JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. DE MONTESSUS DE BALLORE

Sur les courbes gauches algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 2 (1916), p. 201-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__201_0>

Sur les courbes gauches algébriques;

PAR R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

INTRODUCTION.

1. Soient deux équations

$$(1) \qquad \Sigma x^h y^k z^l = 0, \qquad \Sigma x^{h'} y^{k'} z^{l'} = 0,$$

représentant une courbe gauche algébrique Γ.

On peut éliminer, entre ces deux équations, d'abord toutes les puissances de z; puis toutes les puissances de z, sauf z lui-même; cela donne deux nouvelles équations

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

qui représentent elles-mêmes, sauf quelques restrictions, la courbe Γ.

2. Considérons, par exemple, le système

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} a\,(x, y)z^2 + b(x, y)z + c(x, y) = 0, \\ a'(x, y)z^2 + b'(x, y)z + c'(x, y) = 0, \end{cases}$$

transformé en celui-ci

$$(\Gamma_1) \qquad \begin{cases} (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')(bc' - cb') = 0, \\ z(ac' - ca') - (bc' - cb') = 0. \end{cases}$$

Quand les courbes planes (a, b, c) d'une part [a est pris pour $a(x, y) = 0$], (a', b', c') d'autre part, n'ont pas de points communs, les droites parallèles à Oz, définies par les équations

$$c(x, y) = 0, \qquad c'(x, y) = 0,$$

font partie de la ligne Γ_1, tandis que les seuls points

$$z = 0, \qquad c(x, y) = 0, \qquad c'(x, y) = 0$$

sont sur la courbe Γ.

3. Quoi qu'il puisse être, la comparaison entre les systèmes (1, 2) n'offre jamais de difficultés et l'on peut, sans restreindre en principe la généralité de la question, étudier les courbes gauches algébriques sur des équations de la forme (2), comme l'ont fait Cayley ([1]) et surtout Halphen ([2]).

4. Cayley a en effet indiqué la représentation (2) des courbes gauches algébriques; mais, malgré son talent d'analyste, il n'a pas réussi à surmonter les difficultés qui, de prime abord, se présentent.

Halphen, au contraire, a énoncé des résultats du plus haut intérêt : il a ouvert cette voie difficile.

Comme il est naturel dans une première étude, Halphen a limité son sujet : il ne s'est occupé que des courbes n'ayant pas de points à l'infini et dépourvues de points singuliers ([3]); il a basé son grand Mémoire, qui ne comporte pas moins de 200 pages, sur la proposition suivante ([4]), à laquelle il reconnaît une extrême importance ([5]) : *Étant donnée une courbe gauche* Γ, *dépourvue de singularités, n'ayant pas de points à l'infini, et représentée par les équations*

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

pour qu'on puisse remplacer ce système par le suivant :

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi_1(x, y) - \psi_1(x, y) = 0,$$

([1]) Cayley, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LIV et LVIII.

([2]) Halphen, *Classification des courbes gauches algébriques* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1882). Consulter aussi : Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII), et E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*.

([3]) Il s'agit ici des singularités vraies et non des singularités apparentes.

([4]) et ([5]) Halphen, *loc. cit.*, p. 20, 25.

il faut et il suffit que le polynome $\chi_1(x, y)$ s'évanouisse en chacun des points doubles de la courbe φ.

5. On sait quel rôle considérable jouent les points singuliers, vrais et apparents, dans les courbes gauches algébriques. Il est même très remarquable que, dans ce difficile sujet, ce soient des formules analogues à celles que Plücker a données pour les courbes planes, qui aient constitué les premiers résultats généraux obtenus : je veux parler des formules de Cayley (¹).

Je me propose, en premier lieu, *de montrer que l'étude des singularités des courbes planes φ, ψ, χ permet toujours, sauf dans des cas très particuliers et peu importants, de préciser la nature des singularités de la courbe gauche* Γ (²).

Dans une seconde partie, *je donne la proposition générale*, qui renferme celle d'Halphen n° 4, *concernant les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir non seulement χ_1, mais encore ψ_1, pour qu'on puisse écrire*

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi_1(x, y) - \psi_1(x, y) = 0,$$

au lieu de

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

cela que la courbe Γ ait ou non des points à l'infini, ait ou non des singularités vraies (³); je me borne cependant ici au cas où φ, ψ d'une part, φ, χ d'autre part, n'ont pas de contacts, mais ψ, χ peuvent en avoir.

Comme il paraît impossible de généraliser la démonstration, assez pénible, d'Halphen, non plus que certaines autres démonstrations de son théorème (⁴), j'emploie des procédés qui diffèrent de ceux-ci.

Les calculs nécessités par les questions traitées dans la deuxième Partie sont d'une nature très spéciale. Pour les élucider, il m'a paru nécessaire de donner quelques applications.

(¹) *Cf.* par exemple G. SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 2ᵉ édition française, 2ᵉ Partie, p. 77.

(²) R. DE MONTESSUS DE BALLORE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 164, 1917, p. 392.

(³) *Ibid.*, t. 164, 1917, p. 428.

(⁴) Par exemple PICARD, *Traité d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. II, p. 572.

I. — ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DES COURBES ALGÉBRIQUES GAUCHES.

6. La première question qui se pose dans l'étude des courbes algébriques gauches Γ est celle des points singuliers, comme je l'ai dit.

Une parallèle à Oz, s'appuyant sur la courbe, peut passer par un point singulier de Γ; elle peut rencontrer Γ, non seulement en un point ordinaire, mais aussi en plusieurs points de cette espèce; elle peut encore rencontrer Γ à la fois en des points ordinaires et singuliers.

Dans le premier cas, *on dira* que Γ présente sur la parallèle à Oz une singularité *vraie;* ce sera un *nœud,* s'il s'agit d'un point double; cette singularité sera appelée *apparente* dans le second cas; on sait le rôle considérable que jouent les points doubles apparents; enfin, dans le dernier cas, la singularité sera *semi-apparente*.

Je vais montrer que *l'étude des singularités des courbes planes* φ, ψ, χ *permet toujours*, sauf dans quelques cas exceptionnels de peu d'intérêt auxquels il sera fait allusion au n° **7**, *de préciser la nature des singularités : vraies, apparentes, semi-apparentes de* Γ, et même d'étudier Γ au voisinage d'un point singulier vrai.

POINTS DE φ OU NE PASSENT NI ψ, NI χ.

7. En raison de la relation (2),

$$\varphi(x, y) = 0,$$

les seuls points du plan des xy à étudier sont ceux de la courbe φ.

Il est facile de préciser la valeur de z en un point ordinaire ou singulier de φ, où ne passent ni ψ, ni χ. *A un tel point* (a, b) *de* φ *correspond un point* (a, b, z) *de* Γ, *où* Γ *a une singularité analogue à celle que* φ *possède en* (a, b), *ou, au contraire est dépourvu de singularité, si* φ *n'a pas de singularité en* (a, b).

Il peut y avoir exception si Γ a en (a, b, z) un point singulier avec plusieurs branches de courbe dont les tangentes soient dans un même plan vertical. Des exceptions analogues peuvent se présenter dans tous les cas dont je parlerai.

POINTS SIMPLES DE φ OU PASSE AU MOINS L'UNE DES COURBES ψ, χ.

8. *En un point simple de φ, où ψ a un point simple, mais où ne passe pas χ, z n'a que la valeur zéro; en un point simple de φ, où ψ ne passe pas, mais où passe χ, z n'a qu'une seule valeur, elle est infinie.* Cela est évident.

9. *En un point simple (a, b) de φ où ψ, χ ont l'une et l'autre un point simple, z n'a qu'une valeur, finie si ψ, χ ont un contact du même ordre; si ψ a un contact d'ordre $n-1$ avec φ, et si χ a un contact d'ordre $p-1$ avec φ, z est nul ou infini, selon que $n>p$ ou $n<p$.*

En effet, soit

$$(\varphi)\qquad y-b=\alpha_1(x-a)+\alpha_2(x-a)^2+\alpha_3(x-a)^3+\ldots$$

l'équation de la courbe φ (¹).

Les équations de ψ, χ, qui passent en (a, b), sont de la forme

$$\begin{aligned}
0 = {} & \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \beta_{21}(x-a)^2 \\
& + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{31}(x-a)^3 \\
& + \ldots\ldots, \\
0 = {} & \gamma_{11}(x-a) + \gamma_{12}(y-b) + \gamma_{21}(x-a)^2 \\
& + \gamma_{22}(x-a)(y-b) + \gamma_{23}(y-b)^2 + \gamma_{31}(x-a)^3 \\
& + \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

mais, (x, y) étant constamment sur φ, pour les points (x, y) *consi-*

(¹) On peut supposer, pour éviter l'apparence de cas particuliers dénués d'intérêt, que les axes Ox, Oy sont orientés de manière que les tangentes à φ en (a, b) ne soient jamais parallèles à Oy. En fait, cette restriction est inutile.

dérés, on doit écrire

$$(\psi)\quad 0 \neq \psi(x,y) = \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \beta_{21}(x-a)^2 + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{31}(x-a)^3 + \ldots,$$

$$(\chi)\quad 0 \neq \chi(x,y) = \gamma_{11}(x-a) + \gamma_{12}(y-b) + \gamma_{21}(x-a)^2 + \gamma_{22}(x-a)(y-b) + \gamma_{23}(y-b)^2 + \gamma_{31}(x-a)^3 + \ldots,$$

relations qui, en tenant compte de (φ), prendront la forme

$$(3)\quad \psi(x,y) = (\beta_{11}+\beta_{12}\alpha_1)(x-a) + (\beta_{21}+\beta_{22}\alpha_1+\beta_{12}\alpha_2+\beta_{23}\alpha_1^2)(x-a)^2+\ldots,$$

$$(4)\quad \chi(x,y) = (\gamma_{11}+\gamma_{12}\alpha_1)(x-a) + (\gamma_{21}+\gamma_{22}\alpha_1+\gamma_{12}\alpha_2+\gamma_{23}\alpha_1^2)(x-a)^2+\ldots.$$

Les coefficients de quelques-unes des premières puissances de $(x-a)$ peuvent être nuls dans l'une ou l'autre de ces expressions. *Cela implique des contacts avec φ.*

1° Supposons en effet que

$$\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1 = 0 :$$

φ et ψ sont alors tangentes en (a, b), puisque α_1, coefficient angulaire de la tangente à φ en (a, b), vérifie l'équation

$$\beta_{11} + \beta_{12}y'_x = 0,$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente à ψ en (a, b).

2° *Supposons ensuite que*

$$(5)\qquad \beta_{11}+\beta_{12}\alpha_1 = 0,\qquad \beta_{21}+\beta_{22}\alpha_1+\beta_{12}\alpha_2+\beta_{23}\alpha_1^2 = 0;$$

quelle est la condition pour que φ, ψ aient un contact du deuxième ordre?

Rappelons en quelques mots la théorie des contacts.

Si

$$(6)\qquad x = f(t),\qquad y = \varphi(t)$$

sont les équations paramétriques d'une courbe φ; si

$$0 = F(x,y) = F[f(t), \varphi(t)] = \mathcal{F}(t)$$

est l'équation d'une courbe ψ, où l'on a remplacé (x, y) par leurs expressions (6), il y a contact du deuxième ordre en t_0 entre les deux courbes si

$$(7) \qquad \mathcal{F}(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}''(t_0) = 0.$$

Dans le cas présent,

$$x = t, \qquad t_0 = a$$

et (3)

$$\mathcal{F}(t) = (\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1)(t - a) + (\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_1^2)(t - a)^2 + \ldots,$$

de telle sorte que les conditions (7) s'écrivent

$$\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1 = 0, \qquad \beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_1^2 = 0 :$$

ce sont les relations (5). Si les relations (5) sont vérifiées, φ, ψ ont donc un contact du deuxième ordre en (a, b).

3° Plus généralement, et de façon toute semblable, *si les coefficients de* $(x - a)$, $(x - a)^2$, ..., $(x - a)^{n-1}$ *de* ψ, *dans* (3), *sont nuls*, ψ *a un contact d'ordre* $(n - 1)$ *avec* φ, *en* (a, b).

Dans ce cas,

$$\frac{\psi(x, y)}{(x - a)^n} = \beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_1 + \ldots + (\beta_{n+1,1} + \ldots)(x - a) + \ldots$$

est fini en (a, b) puisque

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x - a)^n}\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = \beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_1 + \ldots.$$

De même, *si les coefficients de* $(x - a), (x - a)^2, \ldots, (x - a)^{p-1}$ *de* χ, *dans* (4), *sont nuls*, χ *a un contact d'ordre* $(p - 1)$ *avec* φ, en (a, b), et

$$\left[\frac{\chi(x, y)}{(x - a)^p}\right]_{a,b} = \gamma_{p,1} + \gamma_{p,2}\alpha_1 + \ldots$$

est fini.

On a écrit

$$\left[\frac{\varphi(x, y)}{(x - a)^p}\right]_{a,b} \quad \text{pour} \quad \left[\frac{\chi(x, y)}{(x - a)^p}\right]_{\substack{x=a\\y=b}},$$

on a donc

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right]_{a,b} = \left[\frac{\psi(x,y):(x-a)^n}{\chi(x,y):(x-a)^p}\right]_{a,b} (x-a)^{n-p}_{x=a}$$
$$= \frac{\beta_{n,1}+\beta_{n,2}\alpha_1+\ldots}{\gamma_{p,1}+\gamma_{p,2}\alpha_1+\ldots}(x-a)^{n-p}_{x=a},$$

quantité *nulle*, *finie non nulle*, *ou infinie* selon que

$$n > p, \qquad n = p, \qquad n < p.$$

9. Passons au cas où ψ, χ ont des points multiples (¹) en (a, b). Ici,

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = {} & \beta_{h,1} \quad (x-a)^h + \beta_{h,2} \quad (x-a)^{h-1}(y-b) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \beta_{h,h+1}(y-b)^h + \beta_{h+1,1}(x-a)^{h+1} + \beta_{h+1,2}(x-a)^h(y-b) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \chi(x,y) = {} & \gamma_{k,1} \quad (x-a)^k + \gamma_{k,2} \quad (x-a)^{k-1}(y-b) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \gamma_{k+1,1}(x-a)^{k+1} + \ldots,\end{aligned}$$

et cette question peut être traitée tout comme l'a été la précédente. *Si* $\psi(x, y)$ *n'a pas de contact en* (a, b) *avec* φ,

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^h}\right]_{a,b}$$

n'est ni nul, ni infini. Si φ *et* ψ *ont un contact d'ordre* p,

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^{h+p}}\right]_{a,b}$$

n'est ni nul, ni infini.

Ayant énoncé le résultat analogue qui concerne φ, il n'y aura aucune difficulté à reconnaître si $\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$ est nul, fini non nul, ou infini en (a, b).

(¹) Je dirai, pour simplifier le langage, que ψ a un point multiple d'ordre n en (a, b) si l'équation (ψ) de cette courbe (nº 8) débute par des termes de degré n,

$$\beta_{n,1}(x-a)^n + \beta_{n,2}(x-a)^{n-1}(y-b) + \ldots,$$

quelle que soit la nature de la singularité que présente ψ en (a, b).

10. En général, l'équation de φ n'est pas donnée sous la forme (φ) du n° **9**, mais sous celle-ci :

$$\varphi(x, y) = 0 = \alpha_{11}(x - \alpha) + \alpha_{12}(y - b) + \alpha_{21}(x - a)^2 + \ldots.$$

Il est alors tout aussi facile, mais plus long, d'obtenir les résultats qui ont été énoncés.

Il serait peu utile, sauf en vue d'application à des courbes gauches Γ déterminées, de reprendre l'exposé avec cette dernière forme de φ. Au surplus, nous supposerons, dans ce qui suit, et précisément pour les applications qu'on voudrait faire de cette théorie, que φ est donnée sous cette forme implicite quand (a, b) en est un point double; on reviendra sans peine, si on le veut, de ce dernier cas, à celui où (a, b) est un point simple.

POINTS DOUBLES DE φ OU PASSE AU MOINS L'UNE DES COURBES ψ, χ.

11. Aux environs d'un point (a, b), *où les deux branches de φ ne sont pas tangentes entre elles*, nous pourrions écrire, selon la branche où se trouve (x, y),

$$\begin{aligned} y - b &= \alpha_{11}(x - a) + \alpha_{21}(x - a)^2 + \alpha_{31}(x - a)^3 + \ldots, \\ y - b &= \alpha_{12}(x - a) + \alpha_{22}(x - a)^2 + \alpha_{32}(x - a)^3 + \ldots, \end{aligned}$$

et poursuivre l'étude comme dans le cas où φ a un point simple, en envisageant tour à tour les deux branches de φ; mais en vue des applications, comme il vient d'être dit, dans le but aussi d'éviter l'emploi des cycles, quand les deux branches de φ sont tangentes l'une à l'autre, nous prendrons φ sous la forme

$$(\varphi) \qquad \begin{aligned} \varphi(x, y) = 0 = {} & \alpha_{21}(x - a)^2 + \alpha_{22}(x - a)(y - b) \\ & + \alpha_{23}(y - b)^2 + \alpha_{31}(x - a)^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Nous avons encore

$$(\psi) \qquad \begin{aligned} \psi(x, y) = {} & \beta_{11}(x - a) + \beta_{12}(y - b) + \beta_{21}(x - a)^2 \\ & + \beta_{22}(x - a)(y - b) + \beta_{23}(y - b)^2 + \beta_{31}(x - a)^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$(\chi) \qquad \begin{aligned} \chi(x, y) = {} & \gamma_{11}(x - a) + \gamma_{12}(y - b) + \gamma_{21}(x - a)^2 \\ & + \gamma_{22}(x - a)(y - b) + \gamma_{23}(y - b)^2 + \gamma_{31}(x - a)^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les premiers coefficients $\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots$ peuvent être nuls.

12. On a

$$\frac{\psi(x,y)}{x-a} = \beta_{11} + \beta_{12}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{21}(x-a) + \beta_{22}(y-b) + \beta_{23}(y-b)\frac{y-b}{x-a} + \beta_{31}(x-a)^2 + \ldots,$$

(x, y) étant, *il ne faut pas le perdre de vue*, un point de la courbe φ; puis

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{x-a}\right]_{a,b} = \beta_{11} + \beta_{12}(y'_x)_{a,b},$$

où $(y'_x)_{a,b}$ est le coefficient angulaire de la tangente en (a, b) à la courbe φ. Ce coefficient angulaire a deux valeurs, puisque les deux branches de φ qui passent en (a, b) ont des tangentes distinctes.

Si

$$\beta_{11} + \beta_{12}(y'_x)_{a,b} \neq 0,$$

c'est-à-dire si (y'_x) ne vérifie pas l'équation

$$\beta_{11} + \beta_{12} u'_x = 0,$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente à ψ en (a, b) *la quantité* $\left[\frac{\psi(x,y)}{x-a}\right]_{a,b}$ *n'est pas nulle : ici, ψ n'est pas tangente à la branche de φ où se trouve (x, y).*

Au contraire, si

$$(8) \qquad \beta_{11} + \beta_{12}(y'_x)_{a,b} = 0,$$

$\left[\frac{\psi(x,y)}{x-a}\right]_{a,b}$ *est nul, ψ est tangente en (a, b) à la branche de φ où se trouve (x, y).*

Étudions complètement, *dans ce cas*,

$$\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^2} = \frac{\beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2} + \beta_{21} + \beta_{22}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots;$$

montrons que

$$\left[\frac{\beta_{11}(x-a)+\beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}+\beta_{21}+\beta_{22}\frac{y-b}{x-a}+\beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2\right]_{a,b}$$

n'est pas nul si ψ *n'a qu'un contact du premier ordre en* (a, b) *avec la branche de* φ *où se trouve* ψ. En effet, *pour un point* (ξ, η) *de* ψ,

$$\begin{aligned}
0 &= \psi(\xi,\eta) = \beta_{11}(\xi-a)+\beta_{12}(\eta-b)+\beta_{21}(\xi-a)^2\\
&\qquad + \beta_{22}(\xi-a)(\eta-b)+\beta_{23}(\eta-b)^2+\beta_{31}(\xi-a)^3+\ldots,\\
0 &= \frac{d\psi(\xi,\eta)}{d\xi} = \beta_{11}+\beta_{12}\eta'_\xi+2\beta_{21}(\xi-a)+\beta_{22}[\eta+(\xi-a)\eta'_\xi]\\
&\qquad +2\beta_{23}(\eta-b)\eta'_\xi+3\beta_{31}(\xi-a)^2+\ldots,\\
0 &= \frac{d^2\psi(\xi,\eta)}{d\xi^2} = \beta_{12}\eta''_{\xi^2}+2\beta_{21}+\beta_{22}[2\eta'+(\xi-a)\eta''_{\xi^2}]\\
&\qquad +2\beta_{23}[(\eta-b)\eta''_{\xi^2}+\eta'^2_\xi]+6\beta_{31}(\xi-a)+\ldots,
\end{aligned}$$

$$(9)\qquad 0=\left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\right)_{a,b}=\beta_{12}(\eta''_{\xi^2})_{a,b}+2\beta_{21}+2\beta_{22}(\eta'_\xi)_{a,b}+2\beta_{23}(\eta'^2_{\xi})_{a,b}.$$

Si

$$(10)\qquad \left[\frac{\beta_{11}(x-a)+\beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}+\beta_{21}+\beta_{22}\frac{y-b}{x-a}+\beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2\right]_{a,b}=0,$$

il résulte de

$$\left[\frac{\beta_{11}(x-a)+\beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}\right]_{a,b}=\left[\frac{\beta_{11}+\beta_{12}y'_x}{2(x-a)}\right]_{a,b}=\frac{1}{2}\beta_{12}(y''_{x^2})_{a,b}$$

que

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\beta_{12}y''_{a,b}+\beta_{21}y'_{a,b}+\beta_{23}y'^2_{a,b}=0;$$

l'identité (8) étant équivalente à

(9, 10, 11) entraînent

$$y'_{a,b}=\eta'_{a,b},\qquad y''_{a,b}=\eta''_{a,b},$$

c'est-à-dire *supposent un contact du deuxième ordre*, au moins, *entre* ψ *et la branche de* φ *où se trouve* (x, y).

13. Soit maintenant

$$\beta_{11}=\beta_{12}=0.$$

On a, dans cette hypothèse,

$$(\psi) \qquad \psi(x, y) = \beta_{21}(x-a)^2 + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{21}(x-a)^3 + \ldots.$$

et la courbe ψ a un point double en (a, b). Écrivons

$$\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2} = \beta_{21} + \beta_{22}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots,$$

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b} = \beta_{21} + \beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b},$$

où $y'_{a,b}$ est encore l'un des coefficients angulaires des deux tangentes à φ en (a, b).

Dans le cas actuel, $\left[\dfrac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b}$ *est nul, ou ne l'est pas, selon que*

$$\beta_{21} + \beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b}$$

est lui-même nul ou ne l'est pas, selon que le coefficient angulaire $y'_{a,b}$ de la tangente en (a, b) à la branche de φ où se trouve (x, y) vérifie ou ne vérifie pas l'équation aux coefficients angulaires

$$\beta_{21} + \beta_{22}u'_{r} + \beta_{23}u'^2_{r} = 0$$

des tangentes à ψ, φ en (a, b), *selon enfin que l'une des deux branches de ψ a ou non un contact du premier ordre avec la branche de φ par laquelle (x, y) arrive en (a, b).* Plusieurs cas sont à distinguer.

14. Soit 1° :

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} = 0;$$

ici, *la courbe ψ a un point triple en (a, b)* et $\psi(x, y)$ est de la forme

$$(\psi) \quad \psi(x, y) = \beta_{31}(x-a)^3 + \beta_{32}(x-a)^2(y-b) + \beta_{33}(x-a)(y-b)^2 + \beta_{34}(y-b)^3 + \beta_{41}(x-a)^4 + \ldots;$$

donc

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b} = \beta_{31} + \beta_{32}y'_{a,b} + \beta_{33}y'^2_{a,b} + \beta_{34}y'^3_{a,b};$$

si les courbes φ, ψ n'ont pas de tangente commune, cette quantité n'est pas nulle : en effet, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes en (a, b) à la courbe

$$0 = \psi(\xi, \eta) = \beta_{31}(\xi - a)^3 + \ldots + \beta_{34}(\eta - b)^3 + \beta_{41}(\xi - a)^4 + \ldots$$

est celle-ci

$$\beta_{31} + \beta_{32}\eta'_{a,b} + \beta_{33}\eta'^2_{a,b} + \beta_{34}\eta'^3_{a,b} = 0;$$

si l'on avait

$$\beta_{31} + \beta_{32}y'_{a,b} + \beta_{33}y'^2_{a,b} + \beta_{34}y'^3_{a,b} = 0,$$

c'est que le coefficient angulaire $y'_{a,b}$ de l'une des tangentes à φ en (a, b) serait identique à l'un des coefficients angulaires des tangentes à ψ en (a, b).

Soit 2° :

$$\beta_{11} = \beta_{12} = 0, \tag{12}$$

$$\left[\beta_{21} + \beta_{22}\frac{y - b}{x - a} + \beta_{23}\left(\frac{y - b}{x - a}\right)^2\right]_{a,b} = 0; \tag{13}$$

ψ *n'a plus qu'un point double en* (a, b). La condition (13) donne lieu à la relation

$$\beta_{21} + \beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b} = 0. \tag{14}$$

Or, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes en (a, b) à ψ,

$$(\psi) \qquad 0 = \psi(\xi, \eta) = \beta_{21}(\xi - a)^2 + \beta_{22}(\xi - a)(\eta - b) + \beta_{23}(\eta - b)^2 + \beta_{31}(\xi - a)^3 + \ldots$$

est

$$\beta_{21} + \beta_{22}\eta'_{a,b} + \beta_{23}\eta'^2_{a,b} = 0, \tag{15}$$

et la relation (14) suppose (15) que *l'une des deux branches de* ψ *est tangente à l'une des deux branches de* φ. Dans le cas présent,

$$\frac{\psi(x, y)}{(x - a)^3} = \frac{\beta_{21}(x - a)^2 + \beta_{22}(x - a)(y - b) + \beta_{23}(y - b)^2}{(x - a)^3}$$
$$+ \beta_{31} + \beta_{32}\frac{y - b}{x - a} + \beta_{33}\left(\frac{y - b}{x - a}\right)^2 + \beta_{34}\left(\frac{y - b}{x - a}\right)^3 + \beta_{41}(x - a) + \ldots;$$

la règle de l'Hopital, appliquée trois fois, montre que

$$\left[\frac{\beta_{21}(x - a)^2 + \beta_{22}(x - a)(y - b) + \beta_{23}(y - b)^2}{(x - a)^3}\right]_{a,b}$$
$$= \frac{1}{2}\beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'_{a,b}y''_{a,b};$$

il en résulte

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b} = \frac{1}{2}\beta_{22}y''_{a,b} + \beta_{23}y'_{a,b}y''_{a,b} + \beta_{31} + \beta_{32}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^{2}_{a,b} + \beta_{34}y'^{3}_{a,b}.$$

On verrait, comme au n° **12**, que

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b}$$

n'est pas nul si le contact entre φ, ψ est du premier ordre, mais est nul si ce contact est du deuxième ordre.

Soit 3° :

La courbe ψ a un point simple en (a, b) et un contact du deuxième ou du troisième ordre avec φ; on verrait, comme précédemment, que

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b}$$

a une limite finie non nulle si le contact est du second ordre et une limite nulle si le contact est du troisième ordre.

Les conclusions sont identiques à celles que nous avions trouvées (n° **9**) *dans le cas où φ a un point simple en (a, b).*

15. *Études maintenant le cas où les deux branches de φ sont tangentes l'une à l'autre en (a, b). Ici,*

$$(\varphi) \qquad \varphi(x,y) = 0 = [\alpha_1(x-a) + \beta_1(y-b)]^2 + \alpha_{31}(x-a)^3 + \alpha_{32}(x-a)^2(y-b) + \ldots.$$

Soit, pour un point voisin de (a, b),

$$(\psi) \qquad \psi(x,y) = \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \beta_{21}(x-a)^2 + \ldots.$$

$$\frac{y-b}{x-a} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon.$$

où $\varepsilon_{a,b}$ est nul. On a

$$\frac{\psi(x,y)}{x-a} = \beta_{11} + \beta_{12}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{21}(x-a) + \ldots,$$

$$= \beta_{11} + \beta_{12}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon\right) + \beta_{21}(x-a) + \ldots,$$

$$(16) \qquad \left[\frac{\psi(x,y)}{x-a}\right]_{a,b} = \beta_{11} - \beta_{12}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

1° *Si la courbe ψ, qui a un point simple en (a, b), et dont la tangente en (a, b) a pour coefficient angulaire $-\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}$, est tangente à φ, on a*

$$\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

d'où (16)

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = 0;$$

si ψ n'est pas tangente à φ,

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b}$$

est fini non nul.

2° *Si la courbe ψ a un point double en (a, b),*

$$(\psi) \quad \psi(x, y) = \beta_{21}(x-a)^2 + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{31}(x-a)^3 + \ldots,$$

$$\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2} = \beta_{21} + \beta_{22}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots,$$

$$= \beta_{21} + \beta_{22}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon\right) + \beta_{23}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots,$$

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b} = \beta_{21} - \beta_{22}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \beta_{23}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2;$$

on voit que

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b}$$

n'est pas nul si ψ n'a qu'un contact du premier ordre avec φ; mais elle est nulle si ψ a un contact du deuxième ordre ou d'ordre supérieur avec φ.

*Les conclusions sont donc encore identiques à celles que nous avions trouvées (n° **9**) dans le cas où φ a un point simple en (a, b).*

16. *Les conclusions subsistent si ψ a un point multiple avec plusieurs tangentes confondues en (a, b), que les deux branches de φ aient ou non même tangente.*

17. Nous pouvons maintenant conclure pour z.

Si (x, y) atteignant (a, b) par une certaine branche de φ, on a

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^{n_1}}\right]_{a,b} = c_{11}, \qquad c_{11} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

et si, sur la même branche, on a

$$\left[\frac{\chi(x, y)}{(x-a)^{p_1}}\right]_{a,b} = c_{21}, \qquad c_{21} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

ce qui implique un contact d'ordre $n_1 - 1$ entre cette branche de φ et ψ, et un contact d'ordre $p_1 - 1$ entre cette même branche de φ et χ, la valeur correspondante z_1 de z est nulle, finie non nulle, ou infinie, selon que

$$n_1 > p_1, \qquad n_1 = p_1, \qquad n_1 < p_1.$$

Si (x, y) atteignant (a, b) par l'autre branche de φ, on a

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^{n_2}}\right]_{a,b} = c_{12}, \qquad c_{12} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

$$\left[\frac{\chi(x, y)}{(x-a)^{p_2}}\right]_{a,b} = c_{22}, \qquad c_{22} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

la valeur correspondante z_2 de z est nulle, finie non nulle, ou infinie, selon que

$$n_2 > p_2, \qquad n_2 = p_2, \qquad n_2 < p_2.$$

Applications.

18. Voici quelques cas intéressants :

1° *Les courbes ψ, χ ont chacune un point simple en (a, b) et ne sont tangentes ni l'une ni l'autre à φ; de plus, ψ, χ ne sont pas tangentes entre elles en (a, b).*

Ici, d'abord sur l'une, puis sur l'autre branche de φ,

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{11}, \qquad \left[\frac{\chi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{21},$$

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{12}, \qquad \left[\frac{\chi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{22},$$

avec

$$c_{11}, \quad c_{21}, \quad c_{12}, \quad c_{22} \neq 0 \quad \text{et} \quad \neq \infty :$$

z_1 et z_2 sont donc finis non nuls.

Montrons que z_1 et z_2 *n'ont pas la même valeur*. En effet, en se reportant aux expressions de φ, ψ, χ écrites au n° **11**, on voit que, α_1 et α_2 étant les deux coefficients angulaires des tangentes à φ en (a, b),

$$z_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1},$$

$$z_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_2}.$$

Si ces deux valeurs de z étaient identiques, nous aurions, puisque α_1 diffère de α_2 par hypothèse,

$$\frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_2} = \frac{\beta_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\beta_{12}}{\gamma_{12}}$$
$$= \frac{(\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1) - \beta_{12}\alpha_1}{(\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1) - \gamma_{12}\alpha_1} = \frac{\beta_{11}}{\gamma_{11}},$$

et cela nécessiterait que les courbes ψ, χ soient tangentes l'une à l'autre en (a, b), contrairement à ce qui a été supposé.

Puisque z_1 et z_2 diffèrent l'un de l'autre, *la courbe* Γ *a un point double apparent sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b).

2° *Les courbes ψ et χ ont chacune un point simple en (a, b); elles ne sont tangentes ni l'une ni l'autre à φ, mais elles sont tangentes entre elles.*

L'analyse précédente montre que $z_1 = z_2$: ici, *la courbe gauche* Γ *a un point double vrai sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b).

3° *Les courbes ψ, χ ont chacune un point simple en (a, b); l'une de ces deux courbes a un contact simple avec une des deux branches de φ.*

Si c'est la courbe ψ qui est tangente à une branche de φ en (a, b), quand (x, y) arrive en (a, b) par la branche de φ où a lieu le contact, z est nul; quand (x, z) arrive en (a, b) par l'autre branche, z est fini non nul (*n°* **12**).

Si c'est la courbe χ qui est tangente à une branche de φ, l'une des valeurs de z est infinie, l'autre est finie.

4° Plus généralement, *si ψ a un contact d'ordre $n - 1$ avec une branche de φ, si χ a un contact d'ordre $p - 1$ avec la même branche de φ, quand (x, y) arrive en (a, b) par la branche de φ où a lieu le* *contact, la valeur correspondante de z est nulle, finie non nulle, ou infinie selon que*

$$n > p, \quad n = p, \quad n < p.$$

Étudions complètement le cas où l'on a

$$n = p.$$

Ici,

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)},$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \ldots & \\ + \beta_{n1}(x-a)^n + \beta_{n2}(x-a)^{n-1}(y-b) + \ldots & \\ + \beta_{n,n+1}(y-b)^n + \beta_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots, & \\ \chi(x, y) = \gamma_{11}(x-a) + \gamma_{12}(y-b) + \ldots & \\ + \gamma_{n1}(x-a)^n + \gamma_{n2}(x-a)^{n-1}(y-b) + \ldots & \\ + \gamma_{n,n+1}(y-b)^n + \gamma_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots ; & \end{aligned}$$

faisons

$$y - b = \alpha_1(x-a);$$

il vient, si ψ et χ ont l'une et l'autre un contact d'ordre $n-1$ avec la branche de φ qui a α_1 pour coefficient angulaire,

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(\beta_{n1} + \beta_{n2}\alpha_1 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_1^n)(x-a)^n + \beta_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots}{(\gamma_{n1} + \gamma_{n2}\alpha_1 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_1^n)(x-a)^n + \gamma_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots},$$

d'où

$$z_1 = \left[\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}\right]_{a,b} = \frac{\beta_{n1} + \beta_{n2}\alpha_1 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_1^n}{\gamma_{n1} + \gamma_{n2}\alpha_1 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_1^n};$$

d'autre part, si ψ_1 et χ ont chacune un contact d'ordre $m-1$ avec la branche de φ qui a α_2 pour coefficient angulaire,

$$z_2 = \frac{\beta_{m1} + \beta_{m2}\alpha_2 + \ldots + \beta_{m,m+1}\alpha_2^m}{\gamma_{m1} + \gamma_{m2}\alpha_2 + \ldots + \gamma_{m,m+1}\alpha_2^m};$$

ces valeurs z_1, z_2 de z sont finies non nulles. Elles peuvent être égales : Γ peut avoir soit un point double apparent, soit un nœud sur la parallèle à Oz menée par (a, b).

5° *Si ψ est tangente à une branche de φ, et si χ est tangente à l'autre branche de φ, les valeurs correspondantes de z sont : zéro pour la première branche de φ, l'infini pour la seconde branche de φ.*

6° *Quand* φ *a en* (a, b) *un point double à tangentes confondues* (n° **15**), z *n'a plus qu'une seule valeur*, Γ *a un nœud, situé soit en* (a, b), *soit à distance finie sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b), *soit encore rejeté à l'infini sur cette parallèle, selon que* ψ *a en* (a, b), *avec* φ, *un contact d'ordre supérieur, égal ou inférieur à celui que* χ *a lui-même avec* φ.

On observera que les tangentes à Γ au nœud sont dans un plan parallèle à Oz, puisqu'elles se projettent sur le plan Oxy suivant une même droite, l'unique tangente à φ.

POINTS MULTIPLES DE φ OU PASSE AU MOINS L'UNE DES COURBES ψ, χ.

19. Il ressort de ce qui a été dit des points simples et des points doubles de φ, et sans qu'il soit nécessaire d'insister sur le sujet, qu'*il est toujours possible de préciser la nature des points qu'une courbe gauche* Γ *a sur la parallèle à* Oz *menée par un point singulier* (a, b) *de* φ *où passe au moins l'une des deux courbes* ψ, χ.

On peut rencontrer sur cette parallèle : des points multiples apparents, des points multiples apparents et en même temps des points multiples vrais, ou encore des points multiples vrais seulement; *l'étude des singularités des courbes planes* φ, ψ, χ *permettra toujours de reconnaître ces points et de les distinguer les uns des autres*. Quant à l'allure de la courbe Γ aux environs d'un point singulier vrai, c'est l'allure même de φ au point correspondant du plan des xy qui donnera la solution du problème.

Il existe un cas d'exception, de peu d'importance, dont on a vu un exemple au n° **7**.

Singularités vraies d'une courbe gauche Γ.

20. J'insiste cependant sur ce qui suit : quelques éclaircissements sont en effet nécessaires. Indépendamment des points singuliers vrais de Γ, décelés par des points singuliers de φ où ne passent ni ψ, ni χ, nous avons constaté (n° **18**, 2°) que Γ a un nœud quand ψ, χ ont un point double simple en (a, b) et sont tangentes l'une à l'autre en ce point, (a, b) étant un point double à tangentes distinctes de φ.

1° Plus généralement, *soit* (a, b) *un point double de* φ *et* α_1, α_2 *les coefficients angulaires des deux tangentes à* φ *en* (a, b); α_1 *est différent de* α_2 *par hypothèse. Supposons qu'en* (a, b) ψ, χ *aient chacune un point multiple d'ordre* n; z *aura deux valeurs* z_1, z_2 *sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b) :

$$z_1 = \frac{\beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_1 + \beta_{n,3}\alpha_1^2 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_1^n}{\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2}\alpha_1 + \gamma_{n,3}\alpha_1^2 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_1^n},$$

$$z_2 = \frac{\beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_2 + \beta_{n,3}\alpha_2^2 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_2^n}{\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2}\alpha_2 + \gamma_{n,3}\alpha_2^2 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_2^n}.$$

Ces deux valeurs de z seront égales, en particulier, si $\beta_{n,1}$, $\beta_{n,2}$, ..., $\beta_{n,n+1}$ sont proportionnels à $\gamma_{n,1}$, $\gamma_{n,2}$, ..., $\gamma_{n,n+1}$, c'est-à-dire si ψ, χ ont les mêmes tangentes en (a, b); mais, sauf le cas où (a, b) est un point simple de ψ et de χ, cette condition est simplement suffisante, elle n'est pas nécessaire.

2° *Si* φ *a un point triple à tangentes distinctes en* (a, b), *si* α_1, α_2, α_3 sont les coefficients angulaires, différents les uns des autres de ces tangentes, *si* ψ *et* χ *ont chacune un point simple en* (a, b), on a

$$z_1 = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1},$$

$$z_2 = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_2},$$

$$z_3 = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_3}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_3};$$

le contact entre ψ, χ entraîne

$$z_1 = z_2 = z_3;$$

réciproquement, si

$$z_1 = z_2,$$

ψ et χ sont tangentes en (a, b); il en résulte que β_{11}, β_{12} sont proportionnels à γ_{11}, γ_{12} et que

$$z_3 = z_1 = z_2:$$

Γ *a donc un point triple apparent si* ψ *et* χ *ne sont pas tangentes l'une à l'autre et un point triple vrai si* ψ, χ *sont tangentes l'une à l'autre.*

3° *Si* φ *a un point triple à tangentes distinctes en* (a, b), si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$ sont les coefficients angulaires des tangentes en ce point, *si ψ, χ ont chacune un point double* en (a, b), z a les valeurs

$$z_1 = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{23}\alpha_1^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_1 + \gamma_{23}\alpha_1^2},$$
$$z_2 = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_2^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_2 + \gamma_{23}\alpha_2^2},$$
$$z_3 = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_3 + \beta_{23}\alpha_3^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_3 + \gamma_{23}\alpha_3^2};$$

si l'on a

$$z_1 = z_2 = z_3,$$

c'est que

$$\frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{23}\alpha_1^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_1 + \gamma_{23}\alpha_1^2} = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_2^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_2^2} = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_3 + \beta_{23}\alpha_3^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_3 + \gamma_{23}\alpha_3^2} = \lambda,$$

ce qu'on peut écrire

$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha_1^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha_1 + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0,$$
$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha_2^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha_2 + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0,$$
$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha_3^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha_3 + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0;$$

l'équation du second degré

$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0$$

admettant *trois racines distinctes*, α_1, α_2, α_3, a ses coefficients identiquement nuls :

$$\beta_{23} - \lambda\gamma_{23} = \beta_{22} - \lambda\gamma_{22} = \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} \equiv 0;$$

donc

$$\frac{\beta_{21}}{\gamma_{21}} = \frac{\beta_{22}}{\gamma_{22}} = \frac{\beta_{23}}{\gamma_{23}};$$

il en résulte que les courbes ψ, χ ont les mêmes tangentes en (a, b).

La réciproque est vraie : *si les courbes ψ, χ ont chacune un point double avec mêmes tangentes en (a, b), la courbe gauche Γ a un point triple vrai sur la parallèle à Oz menée par (a, b).*

Nous ne pouvons rien préciser, sans faire intervenir les données propres de la courbe, si

$$\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3:$$

Γ peut avoir trois points distincts, ou bien un point simple et un point double.

21. Des propositions analogues peuvent être énoncées dans le cas où φ a un point multiple d'ordre n en (a, b). Indiquons celle-ci :

Si les courbes ψ, χ ont chacune un point multiple d'ordre p en (a, b), $p < n$,

$$z_{\alpha_1} = z_{\alpha_2} = \ldots = z_{\alpha_{p+1}},$$

il en résulte

$$\beta_{p1} = \lambda\gamma_{p1}, \qquad \beta_{p2} = \lambda\gamma_{p2}, \qquad \ldots, \qquad \beta_{p,p+1} = \lambda\gamma_{p,p+1},$$

et les courbes φ, χ ont mêmes tangentes en (a, b); par conséquent, les autres valeurs de z,

$$z_{\alpha_{p+2}}, \quad \ldots, \quad z_{\alpha_n}$$

sont égales aux précédentes : *la courbe Γ a donc un point multiple d'ordre n sur la parallèle à Oz menée par (a, b).*

Voici un résultat intéressant, que *nous aurons à rappeler* (n° **35**). Soit (α, β) un point multiple d'ordre p de φ, avec h tangentes distinctes à φ; supposons que (α, β) soit multiple d'ordre q pour ψ, mais n'appartienne pas à χ.

Pour (x, y) voisin de (α, β)

$$z_{x,y} = \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \frac{\beta_{q,1}(x-\alpha)^q + \beta_{q,2}(x-\alpha)^{q-1}(y-\beta) + \ldots + \beta_{q,q+1}(y-\beta)^q + \beta_{q+1,1}(x-\alpha)^{q+1} + \ldots}{\gamma_0 + \gamma_{11}(x-\alpha) + \gamma_{12}(y-\beta) + \gamma_{21}(x-\lambda)^2 + \ldots}$$

$$= \frac{\beta_{q,1} + \beta_{q,2}\dfrac{y-\beta}{x-\alpha} + \ldots + \beta_{q,q+1}\left(\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}\right)^q + \beta_{q+1,1}(x-\alpha) + \ldots}{\gamma_0 + \gamma_{11}(x-\alpha) + \gamma_{12}(y-\beta) + \gamma_{22}(x-\alpha)^2 + \ldots}(x-\alpha)^q.$$

Écrivons

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \delta_k + \varepsilon_k \qquad (\varepsilon_k)_{\alpha,\beta} = 0,$$

où δ_k est l'un des h coefficients angulaires des tangentes à φ en (α, β); les valeurs de z aux environs de (α, β) sont

$$z_k = \frac{\beta_{q,1} + \beta_{q,2}(\delta_k + \varepsilon_k) + \ldots + \beta_{q,q+1}(\delta_k + \varepsilon_k)^q + \beta_{q+1,1}(x-\alpha) + \ldots}{\gamma_0 + \gamma_{11}(x-\alpha) + \gamma_{12}(y-\beta) + \gamma_{21}(x-\alpha)^2 + \ldots}(x-\alpha)^q;$$

ces valeurs tendent toutes vers zéro quand (x, y) tend vers (α, β); elles sont d'ailleurs au nombre de p, puisque φ a p branches en (α, β).

En (α, β)

$$\left[\frac{z_k}{(x-\alpha)^q}\right]_{\alpha,\beta} = \frac{\beta_{q,1}+\beta_{q,2}\delta_k+\ldots+\beta_{q,q+1}\delta_k^q}{\gamma_0}$$

n'est pas nul, à moins que δ_k ne soit racine du numérateur égalé à zéro, ce qui ne modifierait que peu les conclusions.

Ceci montre que, non seulement les p valeurs de z correspondant au point (α, β) sont nulles, mais encore qu'au point $(\alpha, \beta, 0)$ les p branches de la courbe gauche Γ n'ont que h tangentes distinctes; il y a exception, pour ce dernier point, si plusieurs tangentes à Γ sont dans un plan (ou des plans) parallèle à Oz; Γ peut avoir alors plus de h tangentes distinctes.

Les conclusions sont identiques si (α, β), multiple d'ordre p pour φ, multiple d'ordre q pour ψ, est multiple d'ordre $r\,(r<q)$ pour χ.

En particulier, *si* Γ *n'a pas de points singuliers vrais, un point* (α, β), *commun à* φ, ψ, *où ne passe pas* χ, *ne peut pas être multiple pour* φ : *en un tel point*, $p=1$.

Enfin, si (α, β), multiple d'ordre p pour φ, d'ordre q pour ψ, est multiple d'ordre $r\,(r>q)$ pour χ, Γ n'a sur la parallèle à Oz menée par (α, β) qu'un point de multiplicité p rejeté à l'infini.

II. — REPRÉSENTATIONS ÉQUIVALENTES D'UNE COURBE GAUCHE.

FORMATION D'UNE IDENTITÉ.

22. Nous allons nous appuyer sur la proposition bien connue que voici :

Soient deux courbes planes

$$\varphi(x, y)=0, \qquad \psi(x, y)=0$$

et (α_i, β_i) *leurs points communs; si* (α_i, β_i) *est multiple* (¹) *d'ordre* p_i

(¹) Il s'agit ici de points multiples dans le sens indiqué n° 9, note 1.

pour φ, *d'ordre* q_i *pour* ψ, *si* φ, ψ *n'ont aucun contact mutuel; si*

$$f(x, y) = 0$$

est l'équation d'une courbe plane passant par tous les points (α_i, β_i) *et ayant en chacun des points* (α_i, β_i) *un point multiple d'ordre* $p_i + q_i - 1$, on sait que *les polynomes* f, φ, ψ *sont liés par une relation de la forme*

$$f(x, y) = Q(x, y)\,\psi(x, y) + Q'(x, y)\,\varphi(x, y),$$

où les courbes

$$Q(x, y) = 0, \qquad Q'(x, y) = 0$$

ont en (α_i, β_i) *des points multiples d'ordres respectifs* $p_i - 1$, $q_i - 1$; $f(x, y)$ *peut être le monome*

$$(x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2+q_2-1}\ldots.$$

23. Proposons-nous de déterminer les polynomes $Q(x, y)$, $Q'(x, y)$ qui figurent dans l'identité

$$(17)\quad (x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2+q_2-1}\ldots = Q(x, y)\,\psi(x, y) + Q'(x, y)\,\varphi(x, y).$$

Considérons d'abord les deux polynomes φ, ψ, définis par les équations

$$(18)\quad \begin{cases} A_1(x)y^2 + A_2(x)y + A_3(x) = \varphi, \\ B_1(x)y^2 + B_2(x)y + B_3(x) = \psi \end{cases} \quad [A_1(x), \ldots, B_3(x) \text{ polynomes en } x].$$

Éliminons y entre les deux équations

$$(19)\quad \begin{cases} A_1(x)y^2 + A_2(x)y + A_3(x) - \varphi = 0, \\ B_1(x)y^2 + B_2(x)y + B_3(x) - \psi = 0; \end{cases}$$

il vient

$$[A_1(B_3 - \psi) - B_1(A_3 - \varphi)]^2 + (A_2B_1 - A_1B_2)[A_2(B_2 - \psi) - b_2(A_3 - \varphi)] = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned}(20)\quad (A_1B_3 - B_1A_3)^2 &+ (A_2B_1 - A_1B_2)(A_2B_3 - B_1A_3) \\ &= [2(A_1B_3 - B_1A_3)A_1 + (A_2B_1 - A_2B_2)A_2 - A_1^2\psi + \lambda(x, y)\varphi]\psi \\ &\quad + [-2(A_1B_3 - B_1A_3)B_1 - (A_2B_1 - A_1B_2)B_2 - B_1^2 \\ &\qquad + 2A_1B_1\psi - \lambda(x, y)\psi]\varphi.\end{aligned}$$

On introduit un polynome *arbitraire* $\lambda(x, y)$, auquel on peut donner, en particulier, l'une des deux formes

$$\lambda(x, y) = 0, \qquad \lambda(x, y) = 2A_1B_2\psi.$$

Remplaçons, *dans les* [ ] *du second membre*, φ et ψ par leurs valeurs (18); il vient

$$\begin{aligned}(A_1B_3 - B_1A_3)^2 &+ (A_2B_1 - A_1B_2)(A_2B_3 - B_1A_3) \\ &= [2(A_2B_3 - B_1A_3)A_1 + (A_2B_1 - A_1B_2)A_2 \\ &\quad - A_1^2(B_1y^2 + B_2y + B_3) + \lambda(x, y)(A_1y^2 + A_2y + A_3)]\psi + [\ldots]\varphi,\end{aligned}$$

identité de la forme

$$(21)\quad (A_1B_3 - B_1A_3)^2 + (A_2B_1 - A_1B_2)(A_2B_3 - B_1A_3) = H(x, y)\psi + H'(x, y)\varphi,$$

où les polynomes $H(x, y)$, $H'(x, y)$ *sont parfaitement déterminés et calculables;* ils contiennent un polynome arbitraire $\lambda(x, y)$. *Le premier membre de la relation* (21) *est le résultant de* φ, ψ.

Ceci peut être généralisé bien facilement. Entre les équations

$$(22)\quad \begin{cases} A_1(x)y^m + A_2(x)y^{m-1} + \ldots + A_m(x)y + A_{m+1}(x) - \varphi = 0, \\ B_1(x)y^n + B_2(x)y^{n-1} + \ldots + B_n(x)y + B_{n+1}(x) - \psi = 0, \end{cases}$$

on peut éliminer y, par la méthode de Sylvester par exemple, et écrire

$$(23)\quad \begin{vmatrix} A_1(x) & A_2(x) & \ldots & A_m(x) & & A_{m+1}(x)-\varphi & 0 & & 0 \\ 0 & A_1(x) & \ldots & \ldots\ldots & & A_m(x) & A_{m+1}(x)-\varphi & & 0 \\ . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\ 0 & 0 & & A_1(x) & A_2(x) & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & A_m(x) & A_{m+1}(x)-\varphi \\ B_1(x) & A_2(x) & \ldots & \ldots\ldots\ldots & B_n(x) & B_{n+1}(x)-\psi & 0 & & 0 \\ 0 & B_1(x) & \ldots & \ldots\ldots\ldots & & B_n(x) & B_{n+1}(x)-\psi & & 0 \\ . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & . \\ 0 & 0 & \ldots & B_1(x) & B_2(x) & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & B_n(x) & B_{n+1}(x)-\psi \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant, développé, donnera lieu à une identité

$$\begin{aligned}(24)\quad R(\varphi, \psi) = {} & [C_1(x) + C_2(x)\psi + C_3(x)\psi^2 + \ldots + C_h(x)\psi^h + \lambda(x, y)\varphi]\psi \\ & + [D_1(x) + D_2(x)\varphi + D_3(x)\varphi^2 + \ldots \\ & \quad + (E_1(x) + E_2(x)\varphi + E_3(x)\varphi^2 + \ldots)\psi \\ & \quad + (F_1(x) + F_2(x)\varphi + \ldots)\psi^2 + \ldots - \lambda(x, y)\psi]\varphi,\end{aligned}$$

où le premier membre, qui peut être obtenu en faisant $\psi = 0$, $\varphi = 0$ dans (23), est le *résultant* $R(\varphi, \psi)$ des équations

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

ou (22) de

$$A_1(x)y^m + \ldots + A_{m+1}(x) = 0, \qquad B_1(x)y^n + \ldots + B_{n+1}(x) = 0.$$

Comme précédemment, $\lambda(x, y)$ est un polynome *arbitraire*.

Si l'on remplace dans les [ ] du second membre de (24) φ et ψ par leurs expressions (22), l'identité (24) prend la forme

$$R(\varphi, \psi) = H(x, y)\psi + H'(x, y)\varphi: \tag{25}$$

on a ainsi mis le résultant de φ, ψ *sous la forme*

$$H(x, y)\psi(x, y) + H'(x, y)\varphi(x, y),$$

où $H(x, y)$, $H'(x, y)$ *sont des polynomes bien déterminés et calculables, renfermant un polynome arbitraire* $\lambda(x, y)$.

24. L'identité (25) peut s'écrire, en faisant $\varphi = 0$, et en le rappelant par la notation spéciale qu'on va introduire,

$$R(\varphi, \psi) = H(x, y)\psi \qquad (\varphi = 0). \tag{26}$$

Nous aurons souvent à utiliser cette identité. Elle exprime que, *pour tous les points* (x, y) *appartenant à la courbe* φ, $R(\varphi, \psi)$ *et* $H(x, y)\psi$ *ont des valeurs identiques.*

On comprend facilement le sens de l'identité (26) si l'on fait la remarque suivante. Dans le cas particulier où $\varphi(x, y)$ est une courbe *unicursale*, on peut remplacer l'équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

par des équations de la forme

$$x = a(t), \qquad y = b(t), \tag{27}$$

$a(t)$, $b(t)$ étant des fonctions rationnelles. Écrire la relation (26) revient alors à remplacer dans (25) x et y par les expressions (27) ce qui donne une *identité*, de forme ordinaire,

$$R(t) = H[a(t),\ b(t)],\ \psi[a(t),\ b(t)],$$

équivalente, dans le cas présent, à (26).

23. Soient (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... les points communs à φ, ψ; soient p_1, p_2, ... les ordres de multiplicité de ces points pour φ, et q_1, q_2, ... leurs ordres de multiplicité pour ψ; on sait que le résultant de φ, ψ a pour expression

$$R(\varphi, \psi) = (x-\alpha_1)^{p_1 q_1}(x-a_2)^{p_2 q_2}\ldots,$$

sous réserve qu'aucune parallèle à Oy *ne passe par deux points* (α_i, β_i), (α_j, β_j) *communs à* φ, ψ (¹).

La relation (25) peut donc être écrite

$$(x-\alpha_1)^{p_1 q_1}(x-\alpha_2)^{p_2 q_2}\ldots = H(x, y)\,\psi + H'(x, y)\,\varphi,$$

ou, en faisant apparaître le polynome arbitraire $\lambda(x, y)$,

$$(28)\qquad \begin{aligned}&(x-\alpha_1)^{p_1 q_1}(x-\alpha_2)^{p_2 q_2}\ldots\\ &\quad= [H(x, y) + \lambda(x, y)\,\varphi]\,\psi + [H'(x, y) - \lambda(x, y)\,\psi]\,\varphi.\end{aligned}$$

D'autre part, *si les courbes* φ, ψ *n'ont pas de contacts*,

$$(x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$

peut être mis (nº **22**) sous la forme

$$(29)\qquad (x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}\ldots = Q(x, y)\,\psi + Q'(x, y)\,\varphi,$$

qu'il nous faudra pouvoir former effectivement dans un cas particu lier important (nº **29**).

Nous pouvons déduire (29) de (28) en choisissant convenablement l'arbitraire $\lambda(x, y)$ de l'identité (28), *que nous savons écrire*.

En fait, la question n'offre pas de difficultés. Elle est même toute résolue, pour le facteur $x-\alpha_1$, dans le cas où l'un des deux nombres

(¹) On y pourvoira en choisissant convenablement l'orientation des axes Ox et Oy.

p_1, q_1 se réduit à l'unité, puisque

$$p_1 q_1 - (p_1 + q_1 - 1) = (p_1 - 1)(q_1 - 1).$$

Considérons par exemple les polynomes φ, ψ

$$x^2(x^2 + y^2) - x(x^2 - y^2) = \varphi, \tag{30}$$

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = \psi. \tag{31}$$

A l'origine des coordonnées, la courbe φ a un point triple et χ a un point double; pour ce point,

$$p_1 = 3, \qquad q_1 = 2.$$

Les autres points communs à φ, ψ sont des points simples. Le résultant des premiers membres de (30) et (31) contiendra donc le facteur x^6 qui devra être ramené à x^4. Éliminons à cet effet y entre les équations proposées, qu'on écrira

$$\begin{aligned} x(x+1)y^2 + x^3(x-1) - \varphi &= 0, \\ 6y^2 - 5xy + x^2 - \psi &= 0. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{gathered}
[x(x+1)(x^2 - \psi) - 6(x^3(x-1) - \varphi)]^2 + 25x^3(x+1)[x^3(x-1) - \varphi] = 0, \\
[x^3(-5x+7) - x(x+1)\psi + 6\varphi]^2 + 25x^3(x+1)[x^3(x-1) - \varphi] = 0, \\
2x^6(5x-3)(5x-4) - 2x^4(x+1)(-5x+7)\psi + x^2(x+1)^2\psi^2 \\
+ [12x^3(-5x+7) - 25x^3(x+1)]\varphi - 12x(x+1)\varphi\psi + 36\varphi^2 = 0,
\end{gathered}$$

ce que nous écrirons, $\lambda(x, y)$ étant arbitraire,

$$\begin{aligned}
&2x^6(5x-3)(5x-4) \\
&\quad = [2x^4(x+1)(-5x+7) - x^2(x+1)^2\psi + \lambda(x,y)\varphi]\psi \\
&\qquad + [x^3(85x - 59) + 12x(x+1)\psi - 36\varphi - \lambda(x,y)]\varphi.
\end{aligned} \tag{32}$$

Prenons

$$\lambda(x, y) = 6x(x+1); \tag{33}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
&[12x(x+1) - \lambda(x,y)]\psi - 36\varphi \\
&\quad = 6[x(x+1)\psi - 6\varphi] \\
&\quad = 6[x(x+1)(6y^2 - 5xy + x^2) - 6x(x+1)y^2 - 6x^3(x-1)] \\
&\quad = 6[x(x+1)(-5xy + x^2) - 6x^3(x-1)] \\
&\quad = -6x^2(5x^2 + 5xy - 7x + 5y);
\end{aligned} \tag{34}$$

portons dans (32); il vient, en remplaçant, dans le premier [ ] du second membre de (32), ψ, φ par leurs valeurs (30) et (31) et $\lambda(x, y)$ par sa valeur (33), *et en supprimant le facteur x^2 qui apparaît :*

$$\begin{aligned}
&2x^4(5x-3)(5x-4)\\
&\quad=[2x^2(x+1)(-5x+7)-(x+1)^2(6y^2-5xy+x^2)\\
&\qquad\qquad+6(x+1)(x^3+xy^2-x^2+y^2)]\psi(x, y)\\
&\quad+[x(85x-59)-6(5x^2+5xy-7x+5y)]\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

ce qui est la forme (29), avec

$$x^{p+q-1}=x^4$$

en évidence.

26. Voici quelques remarques propres à simplifier le calcul de l'identité (29), la formule (28) étant prise comme point de départ. Nous y trouverons l'occasion de préciser, en certains points, les polynomes $H(x, y)$, $H'(x, y)$.

27. Démontrons d'abord cette proposition :

Il suffit de prendre pour $\lambda(x, y)$ un polynome tel que

$$H(x, y)+\lambda(x, y)\varphi(x, y)$$

admette le facteur

$$(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots.$$

En effet, dans cette hypothèse, la formule (28) devient

$$\begin{aligned}
(35)\qquad &(x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}\ldots\\
&\quad=(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}Q(x, y)\psi(x, y)\\
&\quad+[H'(x, y)-\lambda(x, y)\psi(x, y)]\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

où l'on a écrit

$$\begin{aligned}
(36)\qquad &H(x, y)+\lambda(x, y)\varphi(x, y)\\
&\quad=(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots Q(x, y).
\end{aligned}$$

l'identité (35) montre ensuite que

$$[H'(x, y)-\lambda(x, y)\psi(x, y)]\varphi(x, y)$$

est divisible par $(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}$.

Il s'agit d'établir que c'est le coefficient de $\varphi(x, y)$ qui admet ce facteur. Or, en particulier,

$$[H'(\alpha_1, y) - \lambda(\alpha_1, y)\psi(\alpha_1, y)]\varphi(\alpha_1, y)$$

est nul, quel que soit y (35); mais $\varphi(\alpha_1, y)$ ne s'annule que pour certaines valeurs β_1, β_{12}, β_{13}, ... de y, qui sont les ordonnées des points où la droite $x - \alpha_1 = 0$ coupe φ; donc $\varphi(\alpha_1, y)$ n'est pas nul quel que soit y et c'est

$$H'(\alpha_1, y) - \lambda(\alpha_1, y)\psi(\alpha_1, y)$$

qui possède cette propriété; par conséquent, c'est bien

$$H'(x, y) - \lambda(x, y)\psi(x, y)$$

qui est de la forme

$$(37)\quad H'(x, y)\lambda(x, y)\psi(x, y) = (x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x - \alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots Q'(x, y);$$

si l'on porte dans (28) les valeurs (36) et (37) de $H + \lambda\varphi$, $H' - \lambda\psi$, on trouve, après réductions,

$$(x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2+q_2+1}\ldots = Q(x, y)\psi + Q'(x, y)\varphi:$$

la forme (29) est ainsi déduite de (28) par le seul fait que $\lambda(x, y)$ a été choisi comme on l'a annoncé.

28. *Montrons comment, dans ce cas général, on choisira* $\lambda(x, y)$ *de manière à rendre* $H(x, y) + \lambda(x, y)\varphi(x, y)$ *divisible par*

$$(x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x - \alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots.$$

Ne nous occupons, tout d'abord, que du facteur $(x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}$. Écrivons (28)

$$\begin{aligned}(x - \alpha_1)^{p_1q_1}&(x - \alpha_2)^{p_2q_2}\ldots\\ &= [H_{p_1q_1-q_1}(x, y) + \lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)\varphi_{p_1}(x, y)]\psi_{q_1}(x, y) + (H' - \lambda\psi)\varphi.\end{aligned}$$

Par hypothèses : 1° $\varphi_{p_1}(x, y)$ admet un point multiple d'ordre p_1 et $\psi_{q_1}(x, y)$ un point multiple d'ordre q_1 en (α_1, β_1), ce que rappelleront leurs indices; 2° $\lambda(x, y)$ devra être choisi de manière que (28) soit réductible à la forme, intermédiaire entre (28) et (29) :

$$(38)\qquad (x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2q_2}\ldots = K(x, y)\psi + K'(x, y)\varphi,$$

où $K_{p_1-1}(x, y)$, $K'_{q_1-1}(x, y)$ ont respectivement un point multiple d'ordre $p_1 - 1$, $q_1 - 1$ en (α_1, β_1).

Multiplions (38) par $(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}$; il vient

$$(x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}\ldots = (x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)} K_{p_1-1}\psi_{q_1} + (x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)} K'_{q_1-1}\varphi;$$

comparons avec (38); il en résulte

$$H_{p_1q_1-q_1}(x, y) + \lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)\,\varphi_{p_1} = (x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)} K_{p_1-1},$$

$$\frac{H_{p_1q_1-q_1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}} + \frac{\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1}}\,\frac{\varphi_{p_1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1}} = \frac{K_{p_1-1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1-1}};$$

$\dfrac{\varphi}{(x-\alpha_1)^{p_1}}$, $\dfrac{K_{p_1-1}}{(x-\alpha_1)^{p_1-1}}$ étant finis, puisque φ, K_{p-1} ont respectivement un point multiple d'ordre p_1, $p_1 - 1$ en (α_1, β_1), il en résulte que $\dfrac{H(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}}$, $\dfrac{\lambda(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1}}$ le sont aussi et que $H_{p_1q_1-q_1}(x, y)$, $\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)$ *ont respectivement des points multiples d'ordres* $p_1q_1 - q_1$, $p_1q_1 - p_1 - q_1$ en (α_1, β_1), comme le rappelleront leurs indices, et de même en (α_2, β_2), ... Les polynomes $H_{p_1q_1-q_1}(x, y)$, $\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)$ sont par conséquent de la forme

$$\begin{aligned}
H_{p_1q_1-q_1}(x, y) = {} & (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1} A_0(x) + (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-1}(y-b_1)A_1(x) \\
& + (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-2}(y-\beta_1)^2 A_2(x) + \ldots \\
& + (x-\alpha_1)(y-\beta_1)^{p_1q_1-q_1-1} A_{p_1q_1-q_1-1}(x) \\
& + (y-\beta_1)^{p_1q_1-q_1} A_{p_1q_1-q_1}(x) + (y-\beta_1)^{p_1q_1-q_1+1} A_{p_1q_1-q_1+1}(x) + \ldots, \\
\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y) = {} & (x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1} B_0(x) + (x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1-1} B_1(x) + \ldots \\
& + (x-\alpha_1)(y-\beta_1)^{p_1q_1-p_1-q_1-1} B_{p_1q_1-p_1-q_1-1}(x) \\
& + (y-\beta_1)^{p_1q_1-p_1-q_1} B_{p_1q_1-p_1-q_1}(x) \\
& + (y-\beta_1)^{p_1q_1-p_1-q_1+1} B_{p_1q_1-p_1-q_1+1}(x) + \ldots,
\end{aligned}$$

$\varphi_{p_1}(x, y)$ étant lui-même de la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_{p_1}(x, y) = {} & (x-\alpha_1)^{p_1} C_0(x) + (x-\alpha_1)^{p_1-1}(y-\beta_1)\,C_1(x) + \ldots \\
& + (x-\alpha_1)(y-\beta_1)^{p_1-1} C_{p_1-1}(x) + (y-\beta_1)^{p_1}{}_{p_1}C(x) \\
& + (y-\beta_1)^{p_1+1} C_{p_1+1}(x) + \ldots;
\end{aligned}$$

$A_0(x)$, $A_1(x)$, ...; $B_0(x)$, $B_1(x)$, ...; $C_0(x)$, $C_1(x)$, ... sont des polynomes en x, qui ne sont soumis à aucune condition relativement au point (α_1, β_1).

Ces termes

$$(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}A_0(x),\quad (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-1}(y-\beta_1)A_1(x),\quad \ldots,$$
$$(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1+1}(y-\beta_1)^{p_1-1}A_{p_1-1}\text{ de H}$$

admettent le facteur $(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}$; il en est de même, dans le produit $\lambda\varphi$, des termes en $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}$, $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-1}$, ..., $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1-1}$; il reste donc à écrire que les termes en $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1}$ de $H-\lambda\varphi$ sont divisibles par $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1+1}$, ..., ce qui permettra de déterminer comme il convient

$$B_0(x),\quad B_1(x),\quad \ldots.$$

Nous obtiendrons ainsi la forme intermédiaire (38); puis nous l'écrirons

$$\begin{aligned}(x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}=\ldots= {} & [K(x,y)+\mu(x,y)\varphi(x,y)]\psi(x,y)\\ & +[K'(x,y)-\mu(x,y)\psi(x,y)]\varphi(x,y)\end{aligned}$$

et nous déterminerons $\mu(x,y)$, comme nous avons déterminé $\lambda(x,y)$, de manière à rendre

$$K(x,y)+\mu(x,y)\varphi(x,y)$$

divisible par $(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une identité

$$(x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}=\ldots=Q(x,y)\psi+Q'(x,y)\varphi,$$

où tous les facteurs du premier membre soient réduits à la forme $(x-\alpha_i)^{p_i+q_i-1}$.

29. La question que nous aurons à résoudre n'est qu'un cas particulier de celle qui vient d'être traitée, comme il a été dit plus haut.

Les identités équivalentes

$$\begin{aligned}(x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}=\ldots= {} & [H(x,y)+\lambda(x,y)\varphi]\psi\\ & +[H'(x,y)-\lambda(x,y)]\varphi,\end{aligned}$$
$$(x-\alpha_2)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}=\ldots=Q(x,y)\psi+Q'(x,y)\varphi$$

donnent lieu à celles-ci, dont nous aurons à nous servir,

$$(39)\qquad (x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}=\ldots=H(x,y)\psi\qquad (\varphi=0),$$
$$(40)\qquad (x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}=\ldots=Q(x,y)\psi\qquad (\varphi=0),$$

qui supposent essentiellement que le point (x, y) est astreint à rester sur la courbe

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Or, la réduction de (39) à (40) peut se faire directement.

1° Il est des cas où elle est immédiate. Par exemple, reprenons la relation (32); écrivons-la

$$2x^6(5x-3)(5x-4) = [2x^4(x+1)(-5x+7) - x^2(x+1)^2\psi]\psi \qquad (\varphi = 0);$$

on voit que le facteur x^2 apparaît de suite; en remplaçant ψ par sa valeur (31), on a

$$2x^4(5x-3)(5x-4) = [2x^2(x+1)(-5x+7) - (x+1)^2(x^2-5xy+6y^2)]\psi \qquad (\varphi = 0),$$

ce qui est la relation (40).

2° D'ordinaire, quelques calculs, assez simples d'ailleurs, sont nécessaires. En voici un exemple, nous en rencontrerons d'autres plus loin.

La relation (32), où l'on suppose $\psi = 0$, donne lieu à celle-ci :

$$2x^6(5x-3)(5x-4) = [x^3(85x-59) - 36\varphi]\varphi \qquad (\psi = 0),$$

où il s'agit d'abaisser x^6 à x^4.

Tout d'abord, remplaçant φ par sa valeur (30) dans le [ ], on a

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} 2x^6(5x-3)(5x-4) &= [x^3(85x-59) - 36x(x+1)y^2 - 36x^3(x-1)]\varphi \\ &= x[x^2(49x-23) - 36(x+1)y^2]\varphi \\ &= x[x^2(49x-23) - 36(x+1)y^2 + \lambda(x, y)\psi(x, y)]\varphi \\ &= x\big[x^2(49x-23) - 36xy^2 \\ &\qquad + (\lambda(x, y)\psi(x, y) - 36y^2)\big]\varphi \end{aligned}\right\} \quad (\psi = 0).$$

Il s'agit, visiblement, de trouver une relation

$$\lambda(x, y)\psi(x, y) - 36y^2,$$

où x entre en facteur, *et nous savons à priori, par la théorie générale du n° **25**, que cela est possible.* Dans le cas présent, il suffit de prendre

$$\lambda(x, y) = 6;$$

on aura

$$\lambda(x, y)\psi(x, y) - 36y^2 = -30xy + 6x^2;$$

(41) devient alors, en divisant par x^2,

$$(42)\quad 2x^4(5x-3)(5x-4)=[x(49x-23)-6(x+1)(5y-x)]\varphi \qquad (\psi=0).$$

Si nous comparons cette formule avec celle-ci

$$\begin{aligned}&2x^4(5x-3)(5x-4)\\&\quad=[2x^2(x+1)(-5x+7)-(x+1)^2(6y^2-5xy+x^2)\\&\qquad\qquad+6(x+1)(x^3+xy^2-x^2+y^2)]\psi(x,y)\\&\quad+[x(85x-59)-6(5x^2+5xy-7x+5y)]\varphi(x,y),\end{aligned}$$

obtenue au n° **25**, nous devons retrouver (42) en faisant $\psi=0$ dans la précédente; il en est bien ainsi, car

$$x(85x-59)-6(5x^2+5xy-7x+5y)\equiv x(49x-23)-6(x+1)(5y-x).$$

FORMES DIVERSES DE LA FRACTION RATIONNELLE $\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$.

30. Je puis maintenant donner la solution complète de la question suivante, qui joue un rôle *essentiel* dans la théorie des courbes gauches Γ, représentées par deux équations de la forme

$$(43)\qquad \varphi(x,y)=0, \qquad z=\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}:$$

quelles sont les conditions que doivent remplir les polynomes $\psi_1(x,y)$, $\chi_1(x,y)$ *pour que la courbe algébrique* Γ, *définie par le système* (43), *puisse être aussi représentée par le système*

$$(44)\qquad \varphi(x,y)=0, \qquad z=\frac{\psi_1(x,y)}{\chi_1(x,y)}?$$

Le cas où φ, ψ d'une part, ou bien φ, χ d'autre part, ont des contacts sera exclu de ce Mémoire (n° **22**), mais ψ, χ pourront avoir des contacts, et cela a une grande importance : la restriction imposée n'entraîne pas que Γ soit dépourvue des points singuliers qui peuvent correspondre aux contacts mutuels de ψ, χ (n° **20**).

La question que nous allons étudier a son origine dans cette remarque : le système (43) est équivalent à celui-ci :

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z = \frac{\lambda(x, y)\psi(x, y) + \mu(x, y)\varphi(x, y)}{\lambda(x, y)\chi(x, y) + \nu(x, y)\varphi(x, y)},$$

où $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ sont des polynomes arbitraires.

31. Considérons les trois courbes planes

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0.$$

On peut ranger leurs points communs dans les catégories suivantes :

1° Les points $(x = \alpha_i, y = \beta_i)$ communs à φ, ψ, mais où χ ne passe pas; nous les supposons multiples d'ordre p'_i pour φ, d'ordre q'_i pour ψ;

2° Les points $(x = \gamma_i, y = \delta_i)$ communs à φ, χ, où ψ ne passe pas, multiples d'ordres p''_i pour φ, r''_i pour χ;

3° Les points $(x = \varepsilon_i, y = \zeta_i)$, communs à φ, ψ, χ, multiples d'ordres p_i pour φ, q_i pour ψ, r_i pour χ.

Les points communs à ψ, χ, où φ ne passe pas, sont sans intérêt ici.

On suppose, comme précédemment, que les axes Ox, Oy sont orientés de telle sorte qu'une même parallèle à Oy ne passe que par un seul des points communs à φ, ψ ou un seul des points communs à φ, χ ou à φ, ψ, χ. Les conclusions montreront que c'est au point de vue des calculs pratiques, seul, que Ox, Oy doivent être ainsi choisis. Notons cette conséquence : la droite $x = \varepsilon_i$ recoupe φ en des points $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ qui n'appartiennent ni à ψ, ni à χ.

32. Soit le polynome

$$M(x, y)\psi(x, y) + A(x, y)\varphi(x, y),$$

où $M(x, y)$, $A(x, y)$ sont arbitraires, sauf les conditions suivantes : $M(x, y)$ a en chacun des points (α_i, β_i) un point multiple (¹) d'ordre $p'_i - 1$ et en chacun des points (ε_i, ζ_i) un point multiple d'ordre $p_i - 1$; $A(x, y)$ a en (α_i, β_i) un point multiple d'ordre $q'_i - 1$ et en (ε_i, ζ_i) un point multiple d'ordre $q_i - 1$. Le polynome

$$f(x, y) = M\psi + A\varphi + \lambda(x, y)(x - \alpha_1)^{p'_1 + q'_1 - 1}(x - \alpha_2)^{p'_2 + q'_2 - 1} \cdots \\ \times (x - \varepsilon_1)^{p_1 + q_1 - 1}(x - \varepsilon_2)^{p_2 + q_2 - 1} \cdots,$$

(¹) *Cf.* note (¹), n° **9**.

où $\lambda(x, y)$ est quelconque, sauf qu'il ne passe en aucun des points (α_i, β_i), (ε_i, ζ_i), a donc un point multiple d'ordre $p'_i + q'_i - 1$ en (α_i, β_i), un point multiple d'ordre $p_i + q_i - 1$ en (ε_i, ζ_i) et peut (n° **22**) être mis sous la forme

$$M_1\psi + A_1\varphi;$$

il en résulte

$$\lambda(x, y)(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$
$$= (M_1 - M)\psi + (A_1 - A)\varphi$$

ou

$$(45)\quad \lambda(x, y)(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$
$$= Q(x, y)\psi + Q'(x, y)\varphi,$$

et l'on sait que $Q(x, y)$ a un point multiple d'ordre $p'_i - 1$ en (α_i, β_i), un point multiple d'ordre $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i) (n° **22**).

De même

$$(46)\quad \lambda(x, y)(x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}(x-\gamma_2)^{p''_2+q''_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+\varepsilon_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+\varepsilon_2-1}\ldots$$
$$= P(x, y)\chi + P'(x, y)\varphi,$$

où $P(x, y)$ a un point multiple d'ordre $p''_i - 1$ en (γ_i, δ_i), un point multiple d'ordre $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i).

Les *caractéristiques* des divers polynomes en jeu sont indiquées dans le Tableau suivant. Nous y ajoutons celles de deux polynomes P_1, Q_1, dont il va être question :

(T)

	(α_i, β_i).	(γ_i, δ_i).	(ε_i, ζ_i).
φ	p'_i	p''_i	p_i
ψ	q'_i	o	q_i
χ	o	r''_i	r_i
M	$p'_i - 1$	o	$p_i - 1$
A	$q'_i - 1$	o	$q_i - 1$
$M\psi + A\varphi$	$p'_i + q'_i - 1$	o	$p_i + q_i - 1$
f	$p'_i + q'_i - 1$	o	$p_i + q_i - 1$
λ	o	o	o
M_1	$p'_i - 1$	o	$p_i - 1$
A_1	$q'_i - 1$	o	$q_i - 1$
P	o	$p''_i - 1$	$p_i - 1$
Q	$p'_i - 1$	o	$p_i - 1$
P_1	o	$p''_i - 1$	$p_i - 1$
Q_1	$p'_i - 1$	o	$p_i - 1$

Il résulte de (45) et (46) que

$$\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_1)^{p'_2+q'_2-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\dots \mathrm{P}(x, y)}{(x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}(x-\gamma_2)^{p''_2+q''_2-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\dots \mathrm{Q}(x, y)}$$

$$(\varphi = 0),$$

ψ_1 et χ_1 sont donc de la forme

$$\psi_1(x, y) = (x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\dots \mathrm{P}(x, y),$$

$$\chi_1(x, y) = (x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}(x-\gamma_2)^{p''+q''_2-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\dots \mathrm{Q}(x, y).$$

D'après leur formation, les polynomes P, Q sont, dans une certaine mesure, arbitraires. Démontrons la proposition *fondamentale* que voici :

On peut prendre pour $\psi_1(x, y)$, $\chi_1(x, y)$ deux polynomes de la forme

$$\psi_1(x, y) = (x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\dots \mathrm{P}_1(x, y),$$
$$\chi_1(x, y) = (x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\dots \mathrm{Q}_1(x, y),$$

sous condition que $\mathrm{P}_1(x, y)$, $\mathrm{Q}_1(x, y)$ soient définis comme il suit : l'un des deux polynomes $\mathrm{P}_1(x, y)$, $\mathrm{Q}_1(x, y)$ est arbitraire parmi les polynomes $\mathrm{P}_1(x, y)$ qui ont des points multiples d'ordres $p''_i - 1$ en (γ_i, δ_i), $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i) et les polynomes $\mathrm{Q}_1(x, y)$ qui ont des points multiples d'ordres $p'_i - 1$ en (α_i, β_i), $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i), conformément aux caractéristiques du Tableau T.

Soient P, Q deux polynomes vérifiant l'identité

$$(47)\quad (x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}\dots(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1} = \dots = \mathrm{P}\chi + \mathrm{P}'\varphi,$$

que nous savons former.

Soit

$$(48)\quad \begin{array}{ll} q_1 > r_1, & q_2 < r_2, \\ q_1 = r_1 + s_1, & q_2 = r_2 - s_2; \end{array}$$

multiplions les deux membres de (47) par $\psi\mathrm{Q}_1$; on a

$$(49)\quad \begin{aligned} &(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}\dots(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\dots\psi\mathrm{Q}_1 \\ &= (\mathrm{P}\psi\mathrm{Q}_1)\chi + (\mathrm{P}'\psi\mathrm{Q}_1)\varphi. \end{aligned}$$

Le polynome ψ a un point multiple d'ordre q_1 en (ε_1, ζ_1), un point multiple d'ordre q_2 en (ε_2, ζ_2), ... et ne passe pas en (γ_1, δ_1) ..., comme le rappelle le Tableau **T**; Q_1 a un point multiple d'ordre $p_1 - 1$ en (ε_1, ζ_1), un point multiple d'ordre p_2 en (ε_2, ζ_2) et ne passe pas en (γ_1, δ_1) (¹) ....

D'autre part, en raison des caractéristiques, qu'on vient de rappeler, de ψ, Q_1, l'expression

$$(x-\gamma_1)^{p_1''+r_1''-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{s_2}\psi Q_1,$$

d'où le facteur $x-\varepsilon_1$ est exclu, a un point multiple d'ordre $p_1''+r_1''-1$ en (γ_1, δ_1), ..., un point multiple d'ordre $p_1+q_1-1 > p_1+r_1-1$, (48) en (ε_1, ζ_1), un point multiple d'ordre $p_1+q_2+s_2-1$, ou (48) p_2+r_2-1 en (ε_2, ζ_2), ... et peut, en conséquence, être mise sous la forme

$$(x-\gamma_1)^{p_1''+r_1''-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{s_2}\psi Q_1 = H\chi + H'\varphi;$$

cela permet d'écrire (49)

$$(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots(H\chi+H'\varphi) = (P\psi Q_1)\chi + (P'\psi Q_1)\varphi,$$

où, en raison de (48), $(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}$ a été départagé en deux facteurs

$$(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}(x-\varepsilon_2)^{s_2}.$$

Il en résulte l'identité suivante :

$$\begin{aligned}&[(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H - P\psi Q_1]\chi\\ &\quad+[(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H' - P'\psi Q_1]\varphi = 0.\end{aligned}$$

Le polynome φ n'ayant pas de facteurs communs avec χ, on peut le supposer, divise

$$(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H - P\psi Q_1$$

qui se trouve être de la forme $K'\varphi$, d'où

$$P\psi Q_1 = (x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H - K'\varphi.$$

(¹) Si Q_1 a un produit multiple en (γ_1, δ_1), les conclusions que nous allons trouver ne sont pas modifiées. Cette particularité sera rappelée au n° **35**.

Portons cette valeur de $P\psi Q_1$ dans (49); il vient

$$(50)\qquad \begin{aligned}&(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}\ldots(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots\psi Q_1\\ &=(x+\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H\chi+(P'\psi Q_2-K'\chi)\varphi;\end{aligned}$$

on a, par hypothèse, $q_2 < r_2$; donc

$$(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$

divise le premier membre de (50) *et divise*, par conséquent,

$$(P'\psi Q_2-K'\chi)\varphi.$$

Or, φ qui ne s'annule pour $x=\varepsilon_1$ qu'aux points (ε_1, ζ_1) et $(\varepsilon_1, \zeta_{1j})$ où la droite $x=\varepsilon_1$ coupe φ, qui ne s'annule de même pour $x=\varepsilon_2$ qu'aux points (ε_2, ζ_2), $(\varepsilon_2, \zeta_{2j})$ où la droite $x=\varepsilon_2$ coupe φ, etc. n'est pas divisible par

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots;$$

c'est donc que

$$P'\psi Q_2-K'\chi$$

est divisible par $(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$ *et se trouve être de la forme*

$$P'\psi Q_2-K'\chi=(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots K(x,y),$$

et cela permet d'écrire (50)

$$(x-\varepsilon_2)^{r_2-q_2}\ldots(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots\psi Q_1=H(x,y)\chi+K(x,y)\varphi;$$

il n'est d'ailleurs pas possible de pousser la réduction plus loin.

Il en résulte, dans l'hypothèse de $\varphi=0$,

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}&=\frac{H(x.y)}{(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{r_2-q_2}\ldots Q_1(x,y)}\qquad(\varphi=0),\\ &=\frac{(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\ldots H(x,y)}{(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots Q_1(x,y)}\qquad(\varphi=0)\end{aligned}$$

et

$$(51)\qquad \chi_1(x,y)=(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots Q_1(x,y),$$

où $Q_1(x,y)$ *est simplement assujetti à avoir les caractéristiques du Tableau* T.

On pourrait faire des calculs analogues sur l'identité

$$(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\dots$$
$$= Q(x,y)\psi + Q'(x,y)\varphi,$$

dont on aurait multiplié les deux membres par χP_1, P_1 ayant les caractéristiques énoncées au début, et cela montrerait que $\psi_1(x,y)$ est lui-même de la forme

$$(52)\qquad \psi_1(x,y)=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\dots P_1(x,y).$$

Remarques. — I. *La marche des calculs montre que les conditions énoncées pour ψ_1, χ_1 sont nécessaires et suffisantes.*

II. Les polynomes ψ_1, χ_1 étant liés par la relation

$$\frac{\psi}{\chi}=\frac{\psi_1}{\chi_1}\qquad(\varphi=0),$$

un seul des deux polynomes ψ_1, χ_1 est arbitraire, dans les conditions fixées.

III. Si $q_1>r_1$, $q_2<r_2$, on prendra

$$(53)\qquad \chi_1(x,y)=(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\dots(x-\varepsilon_2)^{r_2-q_2}\dots Q_1(x,y),$$
$$(54)\qquad \psi_1(x,y)=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1-q_1}\dots P_1(x,y).$$

IV. Il n'est pas inutile d'écrire

$$\psi\chi_1=\psi_1\chi$$

ou (51, 52)

$$\psi(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\dots Q_1=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\dots P_1\chi,$$

puis

$$\frac{\psi}{(x-\alpha_1)^{q_1}}(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\dots\frac{Q_1}{(x-\alpha_1)^{p'_1-1}}=\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\dots P_1\chi,$$
$$\psi\dots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\dots Q_1=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\dots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\dots\frac{P_1}{(x-\gamma_1)^{p''_1-1}}\,\frac{\chi}{(x-\gamma_1)^{r''_1}},$$
$$\frac{\psi}{(x-\varepsilon_1)^{q_1}}(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\dots\frac{Q_1}{(x-\varepsilon_1)^{p_1-1}}=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\dots\frac{P_1}{(x-\varepsilon_1)^{p_1-1}}\,\frac{\chi}{(x-\varepsilon_1)^{r_1}},$$

et de constater que, conformément aux caractéristiques du Tableau T, tous les termes de la première identité sont finis en (α_1, β_1), tous ceux de la seconde en (γ_1, δ_1), et ceux de la troisième en (ε_1, ζ_1).

V. On pourrait démontrer la deuxième partie en supposant, dès le début, $\varphi = 0$ (nº **42**); mais on masquerait ainsi certains points intéressants.

55. Cas particuliers. — I. *Si la courbe gauche* Γ *n'a pas de points à l'infini dans la direction* Oz, les points $(\gamma_i \delta_i)$ n'existent pas; de plus,

$$q_i \gtreqless r_i ;$$

donc (53), $\chi_1(x, y)$ se réduit à

$$\chi_1(x, y) = Q_1(x, y) :$$

la courbe χ_1 *est alors quelconque parmi celles qui ont en* (α_i, β_i) *un point multiple d'ordre* $p'_i - 1$; *en* ε_i, ζ_i, *un point multiple d'ordre* $p_i - 1, \ldots.$

II. *Si la courbe gauche* Γ *a des points à l'infini dans la direction* Oz, *mais n'a pas de points singuliers vrais, les points* (α_i, β_i) *sont simples pour* φ (nº **21**); donc (53)

$$\chi_1 = (x - \gamma_1)^{p''_1 + r''_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_2)^{r_2 - q_2} \ldots Q_1(x_1 y),$$

où (Tableau T), Q_1 *est simplement assujetti à avoir en* (ε_i, ζ_i) *un point multiple d'ordre* $p_i - 1$.

III. Théorème d'Halphen. — *Si l'on suppose que la courbe* Γ *n'a ni points à l'infini dans la direction* Oz *ni points singuliers vrais et, en outre, que* φ *n'a pas d'autres singularités que des points doubles*, on voit, en réunissant les résultats qu'on vient d'obtenir (II, III) où l'on fait, de plus, $p_i = 2$, *que* χ_1 *est alors une courbe quelconque, simplement assujettie à avoir comme points simples les points doubles de* φ *où passent* ψ, χ.

En effet, dans l'expression de χ_1 écrite (II), les points $(\gamma_1 \delta_1)$

n'existent pas, non plus que les points (ε_2, ζ_2) où $r_2 > q_2$; puis $Q_1(x,y)$ est simplement assujetti à avoir comme points *simples* les points $(\varepsilon_1 \zeta_1)$ où $r_1 > q_1$, puisque ces points sont *doubles* pour φ; enfin il n'y a pas lieu de tenir compte pour Q_1 des points (α, β) qui sont simples pour φ.

C'est ce dernier résultat qu'Halphen a pris comme point de départ de son étude des courbes gauches algébriques (¹).

Formes spéciales que peut prendre $\chi_1(x, y)$.

34. Les calculs que nous avons faits permettent de prendre

$$Q_1(x, y) = (x-\alpha_1)^{p'_1-1} \ldots (x-\varepsilon_1)^{p_1-1} \ldots.$$

Dans ces conditions

$$\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1} \ldots (x-\varepsilon_1)^{q_1} \ldots P_1(x, y)}{(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1} \ldots (x-\varepsilon_1)^{r_1} \ldots (x-\alpha_1)^{p'_1-1} \ldots (x-\varepsilon_1)^{p_1-1} \ldots} \qquad (\varphi = 0)$$

ou, après disparition des facteurs communs,

$$\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(x-\alpha_1)^{q'_1} \ldots (x-\varepsilon_1)^{q_1} \ldots}{(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1} \ldots (x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}} P_1(x, y) \qquad (\varphi = 0);$$

la fraction rationnelle $\dfrac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$ est ainsi ramenée au produit d'une fraction rationnelle en x par un polynome en (x, y).

Voici une conséquence intéressante de cette forme particulière de $\dfrac{\psi}{\lambda}$.

D'après le Tableau (T),

$$\frac{P_1(x, y)}{(x-\gamma_1)^{p''_1-1}}$$

est fini en (γ_1, δ_1); pour que

$$\left[\frac{P_1(x, y)}{(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}}\right]_{\gamma_1, \delta_1}$$

soit fini, il faut que r''_1 soit nul.

(¹) HALPHEN, *loc. cit.*, n° 3.

Cela implique que les points (γ_i, δ_i) communs à φ, ψ, mais où χ ne passe pas, n'existent pas.

D'autre part, pour un point ε_i, commun à φ, ψ, χ, on a

$$\left[\frac{(x-\varepsilon_i)^{q_i} P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i+r_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_i} = \left[\frac{(x-\varepsilon_i)^{q_i}}{(x-\varepsilon_i)^{r_i}} \frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_i},$$

où $\left[\frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_i}$ est fini; l'expression écrite sera donc finie si, condition nécessaire et suffisante,

$$q_i \geqq r_i.$$

Examinons les points $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ où la droite $x = \varepsilon_i$ recoupe φ, et qui comptent parmi les systèmes de valeurs que peuvent prendre (x, y).

Un tel point $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ ne peut être que simple pour φ (n° **31**); pour que $\left[\frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_{ij}}$ soit fini, il faut que $P_1(x, y)$ admette $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ pour point multiple d'ordre $p_i - 1$, si φ et P_1 n'ont pas de contact en ce point (n° **9**).

Finalement, *les fractions rationnelles* $\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$ *de x et y, où x et y sont liées par l'équation $\varphi(x, y) = 0$ (φ et ψ, φ et χ n'ayant pas de contacts) qui restent finies pour toutes les valeurs finies de x et de y, peuvent être mises sous la forme*

$$(x-\varepsilon_1)^{s_1}(x-\varepsilon_2)^{s_2}\ldots(x-\varepsilon_d)^{s_d}\frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_1)^{p_1-1}\ldots(x-\varepsilon_d)^{p_d-1}}$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_d \geqq 0),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d$ *étant les abscisses des points de multiplicité* $p_1, p_2, \ldots, p_d$ *de φ et $P(x, y)$ étant un polynome qui admet les points* (ε_i, ζ_i), $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$, ... *comme points multiples d'ordre* $p_i - 1$ [1] : on suppose qu'il n'y a pas de contact en $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ entre φ, P_1; s'il y a contact, cette proposition est aisée à généraliser (n° **9**).

---

[1] Ce théorème est donné, quand $\varphi(x, y)$ n'a que des points doubles, dans E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 11.

35. Si $\varphi(x, y)$ a un point multiple (θ, η) d'ordre s, on a

$$\varphi(x, y) = \varepsilon_{s,1}(x-\theta)^s + \varepsilon_{s,2}(x-\theta)^{s-1}(y-\eta) + \ldots,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = s\varepsilon_{s,1}(x-\theta)^{s-1} + (s-1)\varepsilon_{s,2}(x-\theta)^{s-2}(y-\eta) + \ldots,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varepsilon_{s,2}(x-\theta)^{s-1} + \ldots,$$

ce qui montre que les courbes $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ ont chacune un point multiple d'ordre $s - 1$ en (θ, η).

De plus, en rendant $\varphi(x, y)$ homogène au moyen d'une variable z, on a

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = m\,\varphi(x, y, z),$$

où m est le degré de la courbe $\varphi(x, y) = 0$; donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = m\,\varphi(x, y) - x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial z}}{(x-\theta)^{s-1}} = m\frac{\varphi(x, y)}{(x-\theta)^{s-1}} - x\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{(x-\theta)^{s-1}} - y\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{(x-\theta)^{s-1}}.$$

La courbe φ ayant un point multiple d'ordre s en (θ, η), $m\frac{\varphi(x, y)}{(x-\theta)^{s-1}}$ tend vers zéro quand (x, y) tend vers (θ, η), cependant que

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{(x-\theta)^{s-1}}, \quad \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{(x-\theta)^{s-1}}$$

tendent vers des limites finies, puique (θ, η) est un point multiple d'ordre $s - 1$ pour $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

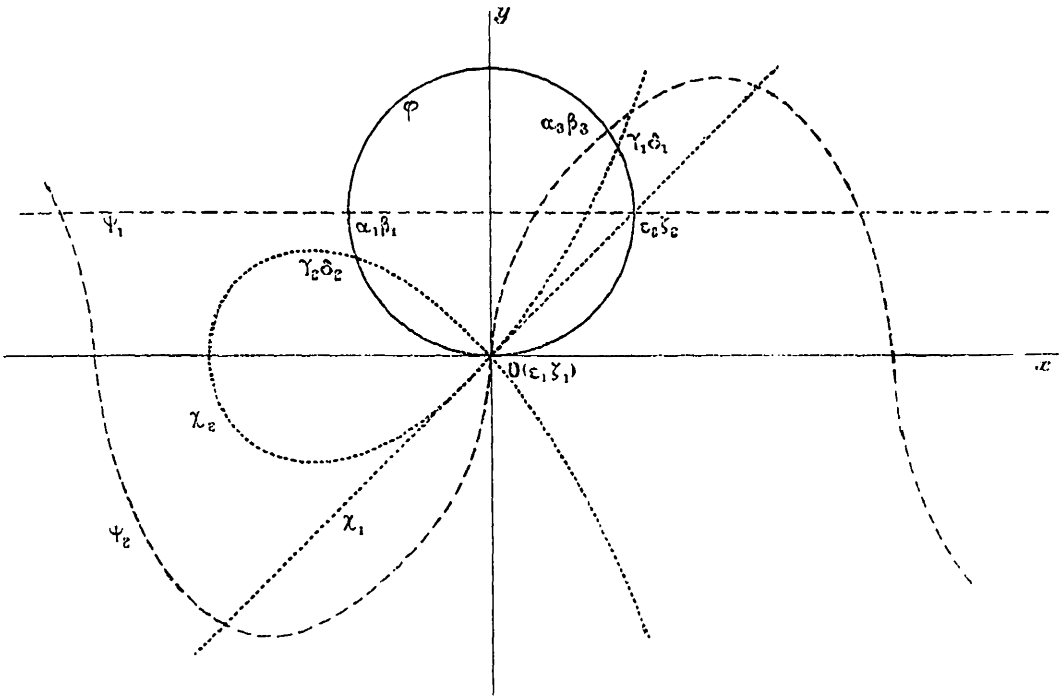
Il en résulte que

$$\left[\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{(x-\theta)^{s-1}}\right]_{\theta,\eta}$$

est fini; donc $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ a un point multiple d'ordre $s - 1$ en (θ, η).

Les polaires $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ *de* $\varphi(x, y, z)$, *ont donc toutes trois pour* *caractéristiques* (Tableau T) $p'_i - 1$, $p''_i - 1$, $p_i - 1$ *et l'une quelconque d'entre elles, indifféremment, peut être prise pour* P_1 *ou* Q_1 [1].

36. Il ne sera pas inutile de donner un exemple des réductions qui



viennent d'être indiquées et de la manière pratique de conduire à bien les calculs compliqués qu'elles comportent.

Considérons la courbe gauche Γ définie par les équations

$$(55)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-y=0 \\ z=\dfrac{(2y-1)(x^3+y^3-2x)}{(x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2]}. \end{cases}$$

Ici

$$(56)\qquad \varphi(x,y)=x^2+y^2-y,$$

$$(57)\qquad \psi(x,y)=(2y-1)(x^3+y^3-2x),$$

$$(58)\qquad \chi(x,y)=(x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2].$$

---

[1] *Cf.* la seconde Note du n° **32**.

La courbe φ est une circonférence tangente à Ox; son centre a pour coordonnées o et $\frac{1}{2}$.

La courbe ψ est formée de la droite $\psi_1 = 2y - 1 = 0$ et d'une courbe ψ_2 symétrique par rapport à l'origine, où elle a un point simple; elle y est tangente à Oy.

La courbe χ est formée de la droite $\chi_1 = y - x = 0$ et d'une strophoïde χ_2 ayant un point double à l'origine : χ a donc un point triple à l'origine.

37. On verra plus loin (nº **44**) que la courbe Γ est formée par une courbe gauche du sixième ordre, complétée par deux droites parallèles à Oz. Elle n'a pas de points singuliers, ni vrais, ni apparents, puisque φ n'a que des points simples; mais elle a des points à l'infini dans la direction Oz, se projetant en (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2), nº **41**, 2º, et en (ε_1, ζ_1), nº **41**, 3º. Nous sommes ainsi dans le cas II du nº **35**.

38. *Résultant de* φ, ψ. — Éliminons y entre

$$(59) \qquad x^2+y^2-y=0 \qquad (y^2=y-x^2),$$
$$(60) \qquad (2y-1)(x^3+y^3-2x)=0,$$

en procédant comme il suit, en vue des calculs à venir; transformons (60) en tenant compte de (59) :

$$(2y-1)[x^3+y(y-x^2)-2x]=0 \qquad (\varphi=0, \psi=0),$$
$$(2y-1)[x^3-x^2-2x+y(1-x^2)]=0 \qquad (\varphi=0, \psi=0),$$
$$2y(x^3-x^2-2x)+2(y-x^2)(1-x^2)-x^3+x^2+2x-y(1-x^2)=0$$
$$(\varphi=0, \psi=0),$$
$$(61) \quad y(2x^3-3x^2-4x+1)+2x^4-x^4-x^2+2x=0 \qquad (\varphi=0, \psi=0);$$

on peut tirer y de cette équation et porter dans (59); il vient, après réduction et décomposition en facteurs,

$$x(x+1)^2(4x^2-1)(2x^3-7x^2+8x-2)=0 \qquad (\varphi=0, \psi=0).$$

On sait que le premier membre de cette équation n'est autre que le résultant $R(\varphi, \psi)$ de φ, ψ; donc

$$(62) \qquad R(\varphi, \psi)=x(x+1)^2(4x^2-1)(2x^3-7x^2+8x-2).$$

39. *Résultant de* φ, χ. — En procédant comme pour φ, ψ, on a

$$(x-y)[xy+x^2-(y-x^2)]=0 \qquad (\varphi=0, \chi=0),$$

$$(x-y)[2x^2+(x-1)y]=2x^3+x(x-1)y-2x^2y-(x-1)y^2=0$$
$$(\varphi=0, \chi=0),$$

$$2x^3-x(x+1)y-(x-1)(y-x^2)=0 \qquad (\varphi=0, \chi=0),$$

(63) $$x^2(3x-1)-y(x^2+2x-1)=0, \qquad (\varphi=0, \chi=0);$$

la valeur de y, que donne cette équation, portée dans (59) conduit à

(64) $$\mathrm{R}(\varphi, \chi)=x^3(2x-1)(5x^2-1) \qquad (\varphi=0, \chi=0).$$

40. *Formation de la relation*

(65) $$\mathrm{R}(\varphi, \chi)-\mathrm{H}(x, y)\chi-\mathrm{H}'(x, y)\varphi=0$$

ou, plus simplement de celle-ci, *qu'il suffit de connaître*,

(66) $$\mathrm{R}(\varphi, \chi)-\mathrm{H}(x, y)\chi=0 \qquad (\varphi=0).$$

Nous pourrions obtenir (65) en éliminant y entre

$$x^2+y^2-y-\varphi=0, \qquad (x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2]-\chi=0,$$

comme il a été dit au n° **24**. Nous obtiendrons donc (66) en éliminant y entre

(67) $$x^2+y^2-y=0,$$

et

(68) $$(x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2]=\chi.$$

Le calcul a été fait en partie au n° **39**, sauf qu'au lieu de (63), il faut écrire

$$x^2(3x-1)-y(x^2+2x-1)=\chi \qquad (\varphi=0).$$

Tirons y, portons dans (67), il vient

$$x^2(x^2+2x-1)^2+[x^2(3x-1)-\chi]^2-[x^2(3x-1)-\chi](x^2+2x-1)=0$$
$$(\varphi=0).$$

Le terme indépendant de χ est $\mathrm{R}(\varphi, \chi)$, *déjà calculé;* on a ainsi, en développant,

$$\mathrm{R}(\varphi, \chi)-[2x^2(3x-1)-x^2-2x+1-\chi]\chi=0 \qquad (\varphi=0);$$

si l'on remplace, *dans le* [ ], χ par sa valeur (68), il vient

$$(69)\quad R(\varphi,\chi) - \{6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \\ - (x-y)[x(x^2+y^2) - x^2 - y^2]\}\chi = 0 \qquad (\varphi = 0),$$

ce qui est la relation (66).

Nous verrons, au n° **41**, que nous n'avons pas à former la relation (40), car (39) que nous venons d'obtenir en (69) lui est équivalente, dans le cas présent. Mais il importe de réduire (69), en se servant de (67) pour faire disparaître y^3 et y^2. On remarquera à cet effet que, dans le calcul de $R(\varphi, \chi)$, on a écrit (63)

$$(x-y)[x(x^2+y^2) - x^2 - y^2] = x^2(3x-1) - y(x^2+2x-1) \qquad (\varphi = 0);$$

donc (69) la relation (66) est ici

$$(70)\quad \begin{aligned} R(\varphi,\chi) &= [6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 - x^2(3x-1) + y(x^2+2x-1)]\chi \quad (\varphi=0), \\ &= [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2+2x-1)]\chi \quad (\varphi=0). \end{aligned}$$

41. *Points communs à* φ, ψ (χ exclu), φ, χ (ψ exclu), (φ, ψ, χ). — Les expressions (62) et (64) de $R(\varphi, \psi)$, $R(\varphi, \chi)$ font voir que :

1° Les courbes φ, ψ (χ exclu) ont en commun les points d'abscisses

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = -1$$

et α_3, α_4, α_5 racines de l'équation

$$2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0;$$

pour ces points

$$p'_1 = p'_2 = p'_3 = p'_4 = p'_5 = 1, \\ q'_1 = q'_2 = q'_3 = q'_4 = p'_5 = 1;$$

on aurait leurs ordonnées en calculant le résultant, par rapport à x, de (59, 60).

2° Les courbes φ, χ (ψ exclu) ont en commun les points d'abscisses

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad \gamma_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

ici,

$$p''_1 = p''_2 = 1, \qquad r''_1 = r''_2 = 1;$$

3° Les courbes φ, ψ, χ ont en commun les points d'abscisses

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$$

pour lesquels

$$p_1 = p_2 = 1; \qquad q_1 = q_2 = 1; \qquad r_1 = 3, \qquad r_2 = 1:$$

Ici, les relations (39, 40), où ψ est remplacé par χ, sont équivalentes (n° **25**) puisque, dans $R(\varphi, \chi)$ (64),

$$x^3 = x^{p_1 r_1} = x^{p_1 + r_1 + 1 - 1}, \qquad 2x - 1 = (2x-1)^{p_2 r_2} = (2x-1)^{p_2 + r_2 - 1}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = (x - \gamma_1)^{p''_1 r''_1} = (x - \gamma_1)^{p''_1 + r''_1 - 1},$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = (x - \gamma_2)^{p\ r''_2} = (x - \gamma_2)^{p''_2 + r''_2 - 1}.$$

Nous n'avons donc qu'à nous en tenir à la relation (70) que nous écrirons

$$(71) \quad x^3(2x-1)(5x^2-1) = [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2 + 2x - 1)]\chi \qquad (\varphi = 0).$$

42. *Formation des polynomes* ψ_1, χ_1. — Les quantités $p_i - 1$, $p'_i - 1$ sont nulles (n° **41**). Nous pouvons donc, d'après le Tableau (T), prendre une constante pour Q_1 et (51) prendre pour χ_1 :

$$\chi_1 = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \varepsilon_1)^2 C' \qquad (\varphi = 0),$$

ou bien

$$\chi_1 = \left(x - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) x^2 C',$$

$$(72) \qquad \chi_1 = x^2(5x^2 - 1)C$$

et nous devons arriver à cette forme de χ_1 *en partant de* (71) *dont on aura multiplié les deux membres par* ψC (n° **32**).

On peut simplifier les calculs en supposant, *non seulement à la fin, mais dès le début*, que

$$\varphi(x, y) = 0.$$

On aura

$$x^3(2x-1)(5x^2-1)\psi C = [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2 + 2x - 1)]\psi C \chi$$
$$(\varphi = 0).$$

Remplaçons, dans le second membre,

$$\psi(x, y) \qquad (\varphi = 0)$$

par sa valeur, *déjà calculée*, (61),

$$\psi = y(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + 2x^4 - x^3 - x^2 + 2x \qquad (\varphi = 0)$$

et y^2, *autant qu'il se pourra* par (59)

$$y^2 = y - x^2 \qquad (\varphi = 0);$$

on aura successivement

$$\begin{aligned}
&x^3(2x-1)(5x^2-1)\psi C \\
&\quad = [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2 + 2x - 1)] \\
&\quad\quad \times [2x^4 - x^3 - x^2 + 2x + y(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)]C\chi \qquad (\varphi = 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^3(2x-1)(5x^2-1)\frac{\psi}{\chi}\frac{C}{C} \\
&\quad = (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x) \\
&\quad\quad + [(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) \\
&\quad\quad\quad + (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)]y \\
&\quad\quad + (2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1)y^2 \qquad (\varphi = 0), \\
&\quad = (3x^3 - \ldots)(2x^4 - \ldots) + [(2x^4 - \ldots)(x^2 + \ldots) + \ldots]y \\
&\quad\quad + (2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1)(y - x^2) \qquad (\varphi = 0),
\end{aligned}$$

et l'on obtient, après réductions,

$$\begin{aligned}
&x^3(2x-1)(5x^2-1)\frac{\psi}{\lambda}\frac{C}{C} \\
&\quad = (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x) \\
&\quad\quad - x^2(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1) \\
&\quad\quad + [(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) \\
&\quad\quad\quad + (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1) \\
&\quad\quad\quad + (2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1)]y \qquad (\varphi = 0).
\end{aligned}$$

Le second membre est *rationnellement* irréductible; le terme indépendant de y et le coefficient de y doivent donc admettre *chacun* le facteur

$$x(2x-1)$$

qui doit s'éliminer de lui-même (72); et en effet, toutes réductions faites, on arrive à

$$x^3(2x-1)(5x^2-1)\frac{\psi}{\chi}\frac{C}{C}$$
$$= x(x+1)(2x-1)[2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y]$$
$$(\varphi = 0),$$

d'où l'on conclut, *comme on le prévoyait*,

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \dfrac{(x+1)[2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y]C}{x^2(5x^2-1)C} \\ \qquad\qquad (\varphi = 0), \end{array}\right.$$

$$\psi_1(x,y) = (x+1)[2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y]C$$
$$(\varphi = 0),$$
$$\chi_1(x,y) = x^2(5x^2-1)C \qquad (\varphi = 0).$$

43. *On peut ici*, grâce à ce que la courbe φ est unicursale, *vérifier directement la relation* (73). On a en effet

$$x = \frac{t}{t^2+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2+1} \qquad (\varphi = 0),$$

d'où

$$1^\circ \quad x^2(5x^2-1) = -\frac{t^2(t^2-t-1)(t^2+t-1)}{(t^2+1)^4} \qquad (\varphi = 0),$$

$$2^\circ \quad \psi(x,y) = \frac{t(t-1)(t+1)(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t+1)}{(t^2+1)^4} \qquad (\varphi = 0),$$

$$3^\circ \quad \chi(x,y) = \frac{t^3(t-1)(t^2-t-1)}{(t^2+1)^3} \qquad (\varphi = 0),$$

$$4^\circ \quad x+1 = \frac{t^2+t+1}{t^2+1} \qquad (\varphi = 0),$$

$$5^\circ \quad 2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y$$
$$= -\frac{(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t-1)(t+1)}{(t^2+1)^4} \qquad (\varphi = 0);$$

si l'on porte ces valeurs dans (73), on obtient, sans qu'il soit nécessaire d'entreprendre de nouveaux calculs, une identité.

44. Nous pouvons constater aisément que Γ est une courbe gauche du sixième ordre, complétée par deux droites parallèles à Oz, particularité fréquente dans les courbes représentées par un système de deux équations de la forme

$$\varphi(x, y) = 0, \quad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0.$$

En effet,

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{t(t-1)(t+1)(t^3 - 3t^2 + 2t - 2)(t^2 + t + 2)}{(t^2+1)^4} \times \frac{(t^2+1)^3}{t^3(t-1)(t^2-t-1)};$$

z est indéterminé pour

$$t = 0, \quad (x = y = 0),$$
$$t = 1, \quad \left(x = y = \frac{1}{2}\right),$$
$$t = \pm 1, \quad (x = y = \pm\infty;$$

les deux droites, parallèles à Oz,

$$x = y = x, \qquad x = y = \frac{1}{2},$$

font partie de Γ. Ce sont les seules, car si les courbes (φ, χ) ont des points communs à l'infini, (φ, ψ) n'en ont pas.

Supprimons les facteurs t, $t-1$, t^2+1 :

$$z = \frac{(t+1)(t^3 - 3t^2 + 2t - 2)(t^2 + t + 1)}{t^2(t^2+1)(t^2-t-1)}.$$

Un plan quelconque

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sera donc percé par la courbe gauche

$$x = \frac{t}{t^2+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2+1},$$
$$z = \frac{(t+1)(t^3 - 3t^2 + 2t - 2)(t^2 + t + 1)}{t^2(t^2+1)(t^2-t-1)},$$

aux six points (x, y, z) définis par le système qu'on vient d'écrire et par les six racines de l'équation

$$t^2[At + Bt^2 + D(t^2+1)](t^2 - t - 1)$$
$$+ C(t+1)(t^3 - 3t^2 + 2t - 2)(t^2 + t + 1) = 0.$$