B_{0i}) qui laissent x inaltéré. Or pour que s laisse x inaltéré, il faut évidemment que s_k et s_l le laissent aussi inaltéré. D'après le n° **26**, s_k est alors dans le groupe de $x_k y_k$, dérivé des m_k et de t_k. *Donc* Δ_{kl} *dérive des* m_k, *des* m_l *et de* t_{kl}. *Son ordre est* $2(\pi - 1)^2$.

L'isomorphisme de $A^0(3, \pi)$ avec $\mathfrak{L}(2, \pi)$ indiqué au n° **40** subsiste pour $p = 2$, et j'ajouterai que, pour $p \geqq 2$, la substitution de $A^0(3, \pi)$ qui transforme z en $\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est, en posant $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$ (*cf.* **32**)

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & \Delta^{-1}\left(\alpha^2 x_1 - \dfrac{\beta^2}{c} y_1 - 2\alpha\beta x\right) \\ y_1 & \Delta^{-1}\left(-c\gamma^2 x_1 + \delta^2 y_1 + 2c\gamma\delta x\right. \\ x & \Delta^{-1}\left[-\alpha\gamma x_1 + \dfrac{\beta\delta}{c} y_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) x\right] \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{ll} U_{01, \frac{\delta}{c\alpha}} V_{01, -\frac{\alpha\gamma}{\Delta}} m_{1, -\frac{\Delta}{\alpha^2}} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ t_0 m_{1, -\frac{\Delta}{c\gamma^2}} V_{01, -\frac{\gamma\delta}{\Delta}} & \text{si } \alpha = 0. \end{array} \right.$$

ERRATA.

Page 308, première ligne du n° **16**, *au lieu de* $\bar{a} = -a$, *lire* a gauche.