JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARNAUD DENJOY

Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 105-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__105_0>

Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues;

PAR ARNAUD DENJOY.

L'objet du présent Mémoire est l'étude des nombres dérivés des fonctions continues les plus générales. La conclusion essentielle de cet Ouvrage est que, si l'on néglige un ensemble de mesure certainement nulle, en un point quelconque, les dérivés extrêmes d'une même fonction continue se groupent suivant l'un des quatre modes suivants : 1° les dérivés extrêmes sont $+\infty$ et $-\infty$ pour chaque côté; 2° le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche est $-\infty$, les deux autres dérivés extrêmes étant finis et ÉGAUX; 3° il existe une dérivée bilatérale finie; 4° les nombres dérivés extrêmes ont les mêmes valeurs qu'au second cas, les côtés étant échangés.

Ces quatre types d'associations peuvent être réalisés sur des ensembles doués séparément ou simultanément de mesures positives dans tout intervalle (¹).

(¹) Ce Mémoire est la première partie d'un travail beaucoup plus vaste « *sur la dérivation et son calcul inverse* ». Le Mémoire complet, étant trop étendu pour paraître en un seul recueil, a été scindé en plusieurs fragments. Le premier paraît ci-après, et je remercie la rédaction du présent journal d'avoir bien voulu l'accepter. J'en ai donné l'analyse dans trois Notes des *Comptes rendus* (31 mai, 14 juin et 9 août 1915; *voir* également 1er et 22 avril 1912).

En vue d'éviter à mon lecteur des recherches auxiliaires dans d'autres Ouvrages, j'ai pris soin d'expliquer, au fur et à mesure des besoins logiques, tous les résultats cités dans ma rédaction sans être absolument classiques. Néanmoins une lecture essentielle préliminaire à ce Mémoire est celle des *Leçons sur l'Intégration*, publiées par M. Lebesgue dans la collection Borel. A cause de la fréquence des références empruntées à ce livre, je le désignerai toujours ci-après par les seules initiales *L. I.* Je ne saurais également trop recommander au lecteur l'étude préalable des *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire, parues dans la même collection.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS ET LES ENSEMBLES [1].

Notions d'ordre descriptif.

1. Commençons par rappeler ou spécifier le sens figuré donné à un certain nombre de termes dans la théorie qui va nous occuper. Les locutions « appartenir à un ensemble », « être contenu dans lui », et, de préférence, lui « être agrégé » sont synonymes. Il en est de même entre elles pour les expressions « ne pas appartenir », ou « être étranger » à un ensemble. Le sujet du verbe désigne un point ou un autre ensemble. Au lieu d' « ensemble », nous dirons parfois « agrégat ».

2. Nous désignerons par une même lettre, ou un même chiffre, un nombre et le point figurant celui-ci sur un axe indéfini où ont été fixés les points 0 et $+1$. Soient a et b deux nombres inégaux ou points distincts. En règle générale, quand nous énoncerons un couple de nombres désignés par des lettres, le premier sera toujours le plus petit.

3. La précision du langage nous oblige à distinguer par des expressions particulières les divers cas où un nombre x, ni inférieur à a, ni supérieur à b, est, ou bien obligatoirement compris entre eux, ou bien susceptible également de coïncider avec l'un d'eux. M. Borel exprime la première éventualité, définie par la double inégalité :

$$a < x < b, \tag{1}$$

en disant que x *appartient* (*sens étroit*) à l'intervalle ab; il traduit la seconde définie par

$$a \leqq x \leqq b, \tag{2}$$

---

[1] *Voir*, pour les définitions contenues dans ce Chapitre, une Note des *Comptes rendus*, 31 mai 1915.

en disant que x *appartient (sens large)* à l'intervalle ab. Il sera peut-être plus concis et non moins clair de poser les définitions suivantes. Le premier ensemble, déterminé par les inégalités (1), sera appelé l'*intervalle* ab. Le second ensemble, défini par (2), sera nommé le *segment* ab. Nous distinguons donc intervalle et segment dans l'espace linéaire, comme, dans l'espace à n dimensions, on distingue les continuums et les domaines. Au sens ainsi précisé, *un intervalle n'a que des points intérieurs*, si l'on convient de dire qu'un point est intérieur à un ensemble E s'il n'est entouré que de points de l'ensemble ou encore s'il n'est pas limite de points étrangers à l'ensemble. Pareillement *tout point étranger à un segment lui est extérieur*, en entendant par point extérieur à un ensemble un point situé dans un intervalle dont tous les points sont étrangers à l'ensemble. Nous dirons encore qu'un ensemble E′ est intérieur à un ensemble E si tous les points de E′ sont intérieurs à E. Tous les points d'un intervalle lui étant intérieurs, tout ensemble agrégé à lui lui est intérieur. Un intervalle est intérieur à lui-même.

a et b sont étrangers à leur propre intervalle. Nous les appellerons *extrémités* de leur intervalle, mais non pas « points extrêmes », car ni a ni b ne sont des points de l'intervalle ab. Au contraire, a et b sont agrégés au segment ab et en seront indifféremment appelés les *points extrêmes* ou les *extrémités*. Les ensembles

$$a \leqq x < b, \tag{3}$$

$$a < x \leqq b \tag{4}$$

seront appelés indifféremment : le premier « intervalle ab accru de a » ou « segment ab diminué de b », le second « intervalle ab accru de b » ou « segment ab diminué de a ».

Il est équivalent de dire qu'un point, un ensemble sont intérieurs à un segment ab ou qu'ils sont agrégés à l'intervalle ab. Si un segment σ ou $\alpha\beta$ est agrégé à un intervalle ab, c'est-à-dire si tous les points de σ sont agrégés à l'intervalle ab, $\alpha - a$ et $b - \beta$ sont toujours positifs, jamais nuls. Au contraire, un intervalle i agrégé à un segment s peut parfaitement avoir les mêmes extrémités que lui. Si un segment σ est agrégé à un segment s, ils peuvent avoir des extrémités communes et même coïncider. Il en est de même pour deux intervalles dont l'un est agrégé à l'autre. Il suffit de se reporter aux inégalités (1) pour voir que, si deux points sont agrégés à un même intervalle, le segment les joignant est lui aussi agrégé à cet intervalle.

Si deux intervalles ab, $a'b'$ ont en commun un point α, si c est le plus grand des nombres a, a', l'un et l'autre inférieurs à α, si d est le plus petit des nombres b, b' l'un et l'autre supérieurs à α, les deux intervalles ab, $a'b'$ ont en commun tout l'intervalle cd et nul point étranger à lui. Au contraire, deux segments peuvent avoir en commun un seul point, extrémité de l'un et de l'autre.

4. Nous rappellerons en langage bref le sens de certains adjectifs dont on qualifie les ensembles : *fermé* = contenant tous ses points limites; *dense en lui-même* = admettant chacun de ses points pour points limites; *parfait* = fermé et dense en lui-même; *réductible* = dont le dérivé est dénombrable, ou dont un dérivé d'un certain ordre fini ou transfini est nul; « complémentaires l'un de l'autre relativement à un ensemble P » se dit de deux ensembles agrégés à P, ne possédant pas de points communs et reproduisant P par leur réunion.

5. Un ensemble fermé est *dense* sur un segment s quand il contient entièrement un segment agrégé à s. Donc un ensemble fermé est non dense sur s si, dans tout segment agrégé à s, il existe des points étrangers à E, donc des intervalles étrangers à E. Un ensemble fermé est dit *partout dense* sur s s'il coïncide avec s. Un ensemble non fermé est dit, en même temps que son dérivé, *dense*, *non dense* ou *partout dense* sur un segment (ou un intervalle). Si donc l'ensemble H est partout dense sur ab (segment ou intervalle), dans tout intervalle intérieur à ab, H a au moins un point. Si H est non dense sur ab, tout intervalle situé dans ab en contient un autre où H n'a pas de points. Si H est dense sur ab, il y a un segment de ab où H est partout dense (¹).

(¹) M. de la Vallée-Poussin (*Cours d'Analyse*, 3ᵉ édition, p. 54) paraît donner une acception toute différente à l'adjectif *dense*. Selon cet auteur, un ensemble est dense si entre deux quelconques de ses points il en possède une infinité. Au sens

6. Tout point étranger à un ensemble fermé lui est extérieur. Un ensemble fermé s'obtient en retranchant d'un intervalle continu une infinité d'intervalles deux à deux sans points communs.

Si l'ensemble fermé considéré E est agrégé et, par suite, intérieur à l'intervalle ab, tous les intervalles extraits de ab ont leurs deux extrémités sur E, sauf le plus à gauche et le plus à droite de tous, ces derniers ayant l'un pour extrémité droite a, l'autre pour extrémité gauche b. Les premiers sont appelés *intervalles contigus* (¹) à E. Nous réservons à ces deux-ci le qualificatif de *semi-contigus* à E. Un ensemble fermé a deux points extrêmes, α et β. Il s'obtient en retranchant du segment $\alpha\beta$ un ensemble d'intervalles tous contigus à E. Quand nous parlerons d'un *segment contigu* à un ensemble fermé, il s'agira d'un intervalle contigu accru de ses extrémités. Un ensemble fermé est dense ou non dense sur un intervalle (ou un segment) ab, en même temps que son ensemble complémentaire formé par ses intervalles contigus et semi-contigus est non partout dense ou au contraire partout dense sur ab. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble fermé soit parfait est que deux quelconques de ses contigus ou semi-contigus n'aient pas d'extrémité commune.

On distingue sur un ensemble parfait P les points de seconde espèce, limites de points de P des deux côtés, et les points de première espèce, extrémités d'intervalles contigus à l'ensemble. Nous appelons points de première espèce gauches et points de première espèce droits respectivement les extrémités gauches et droites d'intervalles contigus. Il y a des points de P infiniment voisins des premiers du côté gauche,

---

ainsi convenu, un ensemble parfait discontinu devient dense si l'on en retranche toutes les extrémités de ses contigus. Cette définition diffère donc essentiellement de celle du texte, généralement adoptée d'ailleurs par les analystes. En distinguant les points limites d'un ensemble linéaire quelconque en 1^{re} et 2^{e} espèce, selon qu'ils sont limites des deux côtés ou d'un seul (les points de 1^{re} espèce sont toujours en infinité dénombrable), l'ensemble dense de M. de la Vallée-Poussin est identique à notre ensemble dense en lui-même et ne contenant que des points de 2^{e} espèce (sauf, si l'on veut, le plus grand et le plus petit de ses éléments).

(¹) Nous traiterons le mot « contigu » indifféremment en adjectif ou en substantif, comme on fait du mot « voisin ».

des seconds du côté droit. Nous conserverons la même classification des points limites d'un ensemble fermé quelconque E. Les extrémités des contigus à E seront soit des points isolés, soit des points de première espèce, droits ou gauches, selon qu'ils sont limites de E du côté droit ou du côté gauche, les autres points de E, non extrémités de contigus et nécessairement limites de E des deux côtés étant appelés points de seconde espèce de E.

Un ensemble fermé se décompose en un ensemble parfait P et un ensemble dénombrable Δ réductible dans chaque intervalle contigu à P. P sera appelé le *noyau* de E.

Tout ensemble fermé dénombrable est réductible.

7. Nous disons qu'une fonction f est *croissante de x à x'*, x et x' étant distincts, si la différence $f(x') - f(x)$ n'est pas nulle et a le signe de $x' - x$. Nous disons selon l'usage que f est *croissante dans un intervalle i* ou sur un segment s si elle est croissante entre tout point x et tout point x' agrégés l'un et l'autre à l'intervalle i ou au segment s. f est dite *décroissante* dans les conditions mêmes où $-f$ est croissante. Quand une fonction est soit croissante, soit décroissante, sans qu'il soit utile de préciser davantage, on la qualifie souvent de « monotone », adjectif dont le gallicisme n'est peut-être pas de très bon aloi. En considération de ce que, x allant de a et b, une fonction à sens de variation constant sur ab, quitte sa valeur initiale $f(a)$ pour gagner sa valeur finale $f(b)$ par une oscillation simple dans l'échelle des nombres, nous dirons qu'une telle fonction est *unioscillante sur ab*. Si elle présente un seul maximum ou un seul minimum dans l'intervalle ab, nous la qualifierons de *bioscillante*. Le sens des mots *tri-*, *quadri-oscillante* s'explique de lui-même. Une fonction possédant un nombre total de maximums et de minimums supérieur à 1, mais non davantage spécifié, sera dite *plurioscillante;* et enfin *multi-oscillante* si elle en a une infinité. Une fonction unioscillante sur un intervalle ab est caractérisée, quand on la suppose continue, par la condition que $f(x') - f(x)$ n'est jamais nul, quand x et x', agrégés à l'intervalle considéré, sont distincts l'un de l'autre.

8. Nous dirons qu'une fonction est *constante en un point*, si elle est constante dans tout un intervalle entourant ce point. Une fonction f constante en tout point d'un intervalle ab est constante sur tout l'intervalle ab [1].

9. C'est un théorème connu (LI, p. 12) qu'*une fonction continue constante dans tout contigu à un ensemble fermé dénombrable est constante entre ses points extrêmes.* En effet, soit E un ensemble fermé quelconque dans les contigus duquel une fonction continue f est constante. Soient α, β les extrémités de E. Considérons l'ensemble P des points M de l'intervalle $\alpha\beta$ où f n'est pas constant. Par hypothèse, si petit que soit un intervalle contenant M, f y prend au moins deux valeurs distinctes. En un point quelconque étranger à E, donc intérieur à un contigu de E, f est constant. Donc, tous les points de P sont agrégés à E. P est évidemment fermé. Je dis que P n'a pas de point isolé. Sinon, un tel point M séparerait deux intervalles j et k où P n'aurait pas de points. f, constante en tout point de j, est constante sur j (**8**). Elle est de même constante sur k. Soient $f(j)$ et $f(k)$ les valeurs uniques qu'elle prend sur chacun de ces intervalles. f étant continue et M étant extrémité de j, on a $f(\mathrm{M})=f(j)$. On a de même $f(\mathrm{M})=f(k)$. La réunion de j, de k et de M forme un intervalle où f est constant. Donc, f est constant en M, contrairement à l'hypothèse que M est agrégé à P. Donc, P ensemble fermé sans points isolés est parfait. Deux cas sont alors à distinguer : 1° E est dénombrable. Alors P ne peut pas exister, puisque E ne contient pas d'ensemble parfait. Donc

---

(1) En effet, soient c un point de cet intervalle et x un point quelconque compris entre a et b. Je dis que $f(x)=f(c)$. En effet, par hypothèse, c est dans un intervalle $\alpha\beta$ ou $i(c)$ où f est constant. Soit L la borne supérieure stricte des points x' intérieurs à ab et où $f(x')=f(c)$. L appartient au segment βb. Je dis que L est en b. Sinon L serait compris entre β et b, donc intérieur à ab. L est intérieur à un intervalle $i(\mathrm{L})$, où f est constant. L étant point limite des x', il y a dans $i(\mathrm{L})$ des points x' où $f(x')=f(c)$. Donc, dans $i(\mathrm{L})$, f est égal à $f(c)$ et L n'est pas la borne à droite des x', ce qui contredit notre hypothèse. Donc, dans l'intervalle ab en tout point à droite de c, f est égal à $f(c)$. On montre qu'il en est de même à gauche de c. Donc f a une valeur unique en tous les points de l'intervalle ab. Si f est continu, f est constant sur tout le *segment ab*.

f est constant en tout point intérieur à $\alpha\beta$. f étant continu est constant sur tout le segment $\alpha\beta$ ([1]).

2° Si E n'est pas dénombrable, soit H son noyau. P est agrégé à H, si P existe, ce dont la possibilité est bien connue et va être rappelée à l'instant. f étant constant en tout point étranger à P, est constant dans tous les contigus et semi-contigus à P situés sur l'intervalle $\alpha\beta$. Et f n'est constant en aucun point de P. Nous reviendrons sur cette question dans la deuxième Partie et mettrons en évidence un ensemble parfait remarquable agrégé à P.

10. Rappelons comment, P étant un ensemble parfait non dense et borné, on construit une fonction continue constante dans les contigus à P et cependant variable dans tout intervalle contenant au moins un point de P. Rangeons, en une suite unique et sans répétitions, les nombres d'un ensemble dénombrable partout dense sur l'intervalle o — 1 et intérieur à lui; par exemple les nombres

$$(1) \qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{k}{2^m},\ \ldots,$$

les entiers k étant tous impairs. Il est possible de donner à chaque contigu de P un rang tel que deux contigus quelconques présentent géométriquement la même situation mutuelle que les nombres $\frac{k}{2^m}$ de même rang possèdent dans l'échelle des grandeurs. En effet, donnons l'indice 1 au plus grand contigu de P ou, si plusieurs contigus (en nombre fini) possèdent la longueur maximum, donnons cet indice 1 au plus à gauche d'entre eux. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant choisis et disposés mutuellement comme le sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{k}{2^m}$ ou $N_1, N_2, \ldots, N_n$, si

([1]) Cette démonstration évite l'emploi des nombres transfinis, dont la considération fournit cependant l'explication la plus satisfaisante (LI, p. 12) du théorème précédent, l'ensemble dénombrable E étant réductible, c'est-à-dire ne possédant plus de dérivés non nuls à partir d'un certain rang. Bien que nous soyons appelé à faire dans ce Mémoire un usage essentiel et inévitable de l'ordonnance transfinie, cependant, en vue de suivre les préférences probables de beaucoup de nos lecteurs, nous donnerons, dans la mesure du possible, des démonstrations indépendantes de cette notion.

N_{n+1} nombre consécutif à N_n dans la suite (1) admet, parmi les nombres N_h d'indices inférieurs à lui, pour plus proches voisins N_p à gauche, N_q à droite (l'un au moins de ces deux points existe), u_{n+1} sera parmi les contigus à P situés à droite de u_p et à gauche de u_q, celui qui, n'ayant sa longueur surpassée par celle d'aucun autre, est en même temps le plus à gauche possible. A cause de la non-densité de P, il y a une infinité de contigus à P dans l'intervalle borné par u_p et u_q. L'application de la règle est toujours possible.

Tous les u_m d'indice inférieur à $n+1$ seront situés relativement à u_{n+1} du même côté que les nombres N_m correspondants sont relativement à N_{n+1}. Il est aisé de voir que le tour de chaque contigu à P finit par venir. Tous ces contigus reçoivent donc un numéro d'ordre. Deux quelconques d'entre eux sont placés l'un par rapport à l'autre comme les points N de même rang le sont entre eux.

Considérons maintenant un point ξ quelconque de P. Il constitue une coupure entre les intervalles u' situés à sa gauche et les intervalles u'' placés à sa droite. Les points N' homologues des premiers et les points N'' homologues des seconds forment eux-mêmes deux classes entre lesquelles tous les N_n se répartissent et telles que tout nombre de la première est à gauche de tout nombre de la seconde. Ces deux classes déterminent un nombre coupure η qui correspond au point de P considéré. A deux points de P, ξ et ξ', correspondent deux points η, η' du segment $0-1$ disposés comme le sont ξ et ξ', sauf le cas où ξ et ξ' sont extrémités d'un même contigu u_n, auquel cas η et η' ne sont pas distincts, mais coïncident avec N_n. A tout nombre du contigu u_n faisons correspondre N_n. Alors, si a et b sont les points extrêmes de P, à tout point x compris entre a et b correspond un nombre $g(x)$ unique, invariable sur chaque segment contigu à P, fonction continue de x et croissante quand on passe d'un point de P à un autre situé à sa droite.

Soit $\psi(u)$ une fonction continue quelconque de u, arbitrairement définie dans l'intervalle $0-1$. $\psi[g(x)]=\chi(x)$ est la fonction continue la plus générale, constante dans chaque intervalle contigu à P. Convenons de dire qu'une fonction est croissante (ou décroissante) sur P si elle est croissante (ou décroissante) de l'un à l'autre de deux points quelconques de P, non extrémités d'un même intervalle contigu.

Alors, si $\nu(u)$ est la fonction croissante la plus générale, $\nu[g(x)]$ et $-\nu[g(x)]$ sont les fonctions les plus générales constantes dans tout contigu à P, et respectivement croissantes ou décroissantes sur P.

10 *bis*. Étant donné un ensemble fermé quelconque E dont chaque contigu u a reçu un numéro d'ordre propre, supposons que relativement à u_n nous définissions un certain nombre V_n, positif ou négatif, tel que la série V_n soit absolument convergente. Alors, x et x' étant deux nombres quelconques ($x < x'$), nous désignerons par $(x\Sigma x')V_n$ la somme $\sigma(x, x')$ des termes de la série V_n relatifs aux intervalles u_n *entièrement agrégés à l'intervalle xx'*. Donc, si x et x' sont sur E (même si x et x' sont points de première espèce de E, le premier gauche, le second droit), tout contigu ayant des points compris entre x et x' est représenté dans la série σ, car ses deux extrémités sont agrégées au segment xx'. Si x est intérieur à un intervalle u_p ou $a_p b_p$, V_p ne figure pas dans la série σ, ni V_q si $a_q < x' < b_q$. Mais, si x est a_p ou si x' est b_q, σ contient respectivement les termes V_p ou V_q. A titre d'exemple, si nous prenons $V_n = u_n$ et si $\lambda(x)$ est la mesure de E (*voir* ci-dessous) entre son extrémité gauche a et x, le lecteur montrera l'identité suivante :

$$(x\Sigma x')u_n = x' - x - [\lambda(x') - \lambda(x)] - \omega(b_p - x) - \omega'(x' - a_q)$$

avec $\omega = 0$, si x est sur E, $\omega = 1$ si $a_p < x < b_p$, $\omega' = 0$ si x' est sur E, $\omega' = 1$ si $a_q < x' < b_q$.

Si x surpassait x', nous poserions

$$(x\Sigma x')V_n = -(x'\Sigma x)V_n.$$

Mais il est toujours sous-entendu, si mention expresse du contraire n'est pas faite, que, dans l'expression $\sigma(x, x')$, le premier nombre x est inférieur au second x'.

11. Les notations précédentes étant adoptées, soit E un ensemble fermé borné. Considérons une fonction ainsi définie pour toutes les valeurs de x agrégées au segment ab des extrémités de E :

$$y(x) = (a\Sigma x)\mathrm{V}_n,$$

si x est sur E ;

$$y(x) = (a\Sigma x)\mathrm{V}_n + y_m(x)$$

si

$$a_m < x < b_m,$$

$y_n(x)$ étant une fonction définie exclusivement sur u_n. Dans la seconde expression de $y(x)$, on pourrait écrire le premier terme $(a\Sigma a_m)\mathrm{V}_n$. On a le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que y soit continue est que $y_n(x)$: 1° *soit continue sur u_n avec les valeurs initiales et terminales* 0 *et* V_n ; 2° *ait sur u_n une valeur absolue maximum infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.*

Montrons d'abord la nécessité de ces conditions, donc qu'elles sont vérifiées si y est continu.

En effet, x étant intérieur à u_m, $(a\Sigma x)\mathrm{V}_n$ coïncide avec $(a\Sigma a_m)\mathrm{V}_n$. Donc, sur le champ $a_m < x < b_m$, où y_m est défini, y ne diffère que par une constante de $y_m(x)$. Donc, $y_m(x)$ doit être continu en tout point intérieur à u_m et de plus tendre comme $y(x)$ vers une limite quand x tend vers a_m et vers b_m sans quitter u_m. En désignant par $y_m(a_m)$ et $y_m(b_m)$ ces deux limites, la fonction y_m est maintenant définie et continue en tout point du segment $a_m b_m$. On doit avoir

$$y(a_m) = \lim_{x=a_m} y(x) = (a\Sigma a_m)\,\mathrm{V}_n + \lim_{x=a_m} y_m(x),$$
$$y(b_m) = \lim_{x=b_m} y(x) = (a\Sigma a_m) y_n + \lim_{x=b_m} y_m(x),$$

les valeurs limites correspondant à des variations de x intérieures à u_m.

De là en se reportant aux valeurs de y en a_m et b_m, savoir

$$y(a_m) = (a\Sigma a_m)\mathrm{V}_n$$

et

$$y(b_m) = (a\Sigma b_m)\mathrm{V}_n = (a\Sigma a_m)\,\mathrm{V}_n + \mathrm{V}_m,$$

on trouve

$$y_m(a_m) = 0, \qquad y_m(b_m) = V_m.$$

La première condition des y_n est donc établie.

La seconde résulte de ceci que, n croissant indéfiniment, u_n tend nécessairement en longueur vers zéro, si E est borné. Car la série u_n est alors convergente. Or, $y_n(x)$ est la différence $y(x) - y(a_n)$ quand x est sur u_n. La continuité des fonctions étant uniforme, la valeur absolue maximum de $y_n(x)$ sur son intervalle de définition u_n tend vers zéro quand n croît indéfiniment, puisque $x - a_n$, positif et inférieur à u_n, tend aussi vers zéro. Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Montrons qu'elles sont suffisantes. D'abord si $y_m(x)$ défini sur l'intervalle u_m est continu dans cet intervalle, et tend vers zéro quand x tend vers a_m, vers V_m quand x tend vers b_m, x restant dans les deux cas intérieur à u_m, $y(x)$, qui ne diffère de $y_m(x)$ à l'intérieur de u_m que par la quantité $(a\Sigma a_m)V_n$, tend vers

$$(a\Sigma a_m)V_n = y(a_m)$$

et vers

$$(a\Sigma a_m)V_n + V_m = (a\Sigma b_m)V_n = y(b_m)$$

respectivement quand x, sans quitter l'intérieur de u_m, tend vers a_m et vers b_m. Donc, y est continu sur tout segment contigu à E et pour l'intérieur de ce segment, en particulier en tout point de première espèce de E, droit ou gauche, du côté opposé à E et aux points isolés de E des deux côtés. Il suffit donc d'établir la continuité de y aux points de E non isolés, pour les deux côtés en ceux de seconde espèce, et en ceux de première espèce pour le seul côté où ils sont limites de points de P. C'est seulement ici qu'intervient l'hypothèse

$$\lim_{n\,\infty} |y_n(x)| = 0.$$

Donnons-nous un nombre ε positif et montrons la possibilité de définir h de façon que l'inégalité $|x - x'| < h$ entraîne $|y' - y| < 3\varepsilon$, quels que soient x et x' agrégés au segment ab. Soit d'abord, conformément à la dernière hypothèse, un nombre N_1, tel que, pour toute valeur de n supérieure à N_1, $2|y_n(x)| < \varepsilon$. Alors, si x et x' sont agrégés à un segment u_m d'indice supérieur à N_1, on a

$$|y'-y| = |y_m(x') - y_m(x)| < |y_m(x')| + |y_m(x)| < \varepsilon.$$

Pour chaque segment u_n d'indice au plus égal à N_1, y étant continu sur lui, il est possible de définir un nombre h_n tel que, x et x' étant simultanément agrégés à ce segment u_n, l'inégalité $|x - x'| < h_n$ entraîne $|y' - y| < \varepsilon$. Soit h_0 le plus petit des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_{N_1}$. Alors, si x et x' sont deux nombres agrégés à un même segment u_n et distants entre eux de moins de h_0, que l'indice n surpasse ou non N_1, on a

$$|y'-y| < \varepsilon.$$

La série V_n étant par hypothèse absolument convergente, posons

$$\rho_n = |V_{n+1}| + |V_{n+2}| + \ldots$$

et soit N_2 un nombre tel que $\rho_{N_2} < \varepsilon$. Désignons par h'_0 la plus petite des longueurs des intervalles $u_1, \ldots, u_{N_2}$. Si la distance de deux points s, t est inférieure à h'_0, les indices des intervalles u_n entièrement agrégés à l'intervalle st surpassent tous N_2 et la somme $(s\Sigma t)V_n$ est en valeur absolue inférieure à ρ_{N_2}, donc à ε. Prenons pour h le plus petit des deux nombres h_0 et h'_0. Soient x et x' deux nombres quelconques du segment ab et distants de moins de h. Si x et x' sont agrégés au même segment u_n, d'après $|x' - x| < h < h_0$, $|y' - y|$ est inférieur à ε. Si x et x' sont séparés par des points de E, on a, en supposant x inférieur à x',

$$(a\Sigma x')V_n = (a\Sigma x)V_n + (x\Sigma x')V_n + \omega V_p,$$

ω étant nul si x est sur E, égal à 1 si x est intérieur à l'intervalle u_p. De là l'égalité

$$y' - y = (x\Sigma x')V_n + \omega[y_p(b_p) - y_p(x)] + \omega'[y_q(x') - y_q(a_q)]$$

avec

$$y_p(b_p) = V_p, \qquad y_q(a_q) = 0,$$

ω étant nul si x est sur P, égal à 1 si x est intérieur à u_p, ω' étant nul si x' est sur E, égal à 1 si x' est intérieur à u_q. Mais, d'après

$$0 < x' - x < h'_0,$$

le premier terme est inférieur à ε en valeur absolue. D'après $b_p - x$ et $x' - a_q < x' - x < h_0$, ε surpasse aussi la valeur absolue des deux derniers termes. Donc, $|y' - y| < 3\varepsilon$ moyennant

$$0 < x' - x < h \qquad \text{et} \qquad a < x < x' < b.$$

La continuité de $y(x)$ est donc établie en tout point du segment ab étranger ou agrégé à E.

La condition

$$\lim_{n\infty} |y_n(x)| = 0$$

est indispensable à l'exactitude du théorème. Nous aurions $V_n = 0$, avec

$$y_n(x) = \sin 2\pi \frac{x - a_n}{u_n},$$

et les conditions de convergence absolue de la série V_n, celles de continuité de la fonction $y_n(x)$ sur u_n seraient vérifiées. y étant

$$(a\Sigma x) V_n + \omega y_m(x)$$

avec $\omega = 0$ ou $\omega = 1$ selon que x est agrégé à E ou intérieur à u_m, y serait bien continu hors de E et aux points de E isolés, et encore aux points limites de première espèce de E du côté opposé à E. Mais en tout point de seconde espèce de E des deux côtés, aux points de première espèce du côté de E, $y(x)$ serait discontinu et admettrait toutes les valeurs limites du segment $-1, +1$.

11 *bis*. Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment ab des points extrêmes de E. Posons

$$V_n = f(b_n) - f(a_n) \qquad \text{et} \qquad y_n(x) = f(x) - f(a_n),$$

y_n étant défini uniquement sur le segment u_n. Supposons enfin la série V_n absolument convergente et soit

$$y(x) = f(a) + (a\Sigma x) V_n + \omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur E et égal à 1 si x est dans l'intervalle u_m. Je dis que, si E est dénombrable, on a $f(x) = y(x)$. Soit $\theta(x)$ la différence $f(x)-y(x)$. Nous voulons prouver que θ est nul. En effet, f étant continu, $|y_n(x)|$, comme nous l'avons montré, tend vers zéro pour n infini. Donc, $y(x)$ est une fonction continue. Donc, θ est continu. Or, dans l'intervalle u_m, y ne diffère de y_m et par suite de f que par une constante additive. Donc, dans l'intervalle u_m, θ est constant. Donc, E étant dénombrable, et θ continu, θ est constant entre les extrémités a et b de E. Comme θ est nul en a, θ est identiquement nul. L'expression de $f(x)$ est donc établie.

Supposons E non dénombrable, soit P son noyau parfait. Alors, toujours dans l'hypothèse de la convergence absolue de la série V_n, θ est constant sur chaque segment U_p contigu à P, E étant dénombrable et fermé sur le segment U_p. Mais θ n'est pas nécessairement nul dans tous ces contigus. Si A est l'extrémité gauche de P,

$$\theta(A)=\theta(a)=0$$

et par suite

$$y(A)=f(A).$$

Soient A_p et B_p les extrémités de U_p. E étant dénombrable sur U_p, nous avons dans cet intervalle l'identité

$$f(x)=f(A_p)+(A\Sigma x)V_m+\omega y_m(x)=f(A_p)+y(x)-y(A_p),$$

ω étant 0 ou 1, selon que x est sur E ou intérieur à u_m, intervalle lui-même inclus dans U_p. Quand x varie dans U_p posons

$$Y_p(x)=f(x)-f(A_p)=y(x)-y(A_p).$$

Je dis que : 1° la série $Y_p(B_p)=f(B_p)-f(A_p)=W_p$ est absolument convergente, et 2° si nous définissons ainsi $Y(x)$:

$$Y(x)=f(A)+(A\Sigma x)W_p+\omega' Y_q(x),$$

ω' étant 0 ou 1 selon que x est agrégé à P ou intérieur à U_q, $y(x)$ est identique à $Y(x)$. Nous avons en effet

$$W_p=Y_p(B_p)=y(B_p)-y(A_p)=(A_p\Sigma B_p)V_n.$$

Donc, quel que soit ξ sur P, l'expression $(A\Sigma\xi)W_p$ est une série double formée avec les termes de la série $(A\Sigma\xi)V_n$, de manière que chaque terme V_n de la seconde figure dans l'un des W_p et dans un seul, une fois et une seule. La deuxième série étant absolument convergeante, il en est de même de la première [ce qui donne un sens à la définition de $Y(x)$] et toutes deux ont la même somme. Or,

$$(A\Sigma\xi)W_p = Y(\xi) - Y(A), \qquad (A\Sigma\xi)V_n = y(\xi) - y(A).$$

L'égalité de ces quatre nombres signifie que $Y - y$ est constant sur P, et par suite nul comme en A, d'après $Y(A) = f(A) = y(A)$. Or, l'expression de Y_p montre que $Y - y$ est constant sur U_p. Y et y étant l'une et l'autre continues pour des raisons de même nature, $Y - y$ est bien nul, et $y(x)$ est susceptible de revêtir la forme de Y.

Ce qui précède nous fait comprendre pourquoi nous ne considérerons guère d'expression de la forme y que dans le cas où E est parfait. Dans l'hypothèse de la convergence absolue de la série V_n, la série y peut en effet être supposée réduite comme nous venons de le faire dans chaque contigu au noyau P de l'ensemble fermé E. D'ailleurs, dans un intervalle sans points communs avec P, toute fonction continue f est caractérisée, à une constante additive près, par les y_n d'où résultent les V_n, tandis qu'il n'en est plus de même dans un intervalle contenant des points de P.

Nous montrerons un peu plus loin que, si la série des valeurs absolues maximum de $y_n(x)$ sur u_n est convergente, on peut en conclure pour la plupart des points de seconde espèce de P l'existence d'une dérivée nulle pour y, sans que la continuité de y_n soit même nécessaire.

12. Nous appelons avec M. Baire *portion* d'un ensemble parfait P l'ensemble des points de P situés sur un segment continu j possédant à son intérieur au moins un point de P et par suite une infinité non dénombrable de points, avec cette réserve que les extrémités de j sont ou non incorporées à la portion considérée suivant qu'elles en sont points limites ou points isolés. Ce dernier cas se présente si j a une extrémité commune avec un intervalle u contigu à P, tous les autres points de u étant intérieurs à j.

Considérons par exemple l'ensemble parfait classique obtenu en retranchant du segment o — 1 les points intérieurs au tiers médian, puis de chacun des deux segments conservés, les points intérieurs à leurs tiers médians et ainsi de suite. Les points restants sont, comme on sait, ceux qu'il est possible d'écrire dans le système numérique de base 3, avec les seuls chiffres o et 2. Les points de cet ensemble situés dans l'intervalle $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ forment une portion ayant pour extrémités $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$. Les points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ sont de seconde espèce. Les points de P agrégés au *segment* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ forment une autre portion de P, tandis que l'*intervalle* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ détache de P un ensemble non fermé et *a fortiori* non parfait, donc ne constituant pas une portion de P. Le segment $\frac{1}{9}$, $\frac{8}{9}$, dont les extrémités sont sur P, contient une portion de P ne renfermant ni l'un ni l'autre des points $\frac{1}{9}$, $\frac{8}{9}$, lesquels sont isolés dans l'ensemble commun à P et au segment. La portion définie par ce même segment linéaire a pour points extrêmes $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$. En somme, *une portion de* P *est un ensemble parfait* ϖ *agrégé à* P *et contenant tous les points de* P *situés dans l'intervalle de ses propres points extrêmes* (ceux de ϖ).

Au lieu de portion de P, nous dirons parfois *segment* de P. Pour éviter toute confusion, nous qualifierons de *linéaire* un segment continu.

15. On dit qu'un ensemble *fermé* est *dense* sur P, s'il contient au moins une portion de P. On dit qu'un ensemble *non fermé* E est *dense* sur P, si l'ensemble des points (E, P) commun à E et à P a pour dérivé un ensemble (fermé) dense sur P, donc admet dans son dérivé (lequel est tout entier sur P) une portion de P. K est dit *partout dense* sur P si l'ensemble (K, P) admet pour dérivé la totalité de P. Un ensemble G *non dense* sur P est donc tel que l'ensemble (G, P) n'admet dans son dérivé ∂(G, P) aucune portion de P. Cette définition équivaut à la suivante : G est non dense sur P si toute portion de P en renferme une autre ne contenant aucun point de G ([1]).

14. C'est une propriété essentielle des ensembles non denses sur un ensemble parfait continu ou non que la réunion d'une infinité dénombrable d'entre eux ne peut pas reconstituer l'ensemble parfait qui est leur base commune. La démonstration en est simple. A la suite d'ensembles non denses $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, on fait correspondre une suite de portions de l'ensemble parfait P, soit $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n, \ldots$, de manière que ϖ_n soit compris dans ϖ_{n-1} et ne contienne aucun point de E_n, couple de conditions toujours réalisable connaissant ϖ_{n-1}, à cause de la non-densité de E_n. Les ϖ_n ont en commun au moins un point étranger à tous les E_n. Donc la réunion des E_n n'épuise pas P. D'ailleurs, ϖ_1 peut être choisi intérieur à n'importe quelle portion ϖ de P. Donc, l'ensemble G des points étrangers à tous les E_n est partout dense sur P. De plus, G, pas plus que P, ne peut être épuisé par l'extraction d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses.

15. M. Baire a désigné, sous le nom *d'ensemble de première catégorie sur* P, tout ensemble E réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P. Les ensembles agrégés à P et ne présentant pas ce dernier caractère sont appelés par le même auteur « ensembles de deuxième catégorie ». Ces dénominations nous paraissent présenter le défaut de n'être pas suffisamment explicites par elles-mêmes; elles ne possèdent pas ce caractère éminemment souhaitable d'éveiller dans l'esprit du lecteur ou de l'auditeur, grâce à leur seule étymologie ou à leur simple acception dans le langage courant, l'intuition du sens spécial et précis qu'on veut leur donner. De plus, il me paraît

---

([1]) Soit H un ensemble fermé agrégé à l'ensemble parfait P et non dense sur lui. Soient α et β les extrémités d'une portion ϖ de H. Tous les points de ϖ font partie de P, mais si, entre α et β, P n'avait pas d'autres points (nécessairement inclus dans des contigus à ϖ), ϖ serait une portion de P. H contenant une portion de P serait dense sur ce dernier. Pour que H soit non dense sur P : 1° il n'est pas nécessaire que, dans tout contigu à H, P possède des points, mais 2° les contigus à H contenant des points de P doivent être ainsi distribués que toute portion de H admette des contigus de cette sorte.

essentiel de faire jouer un rôle particulier, entre tous les ensembles « de deuxième catégorie », à ceux qui sont complémentaires d'un ensemble « de première catégorie ». Ceux-ci sont obligatoirement partout denses, nous l'avons vu, sur l'ensemble parfait continu ou discontinu auquel on les rattache. Les autres au contraire, sans être non denses, peuvent n'avoir pas de points dans certains intervalles (ou certaines portions de P). Par exemple les deux intervalles o — 1 et 2 — 3 sont l'un et l'autre des ensembles indécomposables en une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Ils ne sont cependant ni l'un ni l'autre partout denses sur le continu. Nous sommes conduits à subdiviser la seconde catégorie en deux, les catégories $2a$ et $2b$, ainsi distinguées l'une de l'autre : Sur l'ensemble parfait P, un ensemble ($2b$) a pour complémentaire un ensemble de première catégorie; un ensemble ($2a$) et son complémentaire sont de deuxième catégorie l'un et l'autre.

Considérons les premiers ensembles. On obtient l'un d'eux R, en extrayant indéfiniment, de l'ensemble parfait P, des ensembles non denses sur lui. R est l'ensemble des points jamais retranchés, et qui subsisteraient seuls si l'on effectuait, d'un seul coup, cette infinité d'extractions. Je propose d'appeler G un *résiduel* de P. C'est donc par définition le complémentaire d'un ensemble de première catégorie sur P.

Nous qualifierons d'*inexhaustible* sur l'ensemble parfait P, continu ou non, un ensemble I agrégé à P et qu'on ne peut constituer avec une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P. C'est exactement l'ensemble général de seconde catégorie de M. Baire. Inversement, on ne peut pas épuiser I en retranchant de lui une infinité dénombrable de ces derniers ensembles. De là, le nom proposé d'*ensembles inexhaustibles*. Tout résiduel est inexhaustible, mais la réciproque n'est pas vraie. Une propriété essentielle d'un résiduel de P est en effet d'être partout dense sur P, tandis que deux portions complémentaires de P, séparées par un contigu, sont l'une et l'autre inexhaustibles et toutefois bien évidemment, aucune n'a de points sur l'autre. La propriété capitale des résiduels est la suivante. *Deux résiduels ou même une infinité dénombrable de résiduels relatifs à un même ensemble parfait* P *ont en commun un résiduel de* P. Car l'ensemble R commun à deux ensembles R_1, R_2, ou à une infinité d'ensembles R_n a pour complémentaire D la réunion des complémentaires D_1, D_2. ..., D_n, ..., de R_1, R_2, ..., R_n, ... Si D_n est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P, il en est de même de D. Donc R, ensemble commun aux R_n et complémentaire de D, est un résiduel de P.

R et I étant l'un résiduel, l'autre inexhaustible sur P, R et I ont des points communs. En effet, si nous retranchons de I tous les points appartenant en même temps au complémentaire D de R, il reste des points de I, sinon I serait agrégé à D et par suite de première catégorie. D'ailleurs les points de I étrangers à D forment un ensemble I′ inexhaustible s'il en est ainsi de I. Or, I′ est l'ensemble commun à R et à I. Donc, un résiduel et un ensemble inexhaustible ont en commun un ensemble inexhaustible. Mais deux ensembles inexhaustibles n'ont pas nécessairement des points communs.

Reste à désigner les ensembles de première catégorie. Un ensemble de cette sorte peut être partout dense, constituer une pleine épaisseur du continu (*voir* ci-après), il a néanmoins une trame plus disloquée, plus granuleuse que son complémentaire. Celle de ce dernier est plus touffue, plus unie, plus cohérente que celle-là, si ces dernières expressions peuvent s'appliquer à un ensemble généralement discontinu, tout au moins s'il est linéaire. Si l'on veut adopter une épithète s'appliquant au cas des ensembles à plusieurs dimensions, il faut qu'elle convienne également à des aspects aussi opposés que les suivants : d'un côté l'ensemble comprenant les droites d'abscisses rationnelles parallèles à l'axe des y, associées aux droites d'ordonnées rationnelles parallèles à l'axe des x, ou, avec plus de deux dimensions, la totalité des plans parallèles à l'un quelconque des plans de coordonnées et situés à une distance rationnelle de celui-ci; d'un autre côté, l'ensemble (dénombrable) des points à coordonnées toutes rationnelles. Dans la première espèce, deux points quelconques de l'ensemble peuvent être toujours reliés par un continu agrégé à lui, il n'en est jamais ainsi dans le complémentaire entre deux quelconques de ses points. C'est le contraire pour la seconde espèce, entièrement discontinue, à l'opposé des ensembles complémentaires. Des qualificatifs assez naturels tels que « rompu », « disjoint » doivent être rejetés à cause de la structure quasi continue d'ensembles auxquels on serait conduit à les attribuer. « Dissociable » n'évoque pas une idée suffisamment caractéristique. On peut songer à utiliser en radicaux des mots tels que « grille », « crible », à rappeler que ces ensembles « amplifient » les ensembles non denses. Je propose d'appeler *gerbe* ou *ensemble gerbé sur l'ensemble parfait* P continu ou non, la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses sur P.

Notions d'ordre métrique.

Les définitions précédentes sont relatives aux propriétés descriptives des ensembles. Les propriétés descriptives sont celles qui se conservent dans une transformation continue ainsi que son inverse. Les propriétés métriques sont celles qui subsistent dans une transformation du type précédent, mais possédant de plus un coefficient différentiel fini en tout point.

16. Au point de vue descriptif, les ensembles se caractérisent essentiellement par leurs propriétés à l'égard de la densité. Descriptivement, l'ensemble quasi vide est l'ensemble non dense, et par extension l'ensemble gerbé. Le théorème de M. Baire : « une fonction de classe 1 (ou limite de fonctions continues) est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait » ou plus précisément « les points de continuité sur P d'une fonction f de classe 1 forment un résiduel de P, les points de discontinuité de f sur P constituant un ensemble gerbé », ce théorème pourrait encore s'énoncer ainsi : « Descriptivement, une fonction de classe 1 est presque partout continue sur chaque ensemble parfait ». Une transformation continue quelconque mais toujours croissante ou décroissante effectuée sur x conserve les propriétés de densité ou de non-densité des ensembles. Elle laisse donc invariantes les classifications des ensembles en résiduels, inexhaustibles ou gerbés. Mais nous verrons plus loin (**65**) qu'elle ne conserve nullement en général le caractère d'épaisseur (**19**) ou de non-épaisseur présenté par un ensemble. On montrerait sans peine que ces caractères sont maintenus quand la transformation possède en chaque point une dérivée finie (à signe constant, pour la continuité de la transformation inverse). Il est remarquable que dans l'étude de diverses catégories de fonctions, entre autres les fonctions analytiques, les fonctions sommes de séries trigonométriques, dont la définition est en rapport étroit avec la notion de dérivée (les premières ont une dérivée par rapport à z, les sesondes sont des dérivées secondes généralisées par rapport à l'arc), les points où ces fonctions jouissent de propriétés exceptionnelles ou perdent leurs caractères fondamentaux, en un mot les singularités de ces fonctions forment des ensembles se répartissant naturellement en classes différenciées les unes des autres, simultanément par l'allure des fonctions au voisinage de ces ensembles et par les propriétés métriques de ces derniers. A l'appui de cette observation, je rappellerai les oppositions typiques présentées entre elles par les fonctions analytiques uniformes au voisinage de leurs singularités discontinues, selon que celles-ci ont une longueur nulle, ou une longueur finie, ou une longueur infinie avec aire nulle ou aire non nulle, etc. Il est assez naturel d'ailleurs que, l'existence d'une dérivée aux points réguliers indiquant la possibilité de mesurer la variation élémentaire d'une fonction de x ou de z au moyen de la variation élémentaire de x ou de z, l'étendue des points où certaines irrégularités se présentent intervienne dans la nature des aspects exceptionnels offerts par la fonction dans leur voisinage. Le point de vue métrique se présente dans les moindres détails de l'étude des fonctions analytiques. Il se manifeste en particulier dans cette méthode de raisonnement universelle dans cette théorie et consistant à ramener chaque proposition à un théorème sur la croissance. Dans le présent Mémoire, les principaux résultats obtenus découleront de l'association des propriétés métriques des dérivées et nombres dérivés des fonctions à leurs propriétés descriptives. Nous ne devons pas oublier, en effet, qu'une dérivée bi- ou unilatérale est la limite d'une fonction continue $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, h tendant vers zéro bi- ou unilatéralement. Les ensembles quasi vides intéressant les dérivées ou les nombres dérivés sont donc de deux sortes, les ensembles sans épaisseur et les ensembles gerbés. Complémentairement, les ensembles quasi universels, les ensembles pour lesquels les locutions « sur l'un deux » et « presque partout » sont synonymes, seront aussi bien, selon les cas, les résiduels que les pleines épaisseurs.

17. Nous allons rappeler les définitions essentielles utilisées dans la mesure des ensembles, et présenter de cette opération une analyse succincte, mais indispensable pour la suite de ce Mémoire ([1]).

D'après MM. Borel et Lebesgue, un ensemble E_1 rectiligne, situé sur un segment s dont la longueur est prise pour unité, est dit *mesurable*, s'il est possible, pour toute valeur de ε, de définir deux familles d'intervalles $\varphi_1(\varepsilon)$, $\varphi_2(\varepsilon)$, tels que : 1° tout point de E_1 est intérieur à un intervalle φ_1 et tout point de E_2, complémentaire de E_1 sur s, est intérieur à un intervalle φ_2; 2° $l_1(\varepsilon)$ et $l_2(\varepsilon)$ désignant respectivement la somme des longueurs des intervalles φ_1 et φ_2, satisfont aux inégalités $1 < l_1(\varepsilon) + l_2(\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. On montre alors que, ε tendant vers zéro, $l_1(\varepsilon)$ et $l_2(\varepsilon)$ tendent respectivement en décroissant vers deux limites l_1 et l_2 qui sont leurs bornes inférieures et dont la somme est évidemment l'unité. $l_1(\varepsilon)$ et $l_2(\varepsilon)$, chacun supérieurs à leur limite, l'excédent de moins de ε. l_1 et l_2 sont appelés respectivement *mesure* ou *longueur* de E_1 et de E_2. Un ensemble et son complémentaire sont donc simultanément mesurables ou non. Le résultat suivant est fondamental dans la théorie de la mesure : L'ensemble formé de la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles deux à deux distincts et mesurables, est mesurable et a pour longueur la somme des mesures des ensembles composants. Ou en regardant leurs complémentaires, l'ensemble des points communs à une infinité dénombrable et ordonnée en suite simple, d'ensembles mesurables dont chacun est agrégé au précédent, cet ensemble est mesurable et sa mesure est la borne inférieure des longueurs des ensembles dont il est le résidu. Par suite : un ensemble dénombrable est de mesure nulle; un ensemble, formé des points intérieurs à une infinité d'intervalles dont deux quelconques d'entre eux n'empiètent pas l'un sur l'autre, est mesurable et a pour mesure la somme de la

---

([1]) Les résultats des nos **18-20** ne prétendent à aucune originalité. Ils sont une conséquence toute naturelle des définitions de la mesure donnée par MM. Borel et Lebesgue, à qui revient uniquement la priorité globale de tous ces corollaires. Mais leur utilité dans les applications métriques des ensembles est extrême et ils s'imposent d'eux-mêmes à l'attention des géomètres, comme le montre la fréquence avec laquelle ils ont été énoncés. (*Voir*, par ex., FATOU, *Bull. Soc. math.*, t. XLI, 1913; DENJOY, *Comptes rendus*, 7 mars 1910, etc.).

série formée par les longueurs des intervalles, lesquelles peuvent, comme on sait, toujours être rangées dans une suite unique. Un ensemble fermé étant toujours complémentaire d'un ensemble du type précédent est mesurable. Je me borne à rappeler tous ces résultats en renvoyant le lecteur pour de plus amples explications aux travaux de M. Lebesgue. Mais il sera intéressant d'éclairer la notion d'ensemble mesurable par la brève analyse suivante.

18. Supposons inférieur à l_1 le nombre ε figurant dans la définition des intervalles $\varphi_1(\varepsilon)$ et $\varphi_2(\varepsilon)$. La longueur totale des $\varphi_2(\varepsilon)$, soit $l_2(\varepsilon)$, est inférieure à $l_2+\varepsilon$. Soit $F_1(\varepsilon)$ l'ensemble des points qui ne sont intérieurs à aucun des $\varphi_2(\varepsilon)$. $F_1(\varepsilon)$ est fermé. $F_1(\varepsilon)$ ne comprend aucun point de E_2, donc est agrégé à E_1. Le complémentaire de $F_1(\varepsilon)$, constitué par les contigus à $F_1(\varepsilon)$, a chacun de ses points intérieur à au moins un intervalle $\varphi_2(\varepsilon)$. La longueur totale des contigus à $F_1(\varepsilon)$ est donc au plus égale à celle des $\varphi_2(\varepsilon)$, soit $l_2(\varepsilon)$. $F_1(\varepsilon)$ a donc une mesure au moins égale à $1-l_2(\varepsilon)>l_1-\varepsilon$. Soit $P_1(\varepsilon)$ le noyau parfait de $F_1(\varepsilon)$. Un ensemble fermé et son noyau, ne différant que par un ensemble dénombrable, ont même mesure. Nous aboutissons donc à la conséquence suivante qui sera par la suite d'une application constante :

Étant donné un ensemble E *de mesure positive, si petit que soit le nombre positif* ε, *il existe un ensemble parfait agrégé à* E *et dont la mesure diffère de moins de* ε *de celle de* E.

Ce théorème nous conduit à une proposition très importante. Soient l la mesure de E et θ un nombre positif inférieur à 1. Nous pouvons déterminer un ensemble parfait P_1 agrégé à E et de mesure supérieure à $(1-\theta)l$. Soient E' l'ensemble des points de E étrangers à P_1 et l' la mesure de E'. l' est inférieur à θl. Si l' est différent de zéro, déterminons un ensemble parfait P_2 agrégé à E', et dont la mesure surpasse $(1-\theta)l'$, et ainsi de suite. Généralement, supposons déterminés les ensembles parfaits $P_1, P_2, \ldots, P_n$ deux à deux distincts, agrégés à E. Soit $E^{(n)}$, de mesure $l^{(n)}$, l'ensemble des points agrégés à E et étrangers à $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Alors P_{n+1} est par définition un ensemble parfait agrégé à $E^{(n)}$ (donc distinct des P_i d'indice inférieur) et de mesure supérieure à $(1-\theta)l^{(n)}$. Cette règle étant appliquée successivement aux valeurs entières de n, nous trouvons que $l^{(n)}$ est inférieur à $\theta^n l$. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien, pour une valeur finie de n, $l^{(n)}$ sera nul et alors E est la réunion d'un nombre fini d'ensembles parfaits, donc au total un ensemble de ce même type, augmenté d'un ensemble de mesure nulle. Ou bien, si $l^{(n)}$ n'est jamais nul, tout point de E est soit dans l'un des P_n, soit dans $E^{(n)}$ pour toute valeur de n, donc dans l'ensemble H commun aux $E^{(n)}$ (chacun d'eux étant inclus dans le précédent). $l^{(n)}$ tendant vers zéro, H est forcément de mesure nulle. En résumé :

Un ensemble mesurable est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits et d'un ensemble de mesure nulle (¹).

Ce résultat ramène la notion de la mesure à deux éléments, l'un à la vérité parfaitement clair et naturel, concernant les ensembles parfaits (la longueur d'un tel ensemble est l'excès de la longueur du segment support de l'ensemble sur la somme des intervalles contigus, leurs longueurs étant, comme il est possible, ordonnées en une série) ; l'autre plus difficile à saisir, rassemblant en lui ce qu'il y a de plus ingénieux et de plus profond dans la définition de MM. Borel et Lebesgue, et intéressant spécialement les ensembles de mesure nulle, lesquels sont descriptivement en général infiniment plus compliqués que les ensembles décomposables en une infinité d'ensembles parfaits. Observons, en effet, que l'ensemble ramassant en lui toute la longueur de E est gerbé, si le complémentaire de E est partout dense, et que nous avons montré du même coup le théorème suivant : *Tout ensemble mesurable (dont le complémentaire est partout dense) est la somme d'un ensemble gerbé et d'un ensemble de mesure nulle* (²).

19. Une notion indispensable à l'étude approfondie des fonctions

---

(¹) S'il s'agissait de mesure spatiale à deux ou plusieurs dimensions, les démonstrations et leur conclusion s'étendraient à des cas sans aucune difficulté.

(²) Si le complémentaire D de E n'est point partout dense, l'énoncé précédent est encore vrai. Pour s'en rendre compte, il suffit, dans chaque intervalle ω (en dérivées est celle de l'épaisseur d'un ensemble mesurable. Nous appellerons *épaisseur d'un ensemble* E *sur un intervalle ab*, le quotient par la longueur *ab*, de la mesure de la partie de E située sur *ab*. Ce rapport est évidemment compris entre 0 et 1 inclusivement.

Nous appellerons *épaisseur d'un ensemble* E *en un point* M, agrégé ou étranger à E, la limite unique, si elle existe, de l'épaisseur de E sur un intervalle i contenant M et dont la longueur tend indépendamment vers zéro. Si E possède en M l'épaisseur e, pour toute valeur de ε, on peut déterminer h de façon que, dans tout intervalle contenant M et de longueur inférieure à h, l'épaisseur de E est comprise entre $e - \varepsilon$ et $e + \varepsilon$.

La somme des épaisseurs d'un ensemble et de son complémentaire sur un même intervalle est évidemment égale à 1. Donc, leurs épaisseurs en un même point quelconque sont simultanément définies ou non, et dans le premier cas, leur somme est 1.

Si E n'a pas en M d'épaisseur définie. nous appellerons *épaisseur maximum* et *épaisseur minimum* de E en M, respectivement la plus grande et la plus petite limites possibles de l'épaisseur de E sur i, quand i contenant M tend indifféremment vers zéro en longueur. Les deux nombres ainsi définis sont évidemment agrégés au segment $0 - 1$.

Nous dirons qu'un ensemble est *épais*, si sa mesure n'est pas nulle, qu'il est *épais en lui-même*, si sa mesure n'est nulle dans aucun intervalle contenant intérieurement un de ses points. Les ensembles de mesure nulle seront aussi appelés *ensembles sans épaisseur* ou encore *ensembles minces*. Nous dirons qu'un ensemble E est *épais en un point* M, agrégé ou étranger à E, si, dans tout intervalle contenant M à son intérieur, E est épais (¹). L'ensemble E_1 des points au voisinage

---

infinité dénombrable) où D n'a pas de points, d'ajouter à D tous les nombres rationnels de ω. On diminue E et l'on accroît D d'un ensemble e dénombrable, ce qui ne change pas les mesures de E ni de D. Au nouvel ensemble E' substitué à E appliquons le théorème précédent. E' est décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits P_n nécessairement discontinus, augmentée d'un ensemble mince e'. E est donc la réunion des P_n, accrue de l'ensemble $e + e'$, lui aussi mince, puisque e est dénombrable.

(¹) Si un ensemble E a l'épaisseur *un* en un point M, son complémentaire D possède l'épaisseur *zéro* en ce même point. Mais ceci n'empêche nullement que D desquels E est épais, est fermé, ne contient pas de points isolés, donc est parfait. Dans chaque intervalle contigu à E_1, E a une mesure nulle. Donc, les points de E étrangers à E_1 ont une mesure totale nulle. Ainsi, on ne diminue pas la mesure d'un ensemble en le réduisant à ceux de ses points au voisinage desquels il est épais. Dans tout intervalle contenant un point de E_1, E et par suite E_1 ont une mesure positive. Donc, E_1 est épais en lui-même. Si E est fermé, E_1 lui est évidemment agrégé. Il est visible que le théorème du n° **18** peut s'énoncer ainsi : *Tout ensemble mesurable épais est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits épais en eux-mêmes, deux à deux distincts et d'un ensemble mince.* Les ensembles parfaits décrits dans cet énoncé peuvent toujours être supposés discontinus, même si l'ensemble à décomposer est ou contient un intervalle (p. 128).

Nous dirons qu'un ensemble constitue une *épaisseur pleine* (sous-

---

soit épais en M, c'est-à-dire que, dans tout intervalle contenant M, D ait une mesure positive; pas plus que le fait pour une fonction de posséder en un point la dérivée zéro n'entraîne qu'elle soit constante dans tout un intervalle contenant ce point (il n'y a pas simplement analogie des deux cas, l'épaisseur en un point est une dérivée). Il faut d'autre part concevoir qu'un ensemble et son complémentaire peuvent être simultanément épais en tout point d'un même intervalle. Supposons, en effet, le segment o — 1 décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits P_n deux à deux distincts, discontinus, épais en eux-mêmes, augmentée d'un ensemble mince η. Dans tout intervalle intérieur au segment o — 1, une infinité d'ensembles P_n possèdent des points. D'ailleurs, la réunion d'un nombre quelconque fini de P_n constitue un ensemble parfait non dense. Soit ε_p un nombre positif tendant vers zéro quand p croît. J'attribue à l'ensemble E, d'abord l'ensemble η, puis les h premiers ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_h$, en nombre suffisant pour que leur réunion ait ses contigus tous inférieurs à ε_1. Ensuite, j'affecte à D les ensembles suivants $P_{h+1}, \ldots, P_k$, en quantité suffisante pour que l'ensemble parfait formé par eux ait tous ses contigus inférieurs à ε_2. Et je continue ainsi la répartition des P_n entre E et D alternativement. Il est visible que, dans tout intervalle inclus dans o — 1, chacun de ces derniers ensembles existe et est épais. Pareillement, par un groupement des P_n effectué suivant une règle analogue à la précédente, on pourrait décomposer le segment o — 1 en une infinité dénombrable d'ensembles E_m deux à deux distincts et chacun épais en tout point. Ces considérations aident à saisir tout l'intérêt du théorème du n° 20.

entendu : du continu) si son complémentaire est de mesure nulle. La locution « sur une épaisseur pleine » remplacera pour nous l'expression fréquemment employée « presque partout » dont le défaut est de présenter deux sens différents selon les points de vue, métrique ou descriptif, où l'on se place. Nous dirons qu'un ensemble E agrégé à l'ensemble épais P constitue *une pleine épaisseur de* P, si le complémentaire de E relativement à P est mince ou encore si E et P ont même mesure. Nous allons démontrer le très important théorème suivant :

20. *L'épaisseur d'un ensemble mesurable est égale à* un, *en chacun de ses points, sauf éventuellement en ceux d'un ensemble mince.* Ou encore : *l'épaisseur de* E *est égale à* un, *sur une pleine épaisseur de* E.

Une preuve immédiate de cette proposition est fournie par ce théorème de M. Lebesgue : Si f est sommable, l'intégrale besgienne de f entre a et x a pour dérivée f sur une épaisseur pleine. Si l'on se rappelle que, par définition de la somme besgienne, l'intégrale d'une fonction égale à *un* sur un ensemble et à *zéro* sur son complémentaire, est égale à la mesure de l'ensemble dans l'intervalle où l'intégration est effectuée, il est évident que la mesure de E entre a et x admet, sauf éventuellement en un ensemble mince, pour dérivée l'unité si x est dans E, et zéro si x est extérieur à E. Donc, en dehors de ces points exceptionnels, x étant agrégé à E, l'épaisseur de E dans un intervalle ayant x pour extrémité fixe tend vers 1 quand l'intervalle tend vers zéro. Il en est par suite de même si l'intervalle tend vers x en le contenant. La proposition est établie par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'Intégration* (p. 123, 124), à vrai dire sans faire intervenir explicitement la notion d'épaisseur. Mais, comme il est au fond assez naturel, le théorème relatif à la dérivée de l'intégrale besgienne d'une fonction sommable, loin de précéder l'application que nous en avons faite, l'utilise au contraire en réalité comme lemme préliminairement démontré. Établissons donc directement cette proposition sur l'épaisseur des ensembles en leurs propres points.

Remarquons d'abord qu'il suffit, d'après la décomposition effectuée des ensembles mesurables, d'établir ce théorème pour un ensemble parfait. Car, si E est la réunion d'une infinité d'ensembles parfaits deux à deux distincts, E_1, E_2, ..., E_n, ..., et d'un ensemble de mesure nulle R, il est évident que sur un segment quelconque l'épaisseur de E est égale à la somme des épaisseurs des ensembles E_n. Elle est donc au moins égale à l'épaisseur de chacun d'eux, sur un même segment et par suite en un même point. Si donc l'épaisseur de E_n est 1 sur E_n, sauf aux points d'un ensemble mince E'_n, aux points de E étrangers à E'_1, E'_2, ..., E'_n, ..., R, l'épaisseur de E sera 1. Ces points exclus forment un ensemble mince. Le théorème sera donc établi si nous le démontrons pour un ensemble parfait.

21. Soient P un tel ensemble, l sa mesure non nulle, a et b ses points extrêmes, u_1, u_2, ..., u_n, ... ses intervalles contigus sur le segment ab que nous prenons pour unité de longueur. Soient A et ε deux nombres fixes, choisis le premier très grand, le second très petit. Nous pouvons trouver un entier N tel que $R_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2A}$. Les intervalles u_1, u_2, ..., u_N entièrement intérieurs à ab et deux à deux sans points communs, sont séparés sur ab par N + 1 segments que je désigne dans l'ordre où ils sont rencontrés quand on parcourt ab de gauche à droite, par ρ_1, ρ_2, ..., ρ_{N+1}. Ces N + 1 segments, extrémités comprises, renferment la totalité de P, leur partie complémentaire étant constituée par les divers intervalles u_n d'indices supérieurs à N. La somme des longueurs des ρ_m est donc supérieure à l et exactement égale à $l + R_N$. Considérons les intervalles j ou plus précisément $j(N, A)$ sans points extérieurs aux $\rho_m (m \leqq N + 1)$ et sur lesquels l'épaisseur totale des u_n est au moins égale à $\frac{1}{A}$. Voici ce qu'il faut entendre par cette dernière expression.

P étant discontinu, j contient des points étrangers à P, donc agrégés à certains u_n. Parmi ces u_n, les uns sont entièrement situés dans j, les autres ont seulement une partie commune avec j. Dans tous les cas, les points communs à j et à certains u_n, ou encore les points appartenant à j et étrangers à P forment un ensemble dont la mesure est la somme des u_n ou portions de u_n situées sur j. Notre hypothèse est que cette mesure surpasse $\frac{j}{A}$, pour tout intervalle $j(N, A)$. Observons d'ailleurs que les u_n pénétrant dans un tel intervalle j ont un indice n surpassant forcément N, puisque tout intervalle j est entièrement situé sur un segment ρ_m et par suite n'a de points communs avec aucun des u_n d'indice inférieur à $N + 1$.

Considérons les points intérieurs à au moins un intervalle j. Ces points forment des champs linéaires. Soit i l'un de ceux-ci. Je dis que i peut être couvert avec une collection d'intervalles $j(N, A)$ de manière que tout point de i soit intérieur à l'un de ces $j(N, A)$ et à deux au plus. Observons en effet que si une suite d'intervalles $j(N, A)$, soit $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$, tend vers un intervalle limite J, je veux dire si les extrémités de j_n tendent respectivement vers celles de J : d'une part, les j_n sont tous à partir d'un certain rang intérieurs au même segment ρ_m, d'autre part sur J l'épaisseur totale des u_n est au moins $\frac{1}{A}$. Donc J est un intervalle $j(N, A)$. Nous exprimons cette propriété en disant que *les $j(N, A)$ forment un ensemble fermé d'intervalles.* De ceci résulte (*voir* Note I) le point à établir. Développons-en une démonstration.

Prenons dans i d'extrémités α et β un point intérieur quelconque γ. Parmi tous les $j(N, A)$ admettant γ à son intérieur ou l'ayant pour extrémité gauche, il y en a un, d'après l'hermétisme des j, dont une extrémité est la plus à droite. Si ces conditions sont remplies par plusieurs j, nous choisissons parmi ceux-ci le plus grand qui existe certainement, pour la raison énoncée à l'instant. Soient j_0 cet intervalle, γ_1 son extrémité droite et γ_0 son extrémité gauche. γ est en γ_0 ou entre γ_0 et γ_1. De même j_1 sera l'intervalle $j(N, A)$: 1° contenant γ_1 à son intérieur ou l'ayant pour extrémité gauche, 2° dont l'extrémité droite γ_2 est la plus éloignée à droite et le plus grand de ceux qui satisfont à ces conditions, s'il y en a plus d'un. Nous définissons successivement $j_2, j_3, \ldots$. Deux cas se présentent. Ou bien un point γ_{n+1}, extrémité d'un j_n, est en β. L'opération est arrêtée. Ou bien, il y a une infinité de points γ_n, à indices entiers positifs. Dans tous les cas, γ_p est l'extrémité droite de j_{p-1} ; γ_p peut être intérieur à j_p ou être son extrémité gauche, et j_p, parmi les j ainsi particularisés, est le plus long de ceux dont l'extrémité droite γ_{p+1} est la plus éloignée possible de γ_p. γ_p est toujours en deçà de l'extrémité gauche de j_{p+h} ($h > 0$), sinon j_p serait mal choisi et devrait être remplacé par j_{p+h}.

γ_p est évidemment au delà de l'extrémité droite γ_{p-h+1} de j_{p-h}, les γ_n progressant vers la droite quand leur indice croît. γ_p n'est donc intérieur à aucun j_p d'indice différent de p. Si γ_p n'est pas intérieur à j_p, lequel coïncide alors avec $\gamma_p\gamma_{p+1}$, désignons par j'_p un intervalle j quelconque contenant γ_p. j'_p laisse à son extérieur γ_{p-1} et γ_{p+1}, sinon j_{p-1} ou j_p auraient été choisis par erreur. Dans la suite j_n, intercalons j'_p entre j_{p-1} et j_p. Si alors j'_p empiète sur j_{p+1}, ou sur j'_{p+1} quand ce dernier existe, j'_p et j_{p+1} (ou j'_{p+1}) recouvrent $\gamma_p\gamma_{p+1}$ coïncidant avec j_p, que nous supprimons. Dans la suite restante, un point compris entre γ_0 et b est évidemment couvert par au moins un intervalle de la suite (j_p, j'_p). Je dis qu'il l'est par deux au plus. Si x en effet est en un point γ_p, il appartient en propre à j_p, si j_p le possède à son intérieur, sinon j'_p existe et est seul à contenir γ_p. Si x est distinct des γ_n, il est entre deux points tels que γ_p et γ_{p+1}. Seuls peuvent pénétrer dans cet intervalle j'_p, j_p, j'_{p+1} ou j_{p+1}. Est-il possible que x soit intérieur à trois d'entre eux simultanément? Non, car j'_{p+1} et j_{p-1} n'y pénètrent pas simultanément, puisque, si j'_{p+1} existe, j_{p+1} coïncide avec $\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}$. Les trois intervalles contenant x seraient donc ou bien j'_p, j_p, j'_{p+1} ou bien j'_p, j_p, j_{p+1}. Mais, si j'_p et j'_{p+1} ou si j'_p et j_{p+1} ont en commun des points intérieurs, j_p ne figure pas dans la suite. Nous aboutissons à une contradiction. En opérant entre γ_0 et α comme entre γ_0 et β en échangeant le rôle des extrémités droite et gauche des intervalles, *on recouvre i ou $\alpha\beta$ avec une famille $j(i)$ d'intervalles j de telle manière que chaque point de $\alpha\beta$ soit intérieur à au moins un et au plus deux d'entre eux* (¹).

La somme des longueurs des $j(i)$ est au plus égale à $2i$ et d'ailleurs au moins égale à i. Mais chaque intervalle $j(i)$ contient des u_n en longueur totale au moins égale à $\frac{j}{A}$. En additionnant les longueurs des $j(i)$ d'une part et celles des u_n intérieurs à chacun d'eux d'autre part, on trouve deux nombres dont le premier est au plus A fois le second. Mais le premier est au moins i. Le second est au plus le double de la somme $\sigma(i)$ des u_n intérieurs à i, puisque chaque u_n ou portion de u_n appartient simultanément à deux intervalles $j(i)$ au plus.

(¹) Cette partie de la démonstration pourrait être supprimée si l'on supposait connus les résultats exposés dans la Note I.

Donc, $i < 2A\sigma(i)$. Et en ajoutant les longueurs de tous les champs i en nombre fini ou infini recouverts par les $j(N, A)$, on trouve un nombre λ inférieur à $2A\sum_{N+1}^{\infty} u_n = 2AR_N < \varepsilon$. Donc, ε étant supposé inférieur à l, en retranchant des ρ_m tous les champs i, il reste nécessairement un ensemble de mesure supérieure à $l - \varepsilon$. Soit $E(N, A)$ cet ensemble évidemment fermé. De quelles propriétés jouit un point $x(N, A)$ de cet ensemble, ce point étant supposé distinct des extrémités des segments ρ_m? Un tel point n'étant intérieur à aucun des $j(N, A)$, dans tout intervalle ω contenant $x(N, A)$ ou plus simplement x, et n'atteignant pas l'un des u_n d'indice inférieur à $N+1$, donc ω étant intérieur à l'un des ρ_m, l'ensemble des $u_{N+1}, \ldots$, a sur ω une épaisseur inférieure à $\frac{1}{A}\cdot$ Donc, l'épaisseur de P sur ω est au moins $1 - \frac{1}{A}\cdot$ Or les limites d'indétermination de l'épaisseur en x, s'entendent comme étant celles de l'épaisseur de P sur un intervalle contenant x et tendant vers lui. On ne change donc pas ces limites en bornant cet intervalle à ne varier comme ω que sur ρ_m, auquel x est supposé intérieur. Donc, la plus petite de ces limites est certainement au moins égale à $1 - \frac{1}{A}\cdot$ Remarquons que $E(N, A)$ est agrégé à P et même non dense sur P. Car, A surpassant 1, tout point soit intérieur à u_{N+p}, soit distant de u_{N+p} de moins de $(A-1)u_{N+p}$ et agrégé à l'un des ρ_m, est intérieur à un intervalle $j(N, A)$, donc est étranger à $E(N, A)$. Aucun point extérieur à P, ni même (sauf les extrémités de $u_1, u_2, \ldots, u_N$) aucun point de première espèce de P ne faisant partie de $E(N, A)$, ce dernier est agrégé à P et ne peut contenir aucune portion de P. Comme il est fermé, il est non dense sur P. Retranchons de $E(N, A)$ les extrémités de $u_1, u_2, \ldots, u_N$, ce qui nous laisse un ensemble $E_1(N, A)$ ne contenant aucun point de première espèce de P. $E_1(N, A)$ s'obtient donc en retranchant de ab tous les segments u_n, ainsi que les points des $j(N, A)$ agrégés à P. Tout intervalle $j(N+k, A)$ est un intervalle $j(N, A)$ sans que d'ailleurs la réciproque soit vraie en général. Donc, l'ensemble $E_1(N, A)$ est compris dans tous les ensembles $E_1(N+k, A)$. Faisons croître N indéfiniment. Le produit $2AR_N$ tend vers zéro et par suite la mesure de $E_1(N, A)$, supérieure à $l - 2AR_N$ et inférieure évidemment à l, tend vers ce dernier nombre. L'ensemble $E(A)$ des points appartenant à l'un au moins des $E_1(N, A)$ a donc même mesure que P. En tout point de $E(A)$, ce point étant nécessairement agrégé à l'un des $E_1(N, A)$, la plus petite épaisseur de P est au moins $1 - \frac{1}{A}\cdot$ Le complémentaire $G(A)$ de $E(A)$ relativement à P est de mesure nulle. Remarquons qu'en tout point de ce dernier ensemble la plus petite épaisseur de P est au plus $1 - \frac{1}{A}\cdot$ En effet, soit x' un point de $G(A)$ et de seconde espèce sur P, l'épaisseur minimum aux points de première espèce étant zéro. Quel que soit N, x' appartient à $G(N, A)$, donc est intérieur à un intervalle $j(N, A)$ situé dans un segment ρ_m compris entre deux des $u_1, u_2, \ldots, u_N$ géométriquement consécutifs. Sur $j(N, A)$ l'épaisseur des u_n est au moins $\frac{1}{A}\cdot$ Donc, celle de P est au plus $1 - \frac{1}{A}\cdot$ Or, cet intervalle j, dépendant de N, a une longueur infiniment petite avec $\frac{1}{N}$, de même que ρ_m, si les intervalles contigus à P, supposés partout denses, sont tous dans la suite u_n. L'épaisseur de P en x' a donc sa plus petite limite au plus égale à $1 - \frac{1}{A}\cdot$ En donnant à A une suite de valeurs indéfiniment croissantes, on obtient des ensembles $E(A)$ chacun inclus dans le précédent et ayant tous pour mesure l; ou des ensembles $G(A)$ contenant chacun le précédent et tous minces. L'ensemble E commun aux $E(A)$ a pour mesure l. En tout point de E, l'épaisseur de P surpasse $1 - \frac{1}{A}$, quel que soit A. Elle est donc égale à 1. La mesure de G, complémentaire de E sur P, est nulle. G est constitué par la réunion des points de P où l'épaisseur n'existe pas ou diffère de 1. L'ensemble $E(A)$ est gerbé sur P. L'ensemble $G(A)$ malgré sa mesure nulle est un résiduel de P. Les ensembles E, partie commune aux $E(A)$, et G, réunissant les $G(A)$, appartiennent aux mêmes catégories respectives.

22. Remarquons encore que, si $l(x)$ est la mesure de l'ensemble E entre un point fixe a (à gauche duquel la mesure de E sera comptée négativement) et un point variable x, l'épaisseur de E et la dérivée de $l(x)$ existent ou n'existent pas simultanément et dans le premier cas elles ont la même valeur. Soient H le complémentaire de E et $\lambda(x)$ sa longueur entre a et x. On a $l(x) + \lambda(x) = x - a$. La dérivée de $l + \lambda$ existant toujours et étant l'unité, E et H ont donc une épaisseur définie aux mêmes points et leurs deux épaisseurs quand elles existent ont pour somme 1. Or, les ensembles e de E et η de H, où respectivement l'épaisseur de E et celle de H ne sont pas définies ou diffèrent de 1, ont l'un et l'autre une mesure nulle. Donc, en dehors de l'ensemble mince $e + \eta$, l'épaisseur de E est soit zéro, soit 1. Nous conclurons de là qu'*il est impossible de construire un ensemble* E *dont l'épaisseur soit partout définie, si ni* E *ni son complémentaire ne sont de mesure nulle*. Car, dans l'hypothèse opposée à celle-ci, la dérivée $l(x)$ existerait en tout point, prendrait effectivement les valeurs 0 et 1, mais ne recevrait les valeurs intermédiaires à 0 et 1 qu'en un ensemble de mesure nulle. Or, ceci est en opposition avec une propriété essentielle des fonctions dérivées. Mais il est toujours possible de réduire un ensemble E à ne posséder que des points où son épaisseur est définie, puisqu'en retranchant de E les points où il n'en serait pas ainsi, on ne modifie la mesure de E dans aucun intervalle, donc on lui laisse la même épaisseur, définie ou indéterminée en tout point.

23. P étant toujours un ensemble parfait épais en lui-même, supposons définie sur chaque segment contigu u_n à P une fonction $y_n(x)$ prenant en a_n la valeur zéro, en b_n la valeur V_n, non nécessairement continue sur u_n, mais telle que *le maximum de* $|y_n(x)|$ *soit le terme général* w_n *d'une série convergente*. La série V_n est *a fortiori* absolument convergente. a et b étant les extrémités de P, définissons sur le segment ab une fonction y par la relation

$$y = (a \Sigma x) V_n + \omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur P, égal à 1 si x est intérieur à u_m. Je dis que y *est continu en tout point de seconde espèce de* P *et a, relativement à* x, *une dérivée nulle sur une pleine épaisseur de* P.

Le théorème se réduit à celui qui concerne l'égalité à 1 de l'épaisseur de P, si l'on fait $y_n(x) = x - a_n$, $V_n = u_n$. Alors y est la mesure entre a et x de l'ensemble complémentaire de P. La dérivée de y est l'épaisseur de ce dernier. Elle est bien nulle sur une pleine épaisseur de P.

Nous allons d'abord montrer la continuité de y en tout point ξ de P au moins pour le côté où ξ est limite de points de P. En effet, soit $Y_n(x)$ une fonction définie sur u_n seulement, continue, unioscillante, nulle pour $x = a_n$, valant V_n pour $x = b_n$. Posons, ω ayant le sens déjà dit, $Y(x) = (a \Sigma x) V_n + \omega Y_m(x)$. $Y(x)$ est continu partout, comme nous l'avons vu (**11**). Soit $\theta(x) = Y(x) - y(x)$. y sera continu aux mêmes points que θ et pour les mêmes côtés. Or

$$|Y_n(x) - y_n(x)| < 2w_n.$$

Donc, $|\theta(x)| < 2\omega w_m$. Je dis que, en tout point ξ de P, θ est continu pour tout côté où il est limite de P. Car $\theta(\xi)$ est nul, et si x tend vers ξ d'un côté où ξ est limite de points de P, le rang minimum des u_n ayant au moins un point commun avec l'intervalle $x\xi$ croît indéfiniment quand $|x - \xi|$ tend vers zéro. Sinon, du côté considéré, un des u_n serait à une distance nulle de ξ, ce qui est absurde si ξ est limite de P de ce même côté. Donc, si w_n tend vers zéro pour n infini et en particulier si la série w_n est convergente, θ et par suite $y(x)$ sont continues en tout point de seconde espèce de P des deux côtés, et du côté de P en tout point de première espèce.

Nous établirons l'égalité $y'(x) = 0$ sur une pleine épaisseur de P, grâce à un mode de raisonnement très analogue à celui qui nous a servi dans le théorème sur l'épaisseur des ensembles.

β étant un segment dont les extrémités sont situées sur P, désignons par $\sigma(\beta)$ la somme des $|V_n|$ relatifs aux intervalles u_n ayant au moins un point commun avec β et par suite intérieurs à lui (les extrémités de β étant sur P). Si les segments $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$ satisfaisant à cette dernière condition sont adjacents et consécutifs, si β est le segment réunissant les précédents, $\sigma(\beta)$ est évidemment la somme des $\sigma(\beta_i)$.

Cela posé, A étant un nombre positif quelconque et fixe, considérons, pour une valeur entière et déterminée de N, l'ensemble des intervalles $j(N, A)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° leurs extrémités sont sur P; 2° ils sont sans points communs avec les intervalles u_1, u_2, ..., u_N, donc agrégés à l'un quelconque des segments ρ_1, ρ_2, ..., ρ_{N+1} séparés sur ab par ces derniers intervalles; 3° $\sigma[j(N, A)]$ vaut au moins $\frac{1}{A}j(N, A)$. Je dis que les intervalles $j(N, A)$ forment un système fermé. En effet, soit $\alpha_p\beta_p$ un intervalle $j(N, A)$ tendant, pour p infini, vers un intervalle $\alpha\beta$. Il nous faut montrer que $\alpha\beta$ satisfait aux trois conditions des intervalles $j(N, A)$. D'abord α_p et β_p étant sur P, il en est de même de α et de β (première condition). $\alpha_p\beta_p$ tendant vers un intervalle limite et étant toujours agrégé à l'un des segments ρ_m, est à partir d'une certaine valeur de p situé toujours sur un même ρ_m. Donc $\alpha\beta$ est sur ce dernier et par suite sans points communs avec u_n pour $n \leqq N$ (deuxième condition). Enfin, nous avons vu, en établissant la continuité de f, que, α_p tendant vers α sans quitter P et β_p tendant de la même façon vers β, les plus petits indices des u_n intérieurs soit à $\alpha\alpha_p$ (ou $\alpha_p\alpha$), soit à $\beta\beta_p$ (ou $\beta_p\beta$), croissent indéfiniment avec p. Donc $\sigma(\alpha_p\alpha)$ [ou $\sigma(\alpha\alpha_p)$ selon que α est supérieur ou inférieur à α_p] et $\sigma(\beta_p\beta)$ ou $\sigma(\beta\beta_p)$ tendent vers zéro. $\sigma(\alpha_p\beta_p)$ ne différant de $\sigma(\alpha\beta)$ que par la somme des deux nombres précédents affectés d'un signe convenable, on a bien $\lim. \sigma(\alpha_p\beta_p) = \sigma(\alpha\beta)$ et

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sigma(\alpha\beta) = \lim \frac{1}{\beta_p-\alpha_p}\sigma(\alpha_p\beta_p) \geqq \frac{1}{A}$$

(troisième condition).

Le système $j(N, A)$ étant fermé est équivalent à un système strict choisi en lui-même, soit (j). Les points intérieurs à au moins un $j(N, A)$ ou, ce qui est équivalent, à au moins un (j), forment des intervalles i deux à deux distincts. Nulle extrémité de l'un des i n'est intérieure à l'un des $j(N, A)$. Tout point de i étant intérieur à au moins un (j) et à deux au plus, les extrémités des (j) intérieures à i le décomposent en segments alternativement agrégés à un seul (j) ou à deux (j). Soient j_1 les premiers et j_2 les seconds. On a $i = \Sigma j_1 + \Sigma j_2$ et la longueur totale des (j) intérieurs à i est évidemment supérieure à i et exactement égale à $\Sigma j_1 + 2\Sigma j_2 = i + \Sigma j_2$. On a de même $\sigma(i) = \Sigma\sigma(j_1) + \Sigma\sigma(j_2)$. D'ailleurs, tout intervalle (j) ayant des points communs avec i et par suite intérieur à i, est décomposé en un j_1 et deux j_2, et $\sigma(j)$ vaut la somme des nombres $\sigma(j_1)$ et $\sigma(j_2)$ relatifs aux éléments j_1 et j_2 de (j). Donc, pour chaque intervalle i, chaque j_2 appartenant à deux (j) et chaque j_1 à un seul,

$$\Sigma\sigma(j) = \Sigma\sigma(j_1) + 2\Sigma\sigma(j_2),$$

la sommation étant dans les deux membres étendue à tous les j, j_1, j_2 intérieurs à i. Mais le premier membre est au moins $\frac{1}{A}\Sigma(j)$, donc au moins $\frac{1}{A}i$. Le second membre est inférieur à $2\sigma(i)$. Donc

$$i < 2A\sigma(i).$$

Telle est l'inégalité vérifiée par chaque champ recouvert par les $j(N, A)$. Ces champs sont deux à deux distincts par définition et intérieurs aux $N+1$ segments ρ_m. Les u_n intérieurs à l'un des i ont donc un indice n supérieur à N. Donc, si t_N désigne la somme $\sum_{N+1}^{\infty}|V_n|$, la somme des i, longueur totale du champ recouvert par les $j(N, A)$, est au plus $2At_N$. Cette longueur tend vers zéro quand N croît indéfiniment.

Considérons maintenant l'intervalle $u'_n(A)$ de même milieu que u_n et obtenu en rallongeant u_n de chaque côté de $A w_n$. La longueur de u'_n vaut donc $u_n + 2Aw_n$.

Excluons de ab : 1° les *segments* $u_1, u_2, \ldots, u_N$; 2° les *segments* $j(N, A)$; 3° les *segments* $u'_{N+p}(A)$, p étant un entier positif quelconque. La totalité des points exclus forme un ensemble dont la mesure est inférieure à

$$\sum_1^N u_n + 2At_N + \sum_{N+1}^{\infty} u'_n(A) = \sum_1^{\infty} u_n + 2A(t_N + s_N),$$

en posant $s_N = \sum_{N+1}^{\infty} w_n$ (s_N vaut au moins t_N). l désignant la longueur de P, soit $b - a - \sum_1^{\infty} u_n$, les points exclus ont une mesure au plus égale à $b - a - l + 2A(t_N + s_N)$. Si donc N est choisi assez grand pour que $4As_N$ soit inférieur à l, le segment ab comprend des points non exclus. Ces points forment un ensemble E(N, A) dont la mesure vaut au moins $l - 4As_N$.

Je dis d'abord que $E(N, A)$ est agrégé à P et même ne comprend que des points de seconde espèce de P. En effet, le segment u_n étant agrégé au segment u'_n (et intérieur à lui, si $w_n \neq 0$), tous les segments u_n, que leur indice soit inférieur à $N + 1$ ou supérieur à N, sont compris dans les éléments constituant le complémentaire de $E(N, A)$ sur ab.

$E(N, A)$ est donc agrégé à P. Sa mesure surpasse $l - 4As_N$. Donc, son complémentaire relatif à P a une mesure inférieure à $4As_N$. D'ailleurs $E(N, A)$ est inclus dans $E(N+1, A)$. Car, tous les éléments exclus de ab pour obtenir $E(N+1, A)$ figurent parmi ceux qui concernaient $E(N, A)$. En effet : 1° le complémentaire de $E(N)$ est formé pour une part des segments $u_1, u_2, \ldots, u_N, u'_{N+1}, u'_{N+2}, \ldots$, ensemble contenant celui des segments $u_1, u_2, \ldots, u_N, u_{N+1}, u'_{N+2}, \ldots$, relatifs à $E(N, A)$, puisque u'_{N+1} contient u_{N+1} ; 2° le reste du complémentaire de $E(N, A)$ est constitué par les éléments en excès dans les segments $j(N, A)$. Or, tout segment $j(N+1, A)$ est un segment $j(N, A)$. Car, d'abord $j(N+1)$ vérifie la condition $\sigma(j) \geqq \frac{1}{A} j$, et possède ses deux extrémités sur P; de plus, $j(N+1)$ entièrement étranger à chacun des intervalles $u_1, \ldots, u_{N+1}$ l'est en particulier aux N premiers de ces intervalles. C'est donc bien un intervalle $j(N, A)$.

Donc, l'ensemble $E(A)$ réunissant tous les $E(N, A)$ et agrégé à P comme chacun d'eux, a pour mesure la limite de leurs mesures, soit l. $E(A)$ est une pleine épaisseur de P. Je dis que, ξ étant un point quelconque de $E(A)$, donc un point agrégé à un certain $E(N, A)$ (et à tous les suivants), le quotient $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ ne peut avoir de limites excédant $\frac{3}{A}$ en valeur absolue, quand x tend vers ξ par valeurs inférieures ou supérieures.

En effet, ξ agrégé à $E(N, A)$ est un point de seconde espèce de P, nécessairement intérieur à l'un des segments $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{N+1}$, soit à ρ_i. x tendant vers ξ finit par devenir et rester intérieur à ρ_i. x étant agrégé à ρ_i, supposons-le d'abord situé sur P. On a évidemment et en supposant par exemple $\xi < x$,

$$|f(x) - f(\xi)| \leqq (\xi \Sigma x) |V_n| = \sigma(\xi x)$$

et pour $x < \xi$,

$$|f(x) - f(\xi)| \leqq \sigma(x\xi).$$

Or, nous avons $\sigma(\xi x)$ ou $\sigma(x\xi) < \frac{1}{A}|x - \xi|$, sinon ξx serait un segment $j(N, A)$ et ξ serait étranger à $E(N, A)$. Donc

$$\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| < \frac{1}{A}$$

quel que soit x dans ρ_i sur P.

Soit maintenant x intérieur à ρ_i et en même temps étranger à P, donc intérieur à un intervalle u_m dont l'indice excède nécessairement N. On a, ξ n'étant ni intérieur ni extrême à u'_m, $|x - \xi| > A w_m$. Or, a_m et b_m étant les extrémités de u_m, supposons d'abord $x > \xi$. Alors

$$f(x) - f(\xi) = y_m(x) + f(a_m) - f(\xi).$$

Donc, $|f(x) - f(\xi)|$ est inférieur à

$$w_m + \frac{1}{A}(a_m - \xi) < \frac{2}{A}(x - \xi).$$

Si x est inférieur à ξ, $f(\xi) - f(x) = f(\xi) - f(b_m) + V_m - y_m(x)$. Alors $|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{A}(\xi - b_m) + 2w_m < \frac{3}{A}(\xi - x)$. Donc, quelque soit x sur ρ_i, agrégé ou étranger à P, $\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right|$ est inférieur à $\frac{3}{A}$. Aucune des valeurs limites de ce quotient ne peut donc excéder $\frac{3}{A}$.

Donnons à A une suite discrète de valeurs croissantes et tendant vers $+\infty$. Les ensembles E(A) correspondants sont chacun contenus dans le précédent. Car, si $A < A'$, $E(N, A')$ est inclus dans $E(N, A)$. La mesure de chacun des E(A) étant l, ils ont en commun un ensemble ayant cette même mesure et, comme eux tous, agrégé à P. Cet ensemble E est donc une pleine épaisseur de P. En un point ξ de E, aucune valeur limite de $\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right|$ ne saurait, x tendant vers ξ, surpasser $\frac{3}{A}$, si grand que soit A. Donc, en ξ, f a une dérivée nulle. Or, E est une pleine épaisseur de P. C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LES NOMBRES DÉRIVÉS.

24. Nous appellerons *variation* (ou *variation simple*) d'une fonction continue f entre a et b, la différence $f(b) - f(a)$. Nous appellerons *variation absolue* (ou arithmétique) de f entre a et b la valeur absolue de la variation simple de f entre les mêmes points, soit $|f(b) - f(a)|$, et enfin *variation relative entre a et b* le quotient par $b - a$ de la variation simple de f entre ces points, soit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nous désignons respectivement les trois nombres définis à l'instant par les notations $V(f, a, b)$ ou $(aVb)f$, $VR(f, a, b)$ ou $(aVRb)f$, $VA(f, a, b)$ ou $(aVAb)f$. La lettre f pourra être supprimée quand il n'y aura aucune ambiguïté possible concernant la fonction dont il s'agit. D'après les définitions posées, nous avons

$$V(f, b, a) = -V(f, a, b), \qquad VA(a, b) = VA(b, a), \qquad VR(a, b) = VR(b, a).$$

Je rappelle que, sauf mention expresse du contraire, de deux nombres énoncés successivement sous forme de lettres, et jouant des rôles symétriques, le premier est toujours supposé moindre que le second. En vertu de cette règle, si a est inférieur à b, nous n'écrirons jamais $VA(b, a)$ ni $VR(b, a)$, mais toujours $VA(a, b)$ et $VR(a, b)$. En particulier, $b - a$ étant positif, une inégalité telle que $VR(f, a, b) < \alpha$ ou $> \beta$ peut encore s'écrire

$$f(b) - f(a) < \alpha(b - a) \qquad \text{ou} \qquad > \beta(b - a).$$

25. La variation relative $VR(f, x, x + h)$ de f entre un point immobile x et un point variable $x + h$, suivie quand h tend vers zéro par valeurs toutes positives, possède dans le cas le plus général, pour champ de ses valeurs limites, un segment continu, fini ou infini, dont l'extrémité maximum Δ_d est appelée *nombre dérivé supérieur droit*, l'extrémité minimum δ_d étant le *nombre dérivé inférieur droit*. Ces deux nombres peuvent être infinis. Nous sommes conduits à distinguer sept cas : 1° $\Delta_d = \delta_d = +\infty$; 2° $\Delta_d = +\infty$, δ_d fini; 3° $\Delta_d = +\infty$, $\delta_d = -\infty$; 4° Δ_d fini, δ_d fini, avec $\Delta_d > \delta_d$; 5° $\Delta_d = \delta_d$, l'un et l'autre finis; 6° Δ_d fini, $\delta_d = -\infty$; 7° $\Delta_d = \delta_d = -\infty$.

Dans les cas 1°, 5°, 7°, où Δ_d et δ_d coïncident, on dit que $f(x)$ a une *dérivée droite*, limite unique du quotient $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$ quand h tend vers zéro par valeurs positives. La dérivée est alors la valeur commune des deux dérivés extrêmes supposés coïncidents, $+\infty$ la première fois, un nombre fini la seconde, $-\infty$ la troisième.

Supposons Δ_d et δ_d distincts. Soit μ_d un nombre compris entre Δ_d et δ_d. L'égalité $f(x+h) - f(x) = \mu_d h$ est réalisée pour une infinité de valeurs positives de h tendant vers zéro, à cause de la continuité du quotient $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$, effective tant que h diffère de zéro. En effet, $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$ admettant pour valeurs limites Δ_d et δ_d séparés par μ_d, il existe un nombre h_1 tel que $\mathrm{VR}(f, x, x+h_1) > \mu_d$, puis h_2 inférieur à h_1 tel que $\mathrm{VR}(f, x, h_2) < \mu_d$, h_{2n-1} et h_{2n} se définissant tour à tour, positifs, décroissants contrairement à l'indice, tendant vers zéro, et satisfaisant alternativement à l'une et à l'autre des inégalités $\mathrm{VR}(f, x, x+h_{2n-1}) > \mu_d$ et $\mathrm{VR}(f, x, x+h_{2n}) < \mu_d$. Entre deux termes de la suite h_m, la fonction continue $\mathrm{VR}(f, x, x+h)$ prend donc au moins une fois la valeur μ_d; μ_d sera appelé un *dérivé médian droit* de f en x.

L'égalité d'un dérivé extrême avec la variation relative de f entre x et $x+h$, réalisée pour une infinité de valeurs de h, tendant vers zéro, est un cas exceptionnel.

On définit pareillement, en faisant tendre h vers zéro par valeurs négatives, les deux *dérivés gauches*, *supérieur* Δ_g et *inférieur* δ_g, respectivement plus grande et plus petite limite de la variation relative de f entre $x+h$ et x quand h tend vers zéro par valeurs négatives, et les *dérivés médians gauches*, qui sont tous les nombres intermédiaires à Δ_g et δ_g, et qui coïncident pour une infinité de valeurs négatives infiniment petites de h avec $\mathrm{VR}(f, x+h, x)$.

Quand les dérivés extrêmes gauches coïncident, leur valeur commune prend le nom de *dérivée gauche*. f est dite avoir une *dérivée*, si les deux dérivées droite et gauche existent et coïncident.

Pour éviter des confusions, nous qualifierons souvent de « bilatérale » la dérivée ordinaire d'une fonction f. Une dérivée valant pour un seul côté, qu'il est inutile de préciser, sera appelée dérivée « unilatérale ». Une dérivée latérale sera considérée comme la réunion des deux dérivés extrêmes relatifs au même côté et non pas comme un dérivé médian.

26. Ces définitions pouvant présenter dans l'esprit du lecteur certaine obscurité quand elles s'appliquent à des nombres infinis, expliquons à titre d'exemple leur sens dans deux ou trois de ces cas :

1° Un nombre dérivé gauche est $+\infty$, et il n'y a point de dérivée gauche. On a alors forcément $\Lambda_g = +\infty$, δ_g étant fini ou infini négatif. La traduction arithmétique de cette hypothèse est l'existence, si petit que soit α et si grand que soit A, d'un nombre positif h inférieur à α, tel que

$$\mathrm{VR}(f, x-h, x) > \mathrm{A} \qquad \text{ou} \qquad f(x) - f(x-h) > \mathrm{A}h,$$

sans que ces inégalités soient vérifiées pour tous les nombres h inférieurs à un nombre positif α. Ou encore, il y a deux suites $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$; $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n, \ldots$, décroissant à zéro et telles que, pour la première, $\mathrm{VR}(f, x, x-h_n)$ tende vers $+\infty$, $\mathrm{VR}(f, x, x-h'_n)$ tendant soit vers $-\infty$, soit vers un nombre fini. Au contraire, 2° on a la dérivée gauche $+\infty$ en x, si, quel que soit A, on peut calculer α de manière que la simple inégalité $0 < h < \alpha$ entraîne

$$f(x) - f(x-h) > \mathrm{A}h.$$

$+\infty$ est alors la limite de $\dfrac{f(x) - f(x-h_n)}{h_n}$ pour toute suite h_n décroissant vers zéro.

Enfin, 3° f a pour dérivée $-\infty$ en x, si à tout nombre positif A on peut faire correspondre un nombre α positif, tel que la seule condition $|h| < \alpha$ entraîne $\dfrac{f(x-h) - f(x)}{h} < -\mathrm{A}$.

27. Le théorème suivant nous permettra fréquemment d'éliminer *a priori* l'hypothèse de certaines associations de valeurs pour les quatre nombres dérivés extrêmes d'une même fonction en un même point.

THÉORÈME. — *Les points où le dérivé supérieur pour l'un des côtés est moindre que le dérivé inférieur pour l'autre côté forment un ensemble dénombrable.*

Nous démontrerons préalablement une propriété générale des ensembles parfaits à deux dimensions (¹). Donnons le nom de *sommet* d'un tel ensemble P à l'un de ses points M, s'il existe un angle TMT′ d'ouverture inférieure à π et contenant tous les points de P voisins de M, j'entends tous les points de P situés à une distance de M inférieure à un certain nombre positif dépendant seulement de M. Je dis qu'un ensemble parfait ne peut posséder qu'une infinité dénombrable de sommets. En effet, convenons d'appeler « suffragant » d'un élément quelconque N de P, tout point H du plan, pour lequel N est sur P le point plus rapproché de H. Géométriquement, la propriété caractéristique des suffragants de N est que le cercle de centre H et de rayon HN ne contient à son intérieur aucun point de P et n'en possède sur sa circonférence aucun différent de N. Tous les points intérieurs au rayon HN sont suffragants de N si H l'est. Un point H du plan ne peut évidemment être suffragant de plus d'un point de P. Tout point de P n'a pas nécessairement de suffragant. Mais nous allons montrer que les suffragants de tout sommet de P forment un ensemble contenant une aire. Des aires deux à deux distinctes étant nécessairement en infinité dénombrable, la même propriété de puissance en résultera bien pour les sommets de P.

Soient donc M un sommet de P et γ un cercle de centre M et de rayon ρ, tel que tous les points de P intérieurs à γ soient dans le secteur TMT′ d'angle au centre α inférieur à π. Enlevons du cercle γ, de part et d'autre de ce secteur, un quadrant de γ. Il reste dans γ un secteur $T_1MT'_1$ d'ouverture $\pi - \alpha$. Limitons ce dernier à sa portion intérieure au cercle γ' concentrique à γ et de rayon moitié moindre. Le secteur de γ' obtenu, soit $\tau M\tau'$, a tous ses points H suffragants à M. Car, la circonférence C de centre H et de rayon HM est intérieure au cercle γ et n'a de commun avec le secteur TMT′ que le

(¹) Voir *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (11 juillet 1910). L'énoncé et la démonstration s'étendent sans difficulté au cas de plusieurs dimensions.

point M. Donc, C ne contient à son intérieur aucun point de P, ni sur son contour aucun, sauf M. L'intérieur du secteur $\tau M \tau'$ est donc suffragant à M. Les M sont bien dénombrables.

Le théorème sur les nombres dérivés va se déduire immédiatement du précédent. $f(x)$ étant une fonction continue, le point $x, y = f(x)$ décrit, x parcourant le segment ab, un ensemble parfait, savoir la courbe C représentative de $f(x)$. Si, en un point x_0, Δ_d est inférieur à δ_g, soient $2p$ la somme de ces nombres et 4ω leur différence, on a $\Delta_d < p - \omega$ et $\delta_g > p + \omega$. On aura d'une part

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < p - \omega$$

dès que $x - x_0$ positif sera inférieur à un certain nombre h_1; d'autre part

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > p + \omega,$$

dès que $x - x_0$ négatif surpassera $-h_2$. Soit h le plus petit des nombres h_1 et h_2. Soit M le point de C ayant pour abscisse x_0. L'angle de sommet M, ayant pour côté gauche TM de pente $p + \omega$, pour côté droit MT′ de pente $p - \omega$ et ouvert dans le sens des y négatifs, angle valant moins de π (exactement $\pi - 2\omega$), contient manifestement tous les points de C intérieurs à la bande $x_0 - h < x_0 + h$ et *a fortiori* au cercle de centre M et de rayon h. Donc, M est un sommet de l'ensemble parfait C. Donc, l'ensemble des points M et celui de leurs projections x_0 sur Ox sont dénombrables. Le changement de x en $-x$ et de f en $-f$ nous donne la même propriété pour l'ensemble des points x, où f vérifie l'inégalité $\Delta_g < \delta_d$.

En particulier, l'ensemble des points où une fonction possède pour chacun des deux côtés une dérivée unilatérale différente, cet ensemble est dénombrable.

Nous énonçons maintenant un théorème fondamental pour cette étude.

Premier Théorème des nombres dérivés (théorème descriptif).

28. P *étant un ensemble parfait continu ou non, s'il existe une infinité d'intervalles* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *dont la longueur tend vers zéro, n croissant, dont les extrémités pour un même côté* (gauche, par exemple), $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$: 1° *sont toutes agrégées à* P, 2° *forment un ensemble partout dense sur* P; *si, d'autre part, la variation relative* l_n *de la fonction continue* f *sur* S_n, ou bien *a*) *reste constamment supérieure à un nombre fixe* k, ou bien *b*) *reste constamment inférieure à* k, ou bien *c*) *tend vers une limite unique finie ou infinie* l, *alors, dans ces conditions respectives, l'ensemble des points de* P *où, du côté opposé au premier* (donc droit d'après notre première hypothèse), f *possède a*) *son dérivé supérieur au moins égal à* k, *b*) *son dérivé inférieur au plus égal à* k, *c*) *le nombre* l *pour dérivé médian ou extrême, l'ensemble ainsi défini est partout dense sur* P, *et même c'est un résiduel de* P.

En effet, donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tendant vers zéro. Pour $x = c_n$, nous avons l'égalité

$$\frac{f(d_n) - f(x)}{d_n - x} \quad \text{ou} \quad \mathrm{VR}(f, x, d_n) = l_n.$$

Mais le quotient de différences figurant au premier membre est une fonction continue de x en c_n. Il existe donc un intervalle $c'_n c''_n$ ou σ_n contenant c_n à son intérieur, pouvant toujours être supposé inférieur à ε_n en longueur, et en tout point x duquel le quotient considéré est compris entre $l_n - \varepsilon_n$ et $l_n + \varepsilon_n$. En outre, la valeur du quotient n'étant d'ailleurs pas obligatoirement définie pour $x = d_n$, supposons c''_n entre c_n et d_n. Désignons indifféremment par E l'ensemble défini dans l'énoncé et susceptible de trois acceptions diverses suivant l'hypothèse réalisée par les l_n. Je dis que tout point ξ agrégé à une infinité de σ_n appartient à E. Il faut prouver pour cela que : 1° ξ est agrégé à P, 2° en ξ, f satisfait aux conditions différentielles énoncées. En effet, d'abord la longueur de σ_n étant inférieure à ε_n, et σ_n contenant c_n agrégé à P (les d_n n'ont aucune relation obligée avec P), ξ est un point limite de points de P, donc fait partie de P supposé parfait. D'autre part, si σ_n contient ξ, l'extrémité droite d_n de l'intervalle S_n de même indice que σ_n, surpasse ξ et en est à une distance inférieure à $\sigma_n + S_n$, σ_n et S_n empiétant l'un sur l'autre. Donc, pour la suite des σ_n contenant ξ, d_n tend vers ξ par valeurs supérieures. Enfin la variation relative $\mathrm{VR}(f, \xi, d_n)$ est, pour la même suite de valeurs de n, comprise entre $l_n - \varepsilon_n$ et $l_n + \varepsilon_n$. Donc, toutes ses valeurs limites qui sont des dérivés droits médians ou extrêmes de f en ξ sont comprises dans l'ensemble des valeurs limites de la suite l_n. Si donc $a)$ l_n surpasse k, f possède en ξ un dérivé médian ou extrême au moins égal à k et par suite on a $\Delta_d(\xi) \geqq k$; de même si $b)$ $l_n < k$, $\delta_d(\xi) \leqq k$, et si $c)$ $\lim l_n = l$ fini ou infini, $\delta(\xi) \leqq l_n \leqq \Delta_d(\xi)$.

Tout revient donc à montrer que l'ensemble des points intérieurs à une infinité d'intervalles σ_n est partout dense sur P, et même que c'est un résiduel de P. Établissons par des raisonnements élémentaires la première allégation. Soit ϖ une portion quelconque de P. Prouvons l'existence d'un point de E sur ϖ. a et b étant les points extrêmes de ϖ, soit α un point de ϖ intermédiaire aux précédents. A cause de la densité des c_n, il existe une suite de points c_n tendant vers α. La longueur de σ_n tendant vers zéro quand n croît, nous pouvons trouver un premier point c_n (désigné désormais par γ_1) agrégé à ϖ, en même temps que l'intervalle σ_n correspondant, soit ω_1, est intérieur à ab. ω_1 ayant à son intérieur γ_1 agrégé à P, contient une infinité de points de P. Soit ϖ_1 une portion de P intérieure à ω_1, a_1 et b_1 ses extrémités. Nous y déterminons de même un point c_n, désignons-le par γ_2, dont l'intervalle σ_n, soit ω_2, est intérieur à $a_1 b_1$, et nous continuons indéfiniment selon un progrès évident. Nous établissons ainsi une succession de segments ab, ω_1 $a_1 b_1$, ω_2, ..., $a_m b_m$, ω_{m+1}, ..., chacun intérieur au précédent. a_m et b_m sont les extrémités d'une portion ϖ_m de P intérieure à ω_m. α_m étant un point quelconque de ϖ_m distinct de a_m et de b_m, il existe, à cause de la densité des points c_m, une suite de ces derniers tendant vers α_m. A partir d'un certain rang, les points de cette suite auront leurs intervalles σ_n respectifs intérieurs à $a_m b_m$. Soit γ_{m+1} l'un de ces points et ω_{m+1} son intervalle σ_n. ω_{m+1} contenant un point de P, savoir γ_{m+1}, en contient une infinité; soit ϖ_{m+1} une portion de P formée par ceux-ci et a_{m+1}, b_{m+1} les extrémités de ϖ_{m+1}. Le segment ω_m étant intérieur à ω_{m-1} et doué d'une longueur infiniment petite quand son indice croît, tend vers un point ξ intérieur à lui pour toute valeur de m, et, comme nous l'avons vu, agrégé à ϖ. Donc, l'ensemble E possède au moins un point dans toute portion ϖ de P. Il est partout dense sur P. Mais notons que, seules les *valeurs limites* de l_n intervenant pour borner Δ_d ou δ_d dans les cas *a*) et *b*), il est possible de substituer, aux hypothèses respectives $l_n > k$ ou $l_n < k$, celles-ci moins restrictives : *les l_n n'admettent point de limite inférieure* (cas *a*), ou *supérieure* (cas *b*) *à k*.

29. Montrons maintenant que E est un résiduel de P. En effet, les σ_n étant définis comme plus haut, considérons l'ensemble H_0 des points de P non intérieurs à $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. Cet ensemble est évidemment fermé puisqu'un point étranger à H_0, étant intérieur à un intervalle σ_n totalement étranger à H_0, ne peut pas être point limite de cet ensemble. Je dis que H_0 est non dense sur P. Dans le cas contraire, il existerait une portion ϖ de P dont H_0 posséderait tous les points. Or, l'ensemble e_n étant dense sur P, il existe, entre les points extrêmes a et b de ϖ, au moins un point e_n. L'intervalle σ_n correspondant, renfermant e_n, contient de ϖ toute une portion dont aucun point intérieur ne fera partie de H_0. Donc, H_0 est non dense sur P. Mais ce raisonnement est fondé sur ce que l'ensemble $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ est partout dense sur P. Si nous supprimons un nombre limité de points e_n, cet ensemble ne cesse pas d'être dense. Soit donc H_p l'ensemble des points de P non intérieurs à $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots$. H_p, qui contient H_{p-1} est non dense sur P (et d'ailleurs fermé). Considérons l'ensemble H réunissant $H_1, H_2, \ldots, H_p, \ldots$. H est gerbé sur P. Soit G le résiduel de P complémentaire de H. Tout point M de G est intérieur à une infinité d'intervalles σ_n. Car, si ce point M était intérieur seulement à un nombre limité d'entre eux, le plus grand des indices de ceux-ci aurait une certaine valeur p. M appartiendrait à tous les ensembles $H_{p+1}, H_{p+2}, \ldots$, donc à H et non pas à G. Donc M est agrégé à l'ensemble E qualifié dans l'énoncé. Donc E contient G. Donc E est un résiduel de P.

30. Examinons plus particulièrement l'hypothèse *c*) et désignons par $E_d(l)$ l'ensemble des points de P où l est un dérivé droit (médian ou extrême) de f. Une conséquence essentielle pour l'ensemble $E_d(l)$ de sa propriété d'être un résiduel de P est que tout ensemble de même nature a nécessairement avec lui une infinité de points communs formant eux aussi un résiduel de P, et même celle-ci qu'une infinité dénombrable d'ensembles analogues à $E_d(l)$ ont en commun une infinité dense de points formant encore un résiduel. Nous pouvons d'ailleurs voir directement que : si nous avons deux ensembles e_n, g_n partout denses sur P, extrémités chacun pour un côté unique (identique ou différent pour l'un et l'autre) de deux familles d'intervalles correspondants S_n, T_n, les e_n étant par exemple tous extrémités gauches des S_n, les g_n étant tous extrémités droites des T_n, les variations relatives l_n de f sur S_n, q_n de f sur T_n tendant respectivement vers l et q, quand n croît, les longueurs de S_n et de T_n tendant vers zéro en même temps ; moyennant ces hypothèses, il existe sur P un ensemble partout dense où simultanément l est un dérivé médian ou extrême droit et q un dérivé extrême ou médian gauche. Il suffit, après avoir défini des intervalles τ_n analogues aux σ_n et construits pour l'ensemble (g_n, T_n), de reprendre les raisonnements du numéro **28**, en les appliquant alternativement à la suite e_n et à la suite g_n. Nous envisageons une succession de segments ab, ω_1, $a_1 b_1$, υ_2 ..., $a_{2m-1} b_{2m-1}$, υ_{2m}, $a_{2m} b_{2m}$, ω_{2m+1}, $a_{2m+1} b_{2m+1}$, ..., chacun inclus dans le précédent, les υ_{2m} étant choisis parmi les τ_n comme les ω_{2m+1} le sont parmi les σ_n. a_p, b_p étant les extrémités d'une portion ϖ_p de P intérieure à ω_p ou à υ_p selon que p est pair ou impair. La possibilité de déterminer cette suite résulte de la présence sur toute portion de P, des ensembles e_n et g_n séparément. Les portions ϖ_p ont en commun un point ξ agrégé à P, intérieur à une infinité de σ_n, à une infinité de τ_n et où, par suite, f admet les dérivés l droit et q gauche. L'ensemble des points communs à $E_d(l)$ et à $E_g(q)$, où respectivement f a pour dérivé droit l et pour dérivé gauche q, est donc bien partout dense sur P. Les dérivés peuvent être médians ou extrêmes, sans autre précision possible en général.

Il est inutile d'envisager une infinité dénombrable d'ensembles de points analogues à l'ensemble e_n. Si l'on connaît, en effet, une infinité dénombrable de quantités analogues à l, dont chacune est limite des variations relatives de f sur une suite d'intervalles pareils à S_n, à extrémités gauches situées comme les e_n sur P et partout denses sur lui, ces quantités ont deux bornes supérieures et inférieures (finies ou infinies), L et L'. Mais, quel que soit n et l'infiniment petit positif ε_n, il est visible, d'après nos hypothèses, qu'il existe sur toute portion de P assignée d'avance un point C_n extrémité gauche d'intervalle inférieur à ε_n et où la variation relative surpasse $L - \varepsilon_n$. Les C_n peuvent donc être répartis densément sur P. Il en résulte que l'ensemble $E_d(L)$ est partout dense sur P et est même un résiduel. L'ensemble $E_d(L')$ jouit également de ces propriétés. Donc, en un résiduel R de P, L et L' sont des dérivés médians ou extrêmes droits. Mais alors, en tout point de R, tout nombre intermédiaire à L et à L' est un dérivé médian droit de f. Nous n'obtenons donc rien de plus en considérant une infinité dénombrable d'ensembles de points c_n et d'intervalles S_n relatifs à une infinité dénombrable de nombres limites analogues à l, les c_n étant toujours des extrémités gauches des S_n, qu'en nous bornant à envisager deux ensembles de points et intervalles, faciles à former au moyen des premiers, et ayant trait aux bornes supérieures et inférieures des l.

Pareillement, si les ensembles associés (K) analogues à (c_n, S_n) avec des c_n extrémités des S_n pour un même côté, mais droit ou gauche selon l'ensemble (K), donnent chacun des variations relatives de f sur S_n tendant vers une limite propre pour n infini, il est superflu, pour obtenir les conclusions optimum de ces données, d'envisager plus de quatre ensembles (K), deux au plus pour chaque côté.

Applications du Premier Théorème.

Les applications du Premier Théorème fondamental seront très nombreuses au cours de ce Mémoire. En voici les principales.

31. l_n étant un nombre défini sur l'intervalle $c_n d_n$ ou S_n, infiniment bref pour n infini (l_n étant plus précisément dans ce paragraphe la variation relative de f sur S_n), convenons de dire que *l'ensemble l_n admet en un point* M *de* P *la valeur limite* λ finie ou infinie, s'il existe une suite choisie parmi les c_n et tendant vers M de manière que les nombres l_n tendent en même temps vers λ.

Les points de P analogues à M, où l'ensemble l_n admet la valeur limite λ, forment évidemment un ensemble fermé. Supposons ce dernier coïncidant avec P. Quel que soit ε, il est possible de trouver, si près que l'on veut d'un point M quelconque de P, un point c_n tel que, pour le même indice n, l_n diffère de λ de moins de ε, si λ est fini (soit du signe de λ et surpasse $1 : \varepsilon$ en valeur absolue si λ est infini). En choisissant sur P une suite M_p partout dense sur P (par exemple l'ensemble énuméré des points de première espèce de P) et, parmi les points c_n, l'un d'eux, soit γ_p, distant de M_p de moins de ε_p (infiniment petit positif quelconque) et donnant pour le nombre l_n de même indice une valeur λ_p différant de λ de moins de ε_p, si λ est fini (surpassant p en valeur absolue et du signe de λ, si λ est infini), il est visible que les γ_p sont denses sur P et que λ_p tend vers λ. Le Premier Théorème nous permet immédiatement de conclure :

Application I. — *S_n étant un intervalle infiniment bref quand n croît, et dont l'extrémité gauche* (droite) *décrit un ensemble partout dense sur l'ensemble parfait* P, *si la variation relative l_n de f sur S_n admet en tout point de* P *la valeur limite λ, finie ou infinie, λ sera un dérivé médian ou extrême droit* (gauche) *de f en tout point d'un résiduel de* P.

Quand λ est $+\infty(-\infty)$, nous disons que l_n est *non bornée supérieurement* (inférieurement) dans toute portion de P ou au voisinage de tout point de P. Dans ce cas, *f admet le dérivé supérieur* (inférieur) *droit $+\infty(-\infty)$ en un résiduel de* P.

32. Application II. — *Si l'ensemble $E_d(l)$ des points où f a pour dérivé médian ou extrême droit un nombre l est partout dense sur* P, *cet ensemble est un résiduel de* P.

$E_d(l)$ étant partout dense sur P, nous pouvons en extraire une infinité dénombrable de points $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, partout denses sur P, d'après ce principe facile à vérifier [1] qu'il est toujours possible

[1] Il suffit naturellement de prouver cette assertion pour un ensemble borné puisqu'un ensemble non borné est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles bornés. Si donc l'ensemble E est sur le segment ab, divisons ce dernier en n segments égaux et sur chacun de ceux qui contiennent au moins un point de E, choisissons indifféremment un de ceux-ci. L'ensemble des points élus pour toutes les valeurs de n est évidemment dénombrable, possède les mêmes points limites que E et en contient tous les points isolés. La démonstration s'étend immédiatement au cas des ensembles à plusieurs dimensions.

d'extraire d'un ensemble quelconque un ensemble dénombrable ayant même dérivé que lui (et même, de plus, contenant tous ses points isolés, lesquels sont en infinité dénombrable). Soit $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots,$ la suite des points de cet ensemble. l étant en c_n un dérivé droit, il existe un intervalle $c_n d_n$ d'extrémité gauche c_n, de longueur inférieure à ε_n (infiniment petit positif indépendant) et où la variation relative de f diffère de l de moins de ε_n, si l est fini, est du signe de l et supérieure en valeur absolue à n, si l est infini. Nous sommes dans les conditions d'application du théorème fondamental. L'ensemble $E_d(l)$ est donc partout un résiduel.

Sont donc des résiduels sur P, dès qu'ils sont partout denses sur P, les ensembles où zéro est un dérivé médian d'un côté, où f a son dérivé supérieur infini positif pour un côté donné, son dérivé inférieur pour un côté déterminé infini négatif. Mais ce serait une erreur de croire que dans l'hypothèse où la dérivée droite existe et vaut $+\infty$ en un ensemble partout dense sur P, cet ensemble est un résiduel. Non, tout ce qu'on peut conclure de cette hypothèse d'après le Premier Théorème, c'est que l'ensemble des points où l'un des dérivés droits (et forcément le dérivé supérieur) est $+\infty$, cet ensemble est un résiduel. Mais rien n'exige qu'en tous les points de cet ensemble le dérivé inférieur droit soit lui aussi $+\infty$. Il faudrait pour cela supposer de plus qu'il existe en tout point une dérivée droite.

35. Nous déduirons immédiatement de ce qui précède la proposition suivante :

Les points où un dérivé supérieur (ou inférieur) *de côté déterminé est infini positif* (ou négatif), *forment un ensemble ou bien non dense sur tout ensemble parfait, s'il est dénombrable, ou bien contenant un ensemble parfait, s'il est non dénombrable.*

Soit par exemple à étudier l'ensemble $E_d(+\infty)$ où le dérivé supérieur droit est $+\infty$, et que nous désignerons pour abréger par D. Nous utiliserons deux résultats généraux de la théorie des ensembles, établis l'un et l'autre dans la Note II : 1° tout résiduel d'un ensemble parfait contient lui-même un ensemble parfait; 2° un ensemble non dénombrable est dense sur l'ensemble parfait constitué par les points au voisinage desquels il est non dénombrable. Cela posé : 1° si D est dénombrable, il n'est dense sur aucun ensemble parfait, car s'il était dense sur l'un d'eux P et par suite partout dense sur une portion ϖ de P, il contiendrait un résiduel de ϖ, donc un ensemble parfait; il ne serait donc pas dénombrable; 2° si D est non dénombrable, soit Q l'ensemble parfait constitué par les points au voisinage desquels D est non dénombrable. D est partout dense sur Q. Donc, il en contient un résiduel et par suite un ensemble parfait. C. Q. F. D.

Le même énoncé vaudrait si D était l'ensemble où un dérivé médian ou extrême de f prend une même valeur α (¹).

54. Application III. — *Si une fonction admet pour un même côté une dérivée unique en chaque point, il est impossible que les deux ensembles où cette dérivée est l pour le premier, l' pour le second soient l'un et l'autre denses sur un même ensemble parfait.*

Sinon, l et l' seraient sur un même résiduel dérivés médians ou extrêmes pour le côté considéré. Il n'y aurait donc pas de ce côté une dérivée unique en tout point.

Un emploi essentiel du Premier Théorème est de démontrer la non-densité sur un ensemble parfait P de certains ensembles c_n, éléments d'une association du type (c_n, S_n), moyennant l'hypothèse de l'absence sur P de certains dérivés unilatéraux de valeur finie ou infinie donnée.

55. Application IV. — *Si le dérivé supérieur d'une fonction pour un côté donné est fini en chaque point, sur tout ensemble parfait* P *continu ou discontinu, l'ensemble des points au voisinage desquels*

(¹) *Voir* la Note 2 au sujet de la décomposition de tout ensemble en deux, l'un dense en lui-même (*noyau*), l'autre non dense sur tout ensemble parfait (*ensemble clairsemé*). D'après le théorème de M. Baire, les raisonnements faits ci-dessus pour l'ensemble D s'étendent à tout ensemble E où une fonction f *de classe un* prend une même valeur donnée α. Si, en effet, E est dense sur un ensemble parfait P, l'ensemble $f \neq \alpha$ est gerbé sur P. Donc E est un résiduel de P; il contient par conséquent un ensemble parfait. Donc *l'ensemble* $f = \alpha$ *ou bien est clairsemé et par suite dénombrable ou bien renferme un ensemble parfait.*

ce même dérivé est non borné supérieurement est non dense sur P.

Rappelons les définitions suivantes : une fonction φ est dite *bornée en un point* M *sur un ensemble* E continu ou non, mais dont M est un point limite, quand M est intérieur à un intervalle i tel que les *valeurs absolues* prises par φ aux points de E situés dans i sont inférieures à un même nombre. Si l'on veut simplement que φ soit une fonction *bornée supérieurement* (inférieurement) sur E en M, l'ensemble des valeurs positives (négatives), seules considérées, prises par φ sur E doit être inexistant ou borné. Si donc φ est non borné (ou non borné supérieurement) sur E en M, où φ peut néanmoins avoir toujours une valeur numérique finie, c'est que la circonstance suivante se produit : si petit que soit un intervalle contenant M, il y a sur lui des points de E où la valeur absolue (ou simplement la valeur elle-même) de φ surpasse l'entier n, quel que soit n. Il existe alors une suite de points M_1, M_2, ..., M_n, ..., agrégés à E, tendant vers M, et tels que la suite $\varphi(M_n)$ ait pour points limites $+\infty$ ou $-\infty$, ou l'un et l'autre (au moins le premier pour les fonctions non bornées supérieurement).

L'ensemble des points d'un ensemble parfait P (continu ou discontinu) au voisinage desquels φ est non borné sur P, est évidemment fermé. Si donc un tel ensemble est dense sur P, il contient une portion ϖ de P. Mais alors, sur toute portion ϖ' de ϖ existe, quel que soit A, un point x de P où $|\varphi(x)| > A$, et plus précisément $\varphi > A$, s'il s'agit exactement d'une fonction φ non bornée supérieurement. Restons dans cette dernière hypothèse. Si alors φ est un dérivé droit de f, f a donc un dérivé droit infini positif aux points d'un ensemble partout dense et même résiduel sur P. Donc, en supposant φ partout fini, nous aboutissons à une contradiction [1].

On obtient des théorèmes analogues pour les fonctions à dérivé supérieur gauche non borné supérieurement sur un ensemble parfait P et pour les fonctions à dérivé inférieur gauche ou droit non bornés inférieurement. L'ensemble des points de P où le dérivé considéré

[1] *Voir* MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 109, et la note au bas de cette page; également *Comptes rendus*, 23 décembre 1912.

est non borné (supérieurement ou inférieurement selon les cas) est non dense sur P. En particulier, *si une fonction admet partout une dérivée finie pour un même côté*, droit par exemple, *l'ensemble des points au voisinage desquels cette dérivée n'est pas bornée est non dense sur le continu. L'ensemble des points d'un ensemble parfait quelconque* P *où les valeurs prises par elle sur* P *ne sont pas bornées est non dense sur* P.

En effet, cette dérivée φ coïncide en chaque point avec les dérivés inférieur et supérieur droits de f. Or, l'ensemble e des points de P au voisinage desquels φ n'est pas borné sur P est la réunion de deux ensembles (pouvant d'ailleurs coïncider en tout ou partie) e_s et e_i constitués respectivement par les points où φ n'est pas borné supérieurement pour le premier, inférieurement pour le second. Si e est dense sur P, il en est de même de l'un au moins des deux ensembles e_s et e_i. Si c'est le premier, le dérivé supérieur droit de f sur un résiduel d'une portion de P est $+\infty$, et, comme f a partout par hypothèse une dérivée droite finie, nous aboutissons à une contradiction, comme on en trouverait une si e_i était dense sur P.

Encore plus particulièrement, *si f admet partout une dérivée finie* φ (donc une dérivée unique de chaque côté et la même pour les deux côtés), *sur tout ensemble parfait* P, *l'ensemble des points de* P *au voisinage desquels φ est non borné sur* P, *est non dense sur* P. Ce résultat jouera un rôle fondamental dans la dernière Partie de ce Mémoire (1).

(1) Cette proposition découle très simplement, comme celle du n° III, du théorème de M. Baire sur les fonctions limites de fonctions continues ou de classe *un*, ainsi que la suivante : Si, sur un ensemble parfait P, il existe un ensemble dénombrable et partout dense c_n où les valeurs φ de la dérivée (supposée existante en tout point) d'une fonction continue f tendent vers une limite l, l'ensemble des points où $\varphi = l$ est un résiduel sur P, et celui où φ diffère de l d'une quantité supérieure à un nombre positif quelconque α est non dense sur P.

Cet énoncé est bien visiblement inclus dans les théorèmes ci-dessus démontrés. Les deux ensembles $\varphi = l$ et $|\varphi - l| > \alpha$ ne peuvent pas, nous l'avons dit, être simultanément denses sur un même ensemble parfait P.

Rappelons que, d'après le théorème de M. Baire, sur un ensemble parfait quelconque P, l'ensemble des points de continuité (relativement à P) d'une

56. Une différence importante est à signaler entre le cas du continu et celui d'un ensemble parfait discontinu [1]. Si une famille d'intervalle S_n tendant vers zéro en longueur ont leurs extrémités gauches c_n

---

fonction de classe un est partout dense sur P, ou que l'ensemble des points où l'oscillation (relativement à P) de la fonction surpasse un nombre positif quelconque est non dense sur P. D'après ceci, le premier est un résiduel de P. Mais notre étude fournit en plus des résultats essentiels sur les nombres dérivés médians ou extrêmes, lesquels ne sont pas, comme les dérivées, des limites de fonctions continues, et ne peuvent donc pas donner lieu à une application du théorème de M. Baire.

[1] La continuité ou la discontinuité d'un ensemble parfait P où sont étudiés des nombres dérivés constituent deux cas bien distincts. Montrons-le par des exemples :

1° Si une fonction possède en tout point d'un segment continu ab un nombre dérivé positif (Δ_d ou Δ_g) pour un côté invariable, elle est croissante sur ab (démonstration analogue à celle des n^os **48** et **48**^bis). Mais nous réaliserons (**60** et **61**) des fonctions nulles sur un même ensemble parfait discontinu P et admettant en chaque point de celui-ci le dérivé droit $+\infty$. L'excès de l'une de ces fonctions sur x sera partout décroissant sur P, avec cependant le dérivé droit $+\infty$ en tout point de P.

2° Supposons qu'une fonction f ait en tout point de P *tous ses dérivés droits positifs* ($\delta_d > 0$). En résultera-t-il que f soit croissante sur P? Nullement. f est dite croissante sur P, rappelons-le, dès qu'elle est croissante de tout point de P à tout point de P, sauf le cas où ces points sont simultanément extrémités d'un même contigu, et où une variation nulle et non pas nécessairement positive de f est admise entre ces deux points. Disons qu'elle est *totalement croissante* sur P, si la restriction de la définition précédente est supprimée. D'après le Premier Théorème, les points N de P au voisinage desquels existent des couples x, x' agrégés à P et entre lesquels f n'a pas une variation positive, ces points N forment un ensemble K non dense sur P (et d'ailleurs fermé). Sinon l'inégalité $\delta_d \leq 0$ serait vérifiée en un résiduel de P. Le lecteur verra sans peine que, dans tout contigu u à K contenant des points de P, ceux-ci se répartissent en un nombre limité ou une infinité dénombrable de portions de P, sur chacune desquelles f est totalement croissante, n'ayant d'autres points d'accumulation, si elles sont en infinité, que les extrémités de u, deux à deux sans points communs, donc séparées les unes des autres par des intervalles contigus à P, f ayant une variation non positive sur chacun de ces derniers contigus. C'est là tout ce que permet de conclure de plus général l'hypothèse $\delta_d > 0$, vérifiée en tout point de P. On voit quel degré de liberté la discontinuité de P laisse à f qui serait croissante sur le continu avec la seule hypothèse $\Delta_d > 0$.

partout denses sur le continu, elles ont également leurs extrémités droites d_n partout denses. Si donc la variation relative de f sur S_n tend vers une limite l pour n infini, f possède de chaque côté l pour dérivé médian aux points de deux résiduels respectifs, donc simultanément aux points d'un même résiduel, constitué par l'ensemble commun aux deux précédents.

En particulier, si les points où le dérivé supérieur droit est $+\infty$ forment un ensemble partout dense, il en est de même des points où le dérivé supérieur gauche est $+\infty$, et il y a une infinité dense (et même résiduelle, comme toujours) de points où les dérivés supérieurs sont de chaque côté $+\infty$. Cette conclusion est à rapprocher d'une propriété connue des quatre dérivés extrêmes d'une fonction continue, savoir que le maximum et le minimum de ces quatre nombres dans un même intervalle coïncident. On le prouve en remarquant que la variation relative d'une fonction continue non linéaire f entre deux points quelconques a et b est certainement surpassée par chacun des dérivés inférieurs et surpasse chacun des dérivés supérieurs en certains points intérieurs à ab. Soient en effet (LI, p. 70) M un point figuratif de f d'abscisse comprise entre a et b, mais étranger au segment AB joignant les affixes correspondants à a et b; D une droite intermédiaire à M et à AB et parallèle à ce dernier segment; P, P', Q', Q les points communs à la courbe $x, f(x)$ et à D rencontrés sur la courbe en allant de A à B, et caractérisés respectivement ainsi : le premier en venant de A, le dernier avant M, le premier après M, le dernier avant B. En supposant M au-dessus de AB, et désignant par v le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, en P les dérivés gauches, en P' les dérivés droits sont au moins égaux à v; en Q' les dérivés gauches, en Q les dérivés droits sont au plus égaux à v. Et même les pentes de AM et de BM comprenant entre elles v (p. 213), certainement pour chaque côté sur l'arc AB, en des points divers, les dérivés δ_d, δ_g surpassent v, Δ_d, Δ_g sont inférieurs à v, l'égalité étant exclue. La démonstration serait analogue si M était au-dessous de AB.

De là résulte bien que si le dérivé supérieur droit, par exemple, est $+\infty$ en un ensemble partout dense, le maximum des trois autres dérivés extrêmes est $+\infty$ en tout point. Mais il faut faire appel au théorème fondamental pour en conclure que le dérivé supérieur gauche est $+\infty$ en un ensemble dense et de plus résiduel, donc qu'il y a en un ensemble dense et même résiduel les deux dérivés $+\infty$ de chaque côté. Enfin, de ce que les dérivés inférieurs ont pour maximum en tout point $+\infty$, toujours dans la même hypothèse de la densité de $E_d(+\infty)$, il serait illégitime de prétendre s'appuyer sur le théorème fondamental pour en conclure que ces dérivés inférieurs sont eux aussi $+\infty$ en un ensemble dense. De ce qu'un dérivé inférieur droit a pour maximum en tout point $+\infty$, nous concluons seulement à l'existence, sur un résiduel, du dérivé droit $+\infty$. Il est évident que, partout où celui-ci existera, il sera le dérivé supérieur, mais rien ne prouve et, en général, ce serait faux, qu'il soit en même temps le dérivé inférieur en aucun point.

En tout cas remarquons que toutes les fonctions φ égales à l'un quelconque des dérivés médians *pour un côté invariable* ont en tout point même maximum et même minimum; car ces nombres sont compris entre les nombres analogues relatifs aux dérivés supérieurs et inférieurs pour le côté considéré, lesquels coïncident dans tout intervalle. Mais il serait inexact, comme nous le verrons, de prendre pour φ en chaque point un dérivé médian ou extrême pour un côté indifférent. Nous trouverons, en effet, des fonctions non constantes admettant le dérivé médian zéro en tout point pour un côté au moins (p. 222).

36 *bis*. Remarquons enfin que, s'il s'agissait non pas du continu, mais d'un ensemble parfait P quelconque, rien n'obligerait (nous en verrons des exemples) les dérivés médians ou extrêmes d'un côté à prendre une valeur donnée, finie ou infinie sur un résiduel de P, sous la seule condition que cette valeur soit un dérivé médian ou extrême pour l'autre côté sur un résiduel de P. En effet, si, par exemple, le premier côté est le droit et l le dérivé médian droit constant sur un résiduel de P, il y a bien une infinité d'intervalles S_n à longueurs infiniment petites avec $\frac{1}{n}$, d'extrémités gauches partout denses sur P et où la variation relative de f tend vers l. Mais rien n'oblige les extrémités droites des S_n à être elles aussi sur P. Donc aucune conclusion pour le côté gauche n'est possible *a priori*. Il y a cependant deux sortes de cas où les S_n ont leurs deux extrémités sur P, et où la connaissance de conditions remplies par les dérivés de f pour un même côté déterminé en tous les points d'un ensemble parfait discontinu, permet d'en conclure certaines particularités pour les dérivés du côté opposé. L'un des cas, que nous examinerons le second, est celui où l'on fait expressément cette hypothèse concernant les S_n, par exemple en prenant pour S_n les intervalles contigus à P (application V ci-dessous). L'autre est celui où, du premier côté, on suppose l'existence d'*une dérivée* égale à un nombre fixe, fini ou infini, ou encore plus généralement l'existence de deux limites finies, ou simplement d'une seule bornant les dérivés du premier côté.

L'application du théorème du n° **27** nous fournit une première conclusion importante pour l'autre côté. Soit, par exemple, parmi les points de P, E l'ensemble de ceux où l est une dérivée unilatérale droite (hypothèse a). En tous les points de E, sauf éventuellement en ceux d'un ensemble dénombrable, l est un dérivé médian ou extrême gauche. De même, si en chaque point de E (dont nous ne considérons que les éléments agrégés à P), tous les nombres dérivés droits sont (b) compris entre L et L' ($L < L'$) ou seulement (c) inférieurs à L' ou seulement (d) supérieurs à L, dans chacun des cas respectifs précédents, en tout point de E, exception faite éventuellement d'un ensemble dénombrable, on aura (b) le dérivé supérieur gauche plus grand que L et le dérivé inférieur gauche moindre que L', ou seulement (c) la seconde ou seulement (d) la première de ces deux conclusions.

En particulier, si E contient P, si donc en tout point de P, l'une des hypothèses a, b, c et d est vérifiée, les conclusions correspondantes seront vérifiées non seulement en un résiduel de P, mais encore sur un ensemble ne différant de P que par une exception dénombrable. Par exemple, si en tout point de P, on a une dérivée droite infinie positive, les points de P où le dérivé supérieur gauche n'est pas $+\infty$, font un ensemble dénombrable. Nous formerons d'ailleurs des ensembles de cas où, avec une dérivée droite infinie en tout point d'un ensemble parfait (mince) P, une fonction ne possédera pas de dérivée gauche sur cet ensemble.

Supposons maintenant que l'une des hypothèses a, b, c, d soit vérifiée dans un ensemble E dense sur P, E ne contenant aucun point de première espèce gauche de P, donc tout point de E étant limite de points de P situés à sa droite. Je dis que les conclusions énumérées ci-dessus pour le côté gauche et correspondant à ces hypothèses respectives sont vraies sur un résiduel de P. Plaçons-nous, par exemple, dans la première hypothèse, des raisonnements tout pareils convenant aux autres cas.

Supposons en effet que du côté droit, sur l'ensemble E, f possède en tout point une dérivée égale à l, ce dernier nombre étant fini ou infini, positif ou négatif. Alors tout point M de E est extrémité gauche d'un intervalle MM′ tel qu'entre M et tout point de cet intervalle, la variation relative de f diffère de l d'une quantité inférieure à un nombre ε (expression à modifier comme il a été souvent expliqué, si l est infini). Mais, si M est limite du côté droit de points de P, autrement dit, si M n'est pas extrémité gauche d'intervalles contigus à P, nous pouvons trouver sur MM′ des points M_1 de P aussi voisins de P qu'on le voudra. M_1 est alors l'extrémité droite d'un certain intervalle MM_1 sur lequel la variation relative de f diffère de l de moins de ε. Notre hypothèse de l'existence de la dérivée droite l étant admise en tout point de E, le lecteur n'aura aucune difficulté à prouver la possibilité d'établir un ensemble partout dense sur P de points g_n extrémités droites d'intervalles T_n infiniment petits pour n infini, où la variation relative de f diffère de l de moins de $\frac{1}{n}$. On peut donc conclure à coup sûr de notre hypothèse l'existence en un résiduel de P du dérivé gauche médian ou extrême l.

Des développements analogues aux précédents justifient un énoncé tel que celui-ci : E *étant un ensemble agrégé à* P, *dense sur* P *et ne contenant aucun point de première espèce de* P, *si, en tout point de* E, *le dérivé inférieur pour l'un au moins des côtés surpasse* L, *alors en tout point d'un résiduel de* P, *les dérivés supérieurs des deux côtés valent au moins* L.

De même, *si, en tout point d'un ensemble* E′ *partout dense sur* P *et formé de points de seconde espèce, l'un au moins des deux dérivés supérieurs est moindre que* L′, *en tout point d'un résiduel de* P, *les deux dérivés inférieurs sont au plus égaux à* L′. Ces deux énoncés ne constituent un progrès réel que si E et E′ sont dénombrables, auquel cas le théorème du n° **27** ne fournit aucun secours.

Faisons maintenant l'hypothèse expresse que les S_n ont leurs deux extrémités sur P. C'est le cas du théorème suivant, extrêmement important et qui nous permet de conclure, en partant de l'existence de nombres dérivés partout finis sur P, à des propriétés remarquables pour les variations de f dans les contigus à P. Cette proposition est encore une conséquence immédiate du Premier Théorème.

37. Application V. — *Si les variations relatives de la fonction continue f sur les intervalles contigus à P admettent, en tout point de P, la valeur limite l finie ou infinie, l est un dérivé médian droit et gauche en tous les points d'un résiduel de P.* Ou encore, *si, au voisinage de tout point de P, certaines des mêmes variations relatives surpassent* (sont inférieures à) *un nombre fixe k, les dérivés supérieurs* (inférieurs) *de chaque côté en tous les points d'un résiduel sont au moins* (au plus) *égaux à k.*

38. (Très important.) *Si les dérivés extrêmes de f sur P sont finis en chaque point, les points de P au voisinage desquels les variations relatives de f sur les contigus à P ne sont pas bornées forment un ensemble non dense sur P.* En effet, dans le cas où l'ensemble de ces points serait dense, f posséderait de chaque côté des dérivés infinis sur un résiduel de P. On voit même qu'il est possible de maintenir la conclusion de ce dernier énoncé en restreignant l'hypothèse à l'existence en tout point, *au moins pour un côté*, d'un couple fini de dérivés extrêmes, côté pouvant d'ailleurs changer d'un point à un autre.

Ce théorème nous permettra, comme il est facile de le pressentir, d'entreprendre l'étude de la variation de f entre deux points quelconques d'un ensemble parfait P, connaissant les variations de f dans tous les intervalles contigus à P et, sur P, la valeur de dérivés extrêmes supposés finis. Nous donnerons encore deux autres énoncés trouvant leur application dans les cas où l'on sait l'inexistence sur un ensemble parfait de dérivés infinis d'un signe donné pour un certain côté (VI) ou simplement l'inexistence de dérivés infinis pour l'un au moins des côtés (VII).

39. Appelons *variation relative supérieure de f dans ab au delà de a* le maximum de la variation relative de f entre a et x,

$\mathrm{VR}(f, a, x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour les valeurs de x *comprises entre* a *et* b. Nous désignerons ce nombre par $\mathrm{VR}_s(f, a, ab)$, en supprimant même la lettre f s'il n'y a pas de confusion possible et ab pouvant être remplacé par toute autre désignation du segment ab. Le minimum du même quotient sera appelé la *variation relative inférieure de f dans ab au delà de a* et désignée par $\mathrm{VR}_i(f, a, ab)$. Entre ces deux nombres sont les *variations relatives médianes*, valeurs du quotient $\mathrm{VR}(f, a, x)$ en un point quelconque x du segment ab. On définit de même les *variations relatives supérieure* et *inférieure de f dans ab en deçà de b* comme étant respectivement le maximum et le minimum de $\mathrm{VR}(f, x, b)$ dans ab. Nous les désignerons par $\mathrm{VR}_s(f, ab, b)$ et $\mathrm{VR}_i(f, ab, b)$. La variation relative de f dans ab est une variation relative médiane ou extrême de f dans ab à la fois au delà de a ou en deçà de b. On démontre sans peine l'énoncé suivant, où u_n, savoir $a_n b_n$, désigne l'un des éléments dénombrés de l'ensemble des contigus à P.

Application VI. — *Si le dérivé supérieur droit de f n'est $+\infty$ en aucun point de l'ensemble parfait* P, *les points de* P *au voisinage desquels $\mathrm{VR}_s(f, a_n, u_n)$ n'est pas borné supérieurement forment un ensemble non dense.*

Et encore, écrivons les quatre lignes suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D} = \Delta_d < +\infty, &\quad& \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_s(f, a_n, u_n);\\
&\mathrm{D} = \delta_d > -\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_i(f, a_n, u_n);\\
&\mathrm{D} = \Delta_g < +\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_s(f, u_n, b_n);\\
&\mathrm{D} = \delta_g > -\infty, && \mathrm{VR}_n = \mathrm{VR}_i(f, u_n, b_n).
\end{aligned}$$

D, inférieur à $+\infty$, signifie : D fini ou infini négatif; D, supérieur à $-\infty$, signifie : D fini ou infini positif. Alors, si D et VR_n ont simultanément les acceptions indiquées sur l'une quelconque des quatre lignes, quand l'inégalité concernant D est vraie en tout point de P, on conclut à la non-densité sur P de l'ensemble des points de P au voisinage desquels les VR_n ne sont pas bornés dans le sens indiqué par leurs indices s ou i. Prenons par exemple la troisième ligne. On a le résultat suivant : *Si le dérivé supérieur gauche est, en tout point* *d'un ensemble parfait* P, *fini ou infini négatif, dans toute portion* ϖ *de* P, *il est possible de définir une autre portion* ϖ', *telle que, pour tout intervalle* u_n *ou* $a_n b_n$ *contigu à* ϖ', *la variation relative supérieure de f sur* u_n *en deçà de* b_n *est inférieure à un même nombre fixe* A. Quel que soit u_n contigu à ϖ' et γ_n intérieur à u_n, on aura donc

$$f(b_n)-f(\gamma_n)<\mathrm{A}(b_n-\gamma_n).$$

40. Appelons *oscillation relative* de f sur ab la plus grande valeur de $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{b-a}$, α et β étant sur ab. α et β sont respectivement des points de ab où f atteint son minimum et son maximum. Ce nombre $\mathrm{OR}(f, ab)$ est positif si f n'est pas constant entre a et b. OR est au moins égal à la valeur absolue de la variation relative de f entre a et b. D'autre part, on a

$$\mathrm{O}(f, ab)=f(\beta)-f(\alpha)=[f(\beta)-f(a)]+[f(a)-f(\alpha)],$$

les deux différences du dernier terme étant d'ailleurs positives ou nulles d'après les inégalités $f(\alpha)\leqq f(a)\leqq f(\beta)$. La plus grande de ces différences surpasse la moitié de $\mathrm{O}(f, ab)$. Il y a donc un nombre γ, savoir soit α, soit β, tel que $2|f(\gamma)-f(a)|>\mathrm{O}(f, ab)$ et par suite

$$2\,\frac{|f(\gamma)-f(a)|}{\gamma-a}>\mathrm{OR}(f, ab).$$

Donc l'une au moins des variations relatives extrêmes (supérieure ou inférieure) de f dans ab au delà de a surpasse en valeur absolue la moitié de OR (f, ab). Il en est de même de l'une au moins des variations relatives extrêmes de f dans ab en deçà de b. De là, ce théorème que nous utiliserons par la suite.

Application VII. — *Si pour un côté au moins (constant ou variable) les dérivés extrêmes de f en tout point de* P *sont finis, l'ensemble* K *est non dense sur* P, *des points de* P *au voisinage desquels l'oscillation relative de f sur* u_n *est non bornée* (¹).

(¹) Et par suite l'ensemble des points de P au voisinage desquels la série des oscillations de f sur les u_n diverge est non dense sur P, puisque ce dernier ensemble est évidemment inclus dans K (voir *Comptes rendus*, 22 avril 1912).

41. Nous avons vu que, eu égard au mode de groupement des dérivés extrêmes finis ou infinis, distincts ou confondus, en un point x et pour un même côté, 7 cas sont possibles. En associant les diverses circonstances susceptibles de se produire simultanément pour l'un et l'autre côté, on trouve 49 cas, dont chacun est réalisable en des points isolés, comme un instant de réflexion suffit à le faire comprendre. Il est également probable que ces 49 cas peuvent se présenter chacun sur tout un ensemble clairsemé (non dense sur tout ensemble parfait). Les résultats antérieurement acquis dans l'étude des dérivés, nous inclinent à considérer uniquement parmi les ensembles denses sur un ensemble parfait, ceux qui contiennent eux-mêmes un ensemble parfait. Il est donc intéressant de rechercher si chacun des 49 cas est réalisable simultanément en tous les points d'un ensemble parfait P. Certains s'éliminent immédiatement; si, par exemple, nous avons en tout point de P une dérivée droite $+\infty$, nous aurons également en tout point de P, sauf éventuellement en une exception dénombrable, le dérivé supérieur gauche $+\infty$ (**27** et **36** *bis*). Le premier cas droit ne peut donc s'associer à aucun des cas gauches 4° à 7°, du moins simultanément en tout point de P. Il y aurait lieu, quand l'un des 49 cas comprend des deux côtés au moins un dérivé extrême fini, de subdiviser ce cas selon les relations d'égalité ou d'inégalité présentées entre eux par ces deux dérivés (¹). Je laisse au lecteur le soin d'effectuer par le détail cette étude. Donnons seulement deux exemples, l'un d'*une dérivée infinie en tout point d'un ensemble parfait discontinu sans épaisseur* (cas 1° gauche et droit), l'autre d'un dérivé supérieur droit infini positif associé aux trois autres dérivés extrêmes simultanément nuls (cas 2° droit et 5° gauche).

42. *Exemple I.* — Soit un ensemble *parfait mince* E; u_1, u_2, ..., u_n, ..., ses intervalles contigus énumérés par ordre de longueurs non croissantes, la même lettre désignant l'intervalle et sa longueur. Construisons une fonction croissante $y = f(x)$ définie sur le segment $0-1$, égale à x en ses deux extrémités, avec une dérivée

(¹) On trouverait 103 modes distincts pour grouper les quatre dérivés extrêmes en un même point et non pas 85 seulement, comme je l'ai énoncé aux *Comptes rendus* (31 mai 1915). Le théorème du n° **27** élimine à lui seul trente-une de ces associations sur les ensembles non dénombrables.

infinie en ces points, pour le côté intérieur au segment, par exemple

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \sin \sqrt{x}, \qquad (0 \leqq y \leqq 1, \qquad 0 \leqq x \leqq 1).$$

Donnons-nous un nombre h_n jamais décroissant, infiniment grand avec n et tel que la série $u_n h_n$ soit convergente [1].

Soient a_n et b_n les extrémités de u_n. Posons

$$y_n = h_n u_n y\left(\frac{x - a_n}{u_n}\right) = \frac{2}{\pi} h_n u_n \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x - a_n}{u_n}},$$

pour $a_n \leqq x \leqq b_n$. y_n s'annule à l'origine a_n de u_n et prend la valeur $h_n u_n$ à son extrémité b_n. Cela posé, utilisant une notation déjà expliquée (**10**), définissons ainsi une fonction continue $f(x)$ sur le segment ab limité par les points extrêmes de E :

$$f = (a \Sigma x)\, h_n u_n + \omega y_m(x),$$

ω étant nul si x est sur E et égal à un si x étranger à E est intérieur à u_m, donc si $a_m < x < b_m$.

Je dis que f a une dérivée finie en tout point extérieur à E et infinie sur E (infinie positive, puisque f est croissant).

Si x est intérieur à un intervalle u_m, pour examiner la limite de $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ quand x' tend vers x, il suffit de considérer les valeurs de x' intérieures à u_m. La fonction f ne diffère dans u_m de y_m que par une quantité constante. y_m a, en chaque point intérieur à u_m, une dérivée finie et continue. Il en est donc de même de f. De plus, y_m a une dérivée infinie à droite en a_m et à gauche en b_m. Il en est encore ainsi de f.

Il nous suffit de montrer qu'en tout point de E limite de E du côté droit, f admet $+\infty$ pour dérivée droite et pareillement qu'en tout point de E limite à gauche, f possède $+\infty$ pour dérivée gauche.

---

[1] On peut prendre $h_n = \frac{1}{r_n^{1+\alpha}}$, α étant positif et r_n désignant le reste de la série u_n arrêtée à ce dernier terme : $r_n = u_{n+1} + u_{n+2}, \ldots$. *Voir* de la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, 3e éd., p. 407, et aussi dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, p. 223, une Note que je n'aurais pas rédigée si j'avais pris connaissance des exercices proposés par M. de la Vallée-Poussin.

Établissons la première assertion. Soient ξ un point de E distinct des a_m et x un nombre supérieur à ξ. Il y a des points de E entre ξ et x. Donnons-nous un nombre A positif si grand que nous voudrons, mais fixe. h_n croissant indéfiniment avec n, soit N le rang à partir duquel h_n surpasse A. Aucun intervalle u_n n'ayant son extrémité gauche en ξ, parmi les points $a_1, a_2, \ldots, a_N$ situés à droite de ξ, soit δ la distance à ξ de celui d'entre eux qui en est le plus voisin. δ est positif. Le segment ξ à $\xi + \delta$ ayant ses extrémités agrégées à E, tous les intervalles u_n qui ont au moins un point appartenant à ce segment sont entièrement intérieurs à lui et, se trouvant placés à droite de ξ et distants de ξ de moins de δ, ils ont tous un indice au moins égal à N. Soit x un point quelconque de ce segment $\xi, \xi + \delta$. Si x est sur E, on a $f(x) - f(\xi) = (\xi \Sigma x)\, h_n u_n$. Mais n surpassant N, h_n surpasse A. Donc, $f(x) - f(\xi) > \mathrm{A}\,(\xi \Sigma x)\, u_n = \mathrm{A}\,(x - \xi)$, l'égalité des derniers nombres provenant de ce que, E étant mince, la distance de deux quelconques de ses points est égale à la somme de ses contigus compris entre ces deux points. Supposons maintenant x hors de E, toujours entre ξ et $\xi + \delta$ et intérieur à un certain contigu u_m. On a toujours $m > \mathrm{N}$. Écrivons

$$f(x) - f(\xi) = (\xi \Sigma a_m)\, h_n u_n + y_m(x) > \mathrm{A}(a_m - \xi) + y_m(x).$$

Le quotient par x de la fonction $y = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend positivement vers zéro. Il est d'ailleurs positif et continu sur le segment o — 1 diminué du point o. Donc il possède un certain minimum positif l. D'après $\frac{y}{x} > l$ on a $\dfrac{y_n : h_n u_n}{\left(\dfrac{x - a_n}{u_n}\right)} > l$. Donc,

$$y_m(x) > l h_m (x - a_m),$$

et, d'après $m > \mathrm{N}$,

$$f(x) - f(\xi) > \mathrm{A}(a_m - \xi) + l\mathrm{A}(x - a_m).$$

Soit μ le plus petit des deux nombres 1 et l. On a

$$f(x) - f(\xi) > \mu \mathrm{A}(x - \xi),$$

quel que soit x entre ξ et $\xi + \delta$, aussi bien sur E que hors de E. δ étant positif, indépendant de x, et calculable pour chaque valeur de A, μ enfin étant une constante numérique, f possède en ξ la dérivée droite $+\infty$. On montre tout pareillement qu'en tout point de E, f a une dérivée gauche infinie positive. Donc, en tout point de E, f a la dérivée bilatérale $+\infty$.

43. Cet exemple donne lieu à l'importante remarque suivante. Ajoutons à f une fonction $t(x)$ constante dans chacun des u_n et cependant croissante entre deux points quelconques de E non simultanément extrémités d'un même intervalle contigu. Si

$$f_1(x) = f(x) + t(x),$$

la dérivée de $f_1(x)$ est la même que celle de f à l'intérieur de tout intervalle contigu à E. Dans tout autre cas, $t(x)$ n'étant pas décroissant et la dérivée de f étant $+\infty$, f_1 possède aussi la dérivée $+\infty$. Observons donc dès maintenant qu'une fonction continue n'est pas déterminée par la condition de posséder en tout point une dérivée donnée φ si cette dérivée n'est point partout finie et plus précisément si elle est infinie d'un signe unique sur un ensemble parfait, ce qui aura toujours lieu dès que l'ensemble $|\varphi| = \infty$ sera non dénombrable, auquel cas l'un des ensembles $\varphi = +\infty$ et $\varphi = -\infty$ est lui-même non dénombrable. (*Voir* LI, p. 75, où la réponse à la question précédente est considérée comme dubitative.)

44. Rien ne serait plus simple que de modifier l'ensemble précédent de façon à obtenir avec une dérivée droite infinie positive des dérivés inférieurs gauches finis, ou infinis négatifs. Remarquons d'abord que l'existence de la dérivée droite $+\infty$ en tout point d'un ensemble parfait P détermine nécessairement sur P, en dehors d'une exception dénombrable possible, le dérivé supérieur gauche $+\infty$. Mais les raisonnements faits pour établir l'existence de la dérivée droite valent encore si l'on remplace y_n par toute autre fonction $h_n u_n \mathrm{Y}\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right)$, pourvu que $\mathrm{Y}(x)$ défini de 0 à 1 et supposé égal à x aux extrémités de l'intervalle : 1° ait la dérivée droite $+\infty$ à l'origine; 2° surpasse une fonction $y = lx$ dans le même intervalle, l étant une constante positive. Prenons pour Y une fonction telle que $\sqrt{2x - x^2}$, ordonnée d'un quadrant circulaire, ayant sa tangente horizontale pour $x = 1$, ou bien telle que $x + \sqrt{x(1-x)}$, ordonnée d'une ellipse ayant ses tangentes verticales pour $x = 0$ et $x = 1$. En posant toujours $f(x) = (a\Sigma x) h_n u_n + \omega Y_m(x)$, ω étant nul si x est sur P et égal à 1, pour $a_m < x < b_m$, on a, avec la dérivée droite $+\infty$ en tous les points de P, dans le premier cas, une fonction croissante, donc à dérivés jamais négatifs admettant la dérivée gauche zéro en toute extrémité droite d'intervalle contigu à P; dans le second cas, une fonction admettant la dérivée gauche $-\infty$ aux mêmes points. Dans le premier cas, sur un résiduel de E et par suite sur tous les ensembles parfaits inclus dans ce résiduel, nous aurons en tout point la dérivée droite $+\infty$, le dérivé supérieur gauche $+\infty$, le dérivé inférieur gauche o. Dans le second cas, il sera pareillement possible d'extraire de E un ensemble parfait en tout point duquel f possédera la dérivée droite $+\infty$ et à gauche les dérivés extrêmes $+\infty$ et $-\infty$. Nous verrons un peu plus loin que l'existence d'une dérivée droite $+\infty$ ne peut se produire en tout point que sur un ensemble mince. Il est à peine utile d'ajouter qu'en changeant $f(x)$ en $-f(x)$, x en $-x$, on obtiendrait, selon les cas, des exemples de dérivées $-\infty$, de dérivées seulement droites $-\infty$, de dérivées seulement gauches $+\infty$, ou $-\infty$, en tous les points d'un même ensemble parfait.

43. *Exemple II.* — Nous allons donner un exemple de fonction possédant *sur un ensemble parfait le dérivé supérieur droit* $+\infty$, *les trois autres dérivés extrêmes étant nuls*. Nous montrerons un peu plus loin que l'ensemble parfait où ces circonstances se réalisent doit nécessairement être dépourvu d'épaisseur.

Soient P un premier ensemble parfait quelconque, $u_1, \ldots, u_n, \ldots$, ses intervalles contigus, a et b ses points extrêmes. Construisons une fonction continue f possédant : 1° une dérivée finie et continue en tout point extérieur à P; 2° une dérivée gauche nulle en tout point de P; 3° un dérivé inférieur droit nul en tout point de P; 4° un dérivé supérieur droit infini (positif) en tout point de première espèce gauche de P.

Nous prendrons $f = 0$ sur P. Pour définir f sur u_n, considérons en premier lieu une fonction $Y(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $Y(x)$ est définie sur le segment $0 - 1$, positive à l'intérieur, nulle aux extrémités, continue partout; 2° $Y(x)$ admet une dérivée continue en tout point intérieur au même segment, nulle et continue en 1, infinie à l'origine, la dérivée en ces deux derniers points étant nécessairement relative au seul côté intérieur au segment $0-1$. Par exemple, on peut choisir $Y=(1-x)^2\sqrt{x}$. Considérons la fonction suivante définie entre 0 et 1, $y(x)=\sin^2\frac{1}{x}\,Y(x)$. Elle n'est jamais négative. Elle est nulle une infinité de fois en des points $x=\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \ldots,$ tendant vers l'origine par valeurs décroissantes. Elle touche Y en une infinité de points $x=\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ (k entier $\geqq 0$) et ne l'excède jamais. Donc, en tout point intérieur à l'intervalle $0-1$, y a une dérivée finie; au point 1, où Y et Y′ s'annulent et sont continues, y et y' s'annulent et sont continues. A l'origine, y a son dérivé inférieur droit nul à cause de $y\geqq 0$ pour toute valeur de x et $y=0$ pour $x=\frac{1}{k\pi}\cdot$ A l'origine, le dérivé droit supérieur de y est $+\infty$, à cause de $y=Y$ pour $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ et de 'existence d'une dérivée infinie positive pour Y à l'origine. Enfin, le maximum de y dans l'intervalle $0-1$ est un nombre positif l au plus égal au maximum de Y. Prenons $y_n(x)=u_n^2 y\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right)\cdot$ x variant de a_n à b_n, $\frac{x-a_n}{u_n}$ varie de 0 à 1. u_n est donc le champ de définition de y_n. y_n s'annule en a_n et b_n, est continue intérieurement à u_n et bornée par les nombres 0 et lu_n^2 dont le second est infiniment petit avec u_n. Donc, si nous prenons f égal à y_n sur chaque u_n et à 0 sur P, f est continu.

y_n a une dérivée finie en tout point intérieur à u_n. Donc, f en dehors de P a une dérivée finie (et même continue) en tout point. En b_n, y_n a une dérivée gauche nulle. Il en est donc de même de f. Pareillement f en tout point a_n a mêmes nombres dérivés droits que y_n, donc $+\infty$ et 0. Je dis que f possède en tout point de P le dérivé inférieur droit zéro. Ceci a été prouvé pour les points a_n. Soit ξ un point de P distinct des a_n, donc limite de points de P situés à sa droite. On a $f(\xi)=0$. x tendant vers ξ, quand x est sur P, $f(x)$ est nul; quand x est étranger à P, $f(x)$ n'est en tout cas jamais négatif.

Donc $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ admet la limite zéro, mais ne possède aucune limite négative. Donc, en ξ, le dérivé inférieur droit est nul. Cette propriété appartient donc à tous les points de P distincts des a_n ou confondus avec eux. On montre par le même raisonnement que, dans le cas où ξ est sur P et distinct des b_n, donc limite de points de P situés à sa gauche, la plus grande limite du quotient $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$, x tendant vers ξ en croissant, est zéro. Pour montrer qu'en ξ comme en b_n, il y a une dérivée gauche égale à zéro, il reste donc seulement à montrer que le dérivé inférieur gauche est nul en tout point de P.

Donnons-nous ε, nombre positif quelconque, et montrons la possibilité de calculer un nombre positif h pour la valeur de ξ considérée de façon que, si $\xi-h<x<\varepsilon$, on ait $f(\xi)-f(x)>-(\xi-x)\varepsilon$, ou $f(x)<(\xi-x)\varepsilon$. Puisque $\frac{y(x)}{1-x}$ tend vers zéro pour $x=1$ et est continu quand x varie entre 0 et 1, cette fonction a un certain maximum μ. Donc $\frac{y_n(x)}{b_n-x}=u_n\frac{y\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right)}{1-\frac{x-a_n}{u_n}}$ a dans l'intervalle a_nb_n pour maximum μu_n. Soit donc N un entier à partir duquel, pour toutes les valeurs de n, $\mu u_n<\varepsilon$, ce qui est possible, u_n tendant vers zéro. Alors, quel que soit x appartenant à un intervalle u_m d'indice supérieur à N, on a $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$. D'autre part, pour les intervalles en nombre fini $u_1, u_2, \ldots, u_N$ sur chacun desquels f ou la fonction y_n de même rang a une dérivée gauche nulle en b_n, il existe un nombre h tel que, pour tout point x intérieur à l'un de ces intervalles, soit u_m, et distant de son extrémité droite de moins de h, on ait $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$. Alors, quel que soit x appartenant à un intervalle quelconque u_m d'indice supérieur, inférieur ou égal à N, mais en tous cas distant de b_m de moins de h, on aura $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$. Soient maintenant ξ un point de P et x un nombre quelconque compris entre $\xi-h$ et ξ. Si x est sur P, on a $f(x)-f(\xi)=0$. Si x n'est pas sur P, mais est intérieur à un intervalle u_m, on a $b_m-x<\xi-x<h$, donc $f(x)<(b_m-x)\varepsilon$, donc $<(\xi-x)\varepsilon$, et enfin $0\leqq\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}>-\varepsilon$. En tout point ξ de P, il y a donc une dérivée gauche nulle. Et d'autre part nous montrons même, fait sans intérêt général d'ailleurs, que sur l'ensemble P des points ξ, la convergence vers zéro de $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ est uniforme, le paramètre de la convergence étant $x-\xi$, infiniment petit négatif.

En résumé, nous avons construit une fonction f possédant, en tout point une dérivée gauche nulle, en tout point un dérivé droit inférieur nul, et cependant, en un ensemble de points a_n dense sur un ensemble parfait P, un dérivé supérieur droit infini. Mais, l'ensemble des a_n étant dense sur P, les points où le dérivé supérieur droit est $+\infty$ forment un résiduel de P. Ce dernier contient donc lui-même un ensemble parfait en chaque point duquel, comme il a été annoncé, le dérivé supérieur droit est $+\infty$, les trois autres étant nuls.

45 *bis*. On transformerait sans aucune difficulté cet exemple de façon à joindre en tout point à un dérivé supérieur droit $+\infty$ trois autres dérivés extrêmes finis distincts ou confondus, leurs inégalités devant toujours être compatibles avec les conclusions des nos **27** et **36** *bis*.

Second Théorème des nombres dérivés (Théorème métrique).

46. Nous arrêterons là ce début de réalisation ou d'élimination des 49 cas définis plus haut. Nous allons porter notre attention sur le point de savoir si ces divers cas peuvent se présenter sur la totalité d'un ensemble épais, afin de retenir uniquement ceux qui répondent à cette condition. Non pas que les ensembles minces soient négligeables dans la détermination des fonctions par leurs nombres dérivés. Tout au contraire, nous verrons et il est connu qu'une fonction peut avoir sur une épaisseur pleine une dérivée nulle et n'être constante dans aucun intervalle. Mais il se trouvera que les opérations inverses de la dérivation examinées ultérieurement et appliquées à des données φ conduisent toujours à des fonctions indépendantes d'une modification arbitraire de φ sur un ensemble sans épaisseur. Nous découvrirons ultérieurement des rapports caractéristiques de ces fonctions avec les ensembles parfaits minces et cela nous justifiera d'attacher une grande importance aux propriétés métriques des ensembles sur lesquels les divers 49 cas distingués plus haut se réalisent.

47. Nous éliminerons préalablement deux circonstances impossibles à obtenir en tout point du continu. Elles nous seront l'occasion d'appuyer cette opinion justifiée par d'autres exemples, que la démonstration de certaines propriétés des fonctions dérivées se simplifie souvent quand on les envisage seulement comme des nombres dérivés (extrêmes ou médians) pour un côté ou pour l'autre, c'est-à-dire comme des valeurs limites particulières des quotients $\mathrm{VR}(f, x, x')$ ou $\mathrm{VR}(f, x', x)$, quand, x étant invariable, x' tend vers x par valeurs supérieures ou inférieures. Ainsi la proposition qu'une fonction dont la dérivée est partout nulle est une constante se démontre très simplement sans faire appel à aucune formule d'accroissements finis quand on remplace la dérivée par un dérivé quelconque pour un côté invariable.

48. *Une fonction continue possédant en chaque point et d'un certain côté invariable un dérivé nul, médian ou extrême, est une constante.*

Supposons par exemple que le dérivé considéré soit droit. Soit ab un segment en tout point duquel l'hypothèse du théorème est vérifiée. Donnons-nous un nombre positif quelconque ε. Il existe certainement un point x à droite de a et dans l'intervalle ab, où l'on a

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon(x - a). \tag{1}$$

Soit ξ la borne à droite des points situés entre a et b où la relation précédente est vérifiée. Je dis que ξ est en b. En effet, en cette borne droite ξ, on a, par raison de continuité, la relation

$$|f(\xi) - f(a)| \leqq \varepsilon|\xi - a|.$$

Mais en ξ il y a un dérivé médian nul à droite; donc, si ξ n'est pas en b, il y a un point ξ_1, compris entre ξ et b, où l'on a

$$|f(\xi_1) - f(\xi)| < \varepsilon(\xi_1 - \xi).$$

En ajoutant les deux dernières inégalités, on trouve

$$|f(\xi_1)-f(a)|<\varepsilon(\xi_1-a),$$

et ξ n'est pas la borne droite des points vérifiant l'inégalité (1). Donc ξ est en b. On a donc $|f(b)-f(a)|\leqq\varepsilon(b-a)$, quel que soit ε. Donc $f(b)=f(a)$. Immobilisons a. La valeur de f en un point arbitraire b est $f(a)$, une constante.

Si nous remplaçons les mots *dérivé médian droit* par le simple mot *dérivée*, nous avons sans autre modification une démonstration du théorème sur les fonctions à dérivée partout nulle, qui, partant immédiatement de la définition de la dérivée, me paraît atteindre beaucoup plus rapidement son but que la démonstration habituelle, celle-ci supposant l'établissement préalable de la formule des accroissements finis. Un corollaire intéressant du théorème démontré à l'instant est celui-ci :

Une fonction continue ne peut pas avoir en tout point d'un intervalle ses dérivés extrêmes d'un même côté doués de signes opposés, ni en particulier égaux l'un à $+\infty$, l'autre à $-\infty$.

Car alors, en tout point de cet intervalle elle admettrait de ce même côté le dérivé médian zéro et serait constante dans l'intervalle. Tous ses dérivés seraient nuls contrairement à l'hypothèse énoncée.

Ces résultats sont établis dans l'ouvrage de M. Lebesgue (p. 72), mais à l'aide d'inégalités généralisant pour les nombres dérivés la formule des accroissements finis.

48 *bis*. On montre par un raisonnement de même forme qu'un nombre dérivé d'un certain côté ne peut pas être infiniment grand d'un signe donné en tout point d'un intervalle. Car, si par exemple le dérivé inférieur gauche était partout $-\infty$ sur le *segment ab*, il y aurait, si grand que fût le nombre positif fixe A, des points x' compris entre a et b, et où l'on aurait $f(b)-f(x')<-A(b-x')$. La borne à gauche des points x' (tous situés par hypothèse entre a et b) ne saurait être (on le voit comme dans le cas du dérivé nul) un point ξ supérieur à a. Donc la borne à gauche des points x est en a et l'on a $f(b) - f(a) \leq - A(b - a)$, ce qui est absurde, A étant un nombre positif quelconque et f étant continue, donc finie en a et b.

Les deux théorèmes précédents n'empêchent pas, nous le montrerons plus loin (**65**), qu'une même fonction continue ne puisse posséder les trois dérivés zéro, $+\infty$ et $-\infty$ à la fois, au moins unilatéralement en tout point, et des deux côtés sur une épaisseur pleine.

49. Pour démontrer l'impossibilité de certaines associations de dérivés finis ou infinis sur des ensembles épais, nous tirerons grand parti du théorème suivant, susceptible, selon les applications, de diverses formes particulières qui n'en modifient ni l'esprit, ni le mode de démonstration. Cette nouvelle proposition concerne les rapports des nombres dérivés et des ensembles parfaits, discontinus exclusivement. Le Premier Théorème ne distinguait pas le continu des autres ensembles parfaits.

Second Théorème. — *Si en tout point d'un ensemble parfait d'épaisseur e entre ses points extrêmes a et b, le dérivé supérieur droit de la fonction continue f surpasse λ, si dans tout intervalle u_n ou $a_n b_n$, la variation relative inférieure de f en deçà de b_n surpasse $-\mu$, la variation relative de f entre a et b est au moins*

$$\lambda e - \mu(1 - e).$$

Nous supposerons d'abord λ et μ non négatifs, ce qui constitue le cas le plus important. Soit ξ un point quelconque de P. Le dérivé supérieur droit de f en ξ surpassant λ, il existe, dans tout intervalle ayant ξ pour extrémité gauche, des points ξ_1 où

$$(1) \qquad f(\xi_1) - f(\xi) > \lambda(\xi_1 - \xi).$$

Nous dirons que deux points sont *associés selon l'inégalité* (1) s'ils peuvent être dans la relation précédente substitués respectivement, le plus grand à ξ_1, le plus petit à ξ. Nous ferons une double remarque. La première, c'est que, si la relation (1) est vérifiée pour deux couples adjacents $\xi\xi_1$, $\xi_1\xi_2$, toujours énoncés par valeurs croissantes, elle est vérifiée pour le couple des points extrêmes $\xi\xi_2$. Il en serait encore ainsi, au cas où une et une seule des inégalités (1) relatives à l'un et l'autre couple serait transformée en égalité. Notre seconde remarque, c'est que, à cause de la continuité de f en x, l'inégalité

$$(2) \qquad f(\xi_1)-f(x)>\lambda(\xi_1-x),$$

où on laisse maintenant ξ_1 immobile, sera vérifiée pour toutes les valeurs de x intérieures à un intervalle $\xi'\xi$, d'extrémité droite ξ.

Cela posé, le dérivé supérieur droit en a dépassant λ, il existe des points $\xi_1(a)$ à droite de a, intérieurs à ab et associés à a suivant l'inégalité (1). Si b est associé à a, la variation relative de f entre a et b surpasse λ et *a fortiori* λe. La formule est établie (λ et μ étant positifs). Supposons qu'il en soit autrement. Alors les $\xi_1(a)$ ont une borne à droite γ_1 où, à cause de la continuité de f, on n'a pas l'inégalité contraire à (1), ni davantage l'inégalité (1), sinon, dans ce dernier cas, γ_1 pourrait être repoussé vers la droite. On a donc en γ_1

$$f(\gamma_1)-f(a)=\lambda(\gamma_1-a).$$

γ_1 n'est pas sur P, sinon, à cause de l'existence en γ_1 d'un dérivé droit supérieur à λ, il existerait un point γ' à droite de γ_1 et associé selon l'inégalité (1) à γ_1, donc à a, conclusion absurde, γ' surpassant γ_1, γ_1 est donc intérieur à un certain contigu à P, intervalle dont je désigne par β_1 l'extrémité droite. Remarquons que, d'après notre hypothèse sur la variation relative de f sur les u_n en deçà des b_n, nous avons $f(\beta_1)-f(\gamma_1)>-\mu(\beta_1-\gamma_1)$. Avec β_1 j'opère comme avec a. Je détermine γ_2 par la condition d'être la borne à droite des points de ab, situés à droite de β_1 et associables à β_1 d'après l'inégalité (1). En général, γ_2 est intérieur à un intervalle contigu à P, soit $\alpha_2\beta_2$, etc. L'opération se poursuit tant que γ_n n'est pas en b. Deux cas sont *a priori* possibles. Ou bien, l'un des γ_n est en b. L'opération est arrêtée. b est associé à γ_{n-1} selon l'inégalité (1) ou selon l'égalité limite de cette inégalité. La totalité de l'ensemble P est sur les segments $a\gamma_1$, $\beta_1\gamma_2$, $\ldots$, $\beta_{n-1}\gamma_n$, ce dernier identique à $\beta_{n-1}b$, et chacun des intervalles $\gamma_1\beta_1$, $\gamma_2\beta_2$, $\ldots$, $\gamma_{n-1}\beta_{n-1}$ est agrégé à un intervalle contigu à P avec communauté de l'extrémité droite. Ou bien, aucun des γ_n n'est en b. Comme par hypothèse ils sont tous sur le segment ab, ils sont tous entre a et b. Comme ils progressent vers la droite quand n croît, ils ont donc un point limite M, également limite des β_n et par suite agrégé à P. Je dis que M est en b. Sinon, il existera un intervalle M′M à tous les points x duquel un même point M_1 situé à droite de M et à gauche de b est associable selon (1). Mais γ_n tendant en croissant vers M, est, à partir d'une certaine valeur p de n, compris entre M′ et M. Or, la relation (1) étant vraie pour le couple (γ_p, M_1) et aussi, sauf son changement en égalité, pour (β_{p-1}, γ_p) est vraie pour (β_{p-1}, M_1). γ_p ne satisfait donc pas à sa définition d'être le point de ab bornant à droite les points associables à β_{p-1}. γ_p ne peut donc pas être intérieur à M′M. Donc γ_n ne peut pas tendre vers M.

Donc, s'il y a une infinité de points γ_n, ils tendent vers b. On a, quel que soit m,

$$
(2) \quad \begin{aligned} f(b)-f(a) = {} & [f(\gamma_1)-f(a)] + [f(\gamma_2)-f(\beta_1)] + \ldots + [f(\gamma_m)-f(\beta_{m-1})] \\ & + [f(\beta_1)-f(\gamma_1)] + \ldots + f[(\beta_{m-1})-f(\gamma_{m-1})] + [f(b)-f(\gamma_m)], \end{aligned}
$$

les γ_m coïncidant tous avec b à partir d'un certain rang, ou étant en infinité. Dans ce second cas, chaque terme de la première ligne est égal au produit de λ par la longueur du segment où il exprime la variation de f. Donc, la somme de cette ligne est

$$\lambda(a\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \ldots + \beta_{m-1}\gamma_m),$$

$a\gamma_1$, ... étant les longueurs des segments limités par a et γ_1, etc. Elle tend vers la somme h de la série constituée par les longueurs des segments $\beta_{n-1}\gamma_n$ qui, remarquons-le, portent la totalité des points de P situés entre a et b. La somme des termes de la première ligne tend donc vers λh quand m croît indéfiniment. Le dernier terme de la seconde ligne tend vers zéro, f étant continue. D'ailleurs, la variation relative inférieure de f sur l'intervalle contigu d'extrémité droite β_n et en deçà de β_n, étant supérieure à $-\mu$, nous avons

$$[f(\beta_1)-f(\gamma_1)] + \ldots + [f(\beta_{m-1})-f(\gamma_{m-1})] > -\mu(\beta_1\gamma_1 + \ldots + \beta_{m-1}\gamma_{m-1}).$$

En résumé, nous avons rassemblé P sur une suite infinie de segments tendant vers b, de longueur totale h. Nous trouvons

$$(3) \qquad f(b)-f(a) > \lambda h - \mu(b-a-h).$$

Cette relation ne fait intervenir les signes ni de λ ni de μ.

Si γ_n coïncide avec b, mais non pas γ_{n-1}, les variations relatives de f sur $a\gamma_1$, sur $\beta_1\gamma_2$, ..., sur $\beta_{n-2}\gamma_{n-1}$ sont toutes égales à λ, et au moins égales à λ sur $\beta_{n-1}\gamma_n$ ou $\beta_{n-1}b$. Donc, les termes de la première ligne dans l'égalité (2) ont une somme au moins égale à

$$\lambda(a\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \ldots + \beta_{n-1}b) = \lambda h,$$

h désignant toujours la somme de la série finie ou infinie $\beta_i\gamma_{i+1}$. Dans tous les cas, que le nombre des intervalles contenant la totalité de P soit infini ou fini et même égal à 1 (quand γ_1 coïncide avec b), on a toujours la formule (3). Supposons maintenant λ et μ positifs. Alors, nous renforçons l'inégalité en remplaçant h par un nombre plus petit, savoir la mesure de P entre a et b. Cette mesure étant $e(b-a)$, nous trouvons bien $(a\mathrm{VR}b)f > \lambda e - \mu(1-e)$.

Si λ et μ ne sont pas positifs, nous allons montrer que, dans la formule (3), h peut être supposé aussi voisin qu'on le veut de la mesure de P, soit $\mathrm{M} = e(b-a)$. Remarquons d'abord qu'on a toujours $\mathrm{M} < h < b - a$. Du segment ab retranchons les N plus grands contigus de P, $u_1, u_2, \ldots, u_N$ et soient, dans l'ordre où nous les rencontrons, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{N+1}$ les segments restants, deux à deux sans points communs. Soient $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_{N+1}$ les mesures de P sur ces segments. On a $\sum \mathrm{M}_i = \mathrm{M}$. Appliquons au segment ρ_i la formule (3). Il existe un certain nombre h_i compris entre M_i et ρ_i (ou égalant ρ_i) tel qu'on ait

$$\mathrm{V}(f, \rho_i) > \lambda h_i - \mu(\rho_i - h_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}+1).$$

Or, d'après notre hypothèse sur le minimum des variations relatives de f sur les u_n en deçà de b_n, on a

$$\mathrm{V}(f, u_i) > -\mu u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}).$$

En faisant la somme de toutes les inégalités obtenues et en remarquant que

$$\mathrm{V}(f, a, b) = \sum \mathrm{V}(f, \rho_i) + \sum \mathrm{V}(f, u_i), \qquad b - a = \sum \rho_i + \sum u_i,$$

il vient, en posant $\sum h_i = \mathrm{H}_N$,

$$\mathrm{V}(f, a, b) > \lambda \mathrm{H}_N - \mu(b - a - \mathrm{H}_N).$$

Or, nous avons

$$\sum M_i < \sum h_i < \sum \rho_i,$$

donc

$$M < H_N < b - a - \sum u_i.$$

Mais le dernier terme de ces relations, quand N croît indéfiniment, tend vers M. Donc, H_N tend vers M. Donc, quels que soient les signes de λ et μ, on a bien

$$V(f, a, b) \geqq \lambda M - \mu(b - a - M)$$

ou

$$(4) \qquad VR(f, a, b) \geqq \lambda e - \mu(1 - e).$$

C. Q. F. D.

Désignons respectivement par S et T la somme des termes de la première et de la seconde ligne dans l'égalité (2), que m puisse devenir infini ou doive rester fini, les β_i et γ_i étant obtenus comme il a été expliqué à la page 178. La seule condition de leur existence est que le dérivé supérieur droit de f surpasse λ en tout point de P, et alors, dans le second membre de l'inégalité (3), le terme λh bornant inférieurement S est exact. Le second terme de (3), soit $-\mu(b - a - h)$, borne inférieurement T, quand $VR(f, x, b_n) > -\mu$ pour tout point x de u_n. Remplaçons cette dernière hypothèse par celle-ci beaucoup moins restrictive : $V(f, x, b_n) \geqq -\mu u_n$, supposée vérifiée également quel que soit x dans u_n. En faisant tendre x vers b_n, on voit que μ ne peut pas être négatif. Alors T surpasse

$$-\mu(\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_m\beta_m + \ldots) = -\mu\tau,$$

si l'intervalle contigu renfermant γ_p est $\alpha_p\beta_p$. Désignons par h' la somme

$$a\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \ldots + \beta_{p-1}\alpha_p + \ldots$$

des segments conservés dans ab quand on en retranche les contigus $\alpha_p\beta_p$. Ces segments conservés renferment la totalité de P. Donc, $h' > M$. D'ailleurs

$$\sum \alpha_p\beta_p + \sum \beta_p\alpha_{p+1} = \tau + h' = b - a.$$

Donc, T surpasse $-\mu(b-a-h')$ et l'on a dans notre nouvelle hypothèse la relation

$$(3\ bis) \qquad f(b)-f(a)>\lambda h-\mu(b-a-h'),$$

avec

$$M<h'<h<b-a.$$

μ étant nécessairement positif ou nul, le second membre de ($3\ bis$) surpasse $\lambda h-\mu(b-a-M)$; mais, pour embrasser le cas où λ serait négatif, on achève la démonstration comme plus haut et l'on trouve encore

$$f(b)-f(a)\geq\lambda M-\mu(b-a-M),$$

d'où la relation (4).

L'inégalité $V(f, x, b_n)\geq-\mu u_n$ sera vérifiée quel que soit x dans un cas particulier important, celui où *l'oscillation relative de f sur u_n ou* $OR(f, u_n)$ *est inférieure à* μ. Car $V(f, x, b_n)$ est en valeur absolue inférieur à l'oscillation de f sur u_n (¹).

49 *bis*. Le lecteur devra remarquer qu'un raisonnement analogue au suivant ne serait pas légitime : « Tout point ξ de P est intérieur à un intervalle $\xi'\xi_1$ entre les extrémités duquel l'inégalité (1) est vérifiée. Recouvrons P avec un nombre fini d'intervalles $\xi'\xi_1$. Le champ recouvert contient P et se compose d'un nombre limité d'intervalles i. Il est possible de cheminer en conservant l'inégalité (1) de l'extrémité gauche à l'extrémité droite de chacun de ces intervalles i. » C'est ici que serait la faute. En effet, il n'est pas exact que la vérité de l'inégalité (1) d'une part entre les extrémités gauche et droite d'un

(¹) Appelons *altération relative supérieure* (ou *inférieure*) *de f sur un intervalle* $\alpha\beta$ *au delà de* α le maximum (ou le minimum) du quotient

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

pour $\alpha<x<\beta$. Désignons ces nombres par $AR_s(f, \alpha, \alpha\beta)$ et $AR_i(f, \alpha, \alpha\beta)$. De même, *l'altération relative supérieure* (ou *inférieure*) *de f sur* $\alpha\beta$ *en deçà de* β est le maximum (ou le minimum) de $\dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-\alpha}$ pour $\alpha<x<\beta$. Nous intervalle $\alpha\beta$, d'autre part entre celles d'un autre intervalle $\alpha'\beta'$, entraîne sa validité entre α et β' quand α' est intérieur à $\alpha\beta$, et β à $\alpha'\beta'$. Si par exemple dans le cas d'une dérivée droite (et non pas seulement du dérivé supérieur droit) surpassant λ en tout point de P, il est permis de supposer que, α et α' étant sur P, *tous* les points de $\alpha\beta$ d'une part sont associables à α, que *tous* ceux de $\alpha'\beta'$ sont associables à α', d'où la conclusion légitime que α et β' sont associables, il n'en est plus de même si tous les dérivés droits ne surpassent pas λ. Car alors, à l'intérieur de $\alpha\beta$, les points x associés à α forment un ensemble présentant des lacunes où peut précisément se trouver α'. Si nous ne supposons pas qu'aux points de P tous les dérivés droits de f surpassent λ, rien ne prouve qu'au delà d'un point ξ choisi au hasard sur P, on puisse trouver un seul point ξ_1 agrégé à P et associable à ξ par la relation (1).

Mais substituons à la première hypothèse du théorème relative aux dérivés, celle-ci, plus restrictive que, *en chaque point de* P, *f a son dérivé inférieur droit surpassant* λ. Nous pouvons élargir notre seconde hypothèse concernant les variations relatives de f sur u_n en deçà de b_n. Il n'est plus nécessaire que toutes surpassent $-\mu$. *Il*

---

désignons ces valeurs par $\mathrm{AR}_s(f, \alpha\beta, \beta)$ et $\mathrm{AR}_i(f, \alpha\beta, \beta)$. Si α_1 et β_1 sont respectivement les points du segment $\alpha\beta$ où f est maximum et minimum, on a :

$$\mathrm{AR}_s(f, \alpha, \alpha\beta) = \frac{f(\alpha_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \qquad \mathrm{AR}_i(f, \alpha, \alpha\beta) = \frac{f(\beta_1) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$\mathrm{AR}_s(f, \alpha\beta, \beta) = \frac{f(\beta) - f(\beta_1)}{\beta - \alpha}, \qquad \mathrm{AR}_i(f, \alpha\beta, \beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha_1)}{\beta - \alpha}.$$

Rappelons d'ailleurs que $\mathrm{OR}(f, \alpha\beta) = \dfrac{f(\alpha_1) - f(\beta_1)}{\beta - \alpha}$. On a les relations immédiates suivantes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &0 \leqq \mathrm{AR}_s(f, \alpha, \alpha\beta) \leqq \mathrm{OR}(f, \alpha\beta), \\ &-\mathrm{OR}(f, \alpha\beta) \leqq \mathrm{AR}_i(f, \alpha, \alpha\beta) \leqq 0, \\ &\mathrm{OR}(f, \alpha\beta) = \mathrm{AR}_s(f, \alpha, \alpha\beta) - \mathrm{AR}_i(f, \alpha, \alpha\beta), \\ &\mathrm{AR}_i(f, \alpha, \alpha\beta) \leqq \mathrm{VR}(f, \alpha\beta) \leqq \mathrm{AR}_s(f, \alpha, \alpha\beta). \end{aligned} \right.$$

Ces relations subsistent en remplaçant avec les mêmes indices i et s

$$\mathrm{AR}(f, \alpha, \alpha\beta)$$

par $\mathrm{AR}(f, \alpha\beta, \beta)$. On a alors des relations (5 *bis*). Enfin, si AR_s est positif, il en est de même de VR_s sur le même intervalle et pour la même extrémité et l'on *suffit que l'une d'entre elles, la variation relative de f sur u_n, surpasse ce même nombre* $-\mu$.

En effet, $M(x)$ étant la mesure de P entre a et x, soit E l'ensemble des points β de P où existe un nombre $h(x)$ vérifiant le système d'inégalités

$$(6)\quad f(x)-f(a) \geqq \lambda h(x)-\mu[x-a-h(x)],\quad M(x) \leqq h(x) \leqq x-a.$$

E est fermé, à cause de la continuité de $M(x)$ et de f. Tous les points x associés à a par la relation (1) vérifient les inégalités (6) en y faisant $h(x)=x-a$. Or, $\delta_d(a)$ surpassant λ, tous les points d'un intervalle aa_1 sont associés à a selon (1). D'ailleurs, a étant limite de P du côté droit, P admet des points sur aa_1. Tous ceux-ci appartiennent à E qui existe donc. Soit ξ l'extrémité droite de E. Je dis que $\xi=b$. Sinon, on aurait $\xi<b$. Or : 1° si ξ est limite de points de P situés à sa droite, ceux-ci, au-dessous d'une certaine distance à ξ, sont tous associés à ξ selon (1). Soit ξ_1 l'un d'eux. On a

$$f(\xi_1)-f(\xi)>\lambda(\xi_1-\xi),\quad M(\xi_1)-M(\xi)<\xi_1-\xi.$$

---

a $AR_s<VR_s$. Mais VR_s peut être négatif, dans le cas où f est sur $\alpha\beta$ maximum en α ou minimum en β. Or simultanément AR_s est nul. De même, si $AR_i<0$, on a $VR_i \leqq AR_i$. En tout cas, μ étant positif, les inégalités $VR_s<\mu$ ou $VR_i>-\mu$ entraînent respectivement $AR_s<\mu$ et $AR_i>-\mu$ sans réciprocité.

Les relations (5) et (5 *bis*) d'une part, les relations entre les AR et les VR d'autre part, permettraient d'énoncer respectivement les applications VI et VII du Premier Théorème en y remplaçant pour la première les lettres VR par AR, et pour la seconde les mots « oscillation relative de f sur u_n » par « altération relative extrême de f sur u_n au delà de a_n ou en deçà de b_n ». Le lecteur, en se reportant aux endroits indiqués, vérifiera l'exactitude des nouveaux énoncés.

Le Second Théorème subsiste en y remplaçant les variations relatives sur les contigus à P par les altérations relatives de mêmes noms. Seulement μ est alors nécessairement positif ou nul. D'ailleurs l'hypothèse ainsi transformée est impliquée dans la première. Elle est beaucoup moins restreinte. Elle l'est également moins que l'hypothèse $OR(u_n)<\mu$. On pourrait donc, puisque toutes deux donnent les mêmes conclusions (pour $\mu \geqq 0$), ne considérer que celle des altérations. Seulement, dans les applications ultérieures du Second Théorème, toutes les fois qu'une inégalité du genre $AR_i>-\mu$ sera vérifiée sur chacun des u_n, il en sera également ainsi toujours de l'une ou de l'autre des inégalités $VR_i>-\mu$ ou $OR<\mu$ et ces dernières seront les plus directes à établir.

De là, en tenant compte des inégalités (6) où x est remplacé par ξ,

$$f(\xi_1)-f(a)>\lambda[h(\xi)+\xi_1-\xi]-[\xi_1-a-(\xi_1-\xi)-h(\xi)],\quad M(\xi_1)<h(\xi)+\xi_1-\xi\leqq\xi_1-a.$$

Posons $h(\xi_1)=h(\xi)+\xi_1-\xi$. Il est visible que ξ_1 est dans E.

2° Si au contraire ξ est l'extrémité gauche d'un contigu u de P, soit ξ_1 l'extrémité droite de u. On a

$$f(\xi_1)-f(\xi)>-\mu(\xi_1-\xi),\quad M(\xi_1)=M(\xi).$$

Donc,

$$f(\xi_1)-f(a)>\lambda h(\xi)-\mu[\xi_1-a-h(\xi)],\quad M(\xi_1)\leqq h(\xi)<\xi_1-a.$$

Posant $h(\xi_1)=h(\xi)$, on voit encore que ξ_1 est dans E. Donc, l'extrémité droite de E est nécessairement b. Donc, l'inégalité (3) est établie, h étant un nombre compris entre M, mesure de P sur ab, et $b-a$. On en déduit comme plus haut la formule (4).

49 *ter*. Pour rassembler dans un même Tableau toutes les formes susceptibles d'être données au Second Théorème, indiquons dans une première colonne la classe (droite ou gauche) de dérivés D auxquels s'applique le théorème, — dans la seconde, leur relation d'inégalité avec λ, — dans la troisième, si cette relation, vraie en tous les points de P, est satisfaite par certain dérivé, au moins un, le dérivé supérieur, ou par tous quand elle l'est par le dérivé inférieur, pour le côté désigné en tête de la ligne bien entendu, — dans la quatrième, l'inégalité supposée vraie sur tous les u_n, et concernant : les variations relatives de f prises soit en deçà des b_n quand les D sont droits, soit au delà des a_n quand les D sont gauches, et qui toutes, et en particulier la supérieure ou l'inférieure suivant les cas, doivent vérifier l'inégalité écrite avec μ ou avec $-\mu$ (de signe quelconque); ou encore l'oscillation relative $\mathrm{OR}u_n$ de f; ou enfin la variation relative de f sur u_n; — dans la cinquième, l'inégalité finale concernant la variation relative de f entre a et b, e désignant l'épaisseur de P entre a et b. Dans la quatrième colonne, les trois hypothèses intéressant μ et correspondant à une même ligne dans les deux premières colonnes sont de moins en moins restrictives, quand on les énumère de bas en haut. Pour la première et la troisième hypothèse, μ est de signe quelconque; pour la seconde, μ est positif. La première implique la troisième. De même la seconde, toujours du type $\mathrm{OR}\, u_n < \mu$ (positif), entraîne $-\mu < \mathrm{VR}\, u_n < \mu$, donc l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure pour $\mathrm{VR}\, u_n$. Mais la première condition, liant à μ, nombre de signe quelconque, la variation relative de f sur u_n en deçà de b_n ou au delà de a_n, n'entraîne pas nécessairement $\mathrm{OR}\, u_n < |\mu|$, ni une autre relation invariable. Par exemple, f peut être croissant entre a_n et x agrégé à u_n, d'où $\mathrm{VR}_i(f,\ a_n,\ u_n) \geqq 0$, avec un dérivé droit nul en a_n, donc $-\mu = 0$, sans qu'on en conclue $\mathrm{OR}\, u_n \leqq 0$, donc $= 0$. De même, la condition vérifiée par OR n'entraîne rien concernant les VR_s et VR_i. Car, les nombres $\mathrm{VR}\,(f,\ a_n,\ x)$ ou $\mathrm{VR}(f,\ x,\ b_n)$, contenant en dénominateur un nombre infiniment petit aux points a_n et b_n, peuvent avoir leurs bornes extrêmes VR_s et VR_i infinies, tandis que $\mathrm{OR}\, u_n$ est toujours fini. Mais cette dernière circonstance nous fait dire que la première hypothèse bornant d'un côté les VR_s ou les VR_i est plus restrictive que la seconde bornant $\mathrm{OR}\, u_n$. Faisons une dernière remarque. La valeur exacte de λ a, en général, une grande importance. Celle de μ n'en a aucune. Il suffit que μ soit fini. Car les résultats que nous voudrons faire apparaître se manifesteront entre des points séparés par une épaisseur de P aussi voisine de 1 que nous le voudrons.

Les dérivés sont	Hypothèse régissant les dérivés de f en tout point de P.	Hypothèse concomitante sur les variations de f dans tous les contigus à P.	Conclusion.
droits	$\lambda <$ Δ_d	$-\mu < u_n \mathrm{VR} b_n$ $\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	$\lambda e - \mu(1-e) \leqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
	δ_d	$-\mu < \mathrm{VR}\, u_n$	
droits	$\lambda >$ δ_d	$\mu > u_n \mathrm{VR}\, b_n$ $\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	$\lambda e + \mu(1-e) \geqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
	Δ_d	$\mu > \mathrm{VR}\, u_n$	
gauches	$\lambda <$ Δ_g	$-\mu < a_n \mathrm{VR}\, u_n$ $\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	$\lambda e - \mu(1-e) \leqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
	δ_g	$-\mu < \mathrm{VR}\, u_n$	
gauches	$\lambda >$ δ_g	$\mu > a_n \mathrm{VR}\, u_n$ $\mu > \mathrm{OR}\, u_n$	$\lambda e + \mu(1-e) \geqq (a \mathrm{VR}\, b) f$
	Δ_g	$\mu > \mathrm{VR}\, u_n$	

Voici les conséquences très importantes que nous tirons du Second Théorème.

Applications du Second Théorème.

30. Application I. — *L'ensemble des points où f a d'un côté déterminé une dérivée infinie est sans épaisseur.*

Montrons que l'ensemble E où $\Delta_d = \delta_d = +\infty$ est de mesure nulle. Dans l'hypothèse contraire, E contiendrait un ensemble parfait épais en lui-même P_0. Soit u_n ou $a_n b_n$ un intervalle contigu à P_0. Les contigus u_n sur lesquels la variation relative de f est inférieure ou égale à un nombre fixe, zéro par exemple, ont leurs extrémités non denses sur P_0. Sinon, si l'ensemble H de ces extrémités était dense sur P_0, donc partout dense sur une portion P'_0 de P_0, f admettrait en tout point d'un résiduel de P'_0 un dérivé inférieur droit négatif ou nul, et non pas une dérivée droite infinie positive. Il y a donc une portion P de P_0 où H n'a pas de point et où, par suite, la variation relative de f dans tout intervalle contigu à P est positive. Alors, $f(b_n) \geqq f(a_n)$ sur tout contigu à P, ou $\mathrm{VR}\, u_n > 0$. Soient a et b les points extrêmes de P. Consultons notre Tableau où se résume le Second Théorème. Prenons λ si grand que nous voudrons. Suivons la première ligne et ses subdivisions. Le dérivé droit δ_d (1re et 3e colonne) surpasse λ (2e colonne) en tous les points de P et, dans tous les intervalles contigus à P, la variation relative de f est positive (4e colonne). Donc $(a\mathrm{VR}b)f > \lambda e$ (5e colonne). Or, e n'est pas nul, P étant comme P_0 épais en lui-même. Il est donc impossible que cette relation soit vérifiée quel que soit λ. Le théorème est donc démontré pour l'ensemble E défini par

$$\Delta_d = \delta_d = +\infty.$$

On le montrerait de même pour les ensembles où f possède une dérivée droite infinie négative ou une dérivée gauche infinie d'un signe donné. *A fortiori*, est-il impossible d'avoir une dérivée bilatérale infinie sur un ensemble épais. Si donc nous voulons dans notre étude réserver un traitement spécial aux ensembles minces, nous n'avons pas à nous occuper du premier ni du septième cas de la classification donnée au n° **25**. Montrons que le quatrième cas où Δ_d et δ_d sont finis et distincts ne peut se présenter que sur un ensemble sans épaisseur.

51. Application II. — *L'ensemble des points où une fonction ne possède pas de dérivée d'un certain côté et où d'autre part ses dérivés pour ce même côté sont finis est de mesure nulle.*

Cette proposition offre une grande analogie avec un théorème de M. Lebesgue : savoir que, si *dans tout un intervalle*, les dérivés extrêmes d'une fonction continue sont en chaque point *tous les quatre finis et s'ils sont sommables dans cet intervalle* (ou appartiennent à une fonction à variation bornée), l'ensemble des points où la dérivée n'existe pas est de mesure nulle sur ce même intervalle. Mais ici, nous ne supposons rien de connu sur les dérivés en dehors de l'ensemble où nous les considérons. Rien n'empêche qu'ailleurs, ils soient infinis, aussi souvent que le tolèrent les propriétés logiques des nombres dérivés. *A fortiori*, ne supposons-nous rien touchant la sommabilité de nos dérivés dans tout un intervalle, puisque nous les considérons exclusivement sur un certain ensemble, discontinu dans le cas le plus général. Enfin, nous n'admettons nullement qu'aux points de cet ensemble, les quatre dérivés soient finis. Il nous suffit que deux d'entre eux pour un même côté soient finis et distincts, le côté pouvant d'ailleurs varier d'un point à l'autre. Enfin, un peu plus loin, nous conclurons de l'existence sur un ensemble E de dérivés tous finis pour un même côté constant ou variable, à l'existence d'une dérivée bilatérale sur une pleine épaisseur de E, sans avoir besoin d'aucune hypothèse complémentaire sur les dérivés de la fonction pour le second côté aux points de E (¹). Observons, pour terminer, que nous établissons toutes ces propriétés des nombres dérivés sans faire appel à aucune notion de somme intégrale. Démontrons notre énoncé.

L'ensemble, épais par hypothèse, en tout point duquel, ou bien les dérivés extrêmes droits, ou bien les dérivés extrêmes gauches sont finis et distincts, se décompose en l'ensemble E où la première hypothèse est vérifiée, et en l'ensemble E′ où c'est la seconde. E et E′ peuvent d'ailleurs *a priori* avoir des points communs, mais l'un au moins est de mesure non nulle. Supposons que ce soit E. Alors, en

(¹) M. Montel, utilisant un résultat contenu dans ma Note du 21 avril 1912 (*Comptes rendus*), a montré (*Id.*, 23 déc. 1912) l'existence d'une dérivée sur une pleine épaisseur de l'ensemble où les *quatre* dérivés extrêmes sont finis.

tout point de l'ensemble épais E, f possède partout deux dérivés extrêmes droits finis et distincts.

Désignons par $H_{n,p}$ l'ensemble des points de E satisfaisant à la double condition $\delta_d < \frac{p}{n} < \frac{p+1}{n} < \Delta_d$. Tout point x de E appartient à un ensemble $H_{n,p}$ pour au moins une valeur de p, quel que soit n supérieur à l'inverse de la différence positive $\Delta_d(x) - \delta_d(x)$. Les $H_{n,p}$ étant en infinité dénombrable, l'un au moins d'entre eux, soit H, est épais si E l'est. Désignons pour cet ensemble par h l'inverse du premier indice n et soit P_1 un ensemble parfait épais en lui-même agrégé à H. En tout point de P_1 on a

$$\delta_d < ph < (p+1)h < \Delta_d,$$

p étant un certain entier positif, négatif ou nul.

L'application du Second Théorème va être aisée.

Considérons les intervalles contigus à P_1 et l'oscillation relative de la fonction f sur chacun d'eux. Est-il possible que, pour toute valeur du nombre positif A, cette oscillation surpasse A dans des intervalles dont les extrémités forment un ensemble G(A) partout dense sur P_1? Non, car nous avons démontré (**40**) que, dans ce cas, l'ensemble des points où, de chaque côté, l'un au moins des dérivés est infiniment grand en valeur absolue, cet ensemble est partout dense sur P_1. Donc, Δ_d et δ_d étant finis sur P_1, pour une certaine valeur μ de A, il existe une portion P de P_1 ne contenant aucun point de $G(\mu)$. P_1 étant épais en lui-même, P l'est également. Dans tout intervalle contigu à P, l'oscillation relative de f est au plus égale à μ. Entre deux points quelconques α, β de P séparés par une épaisseur e de P, d'après les relations vérifiées par Δ_d et δ_d en tout point de P, la variation relative de f aura des limites fournies par le Second Théorème (*voir* le Tableau de la page 186) Δ_d surpassant $(p+1)h$, cette variation vaut au moins $(p+1)he - \mu(1-e)$. Pareillement, δ_d étant inférieur à ph, cette même variation est au plus $phe + \mu(1-e)$. On a donc l'inégalité $h < 2\mu\frac{1-e}{e}$, vérifiée pour deux points quelconques de P, e désignant l'épaisseur de P entre eux. Ceci est absurde, puisque, par des choix appropriés de α et de β, cette épaisseur peut être supposée aussi voisine de 1 qu'on le veut (**20**).

32. Il est donc établi que les cas 1°, 4°, 7° du n° **25** ne peuvent pour un côté ou pour un autre se produire que sur une épaisseur nulle. Si donc nous négligeons les ensembles minces il nous reste comme seuls possibles les cas désignés ainsi :

A : $\Delta_d = +\infty$, $\delta_d = -\infty$,	A′ : $\Delta_g = +\infty$, $\delta_g = -\infty$,
B $\quad = +\infty$, δ_d fini,	B′ : $\Delta_g = +\infty$, δ_g fini,
C : $\Delta_d = \delta_d$ finis (dérivée droite finie),	C′ : $\Delta_g = \delta_g$ finis (dérivée gauche finie),
D : Δ_d fini, $\delta_d = -\infty$,	D′ : Δ_g fini, $\delta_g = -\infty$,

Peut-on associer indifféremment l'un des quatre cas gauches à l'un des quatre droits, ce qui nous donnerait 16 combinaisons possibles? L'application III du Second Théorème va nous permettre de constater que chaque cas de l'un des groupes s'allie à un cas bien déterminé de l'autre groupe, sauf éventuellement sur une épaisseur nulle.

33. Application III. — *L'ensemble des points où le dérivé supérieur d'un côté est $+\infty$ coïncide avec celui des points où le dérivé inférieur du côté opposé est $-\infty$, à une épaisseur nulle près.*

Il faut entendre par là que les quatre ensembles E, E_1, E_2, E_3 définis respectivement par les conditions suivantes : 1° $\Delta_d = +\infty$, $\delta_g > -\infty$; 2° $\delta_d > -\infty$, $\Delta_g = +\infty$; 3° $\delta_d = -\infty$, $\Delta_g < +\infty$; 4° $\Delta_d < +\infty$, $\delta_g = -\infty$, où les inégalités $m < +\infty$ ou $m' > -\infty$ désignent, la première un nombre m fini ou infini négatif, la seconde un nombre m' fini ou infini positif, ces quatre ensembles sont de mesure nulle. Supposons qu'il en soit autrement. L'un de ces ensembles est doué d'épaisseur. Supposons que ce soit le premier. E contient un ensemble parfait P_0 épais en lui-même et en chaque point duquel le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche étant fini ou infini positif. Soit u_n d'extrémités a_n, b_n, un contigu à P. Formons la variation relative inférieure de f sur u_n en deçà de b_n, soit $(u_n \mathrm{VR}\, b_n)_i$. Les points au voisinage desquels les nombres $(u_n \mathrm{VR}\, b_n)_i$ ne sont pas bornés inférieurement, forment un ensemble non dense sur P_0, sinon il y aurait une portion de P_0 où l'ensemble $\delta_g = -\infty$ serait partout dense, conclusion contraire à notre hypothèse que cet ensemble n'a aucun point sur P. Il y a donc un nombre positif μ et une portion P de P_0 telle que les nombres $(u_n \mathrm{VR} b_n)_i$ relatifs aux contigus à P sont tous supérieurs à $-\mu$. D'ailleurs, puisqu'en tout point de P_0 il y a le dérivé droit $+\infty$, λ, borne inférieure de ce dérivé sur P, peut être pris aussi grand qu'on le veut. Nous aboutissons à une absurdité d'après le Second Théorème nous donnant entre les extrémités a et b de P une variation relative de f supérieure à $\lambda e - \mu(1-e)$, μ étant fixe et λ aussi grand qu'on le veut.

On montre exactement de même que les trois autres ensembles E_1, E_2, E_3 sont sans épaisseur.

34. Tirons de cette proposition III la conséquence annoncée. Si le cas A est réalisé sur un ensemble épais α, l'ensemble α_1 des points de α où l'on n'aura pas $\delta_g = -\infty$ (à rapprocher de $\Delta_d = +\infty$) et l'ensemble α_2 agrégé à α et où l'on n'a pas $\Delta_g = +\infty$ (d'après $\delta_d = -\infty$) sont l'un et l'autre sans épaisseur. Donc l'ensemble α' où le cas A' est réalisé contient une pleine épaisseur de α. La réciproque est vraie. Donc, les cas A et A' ne peuvent se présenter isolément l'un de l'autre qu'en une épaisseur nulle. On montre exactement de même que le cas B ne s'isole de D', C de C', D de B' qu'en des épaisseurs nulles. Donc, *l'ensemble des points d'un segment se décompose, à une épaisseur nulle près, en quatre ensembles où sont réalisés respectivement les couples de cas* (AA'), (BD'), (CC'), (DB'). Nous allons montrer de plus que les dérivés finis paraissant dans les trois derniers couples sont nécessairement égaux entre eux, à une épaisseur exceptionnelle nulle près. Occupons-nous d'abord du cas particulièrement remarquable (CC') où nous avons une dérivée finie de chaque côté. L'ensemble des points où il y a une dérivée droite coïncide, à une épaisseur nulle près, avec celui où il y a une dérivée gauche. Mais on sait que l'ensemble des points où la dérivée droite et la dérivée gauche, supposées existantes, diffèrent l'une de l'autre est dénombrable (**27**). Donc :

35. Application IV. — *Si f possède en tout point d'un ensemble* *épais* R *une dérivée finie d'un côté, elle possède une dérivée bilatérale sur une pleine épaisseur de* R.

Et par suite, en rapprochant ce résultat de la proposition II : *Si sur un ensemble épais* G, f *possède des dérivés finis pour un même côté, constant ou variable,* f *possède une dérivée bilatérale sur une pleine épaisseur de* G.

Enfin, établissons le théorème suivant, dont l'énoncé me paraît entièrement nouveau, non seulement comme les précédents par sa généralité, mais même par la relation qu'il exprime en certains nombres dérivés :

56. Application V. — *L'ensemble des points où un dérivé extrême, de rang et de côtés quelconques, est fini et différent du dérivé extrême de rang et de côté opposés aux siens, cet ensemble est mince.*

Il s'agit de montrer que l'ensemble E caractérisé par les conditions : Δ_g fini, $\delta_d \neq \Delta_g$, et les trois ensembles analogues définis en échangeant d'une part les lettres δ et Δ, d'autre part, les indices d et g, sont tous les quatre minces. Montrons-le, par exemple, du premier. Nous savons d'abord que l'ensemble : Δ_g fini avec $\delta_d = -\infty$, est mince (**55**) et aussi que l'ensemble $\Delta_g < \delta_d$ est dénombrable (**27**). Si donc E est épais, il le demeure encore si nous le réduisons à l'ensemble : δ_d fini $< \Delta_g$ fini. Nous pouvons par suite trouver, comme nous l'avons déjà expliqué, un nombre positif h et un entier p positif, négatif ou nul, tel que l'ensemble K ainsi conditionné :

$$\delta_d \text{ fini} < ph < (p+1)h < \Delta_g \text{ fini}$$

soit épais.

Soit P_1 un ensemble parfait épais en lui-même agrégé à K.

De ce que δ_d est fini sur P_1, je conclus que, u_n ou $a_n b_n$ désignant un contigu quelconque à P_1, l'ensemble des points de P_1 au voisinage desquels la variation relative inférieure de f sur u_n au delà de a_n n'est pas bornée inférieurement, est non dense sur P_1. Car, si les nombres $\mathrm{VR}_i\,(f,\ a_n,\ u_n)$ étaient non bornés inférieurement en tout point de P_1 (ou d'une portion de P_1), il y aurait des dérivés droits infinis négatifs. De même l'ensemble des points où $(u_n \mathrm{VR}\, b_n)_s f$ n'est pas borné supérieurement est non dense sur P_1, parce que sur P_1 il n'y a pas de dérivé supérieur gauche infini positif. Il existe donc une portion P de P_1 et un nombre positif μ, tel que dans tout intervalle u_n contigu à P, on ait

$$(a_n \mathrm{VR}\, u_n)_i f > -\mu, \qquad (u_n \mathrm{VR}\, b_n)_s f < \mu.$$

D'ailleurs en tout point de P, les dérivés Δ_g et δ_d vérifient les inégalités caractérisant K. Donc, en consultant le Tableau de la page 186 aux quatrième et septième lignes, nous trouvons, α et β étant deux points quelconques pris sur P,

$$(p+1)h - \mu(1-e) \leqq (\alpha \mathrm{VR} \beta) f \leqq ph + \mu(1-e),$$

d'où

$$h < 2\mu \frac{1-e}{e},$$

relation impossible, μ et h étant fixes, tandis que e peut être rendu par un choix approprié de α et de β aussi voisin de 1 qu'on le veut.

CHAPITRE III.

RÉALISATION DES QUATRE CAS FONDAMENTAUX DES NOMBRES DÉRIVÉS.

57. Les cinq résultats essentiels établis par l'application du Second Théorème ne nous empêchent nullement d'admettre, et nous confirmerons cette opinion par des exemples effectifs, que, si un dérivé extrême d'un certain côté est fini sur un ensemble épais ou même sur une épaisseur pleine, le second dérivé extrême du même côté peut, sur des épaisseurs non nulles du premier ensemble, être aussi bien infini que fini. Mais, fait très remarquable, que l'un ou l'autre de ces deux derniers cas se présente, il y aura toujours du côté opposé à celui du premier dérivé un autre dérivé extrême égal à celui-ci (avec, bien entendu, l'exception possible d'un ensemble sans épaisseur).

Appelons *associés* deux dérivés extrêmes relatifs à un même côté; *opposés*, deux dérivés extrêmes relatifs à des côtés et à des rangs différents, par exemple Δ_d et δ_g. Les cinq propositions résultant du Second Théorème se résument dans l'énoncé suivant :

Sauf aux points d'une épaisseur nulle, deux dérivés associés sont égaux s'ils sont finis (II), *inégaux si l'un au moins est infini* (I). *Deux dérivés opposés sont simultanément finis et égaux* (IV et V) *ou infinis et inégaux* (III).

De ceci résulte qu'*il n'y a de dérivé médian bilatéral que dans le cas* (AA') *où les dérivés extrêmes de chaque côté sont* $+\infty$ *et* $-\infty$, *et alors tout nombre fini est un dérivé bilatéral médian.* Ce cas est même le seul où il y ait au moins deux dérivés bilatéraux distincts, en négligeant toujours les ensembles minces ([1]).

Nous désignons par [BD'], [CC'], [DB'] au lieu de (BD'), ..., les associations de dérivés exprimées par ces dernières parenthèses, mais en y supposant de plus les dérivés finis égaux entre eux. Pour montrer l'indépendance mutuelle des cas (AA'), [BD'], [CC'], [DB'], nous prouverons d'abord que, le troisième étant mis à part, chacun des trois autres peut être réalisé isolément sur un ensemble parfait épais, en dehors duquel la fonction possède une dérivée finie et continue;

([1]) Soient C la courbe représentative de la fonction continue f et M un point de C. Appelons *angle dérivé droit* (gauche) en M, l'angle formé par les positions limites des demi-droites joignant M à un point M' de C, d'abscisse supérieure (inférieure) à celle de M, et tendant vers celle-ci. En négligeant dans C un ensemble de points se projetant sur Ox en une épaisseur nulle, les angles dérivés latéraux A_d et A_g présentent nécessairement l'une des quatre dispositions simultanées suivantes. Soient Mz et Mz' respectivement les demi-parallèles à Oy ascendante et descendante menées par M.

1° A_d et A_g valent chacun deux droits et sont biadjacents, leurs côtés coïncidant avec Mz et Mz' (cas AA');

2° et 4° A_d et A_g sont non nuls, adjacents et supplémentaires, leur côté commun étant soit Mz (cas [BD']), soit Mz' (cas [DB']);

3° A_d et A_g sont nuls, portés par une même droite indéfinie (tangente) inclinée sur Oy (cas [CC']).

Si f possède une dérivée seconde généralisée, A_d et A_g sont opposés par le sommet. Les cas [BD'] et [DB'] ne peuvent se présenter.

ensuite, que les quatre cas peuvent être réalisés séparément sur une épaisseur pleine ou simultanément dans tout intervalle sur des épaisseurs non nulles. Enfin, nous rappellerons ce fait connu qu'une fonction peut avoir une dérivée (3e cas) coïncidant sur une épaisseur pleine avec une fonction continue quelconque sans différer par une simple constante de la primitive de cette dernière dans aucun intervalle.

38. Mais auparavant, examinons, d'après les théories précédentes, ce que l'on peut conclure de l'hypothèse d'une fonction continue f possédant en chaque point au moins un dérivé extrême fini φ. Nous supposons donc que φ coïncide en chaque point avec l'un des quatre dérivés extrêmes sans qu'on sache lequel, le côté et le rang de ce dérivé pouvant d'ailleurs changer d'un point à un autre. Soit P un ensemble parfait quelconque, continu ou discontinu. Nous pouvons énoncer, d'après le Premier Théorème, le résultat suivant :

Si f possède en tout point au moins un dérivé extrême fini, l'ensemble H *est non dense, des points de* P *au voisinage desquels simultanément les deux dérivés inférieurs de f sont non bornés inférieurement sur* P, *et les deux dérivés supérieurs sont non bornés supérieurement sur* P.

En effet, s'il en était autrement, il existerait une portion ϖ de P dont chaque point appartiendrait à l'ensemble fermé H. Alors, chacun des dérivés supérieurs serait $+\infty$ sur un résiduel de ϖ, chacun des dérivés inférieurs serait $-\infty$ sur un résiduel de ϖ. Ces quatre résiduels auraient en commun un résiduel de ϖ en chaque point duquel aucun des quatre dérivés extrêmes ne serait fini, ce qui est contraire à notre hypothèse que l'un d'eux coïncide avec la fonction finie φ. Donc, sur toute portion P_0 de P, il existe une portion P'_0 en tous les points de laquelle on a : ou bien $\Delta_d < m_1$, ou bien $\delta_d > m_2$, ou bien $\Delta_g < m_3$, ou bien $\delta_g < m_4$, m_1 ou m_2 ou m_3 ou m_4 étant fixes sur ϖ. Observons d'abord que, si P est le continu, les quatre dérivés extrêmes ayant même maximum et même minimum dans tout intervalle, on peut énoncer le résultat suivant :

Si φ nombre partout fini coïncide en tout point avec l'un ou l'autre des quatre dérivés extrêmes d'une fonction continue, l'ensemble K *des points au voisinage desquels φ n'est borné ni supérieurement ni inférieurement (sur le continu) est non dense sur le continu.*

Supposons que P diffère du continu. Faisons intervenir le Second Théorème. Le cas (AA′) n'est nulle part réalisé, puisqu'il ne comprend aucun dérivé extrême fini. Supprimons de ab l'ensemble η sans épaisseur où l'on n'a aucun des cas [BD′], [CC′], [DB′]. Alors, sur l'épaisseur pleine complémentaire E, en chaque point, les dérivés extrêmes finis coïncident entre eux, donc avec φ. Si donc un dérivé supérieur est borné supérieurement ou si un dérivé inférieur est borné inférieurement sur toute une portion de P, il en est exactement de même de φ considéré sur P hors de η. Enfin, tout point de η étranger à K étant intérieur à un intervalle où φ est borné soit supérieurement, soit inférieurement, réduisons η à sa partie η_1 commune avec K. Nous concluons ainsi notre analyse :

VI *bis*. *Si une fonction continue possède en tout point un dérivé extrême fini φ, de rang et de côté indifféremment variables, il est possible de négliger un certain ensemble mince et non dense sur le continu η_1, tel que,* P *étant un ensemble parfait quelconque, les points de* P *au voisinage desquels, sur* P *et hors de η_1, φ n'est borné ni supérieurement ni inférieurement, forment un ensemble non dense sur* P.

59. *Exemple III. — Réalisation sur un ensemble parfait discontinu épais en lui-même du cas* [BD′] avec une fonction possédant hors de cet ensemble une dérivée continue.

Montrons qu'il est possible à une fonction continue d'avoir, sur un ensemble de la nature dite, *pour dérivé supérieur droit* $+\infty$, *pour dérivé inférieur gauche* $-\infty$, *les deux autres dérivés étant finis et égaux, plus précisément nuls.* Soient P cet ensemble, a et b ses points extrêmes, u_1, u_2, ..., u_n, ... ses intervalles contigus. Choisissons f nul sur P. Sur chacun des u_n, faisons f positif, continu et pourvu d'une dérivée continue à l'intérieur de u_n. A cette fin, la valeur y_n de f sur u_n se déduira d'une fonction $y(x)$ définie sur l'intervalle $0-1$ par transformation linéaire séparément de la variable et de la fonction. $y(x)$ aura pour nombre dérivé supérieur droit à l'origine $+\infty$, et pour dérivé inférieur gauche au point 1, $-\infty$. Posons

$$Y(x)=4\sqrt{x(1-x)}.$$

Pour que, à l'origine et au point 1, les dérivés de $y(x)$, respectivement droit et gauche, non encore examinés soient nuls, nous multiplierons $Y(x)$ par une fonction oscillant de 0 à 1, avec une fréquence infinie aux deux extrémités du segment. Nous choisissons pour ce facteur

$$\sin^2\frac{k}{x(1-x)},$$

et pour ne pas modifier le maximum de Y entre 0 et 1, correspondant à $x=\frac{1}{2}$, nous prenons

$$4k=\frac{\pi}{2}.$$

Soit donc

$$y(x)=4\sqrt{x(1-x)}\,\sin^2\frac{\pi}{8x(1-x)};$$

y est continu, jamais négatif, mais nul en une infinité de points admettant les deux valeurs limites 0 et 1; y a pour maximum l'unité qu'il atteint pour $x=\frac{1}{2}$; $y(x)$ a une dérivée finie et continue en tout point comprise entre 0 et 1. En zéro, ses nombres dérivés extrêmes, définis seulement à droite, sont 0 et $+\infty$. En 1, ses dérivés extrêmes gauches sont 0 et $-\infty$. Posons

$$y_n(x)=r_n y\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right),$$

et portons notre attention sur le choix de r_n, que nous déterminons de la façon suivante : u_n est situé sur un certain segment compris entre deux éléments géométriquement consécutifs de la suite : point a, point b, intervalles $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Ce segment a une certaine longueur ρ_n. Prenons $r_n = \sqrt{\rho_n}$. Je dis que f, maintenant entièrement défini, satisfait aux conditions imposées à ses dérivés. D'abord, vérifions la continuité de f. ρ_n étant la longueur de l'un des segments conservés entre a et b, quand on a extrait de ab les intervalles contigus u_1, u_2, ..., u_{n-1}, ρ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, puisque P ne contient par hypothèse aucun segment continu. Par suite, le maximum de f sur u_n, soit $r_n = \sqrt{\rho_n}$, tend vers zéro avec u_n. Donc, selon un résultat antérieur (**11**), f est continu en tout point du segment ab. En tout point extérieur à P, f coïncidant avec une fonction y_n est continu et possède une dérivée finie. Aux points de première espèce de P, f possède du côté opposé à P un nombre dérivé nul et un autre infiniment grand de signe conforme à l'énoncé du problème. Soit d'ailleurs ξ un point quelconque de P. $f(\xi)$ est nul. $f(x)$ étant positif ou nul, $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ n'est jamais négatif si x est à droite de ξ, jamais positif si x est à gauche de ξ. D'ailleurs, quel que soit ξ, il y a de part et d'autre de ξ une infinité de valeurs de x tendant vers ξ et où f est nul. Si ξ est de seconde espèce, ce sont entre autres les points de P tendant de l'un ou l'autre côté vers ξ. Si ξ est de première espèce et frontière de u_n, les x sont : du côté de ξ opposé à u_n, les points de P; du même côté que u_n, les points en infinité voisins de ξ et où s'annule $y_n(x)$. Donc, en tout point de P, le dérivé inférieur droit et le dérivé supérieur gauche sont nuls.

Passons aux deux autres dérivés. *Supposons ξ de seconde espèce.* La suppression progressive dans ab des intervalles u_1, u_2, ..., u_n, ..., laisse successivement ξ sur des segments $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, ..., $\rho^{(p)}$, ..., dont chacun est compris dans le précédent, dont le nombre n'est pas limité, puisque P ne contient aucun segment continu, dont l'un d'eux enfin ne disparaît pour faire place au suivant à la suppression d'un intervalle contigu à P que si cet intervalle supprimé se trouve précisément lui appartenir.

Quand nous passons de $\rho^{(p)}$ à $\rho^{(p+1)}$, c'est que nous venons d'introduire à l'intérieur de $\rho^{(p)}$ un intervalle u_n sur lequel nous attribuons à f des valeurs non partout nulles, mais atteignant pour maximum précisément $\sqrt{\rho^{(p)}}$ en un certain point x_p (d'ailleurs milieu de u_n).

$|x_p - \xi|$ est inférieur à $\rho^{(p)}$. Donc,

$$\frac{f(x_p)-f(\xi)}{x_p-\xi} = \frac{\sqrt{\rho^{(p)}}}{x_p-\xi} = \frac{1}{\delta\sqrt{\rho^{(p)}}},$$

δ étant compris entre -1 et $+1$ et possédant le signe de $x_p - \xi$, donc étant positif ou négatif, selon que u_n est à droite ou à gauche de ξ. Or, est-il possible que ce signe soit invariable à partir d'une certaine valeur de p? Nullement. En effet, ξ étant supposé de seconde espèce, est intérieur à tous les segments $\rho^{(p)}$ le contenant, et étranger à tous les segments u_n. Est-il possible qu'à partir d'une certaine valeur k de p, l'intervalle u_n dont l'extraction de $\rho^{(p)}$ remplace le segment antérieurement conservé $\rho^{(p)}$ contenant ξ, par le segment $\rho^{(p+1)}$ contenant encore ξ, est-il possible que ces u_n soient tous d'un côté invariable de ξ? Non, car si les u_n considérés étaient tous par exemple à droite de ξ, entre l'extrémité gauche de $\rho^{(k)}$ et ξ, il n'y aurait jamais d'intervalle u_n extrait. Donc, le segment limité par ces deux points serait agrégé à P qui ne serait pas discontinu, contrairement à notre hypothèse. Donc, les u_n extraits successivement des $\rho^{(p)}$, opération substituant $\rho^{(p+1)}$ à $\rho^{(p)}$, sont tantôt d'un côté de ξ, tantôt du côté opposé, sans qu'il y ait évidemment aucune loi générale réglant cette alternance. Mais les points x_p, intérieurs aux u_n, sont eux aussi en infinité des deux côtés de ξ. Ils tendent vers ξ, puisque la longueur du segment $\rho^{(p)}$ contenant x_p tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Donc, en ξ le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche est $-\infty$.

Si ξ est de première espèce dans P, ξ appartient pareillement toujours aux segments conservés au moment de la $n^{\text{ième}}$ opération consistant dans la suppression sur ab de u_n. ξ est donc comme tout à l'heure situé sur une suite de segments conservés $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \ldots, \rho^{(p)}, \ldots$; mais, comme il est extrémité d'un intervalle u_m, quand on supprime dans le segment $\rho^{(q)}$ auquel ξ est à ce moment intérieur, l'intervalle u_m, ξ devient extrémité de $\rho^{(q+1)}$. Il restera extrémité de tous les $\rho^{(q+h)}$ suivants et le côté de ξ où se trouveront ces segments sera le côté opposé à u_m, celui où il est limite de points de P. Si, par exemple, ξ est extrémité gauche de u_m, on aura $x_p - \xi < 0$, si u_n est extrait de $\rho^{(p)}$ en supposant $p > q$, et par suite

$$\frac{f(x_p)-f(\xi)}{x_p-\xi} = -\frac{\sqrt{\rho^{(p)}}}{\xi - x_p} < -\frac{1}{\sqrt{\rho^{(p)}}}.$$

Donc, le dérivé inférieur gauche en ξ est $-\infty$, comme en tout autre point de P. (Nous avons déjà vu que le dérivé supérieur droit en ξ est $+\infty$, d'après le choix de f sur u_m). On montre exactement de même que le dérivé supérieur droit en toute extrémité droite d'intervalle contigu à P est, comme partout ailleurs sur P, $+\infty$. Les conditions annoncées sont donc partout réalisées sur P. Le changement de f en $-f$ nous donnerait sur P le cas [DB']. La substitution de $-x$ à x changerait le signe des dérivés mais aussi leurs côtés, donc laisserait subsister le cas [BD'].

Une très légère modification à la construction précédente nous donnera le cas (AA') sur le même ensemble P, la fonction ayant toujours hors de P une dérivé finie et continue en chaque point.

60. *Exemple IV. — Réalisation sur un ensemble épais en lui-même du cas* (AA'). — Choisissant toujours f nul sur P, nous faisons coïncider f sur u_n avec une fonction y_n ainsi définie dans cet intervalle. Prenons toujours

$$Y(x) = \sqrt{x(1-x)},$$

mais

$$y_0(x) = Y(x)\sin\frac{k}{x(1-x)},$$

k étant une constante numérique; y_0 possède un certain maximum positif μ et un certain minimum négatif $-\mu'$ atteints pour deux valeurs θ et θ' de x; $y_0(x)$, continu entre 0 et 1 et nul en ces deux points, a également une dérivée continue dans cet intervalle, sauf aux extrémités, où il a pour dérivés extrêmes vers l'intérieur $+\infty$ et $-\infty$. Nous posons

$$y_n = r_n y_0\left(\frac{x-a_n}{u_n}\right),$$

r_n étant choisi, comme il a été dit, égal à $\sqrt{\rho^{(p)}}$. Le maximum et le minimum de y_n sont respectivement $r_n\mu$ et $-r_n\mu'$ atteints en $a_n+\theta u_n$ et $a_n+\theta' u_n$, θ et θ' étant fixes. On verra sans aucune difficulté qu'en tout point ξ limite de points de P d'un seul côté ou des deux, les quatre nombres dérivés extrêmes ont bien les valeurs $+\infty$ pour les deux supérieurs et $-\infty$ pour les deux inférieurs.

61. *Exemple V. — Fonctions réalisant les quatre cas fondamentaux, soit isolément sur des épaisseurs pleines, soit simultanément sur des ensembles partout épais.*

Nous utiliserons les fonctions auxiliaires suivantes. Appelons *fonction doublement nulle sur un ensemble parfait*, ou même simplement *fermé* H, une fonction nulle sur H et dans un rapport borné avec le carré de la distance de x à H, quand x n'appartient pas à H. Si x est situé dans l'intervalle u_n ou $a_n b_n$ contigu à H, selon que x est inférieur ou supérieur à $\frac{a_n+b_n}{2}$, la distance de x à H est $x-a_n$ ou b_n-x. Soit δ cette distance. Le quotient $\frac{\delta^2}{(x-a_n)^2(b_n-x)^2}$ est, dans l'un ou l'autre cas, $\frac{1}{(b_n-x)^2}$ ou $\frac{1}{(x-a_n)^2}$. Il est compris entre $\frac{1}{u_n^2}$ et $\frac{4}{u_n^2}$. Une fonction doublement nulle sur H est donc égale sur u_n à $\lambda\frac{(x-a_n)^2(b_n-x)^2}{u_n^2}$, λ étant borné. Le maximum de $|\lambda|$ sera appelé le *coefficient relativement à* H *de cette fonction doublement nulle sur* H. Une fonction doublement nulle séparément sur divers ensembles fermés a, relativement à chacun d'eux, un coefficient propre.

L'expression $\frac{(x-\xi)(\xi'-x)}{\xi'-\xi}$ étant manifestement décroissante en $x-\xi$ et $\xi'-x$ supposés positifs, si f est une fonction doublement nulle sur H et de coefficient A, on a, pour toute valeur de x comprise entre deux points quelconques ξ et ξ' agrégés à H,

$$|f(x)| \leqq A\frac{(x-\xi)^2(\xi'-x)^2}{(\xi'-\xi)^2}.$$

De la définition de la double nullité de f sur H résulte que le quotient $\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^2}$ est borné, quels que soient ξ sur H et x indifféremment situé, et enfin que f *possède une dérivée nulle en tout point de* H.

62. Supposons le segment $0-1$ décomposé indifféremment en quatre ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 partout ou non partout épais ou minces. Montrons la possibilité de définir une fonction *f réalisant respectivement sur une pleine épaisseur de* E_1, E_2, E_3, E_4 *chacun des quatre cas fondamentaux.* Si E_i $(1 \leq i \leq 4)$ n'est pas mince, nous le décomposons en une infinité dénombrable d'ensembles parfaits discontinus (**19**), épais en eux-mêmes, deux à deux distincts, $Q_i, Q_{i+4}, \ldots, Q_{i+4h}, \ldots$, augmentés d'un ensemble mince E'_i. Deux ensembles Q_m dont l'indice divisé par 4 donne deux restes différents appartiennent à deux ensembles E_i différents et sont eux aussi distincts. La réunion des ensembles Q_m constitue une épaisseur pleine. Désignons par P_m la réunion des ensembles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Q_m est intérieur à certains contigus u_{m-1} (en nombre limité) de P_{m-1}. Soit Q''_{m-1} la portion de Q_m située dans u''_{m-1}. Nous allons montrer la possibilité de définir une fonction continue f réalisant le $i^{\text{ième}}$ cas fondamental sur Q_{i+4h} à la fois pour toutes les valeurs entières de h et les quatre indices i.

La fonction f sera définie comme étant la somme d'une série

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_m + \ldots.$$

Supposons que f_m soit une fonction : 1° doublement nulle sur P_{m-1} avec un coefficient inférieur à $\frac{1}{2^m}$; 2° réalisant sur Q_m le $i^{\text{ième}}$ cas fondamental si $m-i$ est divisible par 4 ; 3° possédant une dérivée finie en tout point étranger à P_m. Je dis que moyennant ces conditions : 1° la série f_m converge ; 2° sa somme f est une fonction continue ; 3° en tout point de Q_m, f réalise le même cas fondamental que f_m.

En effet, soit δ_m la distance de x à P_m. D'après la première hypothèse des f_m et l'inclusion de P_m dans P_{m+p}, on a toujours, que δ_m soit nul ou positif,

$$|f_{m+p}| \leq \frac{1}{2^{m+p}} \delta_m^2,$$

pour toute valeur entière et positive de p. $2\delta_m$ étant toujours inférieur à 1, la série f_m est évidemment uniformément convergente et sa somme f est une fonction continue. Posons

$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n, \qquad R_n = f_{n+1} + \ldots,$$

nous avons

$$f = S_{m-1} + f_m + R_m.$$

S_{m-1} est la somme d'un nombre limité de fonctions dont chacune, d'après la troisième condition des f_m, est douée d'une dérivée finie en tout point étranger à P_{m-1}; car un tel point est *a fortiori* étranger à $P_1, P_2, \ldots, P_{m-2}$. Quant à R_m, d'après la limitation trouvée pour $|f_{m+p}|$, cette fonction est en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2^m}\delta_m^2$; elle est donc doublement nulle sur P_m et y possède la dérivée zéro. Donc, en tout point de l'ensemble simultanément agrégé à P_m et étranger à P_{m-1}, c'est-à-dire en tout point de Q_m, la différence $f - f_m$ possède une dérivée finie φ. Si f_m réalise un des quatre cas fondamentaux en un point de Q_m, en ce point, f réalisera le même cas fondamental; car à un dérivé latéral infini de f_m correspond pour le même côté le même dérivé infini pour f, et à deux dérivés extrêmes finis et égaux pour f_m correspondent pour f les deux mêmes dérivés extrêmes finis et égaux.

La réalisation annoncée sera donc effective si nous savons, sur tout élément Q''_{m-1}, former une fonction f_m présentant le cas fondamental désiré. Pour le cas $[CC']$ $(m = 3 + 4h)$, nous posons $f_m = 0$. Pour les autres cas, désignons par $\psi(P)$ l'une des fonctions construites selon les règles des nos **59** et **60**, et réalisant sur l'ensemble parfait P le cas (AA'), $[BD']$, $[DB']$ que l'on veut, $\psi(P)$ ayant d'ailleurs une dérivée finie et continue hors de P. On peut toujours supposer la valeur absolue de $\psi(P)$ inférieure à *un* en divisant cette fonction par un facteur convenable indépendant de x. Désignons par ψ''_m le produit $\psi[Q''_m] \times \frac{(x - a''_m)^2 (b''_m - x)^2}{(u''_m)^2}$. ψ''_m étant le produit de $\psi(Q''_m)$ par un facteur continu, dérivable et positif à l'intérieur de u''_m, réalise en tout point de cet intervalle, et en particulier en tout point de Q_{m+1}, le même cas fondamental que $\psi(Q''_m)$ [1]. D'ailleurs ψ''_m est doublement nul, de coefficient un au plus relativement au couple (a''_m, b''_m).

---

[1] f étant continue et douée d'une dérivée finie au point x, g étant au même point continue, considérons les propriétés différentielles du produit fg en ce même point. Si f est nul en x, fg possède la dérivée $f'g$ au même point et y réalise par suite le cas $[CC']$. Si $f(x)$ n'est pas nul, μ étant pour un des côtés un dérivé quelconque médian ou extrême de g, les nombres dérivés de fg se

Posons $f_m = 0$ sur tous les segments restant sur $0-1$ quand on en retranche les intervalles en nombre fini u''_{m-1} et $f_m = \frac{1}{2^m}\psi''_{m-1}$ sur u_{m-1}. Il est visible que la fonction f_m, complètement définie sur le segment $0-1$, vérifie les trois conditions exigées d'elle, et cela quel que soit le cas fondamental désigné pour être réalisé sur Q_m. La construction que nous avions en vue est donc effectuée.

63. *Exemple VI.* — Montrons qu'*une fonction peut avoir en tout point d'une épaisseur pleine une dérivée nulle* (cas [CC']) *sans être constante dans aucun intervalle.*

Considérons, en effet, sur deux segments : ab composé de points x, $\alpha\beta$ constitué de points ξ, deux ensembles parfaits admettant ces points extrêmes énoncés, le premier P_1 d'épaisseur supérieure à 0 sur ab, le second Π_1 de mesure nulle. Nous définissons comme nous l'avons expliqué (**10**) une première fonction $g(x)$ sur ab, une deuxième $\gamma(\xi)$ sur $\alpha\beta$, croissantes l'une sur P_1, l'autre sur Π_1, constantes $g(x)$ sur les segments contigus de P_1, $\gamma(\xi)$ sur ceux de Π_1, et prenant chacune, sur ces divers segments, l'ensemble e des valeurs rationnelles de la forme $\frac{k}{2^n}$ (k entier impair) positives et inférieures à *un*. Les points de seconde espèce x de P_1 et ξ de Π_1 d'une part, les segments contigus à P_1 et ceux de Π_1 d'autre part, quand $g(x)$ et $\gamma(\xi)$ prendront sur eux les mêmes valeurs, seront par définition considérés comme éléments homologues des deux ensembles. Sur deux segments contigus homologues, nous faisons correspondre l'une à l'autre les extrémités de même côté. Alors, quel que soit x_1 agrégé à P_1, il lui correspond un nombre ξ_1 et un seul agrégé à Π_1, et réciproquement.

---

déduisent linéairement de μ, selon une formule, $\alpha\mu + \beta$, avec $\alpha = f$, $\beta = gf'$. Car, dans l'égalité

$$\frac{\Delta fg}{\Delta x} = g\frac{\Delta f}{\Delta x} + f\frac{\Delta g}{\Delta x} + \Delta g\,\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tend vers une limite finie f' et Δg vers zéro, quand Δx est infiniment petit. Donc si, en x, g réalise un des quatre cas fondamentaux, et si f est positif, fg réalise le même cas fondamental. Si f est négatif, les deux cas (AA'), [CC'] sont conservés, [BD'] et [DB'] sont échangés.

Deux nombres de P_1 ont pour homologues deux nombres de Π_1 offrant le même sens d'inégalité. A deux éléments (points ou intervalles) distincts de P_1, l'un gauche, l'autre droit, correspondent dans Π_1 deux éléments de même nature, le premier gauche, le second droit. Nous ne modifierons plus la correspondance des points de P_1 et de Π_1. Nous allons seulement répartir dans leurs contigus homologues de nouveaux ensembles que nous ferons correspondre entre eux comme P_1 et Π_1. On peut supposer que l'on donne les mêmes numéros d'ordre aux intervalles contigus u''_1 et ω''_1 correspondants dans les deux ensembles. Alors, si u^p_1 et u^q_1 sont contigus à P_1, u^p_1 étant à gauche de u^q_1, ω^p_1 est encore à gauche de ω^q_1. Sur chaque segment contigu à P_1, d'extrémités a'_{n}, b'_{n}, ayant pour correspondant $\alpha''_1\beta''_1$ contigu à Π_1, nous plaçons un ensemble parfait P''_2 de points extrêmes a''_1, b''_1, de mesure supérieure à $0.a''_1b''_1$. Plaçons de même sur $\alpha''_1\beta''_1$ un ensemble parfait Π''_2 de mesure nulle et d'extrémités α''_1, β''_1.

Nous pouvons établir entre les points de P''_2 et ceux de Π''_2 d'une part, entre leurs intervalles contigus d'autre part, une correspondance respectant la disposition des éléments homologues. P''_2 ayant pour extrémités a''_1, b''_1, tout point de l'intervalle $a''_1b''_1$ est soit agrégé à P''_1, soit intérieur à un contigu (et non pas un semi-contigu) de cet ensemble. Il en est de même pour tout point de l'intervalle $\alpha''_1\beta''_1$ relativement à Π''_2. Tout point de ab est soit agrégé à l'ensemble parfait P_2 réunissant P_1 et les P''_2, soit intérieur à un contigu de l'un des P''_2 (de même les contigus de l'ensemble Π_2 réunissant Π_1 et les Π''_2 sont exclusivement les contigus à ces derniers ensembles). Dans le premier cas, le point x_2 de P_2 a un homologue ξ_2 sur Π_2. Dans le second cas, le point x' étranger à P_2 est intérieur à un contigu u'''_2 de l'un des P''_2. Son homologue ξ' n'est pas encore défini. Mais il sera intérieur à ω'''_2 contigu à Π''_2 homologue de u'''_2. Il est facile de voir que deux éléments t, t' points ou contigus de P_2 ont des homologues τ, τ' de même nature présentant la même disposition. Cela est évident si t et t' sont l'un et l'autre identiques ou agrégés à des éléments distincts, points ou contigus de P_1 d'après la croissance de la correspondance établie entre points et contigus de P_1, d'une part, points et contigus de Π_1 d'autre part. Les seuls autres cas sont ceux où t et t'

supposés distincts sont agrégés au même contigu u''_1 à P_1, auquel cas ce sont des éléments distincts d'un même ensemble parfait P''_2 et leurs homologues τ, τ', agrégés à ω''_1, sont des éléments de même nature de Π''_2. Or, les caractères de la correspondance (P''_2, Π''_2) maintiennent la même conclusion.

Nous allons maintenant définir deux suites d'ensembles parfaits $P_3, P_4, \ldots, P_r, \ldots$ sur ab, $\Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_r, \ldots$ sur $\alpha\beta$, et les explications précédentes nous permettront d'aboutir plus vite aux conclusions. Chacun des P_r d'une part, chacun des Π_r d'autre part, contient les précédents et est agrégé à tous les suivants. Supposons réalisée entre les éléments, points et contigus de P_r, et ceux de Π_r une correspondance croissante biunivoque et réciproque. Soient u''_r et ω''_r deux segments contigus homologues quelconques de P_r et Π_r. Formons deux ensembles parfaits discontinus P''_{r+1} et Π''_{r+1}, ayant respectivement mêmes points extrêmes que les segments u''_r et ω''_r, le premier d'épaisseur supérieure à θ sur u''_r, le second métriquement nul, mais avec des contigus toujours inférieurs en longueur à $\frac{1}{r}\cdot$ Établissons une correspondance du type maintes fois énoncé entre les éléments de P''_r et ceux de Π''_r. Si P_{r+1} est la réunion de P_r et des P''_{r+1}, si Π_{r+1} réunit Π_r et les Π''_{r+1}, les correspondances établies entre les points de P_r et de Π_r, entre les éléments, points ou contigus des P''_{r+1} et ceux des Π''_{r+1}, constituent une correspondance entre les éléments, points ou contigus de P_{r+1} et les éléments de même nature relatifs à Π_{r+1}, avec conservation de la disposition; on le montre comme pour $r+1=2$. L'homologue d'un point x_r de P_r restant le même quand on considère x_r comme agrégé à P_{r+1}, cet homologue reste le même quand on considère x_r dans P_{r+p}, quel que soit p. Cet homologue est toujours un point ξ_r de Π_r. Et réciproquement quand on passe d'un point de Π_r à un point de ab. Le complémentaire de P_{r+1} a sur ab une épaisseur inférieure à celle du complémentaire de P_r multipliée par $(1-\theta)$. La première est donc inférieure à $(1-\theta)^{r+1}$. De même, le complémentaire de Π_r est constitué d'intervalles dont le plus grand est inférieur à $\frac{1}{r}\cdot$ Soient donc P et Π les ensembles réunissant respectivement les P_r et les Π_r. P est une pleine épaisseur de ab. Π_r, au contraire, est mince, mais son complémentaire ne contient aucun intervalle puisque le plus grand contigu à Π_r est inférieur à $\frac{1}{r}\cdot$ Donc, P et Π sont partout denses, le premier sur ab, le second sur $\alpha\beta$. D'ailleurs, P et Π sont gerbés. Leurs complémentaires par rapport à ab et $\alpha\beta$, C et Γ, l'un et l'autre résiduels, sont partout denses, et le premier mince, le second pleinement épais. Un point quelconque de P appartient à un certain P_r et à tous les suivants. Son homologue dans Π_r et dans tous les ensembles suivants est un certain point invariable de Π, et réciproquement. Le premier et ce dernier, x et ξ, seront considérés comme homologues dans P et Π. De plus, si $x<y$, x et y étant agrégés à P, donc respectivement à deux ensembles P_q et P_s, donc à P_{q+s} et à tous les suivants, x et y ont dans Π des homologues ξ, η dont le premier est le plus petit. Et réciproquement. La correspondance de P et de Π conserve donc la disposition mutuelle des points. P et Π étant partout denses sur ab et $\alpha\beta$, si x' est un point de C, x' détermine une coupure entre les points de P situés à sa gauche et ceux qui sont placés à sa droite, et x' est la borne commune de ces deux classes c_1 et c_2, dont la première n'a donc pas d'élément le plus à droite, ni la seconde d'élément le plus à gauche. Les classes γ_1 et γ_2 constituées des points de Π homologues de c_1 et de c_2 sont de même la première entièrement à gauche de la seconde. La première n'a aucun élément le plus à droite ni la seconde aucun élément le plus à gauche. Comme l'ensemble $\gamma_1+\gamma_2=\Pi$ est partout dense, γ_1 et γ_2 sont séparées par une borne commune ξ' étrangère à Π, donc agrégée à Γ. Les points de C et de Γ se correspondent réciproquement et univoquement. On pourrait encore établir ainsi leur correspondance : x' n'appartenant à aucun P_m appartient, quel que soit m, à un intervalle contigu à P_m, soit $u_m(x')$. A ce dernier correspond un intervalle ω_m contigu à Π_m; $u_{m+p}(x')$ étant intérieur à $u^m(x')$, ω_{m+p} est intérieur à ω_m. D'ailleurs, la longueur de ω_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}\cdot$ Donc, les ω_m ont en commun un point et un seul, ξ'.

63 *bis*. Nous avons donc réalisé une correspondance $\xi=f(x)$ où maintenant nous faisons varier x arbitrairement sur ab dans P ou dans C et en même temps ξ entre α et β, sur Π ou sur Γ. $f(x)$ est une fonction croissante et continue (¹) dans tout intervalle et elle transforme une pleine épaisseur de ab, savoir P, en un ensemble de mesure nulle Π et inversement un ensemble mince C en Γ, épaisseur pleine de $\alpha\beta$. Nous allons montrer que $f(x)$ a une dérivée nulle sur une pleine épaisseur de ab.

D'abord, f étant croissant dans tout intervalle, l'ensemble des points où $f(x)$ n'a pas une dérivée nulle, cet ensemble existe. Je dis qu'il est mince. S'il en était autrement, il y aurait un ensemble E épais, en chaque point duquel un dérivé supérieur de f serait positif. Comme nous l'avons expliqué souvent, il existe alors un nombre positif λ et un ensemble épais E_1 en chaque point duquel l'un des deux dérivés supérieurs, le droit par exemple, surpasse λ. E'' désignant la partie commune à E_1 et à P_n, tous les E'' ne sont pas sans épaisseur, puisque E_1 est la somme des E'' et de l'ensemble commun à E_1 et à C, ensemble mince. Soient donc E''' un ensemble épais et H un ensemble parfait épais en lui-même agrégé à E''', donc à P_m. En tout point de H, le dérivé supérieur droit surpasse λ.

D'après le Second Théorème, f étant croissant dans tout intervalle contigu à H, entre deux points quelconques a' et b' de H, séparés par une épaisseur e de cet ensemble, la variation relative de f surpasse λe. Ou encore, la variation simple de f entre ces deux points a' et b' surpasse λl, l étant la mesure de H entre ces deux points.

En retranchant de $\alpha\beta$ un certain nombre d'intervalles contigus à η, ensemble parfait homologue de H, et par suite agrégé à Π_m, nous rassemblons η sur un certain nombre de segments dont chacun a ses extrémités sur η et dont la longueur totale est aussi petite que l'on veut, puisque la mesure de η est nulle, comme celle de Π_m. Mais chacun de ces segments $\alpha'_i\beta'_i$ représente la variation de f entre les points homologues a'_i, b'_i de H et surpasse par conséquent λl_i, l_i étant la mesure de H entre a'_i et b'_i. La longueur totale de ces segments surpasse donc $\lambda\Sigma l_i$ et enfin λL, L étant la mesure de H. Ceci est absurde, cette somme pouvant être supposée aussi petite que l'on veut et L étant par contre positif.

(¹) Une fonction croissante dans un intervalle, et qui peut dans cet intervalle coïncider avec tous les nombres compris entre ses valeurs extrêmes, est continue.

La fonction $f(x)$ n'a donc de dérivé supérieur positif qu'en un ensemble mince. Partout ailleurs, donc sur une épaisseur pleine, comme elle est croissante, elle a pour dérivée zéro.

64. Soit $\theta(u)$ une fonction définie dans l'intervalle $0 - 1$ décrit par u, et possédant en tout point des nombres dérivés finis. Alors, la fonction $\theta[f(x)] = \psi(x)$ admet pour dérivés en x, où f prend la valeur u et a une dérivée, tous les nombres obtenus en multipliant les divers dérivés médians ou extrêmes de $\theta(u)$ par $f'(x)$. Donc en tout point x de l'intervalle ab, sauf en un ensemble mince Γ, $\psi'(x)$ existera et sera nul. Nous verrons [1] la possibilité que $\theta(u)$ ait une dérivée finie à signe variable dans tout intervalle. Alors, dans tout intervalle, $\psi(x)$ ne sera ni constant ni doué d'un sens de variation déterminé et cependant $\psi(x)$ aura une dérivée nulle sur une épaisseur pleine.

En tout cas, il est acquis dès à présent qu'une fonction continue possédant une dérivée nulle sur une épaisseur pleine admet dans tout intervalle une indétermination au moins aussi grande que celle d'une fonction arbitraire à nombres dérivés finis. Donc, la connaissance d'une fonction finie φ qu'une fonction inconnue f est assujettie à posséder pour dérivée sur une épaisseur pleine ne particularise que très vaguement f. Mais si f joint à ce premier caractère un second défini dans une autre Partie de ce Mémoire (savoir d'être « résoluble »), f est entièrement déterminé à une constante additive près.

Exemple de fonction en tout point variante et douée d'un dérivé latéral médian ou extrême nul.

65. Les fonctions de Weierstrass et de M. Darboux, fournies par des développements trigonométriques remarquables, réalisent, comme il est facile de le voir, le cas fondamental (AA') des nombres dérivés sur une épaisseur pleine, en dehors de laquelle on a partout le dérivé $+\infty$ pour un côté et le dérivé $-\infty$ pour l'autre, ces côtés étant

(1) Dans la seconde Partie de ce travail, appelée sans doute à paraître au *Bulletin de la Société mathématique* pour 1915.

évidemment variables dans tout intervalle. Nous allons chercher dans les mêmes types d'expressions, des fonctions possédant en tout point, au moins pour un côté, le dérivé médian ou extrême zéro. Les premières fonctions n'avaient évidemment de dérivée, même unilatérale, finie en aucun point d'aucun côté. Elles n'ont davantage de dérivée bilatérale infinie en aucun point. Mais, *a priori*, rien n'empêche qu'en certains points (d'un ensemble forcément mince) elles ne possèdent à la fois la dérivée $+\infty$ d'un côté et la dérivée $-\infty$ de l'autre. Cette dernière possibilité elle-même sera évidemment exclue, pour nos fonctions possédant en chaque point au moins d'un côté le dérivé médian ou extrême zéro. Cependant il ne serait pas absurde que notre exemple comportât en certains points (d'un ensemble forcément mince et gerbé, donc rare aux deux points de vue métrique et descriptif) une dérivée infinie, mais pour un seul côté bien entendu. Je laisse au lecteur le soin de rechercher s'il est possible pour une fonction de n'avoir en aucun point ni pour aucun côté de dérivée finie ni infinie, et, en cas de réponse affirmative, de trouver des exemples particuliers dans une telle classe de fonctions.

Les fonctions que nous allons considérer, sommes de séries de termes

$$a_n \cos(b_n \pi x + \alpha_n),$$

tireront uniquement leurs propriétés des ordres de croissance ou de décroissance en n, des nombres b_n et a_n. Des choix plus particuliers des b_n et des α_n permettraient $\Big($comme dans l'exemple de Weierstrass où α_n vaut $-\frac{\pi}{2}$, b_n étant la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un entier impair$\Big)$ d'obtenir les mêmes propriétés différentielles de f avec des ordres de croissance légèrement réduits pour b_n et a_n. Nous ne porterons pas notre attention sur ces points de détail. Supposant les a_n *positifs*, nous prendrons $\alpha_n = 0$. Le lecteur se rendra compte de la persistance des conclusions obtenues ci-dessous, quand on donne à α_n toute autre valeur indépendante de x. Dans la suite de ce paragraphe, il sera question de nombres infiniment grands ou infiniment petits. Ce seront toujours des fonctions de n et il sera sous-entendu une fois pour toutes que leur caractère d'infinitude se présente quand l'entier n croît indéfiniment.

Nous supposerons toujours *la série a_n convergente*. La série $a_n \cos b_n x$ est donc uniformément convergente et sa somme $f(x)$ est une fonction continue de x. Nous appelons *terme principal* d'ordre n, le $n^{\text{ième}}$ terme et *abscisses principales* d'ordre n, les valeurs de x rendant maximum ou minimum le terme principal de même ordre, donc les valeurs $\frac{k}{b_n}$, k étant un entier. Les points correspondants de la courbe C d'équation $y = f(x)$ seront appelés *sommets principaux d'ordre n*, *supérieurs* si k est pair, *inférieurs* pour k impair. Nous poserons

$$a_1 \cos b_1 \pi x + \ldots + a_n \cos b_n \pi x = S_n(x), \qquad a_{n+1} \cos b_{n+1} \pi x + \ldots + = r_n(x),$$

donc

$$f(x) = S_{n-1}(x) + a_n \cos b_n \pi x + r_n(x).$$

Le choix des a_n et b_n sera guidé par cette idée que, les $n - 1$ premiers termes de $f(x)$ étant fixés, si b_n est pris de plus en plus grand, entre deux abscisses principales consécutives d'ordre n, S_n diffère de son dernier terme par une fonction de plus en plus assimilable à une expression linéaire (ou à un trinome du second degré), et que, d'autre part, en bornant à notre gré ρ_n, le reste $r_n(x)$ modifiera d'aussi peu que nous voudrons en valeur absolue la validité de cette approximation de f.

1° Cherchons d'abord une condition suffisante pour que $f(x)$ ne possède en aucun point une dérivée finie. Il en sera certainement ainsi dès que f possédera en tout point un nombre dérivé infini. Soient M_k et M_{k+1} deux sommets principaux consécutifs d'ordre n. Il est facile d'obtenir que la pente de $M_k M_{k+1}$ soit infiniment grande avec n et positive si le premier sommet est inférieur, négative s'il est supérieur. Car, x_k étant l'abscisse de M_k, en supposant d'abord k impair (M_k est un sommet inférieur), la variation de $a_n \cos b_n \pi x$ de x_k à x_{k+1} est $2\,a_n$. La dérivée de $S_{n-1}(x)$ étant inférieure en valeur absolue à πT_{n-1}, avec

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = T_n,$$

la variation absolue de S_{n-1} entre x_k et $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{b_n}$ est inférieure à $\frac{\pi}{b_n} T_{n-1}$ et celle de $r_n(x)$ l'est à $2\rho_n$. La variation de f de x_k à x_{k+1} surpasse donc

$$2a_n - \frac{\pi}{b_n} T_{n-1} - 2\rho_n.$$

Si k était pair, cette même variation serait inférieure à l'expression précédente changée de signe. La condition imposée à la pente de $M_k M_{k+1}$ est donc que

$$2(a_n - \rho_n) b_n - \pi T_{n-1} = u_n$$

soit infiniment grand positif.

Si nous posons

$$a_n = a^n, \qquad b_n = b^n,$$

a_n devant d'abord surpasser ρ_n, il faut que a soit inférieur à $\frac{1}{2}$; il faut ensuite visiblement que ab surpasse l'unité. Dès lors, le quotient de u_n par $(ab)^n$ tend vers

$$2\frac{1-2a}{1-a} - \frac{\pi}{ab-1}$$

qui doit être positif, ce qui nous donne la condition

$$ab > 1 + \frac{\pi}{2}\,\frac{1-a}{1-2a}.$$

Si nous prenons, comme dans l'exemple de Weierstrass pour b, un entier impair et pour α_n la valeur $-\frac{\pi}{2}$, et non point la valeur zéro, toute abscisse principale d'une ordre n le demeure pour tous les ordres suivants : $r_n(x)$ aura en ces points une valeur immédiatement calculable et ne contrariant pas au maximum la variation du terme principal entre x_k et x_{k+1}. D'où la possibilité de réduire le minimum de b, pour une valeur donnée de a (1).

---

(1) Soit

$$f(x) = \sum_1^\infty a^n \cos b^n \pi x,$$

b étant un entier. Si b est impair, tout sommet principal supérieur ou inférieur d'ordre n, reste principal et de même espèce pour tous les ordres $n+p$ supé-

Supposons donc vérifiée la condition : u_n infiniment grand positif avec n. Je dis qu'en tout point x, f aura un nombre dérivé infini. M étant le point figuratif de f en x, montrons la possibilité de joindre M à un sommet M_h d'ordre n, infiniment voisin de M pour n infini, et tel que la pente de MM_h surpasse u_n en valeur absolue. Si x est abscisse principale d'ordre n, et coïncide avec x_k, nous pouvons prendre h égal à $k-1$ ou à $k+1$ à notre gré. Si x n'est pas abscisse principale d'ordre n, x appartient à un intervalle $x_k x_{k+1}$. Les pentes des droites MM_k et $M\,M_{k+1}$ comprennent entre elles la pente de $M_k M_{k+1}$. (Car dans le triangle MM_kM_{k+1} la parallèle menée par M au côté opposé appartient à l'angle de sommet M extérieur au triangle.) L'une des deux premières est donc supérieure en valeur absolue à u_n. M_h est

---

rieurs au premier. Dans u_n, ρ_n s'ajoute à a_n au lieu d'en être retranché. Le reste $r_{n-1}(x)$ vaut en un sommet supérieur d'ordre n, $\frac{a^n}{1-a}$, et $-\frac{a^n}{1-a}$ en un sommet inférieur. Il y aura donc une pente M_kM_{k+1} infiniment grande du signe de $(-1)^{k+1}$, si

$$ab > 1 + \frac{\pi}{2}(1-a)$$

et alors, en tout point, f, ayant un dérivé infini, sera certainement dépourvu de dérivée bilatérale finie.

De même la condition (plus avantageuse que celle de Weierstrass si a est voisin de 1),

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}(1-a),$$

nous donne certainement en tout point l'association du dérivé $+\infty$ pour un côté et du dérivé $-\infty$ pour l'autre.

Si b était un entier pair, tout sommet principal supérieur ou inférieur d'ordre n serait principal supérieur pour tout ordre $n+p$. $r_n(x)$ serait indépendant de k et la variation de $r_n(x)$ de x_k à x_{k+1} est nulle. Dans u_n, ρ_n peut être supprimé. La présence d'un dérivé infini en tout point, celle du dérivé $+\infty$ d'un côté et en même temps du dérivé $-\infty$ de l'autre sont assurées respectivement avec les conditions

$$ab > 1 + \frac{\pi}{2}, \qquad ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

sans hypothèse sur la parité de b (ou plutôt dans l'hypothèse la plus défavorable).

défini dans tous les cas. Donc les variations relatives de f entre x et x_h admettent, pour n infini, au moins une valeur limite infinie. $x - x_h$, positif ou négatif, est inférieur à $\frac{1}{b_n}$ et par suite infiniment petit. Il y a donc en x au moins un nombre dérivé infini pour au moins un côté.

2° Montrons que, u_n étant supposé positif et infiniment grand, en général $f(x)$ aura sur une épaisseur pleine les dérivés extrêmes bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$. Posons, pour chaque valeur de n, où x n'est pas une abscisse principale, $x = \frac{k+\theta}{b_n}$, θ étant positif et inférieur à 1. Supposons par exemple k pair. Cherchons les valeurs de θ telles que $M_{k-1}M$ ait une pente infiniment grande avec n et positive. En bornant convenablement la variation de $S_{n-1}(x)$, celle du terme principal d'ordre n, celle de $r_n(x)$, on voit que cette pente excède

$$\frac{b_n}{1+\theta}\left[-\frac{1+\theta}{b_n}\pi T_{n-1} + 2a_n\cos^2\frac{\pi\theta}{2} - 2\rho_n\right] = \varpi_n.$$

ϖ_n, se réduisant à u_n pour $\theta = 0$, est positif et infiniment grand pour cette valeur particulière de θ. Supposons que ϖ_n (d'ailleurs décroissant en θ) garde ces derniers caractères pour toute valeur de θ positive et au plus égale à un certain nombre θ' (nécessairement inférieur à 1) indépendant de n. Posons $\varpi'_n = \varpi_n(\theta')$. Formons, pour toutes les valeurs paires de k, les segments $\frac{k+\theta'}{b_n}$ à $\frac{k+1}{b_n}$. Ces segments i_n en nombre égal à b_n ont entre 0 et 1 une longueur totale égale à $1-\theta'$. Soit I_n leur ensemble. Quand n croît indéfiniment, l'épaisseur de I_n sur un intervalle fixe quelconque i tend visiblement vers $1-\theta'$. Donc, quel que soit ε, assez petit toutefois pour rendre inférieur à 1 le produit $(1-\theta')(1+\varepsilon) = \omega$, on peut à tout entier m faire correspondre un autre entier p tel que les parties communes à I_m et aux i_{m+p} constituent une fraction des i_m inférieure à ω (ou encore : tel que I_{m+p} ait sur I_m une épaisseur inférieure à ω). Soit I'_m l'ensemble (composé uniquement de segments et points isolés) commun à I_m et à I_{m+p}. I'_m a sur le segment $0-1$ une épaisseur inférieure à $(1-\theta')\,\omega < \omega^2$. Nous pouvons de même déterminer p' de façon que $I_{m+p'}$ ait sur l'ensemble I'_m une épaisseur totale inférieure à ω. I''_m ensemble commun à $I_{m+p'}$ et à I'_m ou à I_m, I_{m+p}, $I_{m+p'}$, aura sur le segment $0-1$ une épaisseur inférieure à ω^3. Par une progression d'idées évidente, on voit que les points communs à tous les I_{m+h} d'indice au moins égal à m forment un ensemble mince J_m.

Soit J la réunion de tous les J_n. J est mince. Soit x un nombre étranger à J. x n'appartient à aucun J_n. Donc, quel que soit n, x est non commun à tous les ensembles $I_n, \ldots, I_{n+p}, \ldots$. Donc les indices n tels que x soit étranger aux I_n correspondants sont en infinité. Donc, pour une infinité de valeurs de n, x peut se mettre sous la forme $\frac{k+\theta}{b_n}$ avec $0 < \theta < \theta'$. Pour cette suite particulière de valeurs de n, la pente de $M_{k-1}M$ surpasse ϖ'_n et tend donc vers $+\infty$. Donc, en x, f possède le dérivé gauche $+\infty$. Les points analogues à x contiennent le complémentaire de J, donc forment une épaisseur pleine. En échangeant les deux parités de k, les points M_{k-1} et M_{k+2}, on montre l'existence sur une épaisseur pleine d'un dérivé infini de signe et de côté donnés indifféremment. Donc, le cas (AA′) est réalisé par f sur une épaisseur pleine. D'ailleurs, une épaisseur pleine étant un ensemble dense, le cas fondamental (AA′) est aussi réalisé sur un résiduel. L'ensemble des points où ce cas ne se présente pas est donc non seulement mince, mais même gerbé.

Les conclusions précédentes valent en particulier avec les hypothèses $a = a^n$, $b = b^n$ et les choix de a et de b donnant à u_n une partie principale $Aa^n b^n$, où A est un coefficient positif (*voir* p. 212 et sa note).

3° Formons la condition pour que la pente de la droite $M_{k-1}M_{k+2}$, joignant deux sommets dont les rangs diffèrent de trois unités et sont par suite d'espèce différente, soit infiniment grande avec n, et du signe de $(-1)^{k+1}$ (de ces deux sommets, le supérieur aura donc une ordonnée plus grande que l'inférieur). Il suffit pour cela, on le voit comme dans le premier paragraphe, que l'expression

$$2(a_n - \rho_n)b_n - 3\pi T_{n-1} = v_n$$

soit infiniment grande positive avec n.

Si l'on fait

$$a_n = a^n, \qquad b_n = b^n,$$

a étant de plus supposé inférieur à $\frac{1}{2}$, on trouve que cette condition sera vérifiée si

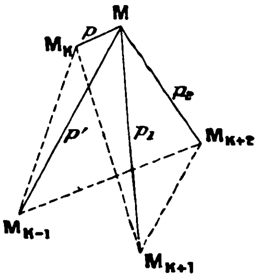
$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}\,\frac{1-a}{1-2a}.$$

Dans l'exemple de Weierstrass, grâce au choix des α_n, le coefficient de $\frac{3\pi}{2}$ peut être remplacé par l'unité, quel que soit a inférieur à 1 (*voir* la note de la page 212).

Je dis que, dans l'hypothèse : v_n infiniment grand positif avec n, $f(x)$ possède en tout point le dérivé $+\infty$ d'un côté et le dérivé $-\infty$ de l'autre.

Soient en effet x un nombre quelconque et M le point figuratif de f en x. Si x est une abscisse principale d'ordre n et coïncide avec x_k, les deux droites $M_{k-1}M$ et MM_{k+1} ont des pentes de signes contraires,

Fig. 1.



l'une et l'autre supérieures en valeur absolue à v_n. Si l'abscisse x n'est point principale d'ordre n, x appartient à un certain intervalle $x_k x_{k+1}$. Je dis que l'une au moins des pentes p' et p de $M_{k-1}M$ et M_kM est infiniment grande avec n, et aussi l'une des pentes p_1 et p_2 de MM_{k+1} et MM_{k+2}, et enfin que la première et la seconde peuvent être choisies de signes opposés.

Montrons d'abord que l'une au moins des pentes de $M_{k-1}M$ et M_kM est infiniment grande. En effet,

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = \frac{f(x)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} - \frac{f(x)-f(x_k)}{x_k-x_{k-1}}.$$

Le premier membre étant infiniment grand avec n, l'un au moins des deux quotients du second membre est lui aussi infiniment grand. Donc, $x-x_k$ et $x-x_{k-1}$ étant positifs et inférieurs, le premier à x_k-x_{k-1}, le second à $2(x_k - x_{k-1})$, l'un au moins des nombres p' et p est bien lui-même infiniment grand avec n. De même l'un au moins des nombres p_1 et p_2 est infiniment grand avec n. D'ailleurs, x étant compris entre x_k et x_{k+1}, les pentes p et p_1 comprennent entre elles celle de M_kM_{k+1}, et de même x étant situé entre x_{k-1} et x_{k+2}, les pentes p' et p_2 comprennent entre elles la pente de $M_{k-1}M_{k+2}$. D'ailleurs les pentes de M_kM_{k+1} et de $M_{k-1}M_{k+2}$ sont infiniment grandes et de signes contraires, surpassant en valeur absolue respectivement u_n et v_n. Supposons par exemple k pair. L'un des nombres p et p_1 est inférieur à $-u_n$. De même, de p' et de p_2, l'un surpasse v_n. En résumé, sont infiniment grands en valeur absolue, d'une part l'un des nombres p' et p, d'autre part l'un des nombres p_1 et p_2; l'un des nombres p' et p_2 est infiniment grand positif, l'un des nombres p et p_1 est infiniment grand négatif.

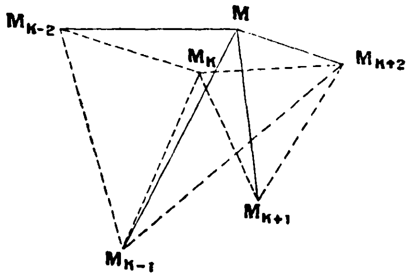
Je dis que l'un des nombres p' et p est grand d'un signe, l'un des nombres p_1, p_2 étant grand du signe opposé. En effet, l'un des deux nombres p' et p_2 étant grand et positif, supposons que ce soit p'. L'un des nombres p et p_1 est grand et négatif. Si c'est p_1, la conclusion est établie. Si c'est p, nous aurons à notre gauche un nombre grand positif p', un nombre grand négatif p. Or, à droite, nous avons un nombre grand en valeur absolue, soit p_1, soit p_2, qui sera toujours de signe opposé à p ou à p'. Le raisonnement serait tout pareil avec le départ : p_2 grand et positif.

Les différences $x - x_{k-1}$ et $x_{k+2} - x$ étant infiniment petites pour n infini, il est donc possible de déterminer des nombres h et h' positifs, tendant vers zéro et se correspondant de manière que les quotients $\mathrm{VR}(f, x-h, x)$, $\mathrm{VR}(f, x, x+h')$ soient simultanément infiniment grands en valeur absolue et de signes opposés. L'existence de nombres dérivés infinis de signes différents pour les deux côtés en tout point x est bien manifeste.

4° En tout point de l'ensemble où se présente le cas (AA'), on a évidemment le dérivé médian bilatéral zéro. Nous savons que ce dérivé ne peut pas exister en tout point d'un même côté pour une fonction variante. Nous allons obtenir qu'il existe en tout point *au moins d'un côté* pour une fonction remplissant en outre les conditions des trois premiers paragraphes (v_n infiniment grand positif).

Soit M_k un sommet principal d'ordre n, correspondant par exemple à une valeur paire de k, donc un sommet supérieur. La pente de $M_{k-1}M_k$ est positive. Si la pente de $M_{k-2}M_k$ est négative, la courbe représentative de f coupe l'horizontale de M_k entre M_{k-2} et M_{k-1}. Il y a entre x_{k-2} et x_{k-1} au moins un point ξ où $f(\xi)=f(x_k)$. De même si la pente de MM_{k+2} est positive, il existe entre x_{k+1} et x_{k+2} un point ξ' où $f(\xi')=f(x_k)$. Supposons que la pente de $M_{k-2}M_k$ soit positive, celle de M_kM_{k+2} étant négative. Nous allons chercher une condition telle que ces deux droites aient alors simultanément une pente infi-

Fig. 2.



niment petite en n, de façon que, dans tous les cas, il y aura au moins d'un côté de x_k un nombre ξ_1, tel que la variation relative de f entre x_k et ξ_1 soit infiniment petite (ou nulle) pour n infini. La condition cherchée sera évidemment remplie si la différence des pentes de M_kM_{k+2} et $M_{k-2}M_k$ est infiniment petite pour n infini. Car alors, ou bien elles sont l'une et l'autre positives et alors ξ' existe, ou bien elles sont l'une et l'autre négatives et alors ξ existe, ou bien elles sont de signes opposés, mais alors l'une et l'autre infiniment petites en valeur absolue. Nous voulons donc, posant $\frac{2}{b_n}=h$, écrire que

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}$$

est infiniment petit, pour n infini. Dans la différence seconde figurant au numérateur, et décomposée de la manière déjà expliquée, le terme principal disparaît, le reste $r_n(x)$ nous donne une valeur maxima $4\rho_n$. Quant à la somme $S_{n-1}(x)$, elle nous fournit une quantité inférieure au produit par h^2 de la valeur absolue maximum de la dérivée seconde de $S_{n-1}(x)$, valeur bornée par $\pi^2 V_{n-1}$, en posant

$$a_1 b_1^2 + \ldots + a_n b_n^2 = V_n.$$

Notre condition sera donc satisfaite si $V_{n-1} : b_n$ et $b_n \rho_n$ sont l'un et l'autre infiniment petits pour n infini. Observons que, par la seconde hypothèse, $\rho_n : a_n$ est infiniment petit, $a_n b_n$ étant infiniment grand quand v_n l'est. v_n possédera donc ce dernier caractère si à nos deux nouvelles conditions nous joignons celle-ci : $\overline{\lim}.\, T_{n-1} : a_n b_n < \frac{2}{3\pi}$. Supposons ces trois conditions remplies. Je dis que f présente en tout point le dérivé zéro au moins d'un côté. En effet, nous allons montrer que, x étant invariable, il est possible de déterminer, pour chaque valeur de n, un nombre x' inférieur ou supérieur à x, différant de x de moins de $\frac{2}{b_n}$ et tel que la variation relative de f entre x et x' soit nulle, ou infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.

D'abord si x est l'un des sommets principaux x_k d'ordre n, x' peut, comme il a été expliqué, être placé soit en ξ, soit en ξ', soit en $\xi_1 =$ indifféremment x_{k-2} ou x_{k+2}. Supposons x compris entre x_k et x_{k+1}. Sur la courbe C, M figurant $f(x)$ est sur l'arc $M_k M_{k+1}$. Nous allons voir d'abord que, la pente de $M_{k-1} M_{k+2}$ étant de signe opposé à celle de $M_k M_{k+1}$, à toute ordonnée intermédiaire à celles de M_k et de M_{k+1}, correspond forcément un point de C, soit sur l'arc $M_{k-1} M_k$, soit sur l'arc $M_{k+1} M_{k+2}$. Car, en supposant par exemple k pair, les deux segments numériques

$$f(x_{k-1}),\ f(x_k) \qquad \text{et} \qquad f(x_{k+1}),\ f(x_{k+2})$$

empiètent l'un sur l'autre d'après

$$f(x_{k-1}) < f(x_{k+2}), \qquad f(x_k) > f(x_{k+1})$$

et par suite ils recouvrent entièrement tout le segment $f(x_{k+1}), f(x_k)$. Un nombre λ situé entre $f(x_{k+1})$ et $f(x_k)$ est alors compris soit entre $f(x_{k-1})$ et $f(x_k)$, soit entre $f(x_{k+1})$ et $f(x_{k+2})$. Donc f prend la valeur λ soit entre x_{k-1} et x_k, soit entre x_{k+1} et x_{k+2}. Par suite, admettant toujours une valeur paire pour k (et si k était impair, la conclusion ne serait évidemment pas infirmée), si

$$f(x_{k+1}) < f(x) < f(x_k),$$

il y a un nombre x' soit entre x_{k-1} et x_k, soit entre x_{k+1} et x_{k+2}, où $f(x') = f(x)$.

Supposons maintenant $f(x)$ étranger au segment $f(x_{k+1})$, $f(x_k)$ et par exemple supérieur au second de ces nombres. La suite du raisonnement garderait sa forme avec l'hypothèse $f(x) < f(x_{k+1})$. La pente de $M_{k-1}M$ est positive d'après

$$f(x) > f(x_k) > f(x_{k-1}) \qquad \text{et} \qquad x > x_k > x_{k-1}.$$

Au contraire la pente de MM_{k+1} est négative, d'après

$$f(x) > f(x_{k+1}) \qquad \text{et} \qquad x < x_{k+1}.$$

Si donc il n'existe de nombre x' où f prenne la valeur $f(x)$, ni entre x_{k-2} et x_{k-1}, ni entre x_{k+1} et x_{k+2}, c'est que certainement les pentes de $M_{k-2}M$ et de MM_{k+2} sont la première positive, la seconde négative. Nous allons montrer que, dans ce cas, ces deux pentes sont infiniment petites pour n infini.

Posons $x = x_k + \frac{\theta}{b_n}$ avec $0 < \theta < 1$, k étant toujours supposé pair, en sorte que le sommet M_k est supérieur. Notre hypothèse est que

$$f(x) - f(x_{k-2}) \qquad \text{et} \qquad f(x) - f(x_{k+2})$$

sont positifs. Pour évaluer ces variations de f, nous divisons comme toujours cette fonction en trois termes, S_{n-1}, le terme principal d'ordre n et r_n. Nous ne savons borner la variation de r_n qu'en valeur absolue, savoir par $2\rho_n$. La variation du terme principal se calcule explicitement. Elle vaut dans les deux cas $-2a_n \sin^2 \pi \frac{\theta}{2}$ et est donc négative. A celle de S_{n-1}, nous appliquerons les formules

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\delta M, \qquad \varphi(x) - \varphi(x-h) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\delta' M.$$

M étant la valeur absolue maximum de $\varphi''(x)$ entre $x-h$ et $x+h$, δ et δ' étant des nombres de carrés inférieurs à un. Pour $\varphi = S_{n-1}$, M est au plus égal à $\pi^2 V_{n-1}$. Nous avons, avec

$$x - x_{k-2} = \frac{2+\theta}{b_n}, \qquad x_{k+2} - x = \frac{2-\theta}{b_n},$$

d'une part

$$0 < \frac{f(x)-f(x_{k-2})}{x-x_{k-2}} < \frac{4 b_n \rho_n}{2+\theta} + S'_{n-1}(x) + \frac{2+\theta}{2 b_n}\pi^2 V_{n-1}$$

et de même

$$0 < \frac{f(x)-f(x_{k+2})}{x_{k+2}-x} < \frac{4 b_n \rho_n}{2-\theta} - S'_{n-1}(x) + \frac{2-\theta}{2 b_n}\pi^2 V_{n-1}.$$

Nous voulons montrer que, dans chaque double inégalité, le membre médian, qui est positif et représente respectivement la pente de $M_{k-2}M$ et celle de $M_{k+2}M$ changée de signe, est infiniment petit. Il suffit de le montrer pour la somme des deux. Or, pour cette dernière, le fait est manifeste, $b_n \rho_n$ et $V_{n-1} : b_n$ étant infiniment petits par hypothèse.

En résumé, quel que soit x déterminé et n, nous pouvons définir un nombre x' supérieur ou inférieur à x, tendant vers x pour n infini, pendant que $\mathrm{VR}(f, x, x')$ tend vers zéro. Donc en tout point x pour un côté au moins f possède le dérivé médian ou extrême zéro.

Cherchons des lois particulières pour les fonctions a_n et b_n, l'entier n vérifiant les conditions :

$$V_{n-1} : b_n \quad \text{et} \quad b_n \rho_n \text{ infiniment petits}, \qquad \overline{\lim}\, T_{n-1} : a_n b_n < \frac{2}{3\pi}.$$

Observons que la somme des n premières factorielles est dans un rapport infiniment voisin de un (pour n infini) avec la dernière. Car, ce rapport étant $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots$, tous les termes de cette somme à partir du troisième, et ils sont $n-2$, sont l'un égal, les autres inférieurs à $\frac{1}{n(n-1)}$. Ce rapport est donc compris entre 1 et $1 + \frac{2}{n-1}$. De même, rappelons que la somme $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$ est inférieure à une progression géométrique de raison $\frac{1}{n+1}$ et dont le premier terme serait $\frac{1}{n!}$. Elle est donc avec son premier terme dans un rapport compris entre 1 et $1 + \frac{1}{n}$. Et si l'on considère des fonctions u_n plus rapidement croissantes que $n!$, on aura pareillement, pour la somme de leurs n premières valeurs, un infiniment grand équivalent au dernier terme de la somme et pour la série des inverses des valeurs à partir de la $n^{\text{ième}}$, un infiniment petit équivalent au premier terme de la série. Posons donc

$$a_n = [n!]^{-n+1} \quad \text{et} \quad b_n = [n!]^n.$$

Nous avons

$$a_n b_n = n!, \qquad a_n b_n^2 = (n!)^{n+1},$$

T_{n-1}, V_{n-1}, ρ_n sont deux infiniment grands et un infiniment petit respectivement équivalents à $a_{n-1} b_{n-1}$ soit $(n-1)!$, $a_{n-1} b_{n-1}^2$ soit $[(n-1)!]^n$, a_{n+1} soit $[(n+1)!]^{-n}$. Donc, $T_{n-1} : a_n b_n$ équivaut à $\frac{1}{n}$, $V_{n-1} : b_n$ à n^{-n}, $b_n \rho_n$ à $(n+1)^{-n}$. Donc, nos trois conditions sont vérifiées et nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

La fonction

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n!)^{n-1}} \cos \pi [n!]^n x$$

possède certainement en tout point les dérivés $+\infty$ d'un côté, $-\infty$ de l'autre, et le dérivé médian ou extrême zéro au moins d'un côté. Elle possède, sur une épaisseur pleine, à la fois les deux dérivés supérieurs $+\infty$, les deux dérivés inférieurs $-\infty$, et par suite le dérivé bilatéral médian zéro (1).

Comme nous l'avons dit, un progrès réalisé par cette fonction sur celle de Weierstrass consiste en ce que, l'impossibilité pour cette dernière de posséder en certains points une dérivée unilatérale infinie

---

(1) α étant un nombre supérieur à $1 + 3\frac{\pi}{2}$, en posant $a_n = \alpha^{-n(n-1)}$, $b_n = \alpha^{n^2}$, d'où pour T_{n-1}, V_{n-1}, ρ_n, les équivalences à $\alpha^n : (\alpha - 1)$, α^{n^2-n}, α^{-n^2-n}, on obtiendrait la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n^2-n}} \cos \pi \alpha^{n^2} x$, donnant également lieu à l'énoncé ci-dessus. Il en serait plus généralement de même avec la série $\sum_1^{\infty} \frac{\alpha^n}{\beta_n} \cos \pi \beta_n x$, sous la seule condition que le rapport $\beta_{n+1} : \alpha^n \beta_n$ croisse indéfiniment.

de chaque côté n'est pas établie, tandis qu'elle est bien manifeste pour la première. Enfin, plus précisément, la possibilité pour une fonction d'admettre en tout point, au moins pour un côté, le dérivé zéro a probablement une assez grande importance dans la théorie des nombres dérivés.

NOTES.

1. — Sur les systèmes stricts d'intervalles.

Nous avons eu à étudier à plusieurs reprises la manière dont certaines familles d'intervalles recouvrent l'ensemble des points qui leur sont intérieurs. Examinons cette question dans toute sa généralité.

Nous ferons d'abord une remarque essentielle : Étant donnés trois intervalles i_1, i_2, i_3, s'il existe un même point A intérieur aux trois, l'un au moins de ces intervalles est tel que tout point intérieur à lui est intérieur à l'un des deux autres.

En effet, soient $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ les trois intervalles, la première extrémité désignée étant pour chacun d'eux celle de gauche. L'un des trois points α_1, α_2, α_3 n'est à droite d'aucun des deux autres. Supposons que ce soit α_1, α_2 et α_3 peuvent séparément ou simultanément coïncider avec α_1 ou être à sa droite, mais ne sont ni l'un ni l'autre à gauche de α_1. Si β_1 n'est à gauche d'aucun des points β_2, β_3, tout point intérieur à i_2 ou à i_3 est compris entre α_1 et β_1, donc est intérieur à i_1. La proposition est alors établie. Si au contraire l'un des points β_2 et β_3 est à droite de β_1, je peux toujours supposer, en échangeant s'il le faut les indices de i_2 et de i_3, que β_2 n'est pas à gauche de β_3. Alors tout point compris entre α_1 et β_2, s'il est à gauche de A, est intérieur à i_1, s'il est à droite de A, est intérieur à i_2, s'il est en A, est intérieur aux deux, par hypothèse. Or, tout point intérieur à i_3, donc compris entre α_3 et β_3, est à droite de α_1 et à gauche de β_2. Il est donc soit dans i_1, soit dans i_2. C. Q. F. D.

Si donc on appelle *champ* (ou *région*) *couvert* par des intervalles, l'ensemble des points intérieurs à au moins l'un d'eux, le champ couvert par trois de ces intervalles, auxquels un certain point est simultanément intérieur, peut être couvert avec deux seulement de ces intervalles. Nous dirons encore qu'*un point* est *couvert* par un intervalle s'il lui est intérieur. Si donc, parmi divers intervalles en nombre fini couvrant l'intérieur d'un certain segment, chacun possède en propre au moins un point intérieur qu'il est seul à couvrir, il n'y a pas de points intérieurs simultanément à trois ni à plus de trois de ces intervalles. Car, s'il existait un tel point intérieur à p intervalles, on pourrait supprimer $p - 2$ de ces intervalles sans retrancher un seul point recouvert. Il suffirait de conserver seulement, parmi les p intervalles, les deux qui ont l'un l'extrémité la plus (ou l'une des plus) à gauche, l'autre l'extrémité (ou l'une des plus) à droite.

Nous dirons qu'un système d'intervalles en nombre fini ou infini est *strict*, si pour chaque intervalle du système il existe au moins un point qu'il est seul à couvrir, donc qui est intérieur à lui et à lui seul. La suppression d'un intervalle dans un système strict diminue le champ couvert. D'ailleurs, si une famille d'intervalles possède la propriété qu'aucun point ne soit simultanément intérieur à plus de deux d'entre eux, il ne s'ensuit pas que chaque intervalle possède en propre des points intérieurs. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre pour les trois intervalles i_1, i_2, i_3 la succession d'extrémités $\alpha_1\,\alpha_2\,\beta_1\,\alpha_3\,\beta_3\,\beta_2$. Aucun point n'est simultanément intérieur à ces trois intervalles, et cependant $\alpha_3\,\beta_3$ n'a en propre aucun point intérieur, puisque $\alpha_3\,\beta_3$ est intérieur à $\alpha_2\,\beta_2$.

En tout cas, *si un système d'un nombre limité d'intervalles est strict*, tout point du champ couvert étant intérieur à deux d'entre eux au plus, *la longueur de ce champ*, qui est l'intérieur d'un ou plusieurs segments, *est au moins égale à la demi-somme des longueurs des intervalles*. Ce théorème peut trouver son application dans l'étude d'une famille d'intervalles à laquelle chaque point d'un segment continu donné ou d'un ensemble fermé est intérieur. Il est possible alors, comme on sait, de comprendre tous les points du segment ou de l'ensemble à l'intérieur d'un nombre fini d'intervalles pris dans la famille. Un premier choix de tels intervalles étant effectué, il sera intéressant d'en opérer la réduction, si la présence de certains d'entre eux est superflue pour recouvrir le même domaine. [J'ai donné un exemple d'une telle réduction en formant le système strict le plus simple d'intervalles canoniques (théorie des fractions continues) relatifs à des fractions rationnelles de dénominateur au moins égal à l'entier A. Voir *Bull. Soc. math.*, t. XXXIX, 1911.]

Nous dirons que deux familles d'intervalles sont *équivalentes*, du point de vue qui nous occupe, si elles couvrent exactement le même champ. Alors, tout point intérieur à un intervalle de l'une des familles est intérieur à un intervalle de l'autre. Demandons-nous maintenant si, étant donnée une famille d'intervalles composée d'une infinité d'éléments, il est possible de former avec des intervalles pris dans cette famille un système strict équivalent à elle. En toute généralité, il n'en sera pas ainsi. Les intervalles de longueur 1 dont les extrémités gauches ont une abscisse positive et inférieure à 1, recouvrent tout l'intérieur du segment $0-2$. Quels que soient α et β entre 0 et 2, il est possible de couvrir tout le segment $\alpha\beta$ avec deux intervalles de la famille. Mais, ni $0-1$, ni $1-2$ n'étant dans la famille, il faut utiliser une infinité de ces intervalles, par exemple ceux d'origine $\frac{1}{n}$ et $1-\frac{1}{n}$ (n entier) pour couvrir l'intégralité de l'intervalle $0-2$. Nous allons donner une classe de familles d'intervalles en infinité, possédant la propriété, établie pour les familles finies, de pouvoir être réduites de manière que, d'une part, chaque intervalle retenu couvre en propre au moins un point intérieur à lui, le champ total couvert n'étant pas d'autre part restreint par cette sorte d'émondage d'éléments superflus. Nous exprimerons ceci en disant qu'il existe un système strict d'intervalles appartenant à la famille donnée et équivalent à elle. L'épithète de *strict* exprime l'impossibilité de supprimer un seul intervalle du système sans découvrir certains points et celle d'*équivalent* signifie que l'espace couvert est le même pour le système particulier et pour la famille totale.

Nous dirons qu'une famille d'intervalles φ est *semi-fermée supérieurement* si, $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ étant une suite quelconque d'intervalles φ possédant un intervalle limite i, il existe un intervalle contenant i (et pouvant coïncider avec lui) et appartenant à la famille considérée. Si, plus particulièrement, i faisait toujours partie de la famille φ, celle-ci serait *fermée*. Nous allons montrer que toute famille de cette sorte est équivalente à un système strict d'intervalles choisis parmi elle.

Considérons l'ensemble des points P intérieurs à au moins un intervalle φ. Le complémentaire E de cet ensemble est fermé. Tout point intérieur à un intervalle u ou ab contigu à E est intérieur à au moins un intervalle φ. Ni a ni b ne sont intérieurs à un de ces derniers, mais a peut être extrémité gauche d'un ou de plusieurs d'entre eux, et pareillement b peut être extrémité droite d'un ou de plusieurs φ. Supposons d'abord réalisée la première hypothèse. D'après la semi-clôture de la famille φ, si a_1 est la borne à droite des intervalles $\varphi(a)$ ayant pour extrémité gauche a (et nous supposons qu'il en existe), aa_1 est un intervalle φ et d'ailleurs le plus grand des intervalles $\varphi(a)$. Si au contraire aucun intervalle φ n'admet a pour extrémité gauche, je dis que, le point P tendant vers a intérieurement à u, *les intervalles φ contenant* P *tendent vers zéro*. S'il en était autrement, en effet, si leur longueur admettait pour plus grande limite un nombre positif α, quand P tend vers a, l'extrémité gauche de ces intervalles étant entre a et P, d'après la semi-clôture supérieure de la famille donnée, l'intervalle d'extrémité gauche a et de longueur α serait un intervalle φ ou compris dans un intervalle φ. Tout pareillement, ou bien il existe un intervalle φ d'extrémité droite b, soit $b_1 b$, tel que tout intervalle φ ayant pour extrémité droite b est compris dans $b_1 b$; ou bien la longueur des intervalles φ tend vers zéro quand un de leurs points tend vers b. Je dis qu'il est toujours possible de déterminer dans φ une famille partielle φ_1 équivalente à φ (recouvrant tout l'intérieur de ab) et telle que sur tout intervalle SS′ d'extrémités comprises entre a et b, il n'empiète qu'un nombre limité d'intervalles φ_1. Nous distinguons trois cas :

1° Il existe au moins un intervalle $\varphi(a)$ et au moins un intervalle $\varphi(b)$ admettant respectivement pour extrémités a et b. Soient aa_1 et $b_1 b$ ces intervalles, choisis l'un et l'autre les plus grands répondant à ces conditions. a_1 et b_1 étant intérieurs à u, le segment $a_1 b_1$ peut être couvert avec un nombre fini d'intervalles φ. En leur ajoutant aa_1 et $b_1 b$, on obtient un système constitué par un nombre limité d'éléments choisis parmi les φ, couvrant l'intérieur de ab, donc présentant les caractères du système φ_1. La réduction sur u des φ_1 à un système strict ψ est alors aisée.

2° L'une des sortes d'intervalles $\varphi(a)$ ou $\varphi(b)$ et une seule manque. Supposons que ce soit la seconde. On introduit d'abord l'intervalle aa_1 et, entre a_1 et b, on opère comme dans le troisième cas, en plaçant en a_1 le point P_0 considéré ci-dessous.

3° Aucun intervalle φ n'a pour extrémité a ni b. Soit P_0 un point compris entre a et b. J'établis sur u une suite (qui n'existerait pas dans le cas où P_0 est en a_1) de points P_{-1}, P_{-2}, ..., P_{-n}, ..., chacun à gauche du précédent et tendant vers a, et une suite P_1, P_2, ..., P_n, ..., tendant vers b, en progressant toujours vers la droite, suite à ne pas envisager davantage dans le second cas s'il existe un intervalle $\varphi(b)$, sans aucun $\varphi(a)$, auquel cas P_0 est placé en b_1. Tout point de P_iP_{i+1}, que i soit positif ou négatif, est intérieur à au moins un intervalle φ. Nous pouvons donc couvrir à la fois tous les points de ce segment, extrémités comprises, avec un nombre limité de φ. Nous appelons ces intervalles retenus pour couvrir P_iP_{i+1}, les intervalles $\varphi(i)$. La réunion de tous les $\varphi(i)$ constituera le système φ_1. Je dis que ce dernier ne contient qu'un nombre limité d'éléments recouvrant un intervalle SS', entièrement intérieur à u. En effet, désignons par $\varphi_1(SS')$ les intervalles φ_1 contenant au moins un point de SS'. S'il existe une infinité d'intervalles $\varphi_1(SS')$, ces intervalles appartiennent certainement à des groupements $\varphi(i)$ à indices indéfiniment croissants en valeur absolue, puisque chaque groupe $\varphi(i)$ ne contient qu'un nombre limité d'éléments. Est-il possible qu'il y ait parmi les $\varphi_1(SS')$ des intervalles $\varphi(i)$ à indices positifs indéfiniment croissants? Non, car, si i croît indéfiniment par valeurs positives, c'est qu'il n'existe pas de segment $\varphi(b)$. Mais alors, comme nous l'avons montré, les segments $\varphi(i)$, dont un point au moins (situé entre P_i et P_{i+1}) tend vers b, tendent, en longueur, vers zéro. Il est donc impossible qu'une infinité d'entre eux contiennent des points de SS' si S' est inférieur à b. De même il est impossible que les $\varphi_1(SS')$ contiennent des intervalles $\varphi(i)$ à indices négatifs non bornés inférieurement. Donc, les intervalles $\varphi_1(SS')$ sont constitués avec des intervalles $\varphi(i)$ à indices i bornés en valeur absolue. Ils sont donc en nombre fini.

Montrons maintenant la possibilité de réduire les φ_1 à un système strict équivalent $\psi(u)$. La preuve en est faite quand les φ_1 sont en nombre fini. Supposons-les donc en infinité (évidemment dénombrable) et ainsi ordonnés : $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_1^{(n)}, \ldots$ Désignons par ψ_1 le premier intervalle de la suite $\varphi_1^{(n)}$ possédant à son intérieur un point qui n'est intérieur à aucun des intervalles suivants $\varphi_1^{(n+p)}$. ψ_1 existe. Car, soit M un point quelconque entre a et b, M est intérieur à un nombre limité d'intervalles $\varphi_1^{(n)}$. Soit N le plus grand de leurs indices. Il est évident que ψ_1 occupe dans la suite $\varphi_1^{(n)}$ un rang au plus égal à N. Ayant obtenu ψ_1, nous déterminerons ψ_2 par la règle suivante qui nous donne ψ_{p+1} ayant $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. ψ_p occupe dans la suite $\varphi_1^{(n)}$ un certain rang m. ψ_{p+1} est dans la suite $\varphi_1^{(m+1)}, \varphi_1^{(m+2)}, \ldots$, le premier intervalle $\varphi_1^{(m+k)}$ possédant à son intérieur un point qui n'est intérieur ni à l'un des intervalles $\varphi_1^{(m+k+h)}$ suivants, ni à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. ψ_{p+1} existe toujours. En effet, $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ne recouvrent pas à eux seuls ab, puisque, par hypothèse, a et b ne sont pas simultanément extrémités d'intervalles φ. Donc il y a au moins un point M qui n'est intérieur à aucun des $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$. D'ailleurs, si N est le plus grand indice des intervalles $\varphi_1^{(n)}$ contenant M (intervalles qui sont en nombre fini), N ne peut pas être inférieur à m. Car, d'abord $\varphi_1^{(N)}$ ne coïncide avec aucun des $\psi_1, \ldots, \psi_p$, puisque M n'est intérieur à aucun de ces intervalles. Donc, N serait compris entre les rangs de ψ_{h-1} et de ψ_h ($h \leqq p$) dans la suite $\varphi_1^{(n)}$. Mais, puisque M intérieur à $\varphi_1^{(N)}$ n'est intérieur à aucun des $\psi_1, \ldots, \psi_{h-1}$, ni à $\varphi_1^{(N+k)}$, quel que soit k, il est impossible que le rang de ψ_h dans la suite $\varphi_1^{(n)}$ soit supérieur à N. Donc, $N > m$ et ψ_{p+1} occupe certainement dans la suite des $\varphi_1^{(n)}$ un rang au plus égal à N. D'après notre construction, ψ_{p+1} qui existe et est bien défini quel que soit p, possède en propre un certain point intérieur M_{p+1} n'appartenant ni à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ d'après la première condition imposée à ψ_{p+1}, ni à ψ_{p+k}, puisque tout intervalle ψ_{p+k} est un intervalle $\varphi_1^{(q+h)}$ (si ψ_{p+1} coïncide avec $\varphi_1^{(q)}$), dont aucun point intérieur ne coïncide avec M_{p+1} d'après la seconde condition exigée de ψ_{p+1}. Le système ψ_p est donc strict. Je dis qu'il recouvre tout l'intérieur de ab. S'il en était autrement, on examinerait un point M non couvert. Ce point étant couvert par certains $\varphi_1^{(n)}$, en nombre fini comme nous l'avons montré, d'indices supérieurs $N_1, N_2, \ldots, N_{h-1}, N$, si aucun des $h-1$ premiers parmi ces φ_1 n'est un ψ, $\varphi_1^{(N)}$ en est certainement un. Car M lui est intérieur et ne l'est ni aux ψ déjà établis quand on arrive à l'examen de $\varphi_1^{(N)}$ ni aux $\varphi_1^{(N+k)}$. Donc, le système ψ_p est strict et équivalent à la famille φ sur ab.

En opérant de même sur chaque contigu de E, on remplace la famille φ par un système strict extrait de cette famille et équivalent à elle.

La propriété essentielle et déjà énoncée des *systèmes stricts*, est que *la somme des longueurs des intervalles les constituant est inférieure à deux fois la longueur du champ recouvert par eux.* (Elle est évidemment supérieure à cette dernière.)

Il est intéressant d'étudier *a priori* la nature d'un système strict σ formé d'intervalles recouvrant tous les points d'un intervalle fini i mais non pas ses extrémités.

A chaque élément ψ du système σ, correspond par hypothèse au moins un point, soit $x(\psi)$, intérieur à ψ et à nul autre intervalle de la famille. ψ ne contient évidemment aucun point $x(\psi')$ propre à un autre intervalle ψ'. Les points $x(\psi)$ sont donc isolés, donc ils sont en nombre fini ou en infinité dénombrable. Il en est donc ainsi des ψ. Soient $\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ les éléments de σ; $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ leurs points intérieurs propres. Les x_n n'ont pas de point limite intérieur à i. Car un tel point ξ est intérieur à un intervalle $\psi(\xi)$ auquel une infinité de x_n serait intérieurs, ce qui est absurde. Les x_n, s'ils ne sont pas en nombre fini, ne sauraient donc avoir d'autres points limites que a et b extrémités gauche et droite de i. Nous pouvons les supposer affectés d'un indice entier positif ou négatif exprimant leur rang géométrique, le rang zéro étant attribué indifféremment à l'un des $x(\psi)$, en supposant immédiatement une infinité d'indices pour chaque signe. Alors, entre x_p et x_{p+1} il n'y a aucun point $x(\psi)$. ψ_n ne contenant ni x_{n-1} ni x_{n+1}, aucun point de l'intervalle $x_p x_{p+1}$ n'est intérieur à un intervalle ψ_n' distinct de ψ_p et de ψ_{p+1}. Les segments $x_p x_{p+1}$ constituant ensemble tout l'intervalle i, il est évident qu'un point quelconque de i est intérieur à deux intervalles ψ au plus. Observons de plus que ψ_n étant compris entre x_{n-1} et x_{n+1}, a une longueur infiniment petite, quand n croît indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives. Si donc le système σ est strict et infini, il n'y a pas d'élément de ce système infiniment voisin de a ni de b, et dont la longueur ne soit pas infiniment petite. Enfin, chaque intervalle ψ_n étant sectionné par le point x_n correspondant en deux intervalles ψ'_n, ψ''_n l'un à gauche, l'autre à droite, nous avons

$$\psi'_{n+1} \quad \text{et} \quad \psi''_n \leqq x_{n+1} - x_n < \psi''_n + \psi'_{n+1}$$

et par suite

$$x_{n+1} - x_n < \psi''_n + \psi'_{n+1} \leqq 2(x_{n+1} - x_n),$$

donc

$$i < \Sigma \psi_n \leqq 2i,$$

l'égalité correspondant au cas où ψ_n coïncide avec l'intervalle

$$x_{n-1} x_{n+1}.$$

L'analyse précédente conduit donc aux résultats suivants particulièrement nets :

1° *Un système strict et borné d'intervalles n'admet pas d'élément limite*, ou encore, *ne contient qu'un nombre fini d'éléments de longueur supérieure à un même nombre positif.*

2° *Un système fermé d'intervalles est équivalent à un système dépourvu d'éléments limites.*

En effet, dans un système strict, il est impossible que les extrémités a_n et b_n d'une suite d'intervalles $a_n b_n$ appartenant à la famille tendent simultanément vers deux limites finies α et β distinctes. Sinon, quel que soit γ intérieur à $\alpha\beta$, à partir d'une certaine valeur de n, a_n est inférieur à γ et b_n surpasse γ. Donc, γ est intérieur à $a_n b_n$. Donc, l'intervalle $\alpha\beta$ et tous les $a_n b_n$ dès qu'ils empiètent sur $\alpha\beta$ appartiennent à un même champ couvert i, auquel les raisonnements ci-dessus s'appliquent.

Enfin, supposons que l'intérieur d'un segment i soit couvert par une famille d'intervalles φ sur chacun desquels l'épaisseur d'un ensemble E est au moins $1 : A$. Si A est très voisin de 1, la conclusion que l'épaisseur de E sur i surpasse $1 : 2A$ est insuffisamment précise. Nous avons montré quelques lignes plus haut que, si l'on ajoute à une famille d'intervalles non fermée tous ses intervalles limites, on n'étend nullement le champ couvert par la famille. Or, sur tout intervalle limite d'une suite de φ, l'épaisseur de E est au moins $1 : A$ comme sur les φ eux-mêmes. Soit donc φ_0 la famille φ accrue de ses éléments limites. Les φ_0 formant une collection fermée, il est possible de couvrir i avec un système strict d'intervalles ψ_n choisis parmi les φ_0, et affectés, pour indiquer leur rang, d'un indice entier positif, négatif ou nul, ce dernier attribué indifféremment. La famille d'intervalles ψ_n sectionne i en un nombre fini ou une infinité (bornons-nous à ce cas) d'intervalles alternativement agrégés à un seul ou à deux ψ_n. Soient h_n la partie commune à ψ_n et à ψ_{n+1} et k_n la partie propre à ψ_n. On a

$$\psi_n = h_{n-1} + k_n + h_n.$$

Soient respectivement e_n, λ_n, η_n les mesures de E sur ψ_n, h_n, k_n. Posons

$$\Sigma h_n = h, \qquad \Sigma k_n = k, \qquad \Sigma \lambda_n = \lambda, \qquad \Sigma \eta_n = \eta.$$

On a

$$e_n = \lambda_{n-1} + \eta_n + \lambda_n$$

et par hypothèse

$$A e_n \geqq \psi_n.$$

La mesure totale de E sur i est $\lambda + \eta$. La longueur de i est $h + k$. De plus,

$$\Sigma e_n = 2\lambda + \eta, \qquad \Sigma \psi_n = 2h + k.$$

Donc,

$$A(2\lambda + \eta) \geqq 2h + k.$$

Nous voulons chercher, connaissant l'existence de cette dernière relation, le minimum de l'épaisseur de E sur i, soit de $\frac{\lambda + \eta}{h + k} = \varpi$. On a déjà, d'après $h + k \leqq A(2\lambda + \eta) - h$

$$\varpi \geqq \frac{\lambda + \eta}{A(2\lambda + \eta) - h}.$$

La fraction du second membre, dont le produit par $2A$ s'écrit

$$1 + \frac{A\eta + h}{A(2\lambda + \eta) - h},$$

est décroissante en λ. Or, d'après $\lambda_n \leqq h_n$, λ est inférieur à h. Donc

$$\varpi \geqq \frac{h + \eta}{(2A - 1)h + \eta}.$$

A et par suite $2A - 1$ surpassant un, le minimum du second membre est $\frac{1}{2A-1}$. On a donc

$$\varpi > \frac{1}{2A-1}.$$

Cette limite peut d'ailleurs être atteinte. Le raisonnement précédent montre la nécessité pour cela de réaliser les conditions $\lambda = h$, $\eta = 0$. Soit une suite quelconque de points x_n à indices entiers positifs ou négatifs tendant en décroissant vers α pour $n = -\infty$ et en croissant vers β pour $n = +\infty$. Divisons l'intervalle $x_n x_{n+1}$ en trois, séparés par les deux points x'_{n+1}, x''_n et proportionnels aux nombres $A - 1$, 1, $A - 1$. Le segment $x'_{n+1}\, x''_n$ est aux segments $x_n x''_n$ et $x'_{n+1} x_{n+1}$ dans le rapport de 1 à A. Prenons pour ψ_n l'intervalle $x'_n x''_n$ et pour E l'ensemble de tous les segments $x'_{n+1} x''_n$. L'épaisseur de E sur ψ_n est bien $\frac{1}{A}$ et d'autre part l'épaisseur de E sur $x_n x_{n+1}$ étant $\frac{1}{2A-1}$, ce dernier nombre est aussi l'épaisseur de E sur i. En résumé, *si l'épaisseur de* E *sur chaque intervalle* φ *est au moins* $\frac{1}{1+\varepsilon}$, *l'épaisseur de* E *sur le champ couvert par les* φ *est au moins* $\frac{1}{1+2\varepsilon}$, valeur évidemment bien plus importante à connaître, si ε est un nombre petit, que la limite $\frac{1}{2A} = \frac{1}{2+2\varepsilon}$.

2. — Sur une propriété des résiduels.

Nous avons admis (**33**) ce théorème d'ailleurs connu : *Tout résiduel d'un ensemble parfait contient lui-même un ensemble parfait.* Démontrons-le.

Si R est un résiduel de l'ensemble parfait P, l'ensemble E complémentaire de R relativement à P est, par définition, la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles E_1, E_2, ..., E_n, ..., agrégés à P et non denses sur P. Supposons d'abord pour plus de simplicité que P soit le continu. D'abord si je désigne par E_n^0 l'ensemble E_n augmenté de ses points limites étrangers à lui, c'est-à-dire la réunion de E_n et de son dérivé, l'ensemble E_n^0 est non dense, et par suite le groupement des E_n^0

est sur P un ensemble gerbé F contenant E. Donc, Q complémentaire de F est un résiduel entièrement agrégé à R. C'est sur Q que je vais déterminer un ensemble parfait.

Soient a et b deux points de Q, donc étrangers à chaque E_n et non limites pour lui. Les points de l'ensemble fermé E_1^0 situés entre a et b sont localisés sur un segment $\alpha_1\beta_1$ complètement intérieur à ab puisque a et b sont étrangers à E_1^0. Sur $a\alpha_1$ prenons un point a_1 de G, sur $\beta_1 b$ un point b_1 de G. a_1 ni b_1 ne seront agrégés à aucun des ensembles fermés E_n^0, et, sur les segments aa_1 ni bb_1, E_1^0 ni *a fortiori* E_1 n'ont aucun point. Sur aa_1 dont les extrémités sont étrangères à l'ensemble fermé E_2^0, je localise tous les points de cet ensemble compris entre a et a_1, sur le segment $\alpha_2\beta_2$ formé par leurs points extrêmes. Sur $a\alpha_2$ et sur $\beta_2 a_1$, je choisis deux points a_2 et b_2 de Q. Sur aa_2, sur $b_2 a_1$, dont les quatre extrémités sont étrangères à tous les E_n^0, ni E_1^0 ni E_2^0 n'ont de points, ni *a fortiori* E_1 ni E_2. On détermine de même entre b_1 et b deux points $a_3 b_3$, agrégés à Q, donc étrangers à tous les E_n^0 et tels que sur $b_1 b_3$ ni sur $b_3 b$, E_2^0 n'ait de point, pas plus que E_1^0, résultat déjà acquis. On continue de proche en proche. De chacun des quatre segments obtenus dont les huit extrémités sont étrangères à tous les E_n^0, je détache un intervalle renfermant à son intérieur la totalité des points de E_3^0 situés sur le segment d'où je l'extrais et ayant ses extrémités dans Q. Sur chacun des huit segments restants, dont les extrémités sont étrangères à tous les E_n^0, ni E_1^0 ni E_2^0 ni E_3^0 n'ont de points. Et ainsi de suite. L'opération décrite ainsi est la construction type d'un ensemble parfait constitué par les points jamais intérieurs aux intervalles successivement enlevés, lesquels sont deux à deux sans points communs. L'ensemble parfait restant n'est agrégé à aucun des ensembles E_n ni même E_n^0. Donc il appartient à R.

La construction ne donne nécessairement un ensemble discontinu que si chacun des segments conservés à l'opération de rang n et ne renfermant aucun point de $E_1^0, E_2^0, \ldots, E_n^0$, contient au moins un point d'un ensemble E_{n+p}. Ceci aura toujours lieu si l'ensemble E est partout dense sur le continu. Si E n'était pas dense, il y aurait un segment dont aucun point n'appartiendrait à E. Donc, l'existence d'un ensemble parfait agrégé au continu et étranger à E serait évidente. Ce cas serait dénué d'intérêt.

Si P est un ensemble parfait, contenant un segment continu s, E est gerbé sur s et nous pouvons déterminer sur s, donc sur P, un ensemble parfait étranger à E. Supposons donc P non dense sur le continu. La démonstration précédente ne subit pas de grandes modifications. Nous considérons encore l'ensemble E_n^0 réunissant E_n, ses points limites et en plus les extrémités t_n, t'_n du $n^{\text{ième}}$ des contigus u_n de P, numérotés de 1 à l'infini.

Les E_n^0 sont tous non denses sur P. Soit F leur réunion. Le complémentaire de F, relativement à P, soit Q, est partout dense sur P. De plus, chacun de ses points étant de seconde espèce est limite de points de P des deux côtés. Je choisis a et b sur P agrégés à Q. a et b n'appartiennent à aucun des E_n et ne sont points limites pour aucun d'entre eux. D'ailleurs, a et b étant de seconde espèce, il y a dans ab des points de P tendant vers les extrémités de cet intervalle. Soient donc α_1 et β_1 les plus proches respectivement de a et de b parmi les points de E_1^0 qui sont entre a et b. α_1 et β_1 sont dans P comme E_1. Sur les segments $a\alpha_1$, $\beta_1 b$ il n'y a de points ni agrégés à E_1, ni extrémités de u_1. Il n'y a donc aucun point intérieur à u_1 sur aucun de ces segments dont les extrémités sont toutes quatre sur P.

Entre a et α_1 il y a des points de P tout comme entre β_1 et b. Je peux donc, Q étant partout dense sur P, prendre un point a_1 et un point b_1 de Q respectivement entre a et α_1, β_1 et b. E_1^0, ni par suite E_1, ni u_1 n'ont aucun point entre a et a_1 ni entre b et b_1, et d'ailleurs les quatre extrémités de ces deux segments sont étrangères à tous les ensembles E_n^0. a_1 et b_1 étant des points de seconde espèce dans P, il y a des points de P tendant vers a_1 et b_1, respectivement à l'intérieur de aa_1 et de $b_1 b$. Ces quatre points étant étrangers à E_2^0, les points de ce dernier ensemble situés entre a et a_1 d'une part, entre b_1 et b d'autre part, ont pour positions extrêmes respectives α_2 β_2 pour le premier intervalle, $\alpha_3\beta_3$ pour le second. Entre a et α_2, β_2 et a_1, b_1 et α_3, β_3 et b, je peux, ces quatre intervalles contenant chacun une infinité de points de P sur lequel Q est partout dense, choisir respectivement quatre points de Q, a_2, b_2, a_3, b_3 et alors j'ai quatre intervalles aa_2, $b_2 a_1$, $b_1 a_3$, $b_3 b$ dont les extrémités sont agrégées à Q, donc qui contiennent chacun à leur intérieur une infinité de points de P, admettant les extrémités de ces intervalles pour points limites. Aucune de ces extrémités n'appartient à un ensemble E_n^0 et aucun des deux ensembles E_1, E_2, ni E_1^0, E_2^0, ni u_1, ni u_2 n'ont de points sur l'un de ces quatre segments. La construction effectuée est en somme identique à celle du premier cas avec cette particularité que les extrémités des intervalles exclus à chaque opération appartiennent à P et même sont des points de seconde espèce de P. A cela près, ces extrémités sont étrangères à tous les E_n^0 comme dans le cas de la base continue. Mais il est à remarquer que les segments conservés à la $n^{\text{ième}}$ génération ne contiennent aucun point des segments $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Les points jamais exclus forment un ensemble parfait Π étranger aux E_n et d'ailleurs qui est forcément agrégé à P (donc à R), tous les intervalles contigus à P figurant parmi les points exclus. Il est même visible que, d'après notre construction, tout intervalle $a_i b_i$, contigu à Π, contient des points de P, parce que les extrémités a_i, b_i sont points de deuxième espèce de P, donc limites de points de P situés à l'intérieur de ces mêmes intervalles. Les intervalles $a_i b_i$ étant partout denses sur le continu, dans tout intervalle contenant un point de Π, il y aura des portions de P où Π n'aura aucun point. Π est non dense sur P.

3. — Une propriété générale des ensembles.

Nous allons démontrer le théorème suivant, généralisant une proposition bien connue sur les ensembles fermés : *Tout ensemble se décompose en un ensemble dense en lui-même et un ensemble dénombrable, ce dernier étant de plus non dense sur tout ensemble parfait.*

Supposons linéaire l'ensemble donné E. S'il était spatial, la démonstration suivante n'aurait à subir d'autres modifications que le remplacement du mot « intervalle » par ceux de « cercle » ou « sphère ».

Nous dirons qu'*au point* M, E *est dense en lui-même,* s'il existe dans tout intervalle contenant M un ensemble parfait sur lequel E est partout dense. Nous désignons sous le nom de points α ces points agrégés ou non à E et où cet ensemble est dense en lui-même. Remarquons immédiatement que, s'il existe un ensemble parfait ϖ où E est partout dense, tous les points de ϖ sont des points α. Il suit de là qu'aucun point α n'est isolé. D'ailleurs, les α forment évidemment un ensemble fermé. Donc l'ensemble des α est un ensemble parfait P. Je dis que E est partout dense sur P et que les points de E non agrégés à P forment un ensemble non dense sur tout ensemble parfait et par suite dénombrable. En effet, soit un ensemble parfait Q, situé dans un intervalle contigu à P. Je dis que E est non dense sur Q. Si en effet, E était partout dense sur une portion ω de Q, tous les points de ω seraient des points α. ω serait agrégé à P et ne serait donc pas situé dans un contigu de P. Donc, sur tout ensemble parfait situé dans un contigu de P, E est non dense. Je dis que E est partout dense sur P. S'il en était autrement, il existerait une portion ϖ de P où E n'aurait aucun point. Or, soit α un point de ϖ compris entre les points extrêmes β et γ de ϖ. α est centre d'un intervalle intérieur au segment $\beta\gamma$ et sur lequel existe un ensemble parfait R où E est partout dense. Nous avons vu que tous les points de R sont agrégés à P et par suite appartiennent à ϖ puisque R est entre α et β. Mais E n'a pas de points sur ϖ. Donc, E ne peut pas être dense sur R. Nous aboutissons à une contradiction. Donc, E est partout dense sur P. Soient E′ l'ensemble des points communs à P et à E, E″ l'ensemble des points communs à P et à E, E″ l'ensemble des autres points de E. Je dis que E″ est non dense sur tout ensemble parfait. En effet, si E″ est dense sur un ensemble parfait, il est partout dense sur une portion R de cet ensemble. Or, si R a des points étrangers à P, nous avons vu que E et *a fortiori* E″ ne sont point partout denses sur R. Si R est agrégé à P, E″ n'a aucun point sur R, puisque tous les points de E″ sont étrangers à P. Donc, E″ n'est partout dense sur aucun ensemble parfait; il est non dense sur tous. J'en conclus que E″ est dénombrable. En effet, les points au voisinage desquels un ensemble donné est non dénombrable, forment un ensemble parfait et sur ce dernier l'ensemble initial est partout dense [1].

La décomposition est remarquablement simple pour les ensembles fermés. L'ensemble E′ dense en lui-même est le noyau parfait de E. L'ensemble complémentaire réductible dans chaque intervalle contigu à E′ est non dense sur tout ensemble parfait. La démonstration précé-

---

[1] Soit Q l'ensemble des points au voisinage desquels E est non dénombrable. Je dis que Q est parfait (Lindelöf et Lebesgue) et que E est dense sur Q. Q existe dans tout intervalle où E n'est pas dénombrable. Q est fermé. Dans tout intervalle contigu à Q, E est dénombrable. Donc, Q n'a pas de points isolés,

dente ne fait aucun appel à la notion de nombre transfini, pas plus que la démonstration de MM. Lindelöf et Lebesgue sur la décomposition des ensembles fermés. Néanmoins, pour se rendre compte de la constitution des ensembles du point de vue qui nous occupe, comme, dans une autre théorie, pour saisir les propriétés des ensembles fermés à l'égard de la notion de point limite et l'échelonnement de leurs dérivés, il paraît indispensable d'utiliser l'idée d'ordonnance transfinie. Voici donc comment peut s'effectuer la recherche de l'ensemble E′ dense en lui-même dont le complémentaire E″ relativement à E est non dense sur tout ensemble parfait *et nul sur le dérivé de* E′. Le lecteur se rendra compte en même temps comment un ensemble peut, sans être réductible, être non dense sur tout ensemble parfait.

Remarquons d'abord que, si un ensemble E est dense sur un ensemble parfait Q, le dérivé de E contient une portion de Q, donc n'est pas dénombrable. Ceci étant observé, soit P_1 le noyau du dérivé de E. Dans chaque intervalle u_1 contigu à P_1, E est réductible, donc, son dérivé y étant dénombrable, E est dans u_1 non dense sur tout ensemble parfait. Donc un ensemble dense en lui-même et agrégé à E ne peut avoir aucun point hors de P_1. Soit E_1 l'ensemble des points de E situés sur P_1. Si un ensemble partiel de E est dense en lui-même, cet ensemble est agrégé à E_1. Si E_1 est partout dense sur P_1, E_1 coïncide avec E′, P_1 avec P. Tel est le cas de l'ensemble E des points de première espèce d'un ensemble parfait, augmenté des milieux des contigus ϖ'. L'ensemble de ces derniers est, bien que non réductible, non dense sur tout ensemble parfait. Supposons au contraire E_1 non partout dense sur P_1. Soit P_2 le noyau du dérivé de E_1. P_2 est inclus dans P_1. Tout ensemble agrégé à E_1 et dense en lui-même ne peut avoir aucun point hors de P_2. Il en est donc de même de tout ensemble agrégé à E et dense en lui-même, puisque cet ensemble est nécessairement agrégé à E_1. Nous continuons ainsi à définir des ensembles parfaits P_i inclus les uns dans les autres pour les valeurs entières de i. Déterminons

---

Q est parfait. Soient E_1 l'ensemble des points de E agrégés à Q et j un intervalle quelconque contenant au moins un point de Q. Sur j, E est non dénombrable. Or, les points de E étrangers à E_1 et situés dans j sont dans les intervalles contigus à Q. Ils sont donc en infinité dénombrable. Donc, E_1 agrégé à Q possède des points (et même en infinité non dénombrable) dans j. Donc, E_1 est partout dense sur Q.

la règle de définition de P_λ pour toutes les valeurs du nombre transfini λ de première ou de seconde espèce. Supposons, dans tous les cas, $P_{\lambda'}$ défini pour toutes les valeurs de λ' inférieures à λ et supposons aussi établi que tout ensemble partiel de E dense en lui-même est nécessairement agrégé à $P_{\lambda'}$ ou encore que, dans tout intervalle contigu à $P_{\lambda'}$, E est non dense sur tout ensemble parfait. Alors, soit d'abord λ de première espèce; il a un précédent $\lambda - 1$. Soit $E_{\lambda-1}$ l'ensemble commun à $P_{\lambda-1}$ et à E. Par hypothèse, un ensemble agrégé à E et dense en lui-même ne peut avoir aucun point hors de $P_{\lambda-1}$. Il est donc agrégé à $E_{\lambda-1}$. Tel est notre départ. Définissons P_λ comme étant le noyau du dérivé de $E_{\lambda-1}$. Un ensemble agrégé à $E_{\lambda-1}$ et dense en lui-même ne saurait avoir de points hors de P_λ. Donc un ensemble agrégé à E et dense en lui-même est agrégé à l'ensemble E_λ commun à P_λ et E. Donc, P_λ est défini connaissant $P_{\lambda-1}$ et la propriété essentielle de E relativement à $P_{\lambda-1}$ est maintenue pour P_λ. Si maintenant λ est de seconde espèce, les ensembles $P_{\lambda'}$ d'indices inférieurs à λ sont chacun inclus dans tous les précédents. Ils ont donc en commun un ensemble fermé P'_λ. Si l'on suppose démontré que tout ensemble dense en lui-même et agrégé à E appartient à tous les $P_{\lambda'}$, un tel ensemble est agrégé à P'_λ. Soit P_λ le noyau de P'_λ. Les points de P'_λ étrangers à P_λ forment un ensemble non dense sur tout ensemble parfait. Donc, P_λ qui est défini par la règle précédente contient tout ensemble dense en lui-même agrégé à E.

Les ensembles parfaits P_λ définis pour chaque valeur de λ sont tous inclus dans chacun des ensembles précédents. Si P_μ coïncide avec $P_{\mu+1}$, l'ensemble commun à E et à P_μ, soit E_μ, a pour noyau de son dérivé, P_μ lui-même. Donc, il est partout dense sur P_μ auquel il est agrégé. D'ailleurs, d'après les propriétés des P_λ, en dehors de P_μ, E est non dense sur tout ensemble parfait. Donc, P n'est autre que P_μ, E' coïncide avec E_μ, et tous les ensembles ultérieurs à P_μ coïncident avec P_μ. Si donc par contre tous les ensembles consécutifs à P_μ ne coïncident pas avec P_μ, $P_{\mu+1}$ est inférieur à P_μ, en ce sens que P_μ contient des points non agrégés à $P_{\mu+1}$. Mais d'après une propriété connue des suites bien ordonnées d'ensembles fermés dont chacun est moindre que tous les précédents, il existe un nombre fini ou transfini, — et parmi tous ceux qui jouissent de cette propriété, il y en a un inférieur à tous les autres (caractère fondamental des ensembles bien ordonnés), nous le désignons par μ —, tel que, ou bien P_μ est vide de points, ou bien P_μ, non nul, coïncide avec tous les ensembles suivants. Dans le premier cas, E est non dense sur tout ensemble parfait. Dans le second cas, P coïncide avec P_μ, comme nous l'avons dit. La décomposition de E en E′ et E″ est donc effectuée quel que soit E.

Il est facile de former des exemples dans lesquels P_μ existe pour toute valeur de μ donnée d'avance, E étant de plus nul sur P_μ, ce qui entraîne que tous les ensembles P_λ sont décroissants jusqu'à l'indice μ inclus. Pour $\mu = 1$, nous prenons l'ensemble E des milieux des intervalles contigus à un ensemble parfait Q. Alors, P_1 est Q et E_1, comme P_2, sont nuls. Pour $\mu = 2$ et les valeurs suivantes, commençons par réaliser une correspondance des points du segment $0 - 1$ et des points de Q, de manière que les points de première espèce de Q, a_n, b_n extrémités d'un même intervalle contigu correspondent simultanément à un même point c_n compris entre 0 et 1, l'ordre respectif des c_n et des intervalles contigus homologues étant conservé, les c_n étant partout denses sur le segment $0 - 1$, et la correspondance étant ensuite doublement uniforme et croissante entre les points de seconde espèce de Q et ceux du continu distincts des c_n. Alors, si nous transformons un ensemble E du segment $0 — 1$ en remplaçant chaque point de E distinct des c_n par son homologue unique dans Q, chaque point de E isolé coïncidant avec un c_n, par l'un ou l'autre de ses homologues a_n ou b_n ou par les deux à la fois indifféremment, chaque point c_n de E limite de points de E par le point a_n, le point b_n ou les deux à la fois selon que c_n est limite de E à gauche, à droite ou des deux côtés, alors on obtient un ensemble H agrégé à Q et que nous appelons l'homologue de E. Il est visible que cette correspondance précisée conserve les classes d'ensembles fermés parfaits et denses en eux-mêmes.

Cela étant, si nous connaissons un ensemble E possédant un P_μ sur lequel E est nul, transformons, comme il vient d'être dit, le continu $0 - 1$ en l'ensemble parfait P_μ jouant le rôle de Q. Nous prenons sur ce même continu un ensemble parfait non dense II et nous désignons par e l'ensemble des milieux des contigus de II ou tout autre ensemble réductible dans les contigus de II et nul sur lui. A e et à II correspondent sur P_μ un ensemble η dont nous accroissons E et un ensemble parfait non dense sur P_μ et qui sera $P_{\mu+1}$ pour l'ensemble $E + \eta$. Nous avons donc réalisé le cas où $P_{\mu+1}$ existe, E étant nul sur lui. Cette construction permet pour commencer d'avoir un ensemble E pour lequel P_2 n'est pas nul, et de proche en proche pour chaque valeur entière de n un ensemble E pour lequel P_μ existe sans contenir aucun point de E. Si l'on sait, quel que soit λ inférieur à μ supposé de seconde espèce, construire un ensemble possédant un P_λ et nul sur lui, nous rangeons les contigus à un ensemble parfait II en une suite u_n. Nous prenons parmi les λ une suite croissante $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, tendant vers μ. Sur u_n nous construisons un ensemble homothétique à un ensemble possédant un P_{λ_n} et nul sur lui. L'ensemble total admet, quel que soit m, un P_{λ_m} contenant II en totalité et des points dans les u_n d'indice supérieur à $m-1$, exclusivement. Donc, il admet un P_μ constitué par II et sur lequel il est nul. De là, on passe, comme nous l'avons dit, à la construction d'un ensemble E admettant un $P_{\mu+1}$ et nul sur lui, et l'on continue sans arrêt possible.

Ayant un ensemble E admettant un P_μ de rang donné à l'avance et distinct des P_λ d'indice inférieur, on passe du cas où E est nul sur P_μ, et par suite non dense sur tout ensemble parfait, au cas où E contient un ensemble partiel dense en lui-même en ajoutant à E l'ensemble des points de première espèce de P_μ. Le complémentaire E″ de E′ sur E sera non dense sur tout ensemble parfait et l'on pourra lui attribuer eu égard à cette propriété l'ordre μ. J'ai déjà proposé au cours de ce Mémoire (**33**), pour les ensembles non denses sur tout ensemble parfait, l'appellation d'*ensembles clairsemés*. Donc *tout ensemble se décompose en un ensemble dense en lui-même et un ensemble clairsemé*. Le premier sera, comme dans le cas des ensembles fermés, appelé par nous le *noyau* de l'ensemble décomposé. Enfin, notons que la décomposition est unique et coïncide avec celle que nous avons réalisée, si le noyau E′ est par définition le plus grand ensemble dense en lui-même contenu dans E, et si par conséquent E″ n'a aucun point sur le dérivé parfait de E′ (1).

(1) Il paraîtra prochainement une suite à ce Mémoire dans le *Bulletin de la Société mathématique*.