JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

K. BOHLIN

Sur le développement des intégrales du problème des trois corps (seconde partie)

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 2 (1916), p. 173-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__173_0>

Sur le développement des intégrales du problème des trois corps.

(SECONDE PARTIE.)

PAR K. BOHLIN.

---

1. Après les recherches ([1]), poursuivies et récemment achevées, sur la forme des développements des intégrales du problème des trois corps (application à l'orbite étudiée par von Hærdtl), il nous reste à donner aux séries trouvées une forme systématique et, en particulier, à déterminer les signes propres de leurs termes individuels. Ces signes étant connus pour tous les termes actuellement déterminés, il ne s'agit guère que des signes des termes, dont nous avons eu soin de compléter les expressions trouvées en vue d'atteindre, autant qu'il est possible, la forme générale des séries dont il s'agit.

Abstraction faite des signes et de certains coefficients, la forme des séries considérées dans notre cas se trouve donnée pour les développements en *cosinus* par

$$(1)\qquad f=\begin{vmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_1(3) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_2(2) \\ p_2(3) \\ p_2(4) \\ p_2(5) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_3(4) \\ p_3(5) \\ p_3(6) \\ p_3(7) \end{vmatrix}+\ldots.$$

([1]) Voir : *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps* (*Arkiv för Math. Astron. Physik. Vetenskaps Akademien*, *Stockholm*, Bd VIII, n° 35; Bd IX, n° 23; Bd IX, n° 34; Bd X, n° 8; Bd X, n° 26; Bd X, n° 33), ainsi que *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps.* Première Partie (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, fasc. 4, 1915).

et pour les développements en *sinus* par l'expression analogue

$$(2)\qquad f = \begin{vmatrix} q_0(0) \\ q_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ q_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_2(2) \\ q_2(3) \\ q_2(4) \\ q_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_3(4) \\ q_3(5) \\ q_3(6) \\ q_3(7) \end{vmatrix} + \ldots$$

Tout assemblage de quatre termes dans ces expressions a été nommé un *complexe*, et le premier groupe un *demi-complexe*. Dans les cas analogues précédemment considérés sur les racines de l'équation du cinquième degré ([1]) et sur les expressions des distances de masses s'attirant au nombre de trois ([2]), la répartition des signes dans ces complexes est simplement et partout

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{vmatrix}$$

de manière que toutes les fonctions f s'évanouissent pour certaines valeurs de la variable indépendante, telles que pour ces valeurs tout élément simple $p_l(m, n)$ et $q_l(m, n)$ se réduise à *l'unité*.

En effet, les éléments simples étant d'avance donnés sous la forme

$$(4)\qquad p_l(m, n) = \frac{p_l(m, n)}{\overline{p}_l(m, n)},$$

où $\overline{p}_l(m, n)$ désigne la valeur particulière obtenue par $p_l(m, n)$, quand la fonction f s'évanouit, on aura pour $f = 0$

$$p_l(m, n) = 1,$$

et par conséquent ([3])

$$(5)\qquad p_2(2m) = p_l(2m+1).$$

Dans le cas qui nous occupe (rayon vecteur r d'un corps C par

([1]) *Sur une équation algébrique remarquable se trouvant en rapport à la mécanique céleste.* (*Astron. iaktt. och unders. Stockholms Observatorium*, Bd VII).

([2]) *Integralentwickelungen des Dreikörperproblemes* (*Ibid.*, Bd IX, n° 2).

([3]) Nous avons, en général,

$$p_l(i) = p_l(i, 0) + p_l(i-1, 1) + p_l(i-2, 2) + \ldots.$$

rapport au centre de gravité des deux autres corps A, B), la répartition des signes n'est plus si uniforme. Alors il n'est pas *a priori* nécessaire de supposer

$$r = 0,$$

pour les valeurs des arguments

$$u = ia_1, \qquad v = ib_1,$$

qui sont considérées comme les modules d'excentricité, et en réalité cette condition n'est pas remplie.

Pour les développements des fonctions particulières

$$\varepsilon_1(u, v), \quad \varepsilon_2(u, v),$$

la condition analogue s'est trouvée bien remplie et, pour ces développements, nous avons partout à appliquer la suite

$$\left|\begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix}\right|$$

à tous les complexes y appartenant. Mais déjà pour la fonction

$$\eta(u, v),$$

nous nous trouverons devant deux suites des signes appartenant aux complexes employés, savoir :

$$(6) \qquad \left|\begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix}\right| \quad \text{et} \quad \left|\begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}\right|,$$

et pour la fonction

$$\Theta(u_1, v_1),$$

nous avons à considérer, outre les suites (6), encore d'autres suites qui en général se composent des suites que voici :

$$(7) \qquad \begin{array}{ccc} a. & b. & c. \\ \left\{\begin{matrix} + + \\ - - \\ + - \\ - + \end{matrix}\right. & \begin{matrix} + + + + \\ + + - - \\ + - + - \\ - + + - \end{matrix} & \begin{matrix} + + \\ + + \\ + - \\ + - \end{matrix} \end{array}$$

Combinaisons évanouissantes.	Combinaisons demi-évanouissantes.	Combinaisons non évanouissantes.

Or, plusieurs des termes de nos développements acquièrent le coefficient zéro, et il est bien possible de s'en rendre compte par des combinaisons des suites (7). Mais comme par cela les séries viendraient se compliquer, il paraît plus convenable de considérer le zéro comme un signe particulier, en considérant des suites correspondantes, par exemple :

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & 0, \\ 0 & + & - & 0, \\ - & - & 0 & +, \\ 0 & 0 & + & 0. \end{array}$$

La suite des signes appartenant à un certain développement $f(u, v)$ peut ainsi être comprise, par exemple, par la formule

$$f(+-0) = \left|\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} + \\ 0 \\ - \\ 0 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} + \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| + \ldots. \tag{8}$$

2. Passons, après ces remarques préliminaires, à l'exposé des suites de signes appartenant aux fonctions individuelles employées pour la représentation du mouvement dans le cas du problème des trois corps qui nous occupe [1].

1. *Développement de* ε_1 *et* ε_2. — Ces développements ont la forme

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varkappa \frac{\varkappa}{c}\left(Q_0 + \frac{c}{e}Q_1 + \frac{c^2}{e^2}Q_2 + \ldots\right) + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 &= \varkappa \frac{\varkappa}{c}\left(Q_0 - \frac{c}{e}Q_1 + \frac{c^2}{e^2}Q_2 - \ldots\right) + \varepsilon_0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Les fonctions Q_2 ont ici la forme la plus simple. Voici les signes et les

[1] Ces résultats sont obtenus par l'analyse et la généralisation des développements directement trouvés. Voir : *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps*. Première Partie (*Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, t. I, fasc. 4, 1915).

fonctions élémentaires y appartenant :

$$(Q) \qquad \begin{array}{ll} & \text{Fonctions élémentaires.} \\ Q_0 = 1 \left| \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right| & \begin{array}{c} q_0(0) \\ q_0(1) \end{array} \\ Q_1 = 1 \left| \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right| & \begin{array}{c} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ q_1(3) \end{array} \\ Q_2 = 1 \left| \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right| & \begin{array}{c} q_2(2) \\ q_2(3) \\ q_2(4) \\ q_2(5) \end{array} \\ Q_3 = 1 \left| \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right| & \begin{array}{c} q_3(4) \\ q_3(5) \\ q_3(6) \\ q_3(7) \end{array} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

D'après cet aperçu, il vient :

$$\begin{aligned} Q_0 &= +\, q_0(0), \\ &\quad -\, q_0(1), \\ Q_1 &= +\, q_1(0), \\ &\quad -\, q_1(1), \\ &\quad +\, q_1(2), \\ &\quad -\, q_1(3), \\ Q_2 &= +\, q_2(2), \\ &\quad -\, q_2(3), \\ &\quad +\, q_2(4), \\ &\quad -\, q_2(5), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Les signes sont partout alternatifs, c'est-à-dire

$$\left| \begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right|$$

pour tous les complexes Q_m. Les développements de ε_1 et ε_2 sont ainsi rigoureusement *autologues*.

La partie libre qu'il faut ajouter aux expressions soit de ε_1, soit de ε_2, se trouve donnée par

$$\varepsilon_0 = \varkappa \frac{e}{c}(1-c)\frac{\sin u + \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}. \tag{9a}$$

2. *Développement de* $\eta(u, v)$. — Ce développement acquiert la forme symétrique :

$$\begin{aligned}\eta = {} & \frac{1+c}{2}\,\frac{1+\varkappa_1}{2}\,\eta_1(u, v)_1, \\ & - \frac{1+c}{2}\,\frac{1-\varkappa_1}{2}\,\eta_1(u, v)_2, \\ & - \frac{1-c}{2}\,\frac{1+\varkappa_1}{2}\,\eta_2(u, v)_2, \\ & + \frac{1-c}{2}\,\frac{1-\varkappa_1}{2}\,\eta_2(u, v)_1,\end{aligned} \tag{10}$$

et il se compose des quatres séries particulières ci-après :

$$\left\{\begin{aligned}\eta_1(u, v)_1 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P_0 - \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 + \frac{c^3}{e^3}P_3 + \ldots\right), \\ \eta_1(u, v)_2 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P_0 + \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \frac{c^3}{e^3}P_3 + \ldots\right), \\ \eta_2(u, v)_2 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P'_0 + \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 + \frac{c^3}{e^3}P'_3 + \ldots\right), \\ \eta_2(u, v)_1 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P'_0 - \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \frac{c^3}{e^3}P'_3 + \ldots\right),\end{aligned}\right. \tag{10a}$$

dont les signes se reproduisent sur les quatre suites horizontales :

$\eta_1(u, v)_1$	$+ - - +$
$\eta_1(u, v)_2$	$+ + - -$
$\eta_2(u, v)_1$	$+ + + +$
$\eta_2(u, v)_2$	$+ - + -$

Quant aux signes enfermés dans les complexes P et P′, nous aurons les expressions finies :

				Fonctions élémentaires.
$P_0 = 1$	$+$	$P'_0 = 1$	$+$	$p_0(0)$
	$-$		$+$	$p_0(1)$
$P_1 = 1$	$+$	$P'_1 = 1$	$+$	$p_1(0)$
	$-$		$+$	$p_1(1)$
	$+$		$+$	$p_1(2)$
	$-$		$+$	$p_1(3)$
$P_2 = 1$	$+$	$P'_2 = 1$	$+$	$p_2(2)$
	$-$		$+$	$p_2(3)$
	$+$		$+$	$p_2(4)$
	$-$		$+$	$p_2(5)$
$P_3 = 1$	$+$	$P'_3 = 1$	$+$	$p_3(4)$
	$-$		$+$	$p_3(5)$
	$+$		$+$	$p_3(6)$
	$-$		$+$	$p_3(7)$
....		....		.....

Tandis que les P contiennent des signes alternatifs, nous voyons que dans les P′ on a partout le signe $+$. Ainsi les fonctions $\eta_1(u, v)_1$ et $\eta_1(u, v)_2$ s'évanouissent pour $u = ia_1$, $v = ib_1$, mais cela n'est plus le cas pour les deux autres fonctions

$$\eta_2(u, v)_1 \quad \text{et} \quad \eta_2(u, v)_2.$$

Par conséquent la fonction $\eta(u, v)$ s'évanouit en partie, en contenant d'autre part une partie non évanouissante.

La partie libre qu'il faut ajouter au développement cité de $\eta(u, v)$ est de la forme

$$\eta_0 = -\varkappa^2(1 + c)\,\frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}. \tag{10b}$$

3. *Développement de* $\Theta(u_1, v_1)$. — Ce développement a la forme d'une série à double entrée, à laquelle nous pouvons assigner, d'après une détermination nouvelle, la forme systématique

$$\begin{aligned}\Theta = -\frac{\varkappa\varkappa_1}{c-1}\Bigg\{&\left[P_0 + 4c\frac{e}{c}P_1 + (4c)^2\left(\frac{e}{c}\right)^2 P_2\right]\\ &+\left[\frac{c(c+1)}{c(c-1)}\right]^3\left[(4c)^3\left(\frac{e}{c}\right)^3 P_3 + (4c)^4\left(\frac{e}{c}\right)^4 P_4 + (4c)^5\left(\frac{e}{c}\right)^5 P_5\right]\\ &+\left[\frac{c(c+1)}{c(c-1)}\right]^6\left[(4c)^6\left(\frac{e}{c}\right)^6 P_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Bigg\}.\end{aligned} \tag{11}$$

L'expression comprend ainsi une suite infinie dont les termes individuels viennent s'ordonner à trois. C'est un arrangement en quelque sorte analogue aux expressions posées ci-après de π_1 et π_2, où il y a, outre le développement suivant

$$\left(\frac{e}{c}\right)^n,$$

d'autres développements suivant les puissances de

$$[c(c+1)]^3 \quad \text{et} \quad [c(c-1)]^3.$$

Les fonctions π et θ se correspondent ainsi l'une à l'autre. D'autre part, la fonction $\eta(u, v)$ correspond à la paire de fonctions ε_1 et ε_2.

Voici les signes appartenant à cette expression [1] :

				Fonctions élémentaires
	o		o	$p_0(0)$
$P_0 = -c$	—	$+1$	—	$p_0(1)$
	o		o	»
	—		+	»
	+		+	$p_1(0)$
$P_1 = -c$	o	$+\varkappa$	o	$p_1(1)$
	—		+	$p_1(2)$
	o		o	$p_1(3)$
	+		—	$p_2(2)$
$P_2 = -c$	—	$+1$	—	$p_2(3)$
	—		—	$p_2(4)$
	+		—	$p_2(5)$
	o		o *	$p_3(4)$
$P_3 = -c$	—	$+\varkappa$	— *	$p_3(5)$
	o		o *	$p_3(6)$
	+ *		— *	$p_3(7)$
	+		+	$p_4(6)$
$P_4 = -c$	o	$+1$	o	$p_4(7)$
	—		+	$p_4(8)$
	o		o	$p_4(9)$
	+		—	$p_5(8)$
$P_5 = -c$	—	$+\varkappa$	—	$p_5(9)$
	—		—	$p_5(10)$
	+		—	$p_5(11)$
....				......

(1) Nous avons désigné par un astérisque (*) les signes hypothétiques qui appartiennent à des termes presque insensibles.

Nous pouvons nous imaginer les signes de ces fonctions composés d'après l'aperçu suivant

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & + & 0 \\
-c & - & 1 \\
 & - & 0 \\
 & + & 1 \\
\hline
 & + & 1 \\
-c & - & 0 \\
 & - & 1 \\
 & + & 0 \\
\hline
 & + & 1 \\
-c & - & 1 \\
 & - & 1 \\
 & + & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & + & 0 \\
-1 & + & 1 \\
 & + & 0 \\
 & + & 0 \\
\hline
 & + & 1 \\
+\varkappa & + & 0 \\
 & + & 1 \\
 & + & 0 \\
\hline
 & + & 1 \\
-1 & + & 1 \\
 & + & 1 \\
 & + & 1
\end{array}
$$

d'où leur loi est bien évidente.

Le terme libre est

$$\theta_0 = \varkappa^2(c+1)\frac{c}{e}\,\frac{\cos u_1 - \cos v_1}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}. \tag{11a}$$

La suite des coefficients

$$
\begin{array}{cc}
-c & +1, \\
-c & +\varkappa, \\
-c & +1, \\
-c & +\varkappa, \\
\dots & \dots\dots
\end{array}
$$

parcourt constamment les expressions. Les signes se reproduisent *à trois* dans le sens vertical. On a supposé que les $P_3, P_4, \ldots, P_6, P_7, \ldots$, à partir de la deuxième ligne de la formule Θ, sont les mêmes quantités qui entrent dans la première ligne de cette expression.

4. *Développement de* $\pi(u_1, v_1)$. — Cette fonction représentant *le périhélie* des arguments u, v comporte une plus grande diversité de signes que les autres fonctions employées, ce qui tient sans doute à la circonstance que la fonction $\pi(u_1, v_1)$ correspond seule aux deux fonctions équivalentes $\varepsilon_1(u, v)$ et $\varepsilon_2(u, v)$, qui représentent les *longitudes d'époque* de chacun des arguments u, v. Néanmoins la répartition des signes s'est trouvée facilement sous la forme ci-après.

Nous avons à considérer la fonction π composée de deux parties :

$$\pi = \pi_1 + \pi_2,$$

où nous aurons, d'une part,

$$(12)\quad \pi_1 = \varkappa \frac{c}{e} \Big\{ Q_0 + \frac{e}{c} Q_1 + \frac{e^2}{c^2} Q_2 + \frac{e^3}{c^3} Q_3 + \ldots [c(c+1)]^3 \left[\frac{e^3}{c^3} Q_3^3 + \frac{e^4}{c^4} Q_4^3 + \ldots \right]$$
$$+ [c(c+1)]^6 \left[\frac{e^6}{c^6} Q_6^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}$$

et, d'autre part,

$$\pi_2 = \varkappa \frac{c}{e} \Big\{ Q'_0 + \frac{e}{c} Q'_1 + \frac{e^2}{c^2} Q'_2 + \frac{e^3}{c^3} Q'_3 + \ldots - c^3(c-1)^3 \left[\frac{e^3}{c^3} Q_3^{3'} + \frac{e^4}{c^4} Q_4^{3'} + \ldots \right]$$
$$+ c^6(c-1)^6 \left[\frac{e^6}{c^6} Q_6^{6'} + \ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\},$$

formules où la répartition des signes sera :

		Fonctions élémentaires.
$Q_0 = +\frac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix} + \frac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix}$	$Q'_0 = +\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix}$	$q_0(0)$ $q_0(1)$
$+\frac{c}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{c}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \end{vmatrix}$	$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \end{vmatrix}$	»
$+\frac{c+2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix} + \frac{c+2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix}$	$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \end{vmatrix}$	»
$Q_1 = +\frac{c}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{c}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$Q'_1 = +\frac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$q_1(0)$ $q_1(1)$ $q_1(2)$ $q_1(3)$
$+\frac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{vmatrix} + \frac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{vmatrix}$	$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{vmatrix}$	»
$+\frac{c}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{c}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	»

Fonctions élémentaires.

$$Q_2 = +\frac{c+2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| + \frac{c+2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| \qquad Q'_2 = +\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| \qquad \begin{array}{c}q_2(2)\\q_2(3)\\q_2(4)\\q_2(5)\end{array}$$

$$+\frac{c}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| + \frac{c}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| \qquad +\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| \qquad \text{»}$$

$$+\frac{c-2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| + \frac{c-2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| \qquad +\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| \qquad \text{»}$$

$$Q_3 = +\frac{c}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| + \frac{c}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| \qquad Q'_3 = +\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| \qquad \begin{array}{c}q_3(4)\\q_3(5)\\q_3(6)\\q_3(7)\end{array}$$

$$+\frac{c+2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\0\\-\\+\end{array}\right| - \frac{c+2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\0\\-\\+\end{array}\right| \qquad +\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\+\end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\+\end{array}\right| \qquad \text{»}$$

$$+\frac{c}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| + \frac{c}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| \qquad +\frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| \qquad \text{»}$$

. . . .

Il faut remarquer que les constantes parcourent ces formules de la manière uniforme :

$$\begin{array}{cc}\dfrac{c-2}{2} & \dfrac{c-2}{2}\\[2ex] \dfrac{c}{2} & -\dfrac{c}{2}\\[2ex] \dfrac{c+2}{2} & +\dfrac{c+2}{2}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc}
\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{c-2}{2} & \frac{c-2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{c+2}{2} & \frac{c+2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{c-2}{2} & \frac{c-2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Quant aux signes renfermés dans les complexes, nous les voyons se reproduire *alternativement* pour Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ...

Il faut cependant encore distinguer les quantités

$$Q_3^3, \quad Q_4^3, \quad \ldots, \qquad Q_3^{3'}, \quad Q_4^{3'}, \quad \ldots$$

des quantités

$$Q_3, \quad Q_4, \quad \ldots, \qquad Q'_3, \quad Q'_4, \quad \ldots,$$

dans les expressions de π_1 et π_2 citées ci-dessus. Mais il faut au contraire supposer que, de même,

$$Q_6^6, \quad \ldots, \qquad Q_6^{6'}, \quad \ldots$$

soient identiques aux

$$Q_6, \quad \ldots, \qquad Q'_6, \quad \ldots,$$

et ainsi de suite alternativement. Il suffira, par conséquent, de noter encore les expressions des signes qu'il faut appliquer aux fonctions Q^3 et $Q^{3'}$. Or, Q_3^3 se distingue de Q_3 seulement par un changement de signe dans le second groupe de la première et de la troisième ligne. Un changement analogue a lieu pour $Q_3^{3'}$ relativement à Q'_3, comme on le voit par l'aperçu suivant :

$$
\begin{array}{llll}
Q_3^3 = + \dfrac{c}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \dfrac{c}{2}\begin{vmatrix} -! \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} & \qquad Q_3^{3'} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ -! \\ 0 \end{vmatrix} & \qquad \begin{matrix} q_3(4) \\ q_3(5) \\ q_3(6) \\ q_3(7) \end{matrix} \\
\qquad + \dfrac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{vmatrix} - \dfrac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{vmatrix} & \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{vmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{vmatrix} & \qquad \text{»} \\
\qquad + \dfrac{c}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \dfrac{c}{2}\begin{vmatrix} -! \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} & \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ -! \\ 0 \end{vmatrix} & \qquad \text{»} \\
Q_4^3 = \dfrac{c+2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} + \dfrac{c+2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} & \qquad Q_4^{3'} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} & \qquad \begin{matrix} q_4(6) \\ q_4(7) \\ q_4(8) \\ q_4(9) \end{matrix} \\
\qquad + \dfrac{c}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix} + \dfrac{c}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix} & \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix} & \qquad \text{»} \\
\qquad + \dfrac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} + \dfrac{c-2}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} & \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix} & \qquad \text{»} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Il faut supposer que les suites des signes vont se permuter alternativement, quand nous procédons par les fonctions Q_3^3, Q_4^3, ..., de cet aperçu nouveau. Pour les groupes y suivants de Q_6^6, ..., nous avons déjà remarqué qu'il faut supposer que les suites du premier aperçu vont reparaître, après quoi les changements des signes vont se produire alternativement.

Tout le système prend une forme plus simple dès qu'on fait résumer les formules exposées. Le terme libre s'évanouit, c'est-à-dire :

$$\pi_0 = 0. \tag{12a}$$

5. *Modules d'excentricité particuliers de r et de x.* — Tous ces développements se déduisent presque immédiatement des formules de

la première partie (I) ([1]) de cet exposé. Au contraire les formules se rapportant à la coordonnée x ont été sujettes à des modifications plus essentielles sur lesquelles il faut insister de plus près. Néanmoins quelques résultats intéressants résultent déjà des altérations que nous venons de faire dans les formules citées ci-dessus. En particulier, la partie de l'expression libre de η, précédemment considérée

$$\eta_0 = -\varkappa \frac{1+c}{c} \frac{1-c}{c} \frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}$$

ne se prête pas en qualité de terme libre à une détermination convenable du coefficient

$$(13) \qquad [h]$$

du développement adjoint. C'est pourquoi on se trouve amené à assimiler ce terme plutôt aux expressions primaires de r et de x, par exemple :

$$r = \mathrm{A}[1 + \alpha - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v].$$

Dès lors les excentricités e_1 et $\mu_1 e_1$ vont prendre de nouvelles valeurs, que nous aurons à exprimer en fonctions de nouveaux *modules d'excentricité*. En posant par conséquent

$$(14) \qquad \begin{cases} r = \mathrm{A}\, e^{\Theta} \quad [1 + \alpha_1 - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v + \eta(u, v)], \\ x = \mathrm{B}\, e^{\Theta - \Omega}[1 + \beta_3 - e_3 \cos u - \mu_3 e_3 \cos v + \eta(u, v)], \end{cases}$$

où $\eta(u, v)$ désigne la fonction η modifiée par soustraction du terme libre considéré, et en supposant toujours

$$e_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1}, \qquad e_3 = \frac{1}{\operatorname{ch} a_3 + \mu_3 \operatorname{ch} b_3},$$

où a, b et a_3, b_3 sont des modules d'excentricité nouveaux, en fixant de plus les formules des *coefficients de phase*

$$(15) \qquad \mu_1 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{3}, \qquad \mu_3 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_3^{-1}}{3},$$

nous obtiendrons facilement, pour les modules d'excentricité, les relations suivantes :

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, t. I, fasc. 4, 1915, p. 367.

Pour r

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{ch} a_1 + \operatorname{ch} b_1 = 2[2 + (\varkappa + \varkappa_1)^3]^{\frac{2}{3}}, \\ &\frac{\sqrt{1 + \mu_1 + \frac{1}{2}\varkappa_1(\varkappa + \varkappa_1)^2}}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1} = 1\,; \end{aligned}\right.$$

pour x

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{ch} a_3 - \operatorname{ch} b_3 = -\mu^3 + \frac{1}{2}\varkappa, \\ &\frac{1}{\operatorname{ch} a_3 + \mu_3 \operatorname{ch} b_3} = \operatorname{ch} b_3 + \mu_3^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs conduisent à des valeurs de r et de x identiques à celles obtenues selon les formules précédemment employées [I, (6), (7)]. C'est un effet important de cette transformation, à première vue insignifiante, d'avoir reçu des modules d'excentricité particuliers de r et de x, parce qu'il y a inconvénient d'exprimer, par exemple, par les mêmes modules, désignés dès lors par

$$(18)\qquad a_0, \quad b_0,$$

qui appartiennent aux *fonctions variantes* η, Θ, π, ..., tandis que x jouissait déjà d'autres modules a_2, b_2 et que, pour la vitesse des aires $\sqrt{G}$, nous obtiendrons des modules particuliers

$$a_4, \quad b_4.$$

6. *Coordonnée des* $\varkappa$. *Fonction* Ω. — Nous avions exprimé, dans la première partie, la coordonnée x en faisant usage de deux fonctions ω, Ω appliquées dans la formule de la manière suivante :

$$x = \mathrm{B}\, e^{\Theta - \Omega}(1 + \beta_3 - e_3 \cos u - \mu_3 e_3 \cos v + \eta + \omega),$$

où Θ et η sont les mêmes fonctions variantes qui appartiennent à r. Mais une considération plus approfondie nous montre que nous devons supposer

$$\omega = 0$$

et que par suite c'est le système (14) plus simple qu'il faut adopter. Il faut dans ce but transporter tous les termes précédemment déduits en ω à la fonction Ω, qui dès lors seule contiendra tous les termes auparavant répartis sur les deux fonctions ω, Ω. Je renvoie, pour les détails de cette opération, à un Mémoire particulier (¹). Ces transformations conduisent facilement à des expressions analogues à celle de la fonction $\eta(u, v)$, qui, en adoptant les constantes

$$(19)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+\varkappa_1}{2}\,\dfrac{1+c}{2}, \\ \lambda' = \dfrac{1-\varkappa_1}{2}\,\dfrac{1+c}{2}, \\ \lambda'' = \dfrac{1+\varkappa_1}{2}\,\dfrac{1-c}{2}, \\ \lambda''' = \dfrac{1-\varkappa_1}{2}\,\dfrac{1-c}{2}, \end{cases}$$

s'écrit succinctement :

$$(20)\qquad \begin{aligned} \eta(uv) = \varkappa\frac{e}{c}\Big[&\lambda\left(+P_0 - \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \ldots\right) \\ &-\lambda'\left(+P_0 + \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \ldots\right) \\ &-\lambda''\left(+P'_0 + \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \ldots\right) \\ &+\lambda'''\left(+P'_0 - \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \ldots\right)\Big], \end{aligned}$$

avec le terme libre

$$\eta_0 = -\varkappa^2(1+c)\,p_0(10).$$

En effet, il suit de cette réduction que la fonction Ω se compose bien de deux parties Ω_1 et Ω_2, analogues l'une à l'autre, formées à l'aide de coefficients semblables à ceux de η [*voir* (19)] et d'une partie Ω_0 supplémentaire de forme différente. En posant ainsi

$$(21)\qquad \begin{aligned} \Omega = \Omega_1 &+ \Omega_2 \\ &+ \Omega_0 \end{aligned}$$

(¹) *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps*, quatrième Partie (*Archives de l'Académie des Sciences*, Bd X, nº 8, Stockholm, 1914).

les expressions suivantes de ces fonctions sont bien valides :

$$(22)\quad \Omega_1 = xc(c+1)\left[\frac{e}{c}\right]^2 \left[\begin{array}{l} +\lambda_{10}P_0 - \frac{\lambda_{11}}{c(c+1)}\frac{c}{e}P_1 - \frac{\lambda_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P_2 + \ldots \\ +\lambda'_{10}P'_0 - \frac{\lambda'_{11}}{c(c+1)}\frac{c}{e}P'_1 - \frac{\lambda'_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P'_2 + \ldots \\ -\lambda''_{10}P''_0 - \frac{\lambda''_{1}}{c(c+1)}\frac{c}{e}P''_1 + \frac{\lambda''_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P''_2 + \ldots \\ -\lambda'''_{10}P'''_0 - \frac{\lambda'''_{1}}{c(c+1)}\frac{c}{e}P'''_1 + \frac{\lambda'''_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P'''_2 + \ldots \end{array}\right].$$

Terme libre

$$\Omega_1^{(0)} = -\varkappa\varkappa_1\left[c(c+1)\frac{e}{c}\right]^2(c-1)p_0(10),$$

les coefficients de cette formule étant déterminés par les relations suivantes [*voir* (19)]

$$\lambda_{10} = \lambda_{c-1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}, \qquad \lambda_{11} = \lambda_{c,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda'_{10} = \lambda'_{c-1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}, \qquad \lambda'_{11} = \lambda'_{c,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda''_{10} = \lambda''_{c-1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}, \qquad \lambda''_{11} = \lambda''_{c,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2},$$

$$\lambda'''_{10} = \lambda'''_{c-1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}; \qquad \lambda'''_{11} = \lambda'''_{c,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2};$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{c+1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c+1}{2},$$

$$\lambda'_{12} = \lambda'_{c+1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2},$$

$$\lambda''_{12} = \lambda''_{c+1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2},$$

$$\lambda'''_{12} = \lambda'''_{c+1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2}.$$

L'expression de la seconde fonction est la suivante :

$$(22\,a)\quad \Omega_2 = \varkappa\left[c(c-1)\frac{e}{c}\right]^2 \left[\begin{array}{l} -\lambda_{20}P_0 + \frac{\lambda_{21}}{c(c-1)}\frac{c}{e}P_1 + \frac{\lambda_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P_2 - \ldots \\ +\lambda'_{20}P'_0 - \frac{\lambda'_{21}}{c(c-1)}\frac{c}{e}P'_1 - \frac{\lambda'_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P'_2 + \ldots \\ -\lambda''_{20}P''_0 - \frac{\lambda''_{21}}{c(c-1)}\frac{c}{e}P''_1 + \frac{\lambda''_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P''_2 + \ldots \\ +\lambda'''_{20}P'''_0 + \frac{\lambda'''_{21}}{c(c-1)}\frac{c}{e}P'''_1 - \frac{\lambda'''_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\frac{c}{e}\right)^2 P'''_2 - \ldots \end{array}\right].$$

Terme libre

$$\Omega_2^{(0)} = +\varkappa\left[c(c-1)\frac{e}{c}\right]^2 p_0(10),$$

où les valeurs des coefficients sont bien déterminées comme il suit :

$$\lambda_{20} = \lambda_{-c+1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}, \qquad \lambda_{21} = \lambda_{c,-\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda'_{20} = \lambda'_{-c+1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}, \qquad \lambda'_{21} = \lambda'_{c,-\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda''_{20} = \lambda''_{-c+1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}, \qquad \lambda''_{21} = \lambda''_{c,-\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2},$$

$$\lambda'''_{20} = \lambda'''_{-c+1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}; \qquad \lambda'''_{21} = \lambda'''_{c,-\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2};$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{-c-1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2},$$

$$\lambda'_{22} = \lambda'_{-c-1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2},$$

$$\lambda''_{22} = \lambda''_{-c-1,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c+1}{2},$$

$$\lambda'''_{22} = \lambda'''_{-c-1,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c+1}{2}.$$

Les expressions de Ω_1 et Ω_2 procèdent ainsi suivant les puissances positives de

$$\frac{c}{e}$$

en abordant toutefois avec la puissance négative

$$\left(\frac{c}{e}\right)^{-2}.$$

La troisième de nos fonctions, Ω_0, se trouve donnée par l'expression encore plus simple [1]

$$(22\,b) \qquad \Omega_0 = -\varkappa\left[P'_0 + 4c\frac{e}{c}P'_1 + \left(4c\frac{e}{c}\right)^2 P'_2 + \ldots\right].$$

---

[1] Cette fonction Ω_0 correspond à la fonction $\chi(u, v)$ considérée dans le numéro suivant.

Terme libre

$$\Omega_0^{(0)} = +\,2\varkappa^2 c\, p_0(10).$$

Dans toutes ces formules les fonctions élémentaires

$$\begin{array}{llll} P_0, & P'_0, & P''_0, & P'''_0; \\ P_1, & P'_1, & P''_1, & P'''_1; \\ P_2, & P'_2, & P''_2, & P'''_2; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. \end{array}$$

sont à former de la manière indiquée ci-après :

$$(23)\quad P = \begin{vmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{vmatrix} \quad P' = \begin{vmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{vmatrix} \quad P'' = \begin{vmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{vmatrix} \quad P''' = \begin{vmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{vmatrix} \quad \begin{array}{rrr} \multicolumn{3}{r}{\text{Facteurs respectivement.}} \\ p_0(0); & p_1(0); & \ldots; \\ p_0(1); & p_1(1); & \ldots; \\ & p_1(2); & \ldots; \\ & p_1(3); & \ldots. \end{array}$$

7. *Fonction* $\chi(u, v)$. — En employant les développements du numéro précédent pour la fonction Ω, l'expression de x prend bien la forme

$$x = B\, e^{\Theta - \Omega}[1 + \beta_3 - e_3 \cos u - \mu_3 e_3 \cos v + \eta].$$

Pour avoir les coordonnées x_0, y_0 se rapportant à l'axe Tx_0, coïncidant avec le rayon vecteur r, nous aurons à appliquer la formule

$$(24)\qquad x = x_0 \cos(\pi + \chi) + y_0 \sin(\pi + \chi),$$

χ désignant la nouvelle fonction qui, ajoutée à la longitude du périhélie des arguments π, forme l'angle nommé *axiale*, ou bien

$$(25)\qquad \varphi = \pi + \chi.$$

Cette fonction χ, citée déjà dans la première Partie, ne se prête pas cependant, sous cette forme, directement à une détermination convenable des termes libres correspondants. C'est pourquoi il faut décomposer aussi cette fonction en deux parties en posant

$$(26)\qquad \chi = \chi_1 + \chi_2,$$

ce qui, en outre, se trouve déjà indiqué par l'expression mentionnée de cette fonction, ayant le facteur 2 en multiplicateur. Ainsi nous aurons bien

$$(26\,a)\qquad \chi_1 = \varkappa\frac{c}{e}\left\{\begin{aligned}&\left[+\mu_0 Q_0 + \mu_1 2c\frac{e}{c}Q_1 + \mu_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q_2 - \ldots\right]\\ &\left[-\mu'_0 Q'_0 + \mu'_1 2c\frac{e}{c}Q'_1 + \mu'_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'_2 + \ldots\right]\\ &\left[-\mu''_0 Q''_0 + \mu''_1 2c\frac{e}{c}Q''_1 + \mu''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q''_2 + \ldots\right]\\ &\left[+\mu'''_0 Q'''_0 + \mu'''_1 2c\frac{e}{c}Q'''_1 + \mu'''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'''_2 - \ldots\right]\end{aligned}\right\}.$$

Terme libre

$$\chi_1^{(0)} = -\varkappa\varkappa_1(c-1)\frac{c}{e}q_0(10),$$

et d'autre côté

$$(26\,b)\qquad \chi_2 = \varkappa\frac{c}{e}\left\{\begin{aligned}&\left[-\mu_0 Q_0 + \mu_1 2c\frac{e}{c}Q_1 + \mu_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q_2 - \ldots\right]\\ &\left[+\mu'_0 Q'_0 + \mu'_1 2c\frac{e}{c}Q'_1 + \mu'_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'_2 + \ldots\right]\\ &\left[-\mu''_0 Q''_0 + \mu''_1 2c\frac{e}{c}Q''_1 + \mu''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q''_2 - \ldots\right]\\ &\left[+\mu'''_0 Q'''_0 + \mu'''_1 2c\frac{e}{c}Q'''_1 + \mu'''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'''_2 + \ldots\right]\end{aligned}\right\}.$$

Terme libre

$$\chi_2^{(0)} = -\varkappa\frac{c}{e}q_0(10),$$

les fonctions élémentaires Q_0, Q'_0, Q''_0, Q'''_0; Q_1, Q'_1, ... devront être formées à l'aide des éléments simples

$$q_l(m, n)$$

tout à fait de la même manière que P_0, P'_0, P''_0, ... viennent d'être déterminées en fonction des éléments simples

$$p_l(m, n)$$

[*voir* (23)], et les coefficients μ, μ', μ'', μ''' sont donnés en substituant c, $c-2$, c, $c+2$, ..., au lieu de c dans les expressions λ, λ', λ'', λ''' (19), page 188.

Constantes :

$c.$	$c-2.$	$c.$	
$\mu_0=\lambda$	$\mu_1=\lambda''$	$\mu_2=\lambda'''$	...
$\mu'_0=\lambda''$	$\mu'_1=\lambda'''$	$\mu'_2=\lambda'$	...
$\mu''_0=\lambda'''$	$\mu''_1=\lambda'$	$\mu''_2=\lambda$	...
$\mu'''_0=\lambda'$	$\mu'''_1=\lambda$	$\mu'''_2=\lambda''$	...

8. *Expression de $\varepsilon(u, v)$, variation des longitudes d'époque dans le cas de la coordonnée x.* — Ayant formé, dans ce qui précède, les fonctions Ω et χ, il nous reste à citer l'expression de la fonction ε qu'il faut appliquer dans les combinaisons

$$\varepsilon_1+\varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon_2+\varepsilon,$$

aux longitudes d'époque ε_1, ε_2, pour avoir les variations des équations des arguments compatibles avec l'expression complète de x. En considérant quelques termes supplémentaires obtenus dans le cours de cette recherche, cette quantité s'est trouvée formée en analogie complète avec la fonction précédemment considérée π, c'est-à-dire la *longitude du périhélie des arguments*. Il paraît dès lors superflu de décomposer cette fonction en deux parties ε, ϖ, comme il y avait lieu de supposer dans la recherche préalable (I). Au contraire, cette fonction se trouve bien donnée par l'expression suivante régulière :

Coefficients de phase $\lambda=+1$; $\mu=-1$.

$$\varepsilon(uv)=\varkappa\frac{e}{c}\left[\begin{array}{cc|c|cc|c|cc|c|cc|c|}
-&\frac{c}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\end{matrix} & -&\frac{c}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\end{matrix} & +&\frac{1}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\end{matrix} & -&\frac{1}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\end{matrix}\\[2ex]
-&\frac{c-2}{2} & \begin{matrix}0\\0\\ \text{—}\\ \text{—}\end{matrix} & -&\frac{c-2}{2} & \begin{matrix}0\\0\\ \text{—}\\ \text{—}\end{matrix} & -&\frac{1}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\\0\\ \text{—}\end{matrix} & +&\frac{1}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\\0\\ \text{—}\end{matrix}\\[2ex]
+&\frac{c}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\\0\\ \text{—}\end{matrix} & +&\frac{c}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\\0\\ \text{—}\end{matrix} & -&\frac{1}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\\0\\ \text{—}\end{matrix} & +&\frac{1}{2} & \begin{matrix}0\\ \text{—}\\0\\ \text{—}\end{matrix}
\end{array}\right]
\begin{array}{r}\text{Facteurs.}\\ q_0(0)\\ q_0(1)\\[1ex] \left(\frac{c}{e}\right)\cdot q_1(0)\\ \text{»}\quad q_1(1)\\ \text{»}\quad q_1(2)\\ \text{»}\quad q_1(3)\\[1ex] \left(\frac{c}{e}\right)^2\cdot q_2(2)\\ \text{»}\quad q_2(3)\\ \text{»}\quad q_2(4)\\ \text{»}\quad q_2(5)\end{array}
\tag{27}$$

Terme libre

$$-2\varkappa\varkappa_1 \frac{e}{c} q_0(10)_{\pm}.$$

9. *Expressions se rapportant à la vitesse des aires.* — Selon les formules de Jacobi, données dans son Mémoire : *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps* (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 302), nous trouverons sans difficulté, après avoir déterminé les demi-paramètres des orbites, d'après les formules

$$k\sqrt{G} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt},$$

$$k_1\sqrt{G_1} = x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt},$$

les *inclinaisons* des deux orbites par rapport au plan invariable, par les égalités

$$4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{GG_1}\sin^2\frac{1}{2}J = [\mu k\sqrt{G} + \mu_1 k_1\sqrt{G_1}]^2 - c_2^2,$$

$$c_2 \sin i_1 = \mu k\sqrt{G}\sin J,$$

$$c_2 \sin i = -\mu_1 k_1\sqrt{G_1}\sin J.$$

Il est par cela désirable de déterminer G et G_1 par une méthode indépendante. Nous nous sommes occupé de cette question dans un Mémoire particulier, déjà cité ([1]), auquel il suffira de renvoyer, pour les particularités y appartenant. Remarquons seulement que l'expression du demi-paramètre se trouve donnée par la relation

$$\sqrt{G} = \sqrt{G_0} + \vartheta(u, v), \tag{28}$$

sous la condition qu'on a soin d'introduire, dans les équations des arguments, les longitudes d'époques variées

$$\varepsilon_1 + \omega \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 + \omega,$$

où $\vartheta(u, v)$ et $\omega(u, v)$ sont des développements autologues, bien

---

([1]) *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps.* Quatrième Partie : *Expressions analytiques des intégrales* (*Archives de l'Académie des Sciences*, t. X, n° 8, Stockholm, 1914).

définis. L'expression principale du demi-paramètre est alors

$$(29) \qquad \sqrt{G_0} = C e^{\frac{1}{2}\Theta}\left(1 - \gamma_4 + \frac{\lambda_4 \cos u + \cos v}{\lambda_4 \operatorname{ch} a_4 + \operatorname{ch} b_4}\right),$$

les constantes de cette formule étant déterminées par les relations simples

$$(29\,a) \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} a_4 = 10(\operatorname{ch} a_0 - \operatorname{ch} b_0), \\ \operatorname{ch} b_4 = \operatorname{ch} a_0, \end{cases}$$

ainsi que

$$(29\,b) \qquad \begin{cases} \lambda_4 = 2 - \alpha - \varkappa_1(\varkappa + \varkappa_1)^2, \\ \gamma_4 = 1 + \beta + (\varkappa + \varkappa_1)^3, \\ C = \sqrt{2A}\,[4c - \varkappa_1^2], \end{cases}$$

A désignant le demi-grand axe de l'orbite et α et β n'étant pas autre chose que les *différentielles d'époque*, qui entrent déjà dans les équations des arguments et dans l'expression

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

appartenant à tous nos développements dans les combinaisons

$$\frac{c}{e} \quad \text{ou} \quad \frac{e}{c}.$$

10. *Sur les cas de mouvement labile ou asymptotique.* — Nous avons fait remarquer (*Archives de l'Académie des Sciences*, t. IX, n° 23, p. 20-31) qu'il y a lieu de supposer les cas instables et asymptotiques caractérisés par le facteur

$$(30) \qquad e^{h^2\Delta^2},$$

appliqué dans les formules, où nous aurons

$$(30\,a) \qquad \Delta^2 = \tau^2[(180^\circ + u)^2 + (180^\circ + v)^2].$$

Remarquons que ce facteur ne peut pas être assimilé aux coefficients

$$[c(c+1)]^3, \quad [c(c-1)]^3,$$

parce qu'alors l'instabilité en question ne serait combinée, en π, qu'avec les hauts multiples des arguments, appartenant aux éléments simples $p_3(4)$; $p_3(5)$; $p_3(6)$; $p_3(7)$. Le *facteur d'instabilité* paraît, au contraire, devoir être combiné avec les coefficients

$$2c \quad \text{et} \quad 4c$$

qui entrent dans les formules de

$$\chi, \quad \theta, \quad \Omega_0.$$

C'est ainsi seulement dans ces fonctions que le facteur d'instabilité entre directement. Mais il est de plus contenu, d'une manière secondaire, dans tous les autres développements par le facteur

$$\cos n\varphi$$

qu'il faut introduire en donnant à nos séries la forme générale

$$\Sigma k_n \left(\frac{c}{e}\right)^{\pm n} \mathrm{P}_n \cos n\varphi, \tag{31}$$

φ désignant *l'axiale* que nous venons de déterminer par la relation

$$\varphi = \pi + \chi.$$

Remarquons qu'il faut encore introduire le facteur

$$e^{h^2\Delta^2}$$

dans les autres quantités, fonctions de $2c$ et, par conséquent, remplacer

$$\begin{array}{ccc} 2c & \text{par} & 2c\, e^{h^2\Delta^2}, \\ \tau = 2c\nu_0 & \text{»} & \tau\, e^{h^2\Delta^2}, \\ \rho = 2c\tau & \text{»} & \rho\, e^{2h^2\Delta^2}, \end{array}$$

par où l'instabilité du mouvement devient sensible directement encore dans les équations des arguments.

Si nous avons

$$h^2 < 0,$$

le *cas asymptotique* se trouve, au contraire, réalisé. Le cas régulier serait

$$h^2 = 0,$$

c'est-à-dire sans *facteur asymptotique*. Mais il faut bien supposer que ce cas est seulement exceptionnel et qu'en général la solution soit ou instable, ou bien asymptotique.

Nous venons ainsi de rencontrer l'idée de Henri Poincaré sur les solutions asymptotiques, admirablement exposée dans son œuvre : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, et il paraît bien que cette forme de solution, considérée, au premier abord, par lui, appartient, d'une manière essentielle, au problème des trois corps.

A mesure que les valeurs de Δ^2 vont en croissant, les constantes ρ et τ vont décroître, pour h^2 négatif, à la valeur limite de zéro. C'est en particulier le cas pour la quantité τ, qui elle-même entre dans l'exposant du facteur asymptotique

$$e^{h^2\Delta^2}.$$

Ainsi l'état limite vient s'établir sur une échelle infiniment amoindrie, à mesure que les valeurs de t tendent à l'infini. Dans le cas d'instabilité, h^2 positif, il y a une altération de l'orbite de plus en plus brusque. Mais, avant que cette altération soit accomplie, les séries ont déjà cessé d'être convergentes.

11. *Aperçu des formules principales*. — Les quantités fondamentales sont les modules d'excentricité primaires

$$a_0, \quad b_0, \tag{32}$$

déterminés par les formules

$$\begin{gathered}
\operatorname{ch} a_0 + \operatorname{ch} b_0 = 3, \\
\frac{\operatorname{ch} a_0 + \mu_0 \operatorname{ch} b_0}{(1+\mu_0)^2} = 10, \\
\mu_0 = -1 + \frac{\operatorname{ch}^{-1} a_0}{3},
\end{gathered}$$

donnant :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,025\,296\,1, & b_0 &= 0,893\,746\,4, \\
\operatorname{ch} a_0 &= 1,573\,305\,5, & \operatorname{ch} b_0 &= 1,426\,694\,5.
\end{aligned}$$

Pour le rayon vecteur r, la coordonnée x et le demi-paramètre G, les formules sont

$$r = \mathrm{A}\, e^{\Theta} \left[1 + \alpha_1 - \frac{\cos u + \mu_1 \cos v}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1} + \eta(uv)\right],$$

$$x = \mathrm{A}\, e^{\Theta - \Omega} \left[1 + \beta_3 - \frac{\cos u + \mu_3 \cos v}{\operatorname{ch} a_3 + \mu_3 \operatorname{ch} b_3} + \eta(uv)\right],$$

$$\sqrt{\mathrm{G}} = \mathrm{C}\, e^{\frac{1}{2}\Theta} \left(1 - \gamma_4 + \frac{\lambda_4 \cos u + \cos v}{\lambda_4 \operatorname{ch} a_4 + \operatorname{ch} b_4}\right) + \vartheta(uv);$$

les constantes particulières a_1, b_1 ; a_3, b_3 ; a_4, b_4 étant définies dans ce qui précède [(16), (17), (29 a)]. Remarquons, en particulier, les formules des coefficients de phase :

$$\mu_1 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{3}, \qquad \mu_3 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_3^{-1}}{3}, \qquad \lambda_4 = 2 - \alpha - \varkappa_1(\varkappa + \varkappa_1)^2,$$

où

$$\varkappa = \frac{\pi}{180^\circ}, \qquad \varkappa_1 = -\varkappa \frac{1+c}{c} \frac{c}{e}.$$

Les fonctions Θ, η, Ω, ... sont celles définies dans ce qui précède.

Après avoir déduit les modules d'excentricité

$$a_2, \quad b_2,$$

originellement attribués à x, par les formules

$$b_2 = a_1,$$

$$\operatorname{ch} a_2 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} b_2 = 1,$$

nous allons former les *différentielles d'époque* α, β d'après les relations

$$\alpha + \beta = 1 + \frac{\operatorname{ch} b_2^{-1}}{3},$$

$$\alpha - \beta = 1 + \frac{\operatorname{ch} a_2^{-1}}{2},$$

d'où nous déduisons immédiatement

$$e = \frac{1}{2} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta},$$

la constante c étant, au contraire, un nombre d'avance déterminé, savoir

$$c = 2,555\,555\,5\ldots.$$

Pour obtenir les arguments fondamentaux

$$u, \quad v,$$

nous avons bien les *équations des arguments* analogues à l'équation bien connue de Keppler. Ces équations sont :

$$(1 + \nu_0)n_0 t - 180^\circ + \varepsilon_1 - \pi = u - \tau(180^\circ + u) - \frac{\sin u + \mu_0' \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_0 + \beta \mu_0' \operatorname{ch} b_0},$$

$$(1 + \nu_0)n_0 t - 180^\circ + \varepsilon_2 - \pi = v - \tau(180^\circ + v) - \frac{\lambda_0'' \sin u + \sin v}{\alpha \lambda_0'' \operatorname{ch} a_0 + \beta \operatorname{ch} b_0}.$$

Les constantes adoptées dans ces formules sont

$$n_0 = 1^\circ,888\,888\,8\ldots, \qquad \nu_0 = \frac{\tau}{2c},$$

$$\tau = -\varkappa \frac{e^2}{c}, \qquad \rho = 2\left[c - \frac{\varkappa}{\varkappa + \varkappa_1}\right]\tau.$$

Les fonctions ε_1, ε_2, π sont celles déterminées dans ce qui précède. Remarquons seulement que

$$\pi = \pi(u_1 v_1),$$
$$\theta = \pi(u_1 v_1),$$

où les arguments u_1, v_1, renfermant le mouvement périodique particulier du périhélie, sont bien déterminés par les formules

$$u_1 = u + \rho(180^\circ + u),$$
$$v_1 = v + \rho(180^\circ + v).$$

Les *coefficients de phase*, pour ces équations des arguments, sont bien définis par les relations simples

$$\mu_0' = 1 - \frac{\operatorname{ch} a_0^{-1}}{2},$$

$$\lambda_0'' = 2 + \frac{\operatorname{ch} b_0^{-1}}{3}.$$

En ce qui concerne l'expression de x et l'expression de $\sqrt{G}$, les équations des arguments doivent, comme nous l'avons remarqué, être modifiées, en remplaçant

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix} \varepsilon_1 + \varepsilon \\ \varepsilon_2 + \varepsilon \end{matrix} \quad \text{et par} \quad \begin{matrix} \varepsilon_2 + \omega \\ \varepsilon_1 + \omega \end{matrix}$$

respectivement.

Ces formules se trouvent, pour la pratique, bien appropriées au calcul de l'orbite. Elles ont sur les développements antérieurs, adoptés pour le problème dont il s'agit, l'avantage de permettre de calculer les termes jusqu'à une puissance quelconque de l'excentricité et de $\frac{c}{e}$. Dans le cas actuellement considéré, l'exactitude fut poussée à la douzième puissance de l'excentricité, ce qui a suffi pour atteindre un accord de 0,0001 entre l'orbite d'avance déterminée et les expressions analytiques.