JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH PÉRÈS

Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Volterra

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 1-97.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Volterra;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions permutables de première espèce, c'est-à-dire telles que

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x,\xi)\,f(\xi,y)\,d\xi$$

a été développée par M. Volterra qui en indiquait, dès son premier Mémoire (¹), les applications essentielles à la théorie des équations intégrales et intégro-différentielles. Dans deux Mémoires successifs (²), M. Volterra étudiait le problème fondamental de cette théorie [détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée

(¹) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (*Rend. Lincei*, 1ᵉʳ semestre 1910).

(²) *Sopra le funzioni permutabili* (*Rend. Lincei*, 1ᵉʳ semestre 1910) et *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (*Rend. Lincei*, 1ᵉʳ semestre 1911).

$f(x, y)$ dans le cas où cette fonction est d'ordre 1 ou 2 (¹)] et montrait l'intérêt qu'aurait, pour introduire dans la théorie des fonctions permutables le symbole $\sqrt[n]{}$, la détermination des fonctions permutables avec une fonction d'ordre n. M. Vessiot démontrait (²) une propriété importante des fonctions permutables avec une fonction donnée : elles sont permutables entre elles, et étendait aux fonctions permutables la théorie des groupes. Enfin les équations intégro-différentielles de la physique héréditaire ont été étudiées grâce à la théorie des fonctions permutables par M. Volterra, M. Evans et moi-même (³).

Le but principal de ce travail est la détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée et l'étude de ces fonctions.

Dans le premier Chapitre je rappelle d'abord les éléments de la théorie des fonctions permutables et son application à la théorie des équations intégrales d'après M. Volterra; je donne ensuite deux extensions de cette application (§ II), l'une en laissant tomber la condition de permutabilité, l'autre en ne faisant, sur la série des compositions qui définit l'équation intégrale, que les hypothèses de convergence les plus larges possibles. Je n'ai pas indiqué les extensions analogues qu'on peut faire dans la théorie des équations intégro-différentielles. La fin de ce Chapitre est consacrée à quelques compléments (§ III), nécessaires pour la suite, de la théorie de l'équation de Volterra de première espèce

$$\int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi = F(x, y) \qquad [\text{inconnue } \varphi(x, y)];$$

quand les données sont analytiques la solution est une fonction en général multiforme. Les différentes branches se permutent autour

---

(¹) M. Volterra dit qu'une fonction est d'ordre n quand elle admet $(y - x)^{n-1}$ en facteur, ses dérivées $(n-1)^{\text{ièmes}}$ étant différentes de zéro pour $y = x$ (*cf.* Chap. I, n° 11).

(²) *Comptes rendus*, 1ᵉʳ semestre 1912, p. 571 et 683.

(³) Pour ces recherches, dont nous ne nous occuperons pas ici, comme pour les précédentes, nous renverrons au Livre de M. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Gauthier-Villars, 1913).

des points où le noyau $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé; j'ai entièrement étudié dans quelles circonstances un de ces points, soit $x = y = a$, sera un point régulier de la solution : il faut, et j'indique un procédé pour reconnaître si cette circonstance se présente, qu'il existe un développement $\Sigma c_{pq}(x-a)^p(y-a)^q$ satisfaisant formellement à l'équation; cela suffit pour qu'on puisse affirmer la convergence de ce développement qui définit donc bien une solution régulière pour $x = y = a$.

Dans le Chapitre II, j'ai étudié la méthode donnée par M. Volterra pour déterminer les fonctions permutables avec une fonction donnée. J'expose d'abord, avec de très légers compléments [1], son raisonnement pour une fonction donnée du premier ordre. J'en expose ensuite une généralisation quand la fonction donnée est d'ordre n quelconque. Une grave difficulté se présente dès que $n > 2$: on a, dans la suite des calculs, à résoudre un problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles à caractéristiques imaginaires. Ceci m'a obligé à me restreindre, je l'ai fait presque toujours dans ce travail, aux fonctions analytiques. La méthode ainsi obtenue me donne une propriété importante des fonctions permutables avec $f(x, y)$: elles n'ont, sur la multiplicité $y = x$, pas d'autres singularités que les points où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé [et bien entendu les points singuliers de $f(x, y)$].

L'étude de la méthode précédente autour d'un de ces points me fournit (Chap. III, § I) un cas important où les fonctions $\varphi(x, y)$ seront régulières autour de ce point.

Dans le même Chapitre j'expose aussi l'application de la recherche précédente à l'introduction dans la théorie des fonctions permutables de la racine $n^{\text{ième}}$, c'est-à-dire à la résolution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\varphi}{}^{n}(x, y) = f(x, y).$$

Elle admet, à un facteur $\sqrt[n]{1}$ près, une solution qui est permutable avec $f(x, y)$ et admet donc en général comme singularités les points

(1) Par exemple la convergence des dérivées premières de φ (cf. p. 35).

$x = y = a$ où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé. J'étudie, par une méthode analogue à celle qui m'a servi pour l'équation de Volterra de première espèce (Chap. I), le cas où $\varphi(x, y)$ est régulier autour d'un de ces points $x = y = a$; cette méthode constitue de plus un procédé direct de résolution de l'équation (E). Une autre méthode directe, la plus avantageuse lorsqu'elle est applicable, permet de faire comprendre la difficulté que présente l'étude générale de la singularité de $\varphi(x, y)$ autour de $x = y = a$: cette étude peut se réduire à celle des singularités dans tout le plan d'une équation intégrale non linéaire dont l'inconnue est fonction d'une seule variable (§ III).

La méthode de recherche des fonctions permutables que j'expose au Chapitre IV permet de pousser plus loin l'étude de ces fonctions : elle se rapproche de celle que j'ai indiquée (Chap. I) pour étudier l'équation de Volterra et est limitée *par essence* à la recherche des fonctions permutables avec une fonction analytique. Je prouve d'abord (c'est la réciproque d'un résultat presque immédiat) que toutes les fonctions analytiques permutables avec une *fonction* $f(x, y)$ *n'admettant pas* $y - x$ *en facteur* sont susceptibles d'un développement convergent de la forme

$$(1) \qquad a_0 f(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots;$$

la convergence d'un tel développement s'exprimant par le fait que la série de puissances

$$(1') \qquad a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

converge. Il en résulte que ces fonctions permutables avec $f(x, y)$ n'ont pas, contrairement à ce que pouvait faire supposer la méthode du Chapitre II, pour points singuliers les points où $f(x, y)$ cesse d'être du premier ordre : la méthode du Chapitre II donnerait une idée très imparfaite de l'allure des fonctions permutables autour d'un de ces points; on peut en effet se rendre compte qu'elle conduirait à définir ces fonctions qui sont holomorphes, par des séries de fonctions présentant des singularités. C'est pour cette raison que je n'ai étudié que très brièvement, au Chapitre III, la méthode du Chapitre II autour d'un point où $f(x,y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé, me contentant de me placer dans le seul cas particulier où l'on puisse obtenir un résultat précis.

En m'appuyant sur les résultats précédents et sur la méthode du Chapitre II, je montre ensuite que toutes les fonctions de variables réelles permutables avec $f(x,y)$ admettent un développement convergent, non en une série de puissances symboliques telle que (1), mais en une série de polynomes symboliques. Une nouvelle analogie remarquable se développe ainsi entre l'ensemble, dépendant d'une fonction d'une variable, des fonctions permutables avec $f(x,y)$ et l'ensemble des fonctions d'une variable : l'ensemble des fonctions d'une variable n'est d'ailleurs que l'ensemble particulier des fonctions permutables avec l'unité.

Le cas où la fonction $f(x,y)$ admet $(y-x)^n$ en facteur se réduit au précédent après résolution d'une équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\varphi}{}^{n}(x,y) = f(x,y).$$

Les fonctions analytiques permutables avec f admettent alors en général comme singularités les points $x=y=a$ où f cesse d'être d'ordre $n-1$. Dans l'ordre d'idées qui nous a préoccupé, deux questions se posaient encore : Dans quel cas le point $x=y=a$ sera-t-il régulier pour toutes les fonctions permutables avec $f(x,y)$? Lorsque cette circonstance ne se produit pas, quelle est la forme de toutes les fonctions permutables avec f qui soient holomorphes autour de $x=y=a$?

J'ai répondu à la première de ces questions. Une étude plus approfondie de la singularité des fonctions permutables avec f autour de $x=y=a$ me semble nécessaire avant de répondre à la seconde (*cf.* n° **19**, Chap. IV). Cette étude devra être entreprise, non pas, pour les raisons indiquées plus haut, par les méthodes du Chapitre II, mais plutôt en la reliant à celle des singularités de l'équation (E), équation qu'il faudra s'efforcer (*cf.* Chap. III, § III) d'étudier directement.

CHAPITRE I.

COMPOSITION ET PERMUTABILITÉ. APPLICATIONS A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES.

I. — Les fonctions permutables; premières applications à la résolution d'équations intégrales.

1. Soient $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ deux fonctions finies et continues des variables x et y lorsque (*fig.* 1)

$$(d) \qquad a \leqq x \leqq y \leqq b;$$

M. Volterra nomme *composition* [1] de ces deux fonctions l'opération

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi.$$

Le résultat de cette opération est une nouvelle fonction de x et

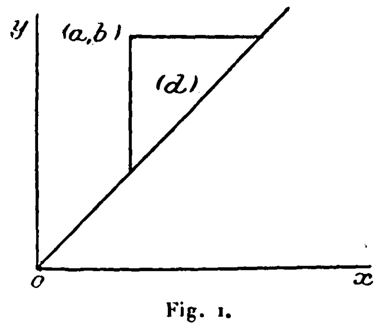

Fig. 1.

de y, finie et continue dans le même domaine de valeurs pour x et y, que M. Volterra nomme

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2(x, y) \quad \text{ou simplement} \quad \overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2.$$

---

[1] M. Volterra nomme cette opération *composition de première espèce* pour la distinguer d'une *composition de deuxième espèce* qu'il étudie aussi. Comme dans ce travail nous ne considérons que la *composition de première espèce*, nous la nommons simplement *composition*.

Cette notation est destinée à mettre en évidence l'analogie de la composition avec un produit, analogie que nous allons maintenant développer.

2. Tout d'abord l'opération *composition* est, comme l'opération *produit*, associative. Il est en effet aisé de vérifier qu'on a

$$((\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2)\overset{*}{F}_3) = (\overset{*}{F}_1(\overset{*}{F}_2\overset{*}{F}_3)),$$

F_3 étant une nouvelle fonction finie et continue dans le domaine (d) et les parenthèses servant à indiquer, comme dans la théorie de la multiplication, l'ordre dans lequel on fait les opérations.

L'analogie avec le produit sera complète si la composition est aussi commutative, si l'on a

$$\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2 = \overset{*}{F}_2\overset{*}{F}_1.$$

Il est évident que ce n'est pas le cas général. Mais c'est un cas très important : nous dirons alors, avec M. Volterra, que les fonctions F_1 et F_2 sont permutables ([1]).

3. L'étude des fonctions permutables est le but principal de ce travail. Nous allons déjà, au cours de ce paragraphe, en montrer l'intérêt en indiquant l'application qu'en fit M. Volterra à la résolution de certaines équations intégrales.

Soient F_1, F_2, ..., F_n des fonctions de x et de y permutables entre elles et définies dans le même domaine (d) précédent. Il sera naturel de noter

$$\overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2\ldots\overset{*}{F}_n(x, y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{F}_1\overset{*}{F}_2\ldots\overset{*}{F}_n$$

la fonction obtenue en composant F_1 avec F_2, le résultat avec F_3, etc., et de noter

$$\overset{*}{F}{}_1^{p_1}\overset{*}{F}{}_2^{p_2}\ldots\overset{*}{F}{}_n^{p_n}$$

la fonction obtenue en composant p_1 fonction F_1, p_2 fonctions F_2, etc.

Plus généralement, soit $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un polynome des

([1]) Ou permutables de première espèce [*cf.* note ([1]), page précédente].

variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n'ayant pas de terme constant ([1]). Si l'on y remplace les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et qu'on y interprète les produits de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ comme représentant des compositions, on obtiendra une fonction de x et de y, toujours définie dans le domaine (d) et qu'il est naturel de noter

$$\varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n).$$

Il est alors aisé de vérifier que :

α. *Un polynome symbolique tel que* $\varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n)$ *définit une fonction permutable avec* $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

β. *On peut faire les additions et les compositions des polynomes symboliques* $\varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n)$ *comme les additions et les multiplications des polynomes ordinaires* $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, *en interprétant toujours les produits des fonctions* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *comme des compositions.*

Ainsi on aura

$$(\overset{*}{F}_1 + 2\overset{*}{F}_2)^n = \overset{*}{F}{}_1^n + 2n\overset{*}{F}{}_1^{n-1}\overset{*}{F}_2 + \ldots + 2^n\overset{*}{F}{}_2^n,$$
$$(\overset{*}{F}_1 + 2\overset{*}{F}_2)^n(\overset{*}{F}_1 + 2\overset{*}{F}_2)^p = (\overset{*}{F}_1 + 2\overset{*}{F}_2)^{n+p}.$$

On peut aller plus loin; on peut, dans ce qui précède, supposer que $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ soit une série quelconque des puissances de ces variables

$$(1)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{i_1}\sum_{0}^{\infty}{}_{i_2}\cdots\sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n},$$

holomorphe autour de $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ et privée de terme constant

$$a_{0,0,\ldots,0} = 0.$$

Il ne pourrait y avoir de difficultés que pour la convergence, mais il

([1]) On peut éviter cette restriction par une extension, très simple, mais dont je n'ai nul besoin, de la notion de composition (*cf.* VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 138, β).

est bien clair que la série

$$(2) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \cdots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}$$

converge absolument et uniformément si les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont bornées. On a en effet

$$|\overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \cdots \overset{*}{F}{}_n^{i_n}| < \frac{m^{i_1+i_2+\ldots+i_n}}{(i_1+i_2+\ldots+i_n-1)!} |y-x|^{i_1+i_2+\ldots+i_n-1}$$

et

$$|a_{i_1 i_2 \ldots i_n}| < \frac{M}{R_1^{i_1} R_2^{i_2} \cdots R_n^{i_n}} \quad (^1).$$

4. Un grand intérêt des considérations précédentes est qu'elles fournissent, comme l'a montré M. Volterra, la solution immédiate de toute une catégorie d'équations intégrales : en général de toute relation implicite exprimée par une série telle que (1) et dont on connaît une solution analytique on déduira une équation intégrale exprimée par une série telle que (2) dont on connaîtra une solution.

Précisons : soit une relation implicite par rapport à la variable z

$$(a) \qquad z = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n, z)$$

φ étant une fonction holomorphe des variables $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ autour de $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ dont le développement en série

---

(1) Nous avons supposé dans tout ce qui précède que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ étaient définies dans le domaine (d) $a \leqq x \leqq y \leqq b$. Ce domaine est tel, et c'est essentiel, que toute fonction composée à partir de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ soit définie dans le même domaine. Il est clair qu'on pourrait le remplacer par tout domaine du plan des xy jouissant de cette propriété. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'un tel domaine doit être tel que, s'il contient un point (x, y), il contienne aussi les parallèles aux axes menées de ce point jusqu'à la première bissectrice : il peut donc être engendré par des domaines

$$a \leqq x \leqq y \leqq b$$

et par des domaines tout semblables

$$a \leqq y \leqq x \leqq b.$$

n'ait ni terme constant, ni terme en z. Il est classique, et l'on démontre par la méthode des fonctions majorantes, qu'elle admet une solution

$$(b) \qquad z = \psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

holomorphe autour de $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ et n'ayant pas de terme constant dans son développement.

Les séries (a) et (b) sont de type (1), n° **3**. Remplaçons-y $z_1, z_2, \ldots, z_n$, z par des fonctions permutables $F_1, F_2, \ldots, F_n$, F définies dans le domaine (d) et envisageons les produits de ces fonctions comme des compositions. Nous aurons :

Une équation intégrale

$$(a') \qquad F = \varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n, \overset{*}{F})$$

dont la solution, d'ailleurs unique (1), *sera donnée dans le domaine* (d) *par la formule*

$$(b') \qquad F = \psi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n)$$

représentant une fonction permutable avec les fonctions données.

M. Volterra a fait remarquer que l'équation (a') est, en un sens, plus simple que l'équation implicite ordinaire (a) : la série (b') en donne la solution quelles que soient les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$, tandis que la série (b) ne convergeait et ne donnait la solution de (a) qu'au voisinage de l'origine $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$.

5. Avant de passer à des extensions du résultat précédent, nous ferons une remarque : on pourrait songer à résoudre l'équation (a') par approximations successives en formant la série

$$(b'') \qquad F = F^{(0)} + (F^{(1)} - F^{(0)}) + \ldots + (F^{(p)} - F^{(p-1)}) + \ldots$$

avec

$$F^{(0)} = 0, \qquad F^{(p)} = \varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n, \overset{*}{F}^{(p-1)});$$

(1) Un lecteur familiarisé avec les méthodes d'approximations successives n'aura pas de peine à démontrer que l'équation (a') n'a pas d'autre solution permutable ou non avec les fonctions données $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

On sera ainsi conduit à définir la solution $F(x, y)$ non plus par une série de compositions, mais par une série de séries de compositions. La démonstration directe de la convergence de cette série dans *tout* le domaine (d) est plus compliquée que la même démonstration pour la série (b') du n° 4. Cette démonstration est d'ailleurs inutile; la convergence de la série des approximations successives résulte nécessairement de celle de la série (b'). C'est un fait tout à fait général dont je donnerai ailleurs la démonstration : toutes les fois que, pour résoudre un problème de fonctions implicites, pour déterminer l'intégrale d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles, on peut employer parallèlement la méthode des fonctions majorantes et une méthode d'approximations successives, les approximations successives convergent sûrement dans tout domaine où la méthode des fonctions majorantes permet de définir la solution (¹).

II. — Extensions du résultat précédent.

6. Nous montrerons dans ce paragraphe comment des équations intégrales, plus générales encore que les équations (a') traitées par M. Volterra, peuvent être résolues par des procédés analogues.

Voici une première extension. Supposons que la série

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n, z) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n j} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} z^j$$

ne soit pas convergente autour de $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = 0$, mais que la série

$$\sum \frac{a_{i_1 i_2 \ldots i_n j}}{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n + j)!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n} z^j$$

(¹) C'est un résultat peu surprenant : on sait qu'il est vrai pour les équations différentielles linéaires.

D'autre part, quand on applique, avec M. Goursat, la méthode des fonctions majorantes au théorème d'existence de la solution d'une équation différentielle quelconque, on constate bien que, dans le cercle où l'on démontre ainsi l'existence de la solution, les approximations successives convergent : c'est une présomption du résultat ci-dessus, mais non une démonstration, car il n'est pas prouvé que cela subsisterait si l'on employait de meilleures majorantes.

le soit. Alors la série

$$\Sigma a_{i_1 i_2 \dots i_n j} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \overset{*}{F}{}_2^{i_2} \dots \overset{*}{F}{}_n^{i_n} \overset{*}{F}{}^{j} = \varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \dots, \overset{*}{F}_n, \overset{*}{F})$$

converge encore (*cf.* n° 3), non plus forcément dans tout le domaine (d), mais au moins pour $y - x$ assez petit, c'est-à-dire au voisinage de la droite $y = x$ de ce domaine [1]. L'équation intégrale

$$(a') \qquad F = \varphi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \dots, \overset{*}{F}_n, \overset{*}{F})$$

a encore pour solution, pour $y - x$ assez petit, la série

$$(b') \qquad F = \psi(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \dots, \overset{*}{F}_n) = \Sigma b_{i_1 i_2 \dots i_n} \overset{*}{F}{}_1^{i_1} \dots \overset{*}{F}{}_n^{i_n},$$

dont les coefficients sont calculés de façon à satisfaire formellement à (a'). Il suffit pour cela de prouver l'analyticité de

$$\sum \frac{b_{i_1 i_2 \dots i_n}}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}.$$

Or, si l'on résout le problème des fonctions implicites pour l'équation

$$z = \sum \frac{|a_{i_1 i_2 \dots i_n}|}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n + j)!} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n} z^j,$$

on trouve une série

$$\Sigma \beta_{i_1 i_2 \dots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n},$$

analytique et à coefficients positifs. Il suffit de prouver que

$$\beta_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq \frac{|b_{i_1 i_2 \dots i_n}|}{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)!}.$$

Mais les formules de récurrence permettant le calcul des $\beta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ et des $b_{i_1 i_2 \dots i_n}$ peuvent s'écrire

$$\beta_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum \left[\frac{|a_{r_1 r_2 \dots r_n j}|}{(r_1 + r_2 + \dots + r_n + j)!} \prod_j \beta_{s_1 s_2 \dots s_n} \right]$$

et

$$b_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum \left(a_{r_1 r_2 \dots r_n j} \prod_j b_{s_1 s_2 \dots s_n} \right),$$

---

[1] Ou converge dans tout le domaine (d) si les $F_1, F_2, \dots, F_n, F$ sont assez petits.

le symbole $\prod\limits_{j} b_{s_1, s_2 \ldots s_n}$ désignant le produit de j quantités analogues à $b_{s_1, s_2 \ldots s_n}$ telles que

$$\sum_j s_1 + r_1 = i_1, \qquad \ldots, \qquad \sum_j s_n + r_n = i_n;$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs possibles des symboles $s_1, s_2, \ldots, s_n, r_1, r_2, \ldots, r_n, j$. Il suffit de vérifier que

$$(r_1 + r_2 + \ldots + r_n + j)! \prod_j (s_1 + s_2 + \ldots + s_n)! \leqq (i_1 + i_2 + \ldots + i_n)!$$

ou que

$$(A + j)!\, A_1!\, A_2! \ldots A_j! \leqq (A + A_1 + A_2 + \ldots + A_j)!,$$

$A, A_1, A_2, \ldots, A_j$ étant des entiers et les j derniers étant différents de zéro. C'est une inégalité évidente si $A_1 = A_2 = \ldots = A_j = 1$ et qui ne sera que renforcée si l'on augmente un des A_j d'une unité.

7. La nouvelle généralisation que nous allons exposer montrera que, dans la théorie précédente, c'est la composition et non la permutabilité qui joue le rôle important. La permutabilité n'apporte qu'une simplification qu'on peut dire accessoire; aussi aurons-nous, quand nous en aurons fait l'étude, à montrer en d'autres points son importance. Pour justifier cette remarque je vais montrer que les résultats précédents s'étendent aux fonctions non permutables [1].

8. Soient $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_n(x, y)$ des fonctions finies et continues comme précédemment dans le domaine (d), mais pouvant n'être pas permutables. Des expressions telles que

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 \ldots \overset{*}{F}_n(x, y), \qquad \overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}{}_2^2 \overset{*}{F}_3(x, y)$$

auront un sens aussi clair (grâce à l'associativité) que quand les fonctions sont permutables. Seulement il ne sera plus permis de

---

[1] J'ai donné cette démonstration dans une Note : *Sulli equazioni integrali* (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 19 janvier 1913).

changer l'ordre des lettres : on n'aura plus, par exemple,

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}{}_2^2 \overset{*}{F}_1 = \overset{*}{F}{}_1^2 \overset{*}{F}{}_2^2.$$

Un polynome procédant suivant les produits symboliques des fonctions précédentes et ayant des coefficients numériques

$$a F_1 + b F_2 + c \overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 + d \overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_1$$

définira encore une fonction finie et continue comme F_1, F_2, ... Il en sera de même, sous une condition que nous allons exprimer, d'une série sans terme constant des produits et puissances symboliques des fonctions précédentes; soit

$$(3) \qquad \varphi[\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n] = a F_1 + b F_2 + \ldots + c \overset{*}{F}{}_1^2 + d \overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 + e \overset{*}{F}_2 \overset{*}{F}_1 + \ldots$$

une telle série; nous la dirons *régulière* si la série

$$(3') \qquad \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \alpha z_1 + \beta z_2 + \ldots + \gamma z_1^2 + (\delta + \varepsilon) z_1 z_2 + \ldots,$$

déduite de la série (3) en y remplaçant les coefficients a, b, ... par leurs modules α, β, ..., puis les fonctions F_1, F_2, ..., F_n par des nombres complexes ordinaires z_1, z_2, ..., z_n et enfin en groupant les termes semblables, est convergente.

Ceci posé :

α_1. *Toute série de type* (3) *régulière définit dans* (d) *une fonction de x et de y finie et continue comme les fonctions dont on part.*

La démonstration est la même qu'au n° 5.

β_1. *Les calculs sur les séries de type* (3) (*additions et compositions*) *peuvent se faire comme les mêmes calculs* (*additions et multiplications*) *sur les séries entières*, à condition de ne pas perdre de vue la non-permutabilité des fonctions F_1, F_2, ..., F_n.

9. Considérons enfin une équation intégrale

$$(a_1) \qquad F = \varphi[\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_n, \overset{*}{F}]$$

par rapport à l'inconnue $F(x, y)$. Le second membre $\varphi\left[\overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}\right]$

étant une série de type (3) régulière, n'ayant ni terme constant, *ni terme en* F.

On peut essayer de la résoudre formellement par un développement

$$(b_1) \qquad F = \psi[\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \dots, \overset{*}{F}_n],$$

ψ étant une série de type (3) sans terme constant. On constate aisément, comme dans le cas où les fonctions F_i sont permutables, que les coefficients de ψ sont déterminés d'une façon unique et s'obtiennent à partir des coefficients de φ par des additions et des multiplications.

Le développement (b_1) ainsi obtenu fournira dans (d) la solution de l'équation (a_1) s'il est régulier. Mais il l'est effectivement : remplaçons en effet l'équation (a_1) par l'équation du même type

$$F = \varphi_1[F_1, F_2, \dots, F_n, F],$$

φ_1 étant la série déduite de φ en y remplaçant les coefficients par leurs modules. Elle admet, d'après ce qui précède, une solution formelle

$$(b'_1) \qquad F = \chi[\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \dots, \overset{*}{F}_n],$$

les coefficients de χ étant, d'après une remarque précédente, positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants de ψ : la régularité de ψ sera donc entraînée par celle de χ.

Mais χ ayant ses coefficients *positifs*, il suffit de prouver la convergence, autour de l'origine, de la série

$$\chi(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

obtenue en y remplaçant $F_1, F_2, \dots, F_n$ par des variables permutables $z_1, z_2, \dots, z_n$ et en groupant les termes semblables. C'est immédiat, car en faisant la même substitution dans l'équation (a'_1) on obtient l'équation implicite ordinaire

$$z = \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n, z)$$

qui ne cesse pas d'être satisfaite par le développement $\chi(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Ce développement est donc convergent d'après le théorème ordinaire sur les fonctions implicites. Je renvoie à ma Note déjà citée pour la démonstration de l'unicité de la solution.

Sans qu'il soit besoin d'insister, il est clair qu'on pourrait étendre aux fonctions non permutables les considérations du n° **6**.

III. — Quelques résultats sur l'équation de Volterra de première espèce.

10. Nous avons, dans le numéro précédent, traité des équations très générales, mais qui ne sont pas, à beaucoup près, les plus générales qu'on puisse former à partir d'une fonction inconnue par des compositions. La plus simple des équations résolues par les considérations précédentes est celle de Volterra de deuxième espèce

$$\mathrm{F}(x, y) + \int_x^y \mathrm{F}_1(x, \xi)\,\mathrm{F}(\xi, y)\,d\xi = \Phi(x, y),$$

dont la théorie est d'ailleurs classique.

L'équation de Volterra de première espèce, que nous écrirons

$$(1) \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi)\, f(\xi, y)\, d\xi = \mathrm{F}(x, y),$$

[$f(x,y)$ et $\mathrm{F}(x,y)$ étant des fonctions connues, $\varphi(x;y)$ une inconnue] ne rentre pas, au contraire, dans le type précédent. Nous allons rappeler brièvement les résultats classiques relatifs à cette équation, puis démontrer à son sujet quelques nouveaux résultats dont nous nous servirons par la suite.

Remarquons d'abord que, dans la théorie qu'on fait d'ordinaire de cette équation (1), on considère la limite inférieure d'intégration x comme fixe, y étant seule variable. Nous aurons avantage, pour notre théorie, à considérer à la fois x et y comme variables.

11. Soit donc l'équation

$$(1) \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi)\, f(\xi, y)\, d\xi = \mathrm{F}(x, y),$$

$f(x, y)$ et $F(x, y)$ étant finies et continues dans le domaine (d)

$$a \leqq x \leqq y \leqq b.$$

Recherchons les solutions $\varphi(x, y)$ finies et continues dans le même domaine.

Il est un cas où cette recherche n'offre aucune difficulté, car l'équation (1) se ramène à une équation de deuxième espèce : c'est celui où la fonction $f(x, y)$ (noyau) est, suivant une dénomination de M. Volterra, d'un *ordre déterminé dans le domaine* (d), c'est-à-dire où les premières dérivées du noyau qui ne sont pas identiquement nulles pour $x = y$ sont constamment différentes de zéro pour $x = y$.

Pour plus de précision, imaginons que les dérivées

$$\left[\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^s \, \partial y^{p-s}}\right]_{y=x}$$

soient nulles pour $p < n - 1$; on a alors

$$\left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x} = -\left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-2} \, \partial x}\right]_{y=x} = \ldots = (-1)^{n-1}\left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x}.$$

Si la valeur de ces rapports est une fonction $\alpha(x)$ continue et *différente de zéro* pour $a \leqq x \leqq b$, nous dirons $f(x, y)$ d'ordre n dans le domaine (d) [1].

Ceci posé, on peut prouver que :

Si la fonction $f(x, y)$ *est d'ordre* n *et admet, ainsi que* $F(x, y)$, *des dérivées partielles d'ordre* n ; *si, de plus (condition nécessaire),*

---

[1] On voit que, lorsque y tend vers x, la fonction d'ordre $n + 1$ sera infiniment petite comme $(y - x)^n$, la partie principale de cet infiniment petit étant justement $\frac{(y - x)^n}{n!} \alpha(x)$.

Voici deux remarques qu'il est bon d'avoir à l'esprit en lisant ce travail :

1° Quand on compose deux fonctions d'ordre déterminé, leurs ordres s'ajoutent;

2° Dans les mêmes conditions, les coefficients $\alpha(x)$ se multiplient.

Si l'on avait pris pour noter l'ordre de la fonction précédemment envisagée n et non $n + 1$, ce qui pouvait paraître plus naturel, l'énoncé précédent 1° perdrait de sa simplicité.

toutes les dérivées de la fonction F *jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *inclus sont identiquement nulles pour* $y=x$, *l'équation* (1) *est équivalente à une équation de Volterra de deuxième espèce ayant, d'après ce qui précède, une seule solution finie et continue dans le domaine* (d).

En effet, en dérivant (1) n fois par rapport à y, on obtient l'équation

$$\varphi(x,y)\,\alpha(y)+\int_x^y \varphi(x,\xi)\frac{\partial^n f(\xi,y)}{\partial y^n}\,d\xi=\frac{\partial^n \mathrm{F}(x,y)}{\partial y^n}$$

complètement équivalente à (1), grâce aux conditions que remplit $\mathrm{F}(x,y)$.

D'où

$$\varphi(x,y)+\int_x^y \varphi(x,\xi)\frac{\dfrac{\partial^n f(\xi,y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)}\,d\xi=\frac{\dfrac{\partial^n \mathrm{F}(x,y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)};\tag{2}$$

c'est l'équation de deuxième espèce annoncée ayant, grâce à l'hypothèse que $\alpha(y)$ ne s'annule pas, un noyau et un second membre finis dans (d) [1]. Remarquons enfin que si le noyau $f(x,y)$ et le second membre $\mathrm{F}(x,y)$ sont permutables, la solution $\varphi(x,y)$ est permutable avec l'un et avec l'autre. Je renvoie pour ce dernier point aux *Fonctions de lignes* de M. Volterra, p. 165.

Si au contraire

$$\alpha(x)=\left[\frac{\partial^{n-1} f(x,y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x}$$

s'annule en un point x_0 $(a\leqq x_0\leqq b)$, et si l'on mène par le point $y=x=x_0$ les parallèles aux axes EX_0 et GX_0 (*fig.* 2), la méthode précédente s'appliquera seulement à l'intérieur des deux triangles $\mathrm{AX}_0\mathrm{G}$ et $\mathrm{X}_0\mathrm{BE}$

---

(1) La solution de cette équation s'écrira, d'après les résultats précédents, en posant

$$-\mathrm{K}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)},\qquad \mathrm{L}(x,y)=\frac{\dfrac{\partial^n \mathrm{F}(x,y)}{\partial y^n}}{\alpha(y)},$$

sous forme de la série

$$\mathrm{L}(x,y)+\overset{*}{\mathrm{L}}\overset{*}{\mathrm{K}}(x,y)+\overset{*}{\mathrm{L}}\overset{*}{\mathrm{K}}{}^2(x,y)+\ldots+\overset{*}{\mathrm{L}}\overset{*}{\mathrm{K}}{}^n(x,y)+\ldots,$$

et y donnera $\varphi(x, y)$ finie et continue. Nous allons nous préoccuper d'étudier $\varphi(x, y)$ au voisinage du point X_0.

C'est un problème tout différent de celui qui fut traité par M. Vol-

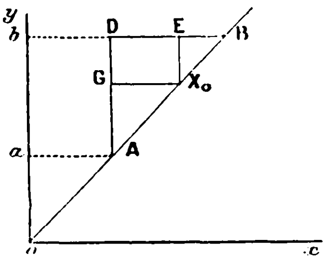

Fig. 2.

terra, puis par M. Lalesco (Thèse) : faisant dans l'équation $x = x_0$, ils recherchaient les solutions $\varphi(x_0, y)$ finies et continues sur la droite X_0E de la figure. La méthode si originale de M. Lalesco ne s'applique pas au problème que nous avons en vue.

Je me limiterai dans l'étude suivante aux fonctions analytiques et aux variables complexes.

12. J'aurai souvent, par la suite, à envisager des fonctions analytiques de deux variables complexes x et y. Je représenterai toujours

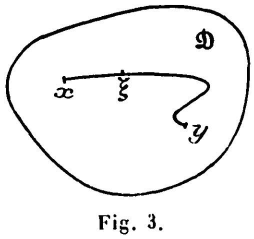

Fig. 3.

ces variables par deux points marqués sur un même plan complexe (qui pourra être dans certains cas une surface de Riemann).

Soient deux fonctions $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ holomorphes quand x et y sont tout deux intérieurs à un même domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$ du plan complexe (*fig.* 3) ou d'une surface de Riemann; leur composition

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi$$

a un sens parfaitement clair (l'intégrale est calculée sur une courbe, d'ailleurs quelconque, allant de x en y sans quitter $\mathfrak{D}$) et conduit à une fonction $\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2(x, y)$, analytique elle aussi quand x et y sont situés dans $\mathfrak{D}$. La définition de la permutabilité et tous les résultats précédents s'étendent de même aux variables complexes.

Si nous considérons par exemple l'équation

$$\int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi = F(x, y), \tag{1}$$

f et F étant des fonctions holomorphes quand x et y sont intérieurs à $\mathfrak{D}$; si la fonction f est d'ordre n dans $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire si l'on a

$$\left[\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^s \partial y^{p-s}}\right]_{y=x} = 0 \quad (p < n-1) \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial^{n-1} f(x, y)}{\partial y^{n-1}}\right]_{y=x} = \alpha(x),$$

$\alpha(x)$ n'étant jamais nulle quand x est dans $\mathfrak{D}$; si enfin toutes les dérivées de la fonction $F(x, y)$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus sont identiquement nulles pour $x = y$:

L'équation (1), *équivalente à l'équation*

$$\varphi(x, y)\, \alpha(y) + \int_x^y \varphi(x, \xi) \frac{\partial^n f(\xi, y)}{\partial y^n} d\xi = \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial y^n}, \tag{2}$$

admettra une solution unique, fonction holomorphe de x et y, lorsque ces variables sont contenues dans $\mathfrak{D}$.

15. Étudions enfin, comme nous l'avons annoncé, le cas où $\alpha(y)$ s'annule en certains points (forcément isolés) du domaine $\mathfrak{D}$ et où par conséquent le noyau n'est d'aucun ordre déterminé dans $\mathfrak{D}$. Soient a, b, c, ... ces différents points.

Soit un chemin allant d'un point x à un point y du domaine $\mathfrak{D}$ sans rencontrer aucun des points a, b, c, ... (*fig.* 4); d'après le résultat précédent, l'équation (1) admet une seule solution holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}'$ constitué par une *bande* entourant ce chemin. La solution $\varphi(x,y)$ de l'équation (1) est donc holomorphe toutes les fois que x et y sont tous deux différents des a, b, c, ...; c'est de plus une fonction non seulement des points x et y, mais encore du chemin d'intégration [figurant dans l'équation (1) ou dans l'équation (2)] allant de x à y; cette fonction prend pourtant la même valeur pour deux

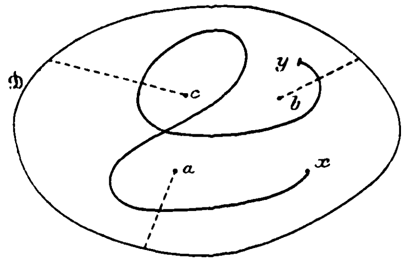

Fig. 4.

chemins qui peuvent se déduire l'un de l'autre par déformation san rencontrer aucun des points a, b, c, ...

Ainsi la fonction $\varphi(x,y)$ ne dépend du chemin adopté pour aller de x en y que par le nombre des tours que ce chemin effectue autour de a, b, c et par l'ordre dans lequel il effectue ces tours.

On pourra construire aisément, en considérant une infinité de domaines $\mathfrak{D}$ munis de coupures (lignes pointillées de la figure 4) et en réunissant les bords de ces coupures de façon convenable, une surface de Riemann simplement connexe Δ telle que $\varphi(x,y)$ soit une fonction univoque des deux points x et y de cette surface de Riemann (¹). Cette surface de Riemann aura trois infinités de points de ramification d'ordre infini respectivement projetés en a, b, c.

Notre solution $\varphi(x,y)$ sera holomorphe toutes les fois que ni x ni y

---

(¹) Le chemin d'intégration sur lequel il faut opérer pour obtenir $\varphi(x,y)$ étant précisément un chemin, d'ailleurs quelconque, allant de x en y *sur la surface de Riemann* Δ.

On pourra se borner, pour obtenir toutes les valeurs de $\varphi(x,y)$, à faire varier x sur un feuillet de cette surface Δ. Ceci implique des relations très simples auxquelles satisfait $\varphi(x,y)$.

ne coïncideront avec un de ces points de ramification. Ces points de ramification seront en général de véritables points critiques, comme il est facile de s'en assurer sur un exemple.

Soit l'équation

$$(1')\qquad \int_x^y \varphi(x,\xi)[(1-b\lambda)\xi+b\lambda y]\,d\xi=(1-b)\frac{y^2-x^2}{2}+by(y-x),$$

λ et b étant deux paramètres; son noyau $(1-b\lambda)x+b\lambda y$ est du premier ordre, sauf autour de l'origine $x=y=0$. Elle équivaut à l'équation, obtenue en la dérivant par rapport à y,

$$(2')\qquad y\,\varphi(x,y)+\lambda\int_x^y b\,\varphi(x,\xi)\,d\xi=y+b(y-x).$$

On en déduit aisément $\varphi(x,y)$, car, en dérivant une fois de plus, on a une équation différentielle ordinaire.

Il vient

$$\varphi(x,y)=\frac{1+b}{1+\lambda b}+\frac{(\lambda-1)b}{1+\lambda b}\left(\frac{x}{y}\right)^{1+\lambda b}.$$

Ainsi cette fonction admet bien en général, comme point critique par rapport à x et à y, l'origine. Ce ne sera plus le cas pour certaines valeurs de λ, par exemple $\lambda=1$: on trouve alors

$$\varphi(x,y)=1,$$

c'est-à-dire une solution holomorphe autour de $x=0$, $y=0$.

On ne se serait pas aperçu de cette holomorphie si l'on avait résolu l'équation (2′) par la méthode générale indiquée précédemment : on aurait en effet obtenu $\varphi(x,y)$ par une série, celle-là même que l'on obtient en le développant par rapport aux puissances de λ, série n'ayant pas pour termes des fonctions de x et de y holomorphes autour de l'origine.

14. Il peut donc arriver, nous venons d'en donner un exemple, que l'un des points de ramification a, b, c, ... ne soit point singulier qu'en apparence et que l'on puisse, dans la surface de Riemann Δ, supprimer les ramifications autour de ce point. *C'est ce cas que nous* *allons apprendre à caractériser.* La méthode de résolution précédemment donnée pour l'équation (1) ne peut nous être d'aucun secours, puisque (et nous en avons vu un exemple) les singularités des différents termes de la série qui définit $\varphi(x, y)$ peuvent n'avoir aucun rapport avec les singularités de $\varphi(x, y)$.

Pour que l'un des points de ramification, a par exemple, disparaisse, *il est* évidemment *nécessaire que la fonction $\varphi(x,y)$ soit holomorphe lorsque x et y sont voisins de a et que l'on va de l'un à l'autre par un chemin restant au voisinage de a.*

Cette condition sera, comme nous le verrons, assez facile à transformer. Prouvons auparavant qu'elle est suffisante. Montrons donc que, *sous cette condition*, la fonction $\varphi(x,y)$, que nous savions déjà holomorphe autour de x_0, y_0 points quelconques de Δ ne coïncidant pas avec un point de ramification, *est aussi holomorphe autour*

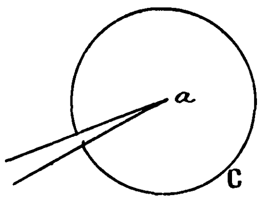

Fig. 4 *bis.*

de x_0, y_0, quand x_0, ou y_0, ou x_0 et y_0 coïncident avec l'un quelconque des points de ramification projetés en a.

Supposons en effet vérifiée la condition précédente; soit C un petit cercle tracé autour du point a sur un des feuillets de la surface de Riemann Δ, on a

$$\varphi(x, y) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\xi, y)}{\xi - x}\,d\xi = 0 \tag{3}$$

lorsque x est intérieur à ce cercle [1] et que y est assez voisin de a, le chemin utilisé pour aller de x en y restant aussi très voisin de a. Mais l'expression (3) est, au moins quand x diffère de a, fonction analytique de y dans Δ. Elle est donc identiquement nulle sur Δ. Prenons

[1] Nous entendons par intérieur un point projeté à l'intérieur de C, et situé sur le même feuillet de la surface de Riemann Δ.

alors un point y_0 quelconque (1) de Δ et traçons autour de lui un petit cercle Γ; on a

$$\varphi(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta - y}\,d\eta,$$

y étant un point intérieur (2) à T. D'où, grâce à l'égalité (3),

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{(\xi - x)(\eta - y)}$$

qui prouve l'holomorphie de $\varphi(x, y)$ autour de $x = a$, $y = y_0$.

En échangeant le rôle de x et de y et en envisageant

$$\varphi(x, y) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta - y}\,d\eta, \tag{4}$$

on prouvera de même l'holomorphie autour de x_0, a.

Reste enfin à prouver la même propriété autour d'un point $x = a$, $y = a$. Pour qu'il y ait lieu à démonstration, il faut que le chemin qui va de x voisin de a à y voisin de a ne reste pas constamment voisin

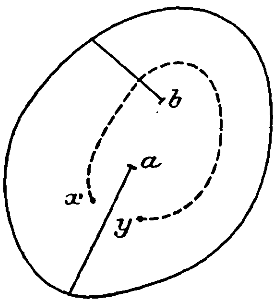

Fig. 4 *ter*.

de a, mais entoure les autres points de ramification; tourne par exemple autour de b. On a toujours l'équation (3), et comme ξ est toujours différent de a, on a aussi

$$\varphi(\xi, y) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\eta - y}\,d\eta = 0 \quad (3);$$

(1) Qui ne soit pas un point a, b, c, ...

(2) Sur le même feuillet de Δ.

(3) C_1 étant un cercle analogue à C, mais tracé sur un feuillet différent.

d'où, comme plus haut,

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C}\int_{C_1}\frac{\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{(\xi - x)(\eta - y)}.$$

La condition nécessaire, précédemment posée, est suffisante. Si cette condition est vérifiée par le point b, on pourrait supprimer aussi les ramifications autour de b, etc. Reste à faire l'étude de cette condition.

15. Soit donc l'équation

$$(1)\qquad \int_{x}^{y}\varphi(x, \xi)f(\xi, y)\,d\xi = F(x, y),$$

$f(x,y)$ et $F(x,y)$ étant analytiques autour du point a, que nous prendrons comme origine pour simplifier. Il faut chercher quand cette équation admet une solution $\varphi(x, y)$ analytique autour de l'origine (le chemin d'intégration étant, pour fixer les idées, la droite qui joint x à y).

Nous chercherons d'abord, sans nous préoccuper de sa convergence, un développement

$$(5)\qquad \varphi(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{p}\sum_{0}^{\infty}{}_{q}\, c_{p,q}\, x^p y^q$$

vérifiant formellement l'équation (1). Un développement de la forme précédente peut toujours s'écrire, et d'une façon unique,

$$(6)\qquad \varphi(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{(y - x)^n}{n!}\varphi^{(n)}(x) \quad (^1),$$

les $\varphi^{(n)}(x)$ étant des séries des puissances de x définies par les équations symboliques

$$\varphi^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n \varphi(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x}.$$

Quand on y remplace $\varphi(x,y)$ par la série (6), le premier membre

---

(1) Et inversement d'ailleurs. Il y a identité formelle complète entre les développements (5) et (6).

de l'équation (6) devient (comme le second) une série des puissances de x et de y; ces deux séries doivent être identiques : il suffira pour exprimer ce fait d'écrire que leurs dérivées par rapport à y sont toutes nulles pour $y = x$.

En posant

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x}, \qquad \mathrm{F}^{(n)}(x) = \left[\frac{\partial^n \mathrm{F}(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x},$$

on peut donc remplacer l'équation (1) par le système ([1])

$$(1') \quad \sum_i^p \sum_s^i \mathrm{C}_i^s \varphi^{(s)}(x) \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}} f^{(p-i)}(x) = \mathrm{F}^{(p+1)}(x) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty);$$

si nous admettons que la première fonction $f^{(n)}(x)$ non nulle soit la fonction $f^{(a)}(x)$ ([2]), forcément la première fonction $\mathrm{F}^{(n)}(x)$ non identiquement nulle correspond à $n \geq a + 1$ (*cf.* le n° **11**, p. 18). Nous supposerons par exemple qu'elle corresponde à

$$n = a + b + 1,$$

b entier positif ou nul.

Alors les équations (1′) donnent

$$\varphi^{(0)}(x) = \varphi^{(1)}(x) = \ldots = \varphi^{(b-1)}(x)$$

et elles déterminent univoquement les $\varphi^{(n)}(x)$ successifs sous la forme

$$(1'') \qquad \varphi^{b+\mu}(x) = \frac{\mathfrak{P}_{b+\mu}(\mathrm{F}, f)}{[f^{(a)}(x)]^{\mu+1}},$$

les $\mathfrak{P}_{b+\mu}(\mathrm{F}, f)$ étant des polynomes, faciles à former, d'un certain nombre des quantités $\mathrm{F}^{(n)}$ et $f^{(n)}$ et de leurs dérivées.

Les $\varphi^{(n)}(x)$ sont ainsi déterminés, et ici deux cas se présentent :

1° $f(x, y)$ est, autour de l'origine, d'un ordre déterminé. C'est le

---

([1]) Chacune des équations de ce système est obtenue, comme nous l'avons dit, en dérivant $p+1$ fois l'équation (1) par rapport à y, puis en y faisant $y = x$. Les C_i^s sont les coefficients du binome.

([2]) Nous l'avons nommée précédemment $f^{(n-1)}(x)$ ou $\alpha(x)$.

cas où la série des puissances de x qui exprime

$$f^{(a)}(x)$$

commence par un terme constant; l'ordre de $f(x, y)$ est forcément $a+1$. Les $\varphi^{(b+\mu)}(x)$ obtenus précédemment sont des séries entières en x. Il y a donc une série et une seule

$$\Sigma(y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \Sigma\Sigma c_{pq} x^p y^q$$

vérifiant l'équation (1). Cette série converge autour de l'origine et représente la solution holomorphe de l'équation (1), solution que nous avons déjà montrée exister et être unique.

2° $f(x, y)$ n'est pas, autour de l'origine, d'un ordre déterminé. C'est le cas que nous sommes en train d'étudier. $f^{(a)}(x)$ n'a pas alors de terme constant et les $\varphi^{(b+\mu)}(x)$ donnés par les formules précédentes ne sont pas des séries entières de (x), mais ont en général un certain nombre de termes de degré négatif en x. *Il n'y a pas, en général*, de développement du type cherché

$$(7) \qquad \Sigma(y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \Sigma\Sigma c_{pq} x^p y^q$$

vérifiant formellement l'équation (1). Il n'y a pas, *a fortiori*, de solution holomorphe de l'équation (1).

Les cas particuliers où il existe, autour de $x=0$, $y=0$, une solution holomorphe de l'équation (1), devront d'abord être tels qu'il existe un développement de type (7) vérifiant formellement l'équation (1). C'est facile à reconnaître, au moins théoriquement : il suffit de vérifier que, dans les formules (1″) donnant les $\varphi^{(n)}(x)$, se produisent des réductions telles que les termes de degré négatif en x disparaissent.

Nous allons compléter ce résultat par le suivant, qui permet de répondre entièrement au problème posé au début de ce numéro :

S'il existe un développement tel que (7) *vérifiant formellement l'équation* (1), *ce développement converge et représente une fonction de x et de y solution de l'équation* (1).

Soit en effet

$$(7) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\,(y-x)^{n}\,\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}$$

ce développement. Les $\varphi^{(n)}(x)$ sont, d'après les formules (1″), des fonctions de x holomorphes dans un certain cercle C de rayon R tracé autour de l'origine (*fig.* 5). De plus, l'origine étant un zéro

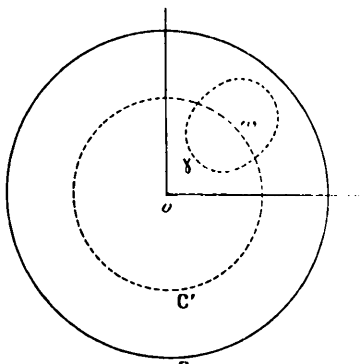

Fig. 5.

isolé de $f^{(n)}(x)$, dans le voisinage d'un point quelconque ω d'une circonférence C′ d'un rayon $R' < R$, on se trouve dans le cas 1° : la série (7) converge et représente une fonction analytique $\varphi(x, y)$ quand x et y sont contenus dans un petit cercle γ de rayon r et de centre ω. Si M est le maximum fini de $|\varphi(x,y)|$ dans tous ces petits cercles, la série

$$\Sigma (y-\omega)^{n}\,\frac{\varphi^{(n)}(\omega)}{n!}$$

est majorée par

$$\frac{M}{1-\dfrac{y-\omega}{r}},$$

c'est-à-dire que

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(\omega)}{n!}\right| < \frac{M}{r^{n}}$$

pour tout cercle γ.

Sur la circonférence C′ on a donc

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{M}{r^{n}},$$

et, dans C', la fonction analytique $\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}$ est donc majorée par

$$\frac{M}{r^n}\frac{1}{1-\frac{x}{R'}}$$

et la série double

$$\sum (y-x)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \sum\sum c_{pq} x^p y^q$$

est majorée par la série

$$\sum \frac{(y+x)^n M}{r^n\left(1-\frac{x}{R'}\right)} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R'}\right)\left(1-\frac{x+y}{r}\right)},$$

qui est bien convergente si x et y sont assez petits.

Ainsi, pour reconnaître si l'équation (1) admet dans le domaine $x=0$, $y=0$, une solution analytique, il suffira de vérifier, comme nous l'avons dit, qu'elle est satisfaite par une série de forme (7). Cette vérification nécessite en général, il fallait bien s'y attendre, une infinité dénombrable de calculs. Nous trouverons, ce sera justement une application de la théorie des fonctions permutables, des cas dans lesquels on pourra affirmer *a priori* l'existence de telles solutions (1).

16. L'étude des fonctions permutables nous conduira à envisager une équation, elle aussi formée à partir de la fonction inconnue et des fonctions connues par des additions et des compositions, et qui pourtant n'est pas du type simple traité aux paragraphes I et II.

Le problème fondamental de cette théorie est en effet le suivant : *Trouver les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec une fonction donnée $f(x, y)$.* Il conduit à résoudre l'équation

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x,\xi)\,f(\xi,y)\,d\xi,$$

par rapport à l'inconnue $\varphi(x, y)$. Il faudra ensuite étudier les propriétés des solutions $\varphi(x, y)$.

---

(1) *Cf.* Chapitre IV, n° **10**, p. 81.

L'équation (1) du paragraphe III est plus simple que l'équation (A); sa théorie était nécessaire pour faire celle de l'équation (A). Mais nous verrons inversement que de la théorie de l'équation (A) on peut tirer des conséquences intéressantes relatives à certaines équations (1) (*cf.* fin du n° **15**). Enfin entre les équations (1) et (A) nous verrons se développer certaines différences qui, convenablement interprétées, conduisent à classer [1] les équations qui, dans cette théorie, jouent le rôle des équations algébriques, c'est-à-dire les équations formées à partir de la fonction inconnue et des fonctions connues par additions et compositions.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS PERMUTABLES AVEC UNE FONCTION D'ORDRE DONNÉ : LEUR RECHERCHE PAR LA MÉTHODE DE M. VOLTERRA.

I. — Les fonctions permutables avec une fonction du premier ordre.

1. Le problème fondamental de la théorie des fonctions permutables est celui que nous avons déjà posé au Chapitre précédent (n° **16**) :

Trouver toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ *permutables avec une fonction donnée* $f(x, y)$.

Ce problème a été résolu par M. Volterra quand la fonction donnée est d'ordre 1 [2] et d'ordre 2 [3]. Notre but, dans ce Chapitre, sera d'étendre sa méthode a une fonction donnée d'ordre n. Mais, auparavant, nous exposerons la démonstration donnée par M. Volterra pour $n = 1$.

2. Soit donc $f(x, y)$ une fonction finie et continue [4] dans un

---

(1) *Cf.* Chapitre IV, Conclusion.

(2) *Sopra le funzioni permutabili* (*Rend. dei Lincei*, 17 avril 1910).

(3) *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (*Rend. dei Lincei*, 1er semestre 1911, p. 296).

(4) Nous aurons à faire plus tard quelques hypothèses sur ses dérivées.

domaine du plan des (x, y)

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

et du premier ordre, c'est-à-dire telle que

$$f(x, x) \lessgtr 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq a.$$

Recherchons les fonctions permutables avec elle, finies et continues dans le même domaine.

Le problème posé revient à la résolution de l'équation

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\,d\xi.$$

3. M. Volterra simplifie sa résolution par deux transformations, qui ne sont d'ailleurs pas essentielles, et qui permettent de ramener le problème au cas où

$$f(x, x) = 1,$$
$$\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right]_{x=y} = -\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]_{x=y} = 0.$$

Faisons le changement de variable

$$(2) \qquad x = g(x_1), \qquad y = g(y_1), \qquad \xi = g(\xi_1),$$

la dérivée $g'(x_1)$ étant toujours positive, de sorte que ces relations soient inversables. L'équation (A) devient

$$\text{(A')} \quad \int_{x_1}^{y_1} f(x_1, \xi_1)\,\varphi(\xi_1, y_1)\,g'(\xi_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \varphi(x_1, \xi_1) f(\xi_1, y_1)\,g'(\xi_1)\,d\xi_1,$$

en désignant par la notation $f(x_1, \xi_1)$ ce que devient $f(x, y)$ quand on y fait le changement de variables (2). En posant

$$f_1(x_1, \xi_1) = \pm f(x_1, \xi_1)\sqrt{g'(x_1)\,g'(\xi_1)},$$
$$\varphi_1(x_1, \xi_1) = \pm \varphi(x_1, \xi_1)\sqrt{g'(x_1)\,g'(\xi_1)},$$

l'équation (A') devient

$$\text{(A'')} \qquad \int_{x_1}^{y_1} f_1(x_1, \xi_1)\,\varphi_1(\xi_1, y_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \varphi_1(x_1, \xi_1) f_1(\xi_1, y_1)\,d\xi_1.$$

Le problème posé est ainsi ramené à la détermination des fonctions permutables avec $f_1(x_1, y_1)$. Mais on peut réaliser

$$f_1(x_1, x_1) = 1;$$

il suffit de prendre

$$1 = \pm f(x, x)\, g'(x_1),$$

c'est-à-dire

$$x_1 = \pm \int f(x, x)\, dx.$$

relation qui est bien inversable d'après l'hypothèse précédente : la fonction $f(x, y)$ est du premier ordre.

La transformation

$$f_2(x_1, y_1) = f_1(x_1, y_1)\frac{\alpha(x_1)}{\alpha(y_1)},$$

$$\varphi_2(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)\frac{\alpha(x_1)}{\alpha(y_1)},$$

la fonction $\alpha(x_1)$ étant toujours différente de zéro, laisse aussi invariante l'équation (A″). Tout revient finalement à trouver les fonctions permutables avec $f_2(x_1, y_1)$; or on a

$$f_2(x_1, x_1) = 1,$$

et l'on peut disposer de l'arbitraire $\alpha(x_1)$ de façon que

$$\left[\frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial x_1}\right]_{y_1 = x_1} = -\left[\frac{\partial f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1}\right]_{y_1 = x_1} = 0.$$

Il suffit de prendre

$$\alpha(x_1) = e^{-\int \left[\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x_1}\right]_{y_1 = x_1} dx_1}.$$

4. Plaçons-nous donc dans le cas où la fonction $f(x, y)$ vérifie les conditions

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f(x, x) = 1, \\ & \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right]_{y = x} = -\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]_{y = x} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons de plus que $f(x, y)$ admette des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre 3 inclus ([1]). L'artifice de M. Volterra consiste alors à remplacer l'inconnue $\varphi\,(x, y)$ par une inconnue auxiliaire $\Phi\,(x, y)$ telle que

$$\text{(A)}\qquad \Phi(x,y)=\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \varphi(x,\xi)\,f(\xi,y)\,d\xi.$$

Pour éliminer φ entre les deux relations ainsi obtenues il suffit de résoudre, comme nous l'avons appris au Chapitre I, deux équations de Volterra de première espèce; il vient

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{dx} = -\,\varphi(x,y)+\displaystyle\int_x^y \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial x}\,\varphi(\xi,y)\,d\xi, \\[2ex] \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \quad\varphi(x,y)+\displaystyle\int_x^y \varphi(x,\xi)\,\frac{\partial f(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi; \end{cases}$$

d'où, en posant

$$f_1(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\qquad f_2(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

et

$$F_1(x,y)=f_1(x,y)+\overset{*}{f}{}_1^2(x,y)+\ldots+\overset{*}{f}{}_1^n(x,y)+\ldots,$$

$$F_2(x,y)=f_2(x,y)-\overset{*}{f}{}_2^2(x,y)+\ldots+(-1)^{n-1}\overset{*}{f}{}_2^n(x,y)+\ldots,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi(x,y)=-\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}-\displaystyle\int_x^y F_1(x,\xi)\,\frac{\partial\Phi(\xi,y)}{\partial\xi}\,d\xi, \\[2ex] \varphi(x,y)=\quad\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}-\displaystyle\int_x^y \frac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi}\,F_2(\xi,y)\,d\xi. \end{cases}$$

Le résultat de l'élimination est donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\int_x^y\left[F_1(x,\xi)\,\frac{\partial\Phi(\xi,y)}{\partial\xi}-\frac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi}\,F_2(\xi,y)\right]d\xi=0$$

([1]) Cette hypothèse, qui est aussi indispensable que celle de l'existence des premières dérivées du noyau dans la théorie de l'équation de Volterra de première espèce, se conserve à travers les changements de variables du numéro précédent.

ou, en intégrant par parties et posant

$$g_{12}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{F}_2(x,y),\qquad g_{21}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{F}_1(x,y),$$

$$(\mathrm{A}')\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\int_x^y[\Phi(x,\xi)\,g_{12}(\xi,y)-g_{21}(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)]\,d\xi=0,$$

car la seconde des relations (1) entraîne

$$\mathrm{F}_1(x,x)=\mathrm{F}_2(x,x)=0.$$

On a de plus $\Phi(x, x)=0$, et il est bien aisé de voir qu'inversement, toute solution de l'équation (A′), vérifiant cette condition, donnera, par l'une quelconque des formules (4), une des fonctions $\varphi(x, y)$ cherchées.

5. Reste donc à résoudre l'équation (A′) sous la condition $\Phi(x, x)=0$; c'est une équation intégro-différentielle facile à réduire à une équation intégrale. Soit en effet l'équation

$$(e)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\lambda(x,y)=0;$$

en y posant $u=\frac{y-x}{2}$, $v=\frac{y+x}{2}$, elle devient

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}+\lambda(x,y)=0,$$

et elle admet, si $\lambda(x, y)$ a des dérivées premières [1], la solution

$$(e')\qquad \psi(x,y)=\theta(u)-\int_u^v\lambda(\zeta-u,\zeta+u)\,d\zeta,$$

$\theta(u)$ étant une fonction arbitraire ayant une dérivée première.

En nommant un instant $\lambda(x, y)$ l'intégrale qui figure dans l'équa-

---

[1] Cette existence des dérivées premières est nécessaire pour que $\psi(x, y)$, donnée par la formule (e'), ait des dérivées premières.

tion (A′) (¹), il est alors immédiat que nous pouvons remplacer cette équation (A′) par

$$(\mathrm{B})\quad \Phi(x,y) = \theta(u) - \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi\,[\Phi(\zeta-u,\xi)\,g_{12}(\xi,\zeta+u) - g_{21}(\zeta-u,\xi)\;\Phi(\xi,\zeta+u)],$$

dont il faut trouver la solution ayant des dérivées premières, $\theta(u)$ étant une fonction arbitraire finie, continue et dérivable dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq \frac{a}{2}$ $\Big[$pour $u = v$, c'est-à-dire pour $x = 0$, on doit avoir en effet $\Phi(x, y) = \theta\left(\frac{y}{2}\right)\Big]$ et telle que $\theta(0) = 0$ [ceci pour que $\Phi(x, x)$ soit nul].

M. Volterra résout cette équation par approximations successives. Elle admet une solution et une seule (²) donnée par la formule

$$(5)\qquad \Phi(x,y) = \sum_0^\infty{}_n\, \Phi_n(x,y)$$

avec

$$\Phi_0(x,y) = \theta(u),$$

$$(6)\quad \Phi_n(x,y) = -\int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi\,[\;\Phi_{n-1}(\zeta-u,\xi)\;\; g_{12}(\xi,\zeta+u) - g_{21}(\zeta-u,\xi)\,\Phi_{n-1}(\xi,\zeta+u)]\,.$$

Il est essentiel de vérifier que les approximations successives sont bien définies dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

dans lequel nous nous sommes placés. Il suffit de vérifier que

$$0 \leqq \zeta - u \leqq \zeta + u \leqq a,$$

mais c'est évident, car

$$\zeta + u - (\zeta - u) = y - x \geqq 0$$

et

$$0 \leqq \zeta - u \leqq x, \qquad y - x \leqq \zeta + u \leqq y.$$

(¹) Cette fonction $\lambda(x, y)$ a bien des dérivées premières, puisque $\Phi(x, y)$ en a, et aussi g_{12} et g_{21}, d'après l'existence des dérivées troisièmes de $f(x, y)$.

(²) L'unicité se démontre comme pour l'équation de Volterra de deuxième espèce.

La convergence de la série (5), et par conséquent l'existence de la série Φ, est alors immédiate : soient N une borne supérieure des modules de g_{12} et de g_{21} dans le domaine, et M une borne supérieure du module de $\Phi_0(x, y)$, on constate que

$$|\Phi_n(x, y)| < 2^n M N^n a^n \frac{|y-x|^n}{n!}.$$

Il faut encore vérifier, et c'est essentiel, l'existence des dérivées premières de $\Phi(x, y)$. Prenons, pour le faire, comme variables u et v. Les différents termes de la série (5) qui définit $\Phi(x, y)$ sont dérivables puisque θ, g_{12}, g_{21} le sont. Comme on a

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial v} = -\int_{v-u}^{v+u} [\Phi_{n-1}(v-u, \xi) g_{12}(\xi, v+u) - \ldots] \, d\xi,$$

la convergence de la série

$$\sum \frac{\partial \Phi_n}{\partial v},$$

et par conséquent l'existence de $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, résulte la convergence de la série (5).

Posons $\frac{\partial \Phi_n}{\partial u} = \Phi'_n$; reste à prouver la convergence de la série $\Sigma \Phi'_n$. Or, en dérivant la formule de récurrence (6) par rapport à u et en remplaçant les dérivées de Φ_{n-1} par rapport à x et à y qui s'introduisent par des dérivées prises par rapport à u et à v, en remplaçant enfin $\frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial v}$ par sa valeur en fonction de Φ_{n-2} obtenue précédemment, on obtient

$$(7) \quad \Phi'_n(x, y) = -\frac{1}{2} \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} d\xi [\Phi'_{n-1}(\zeta-u, \xi) \, g_{12}(\xi, \zeta+u) \\ - g_{21}(\zeta-u, \xi) \, \Phi'_{n-1}(\xi, \zeta+u)] + A,$$

A désignant des termes formés à partir de Φ_{n-1} et Φ_{n-2} par des intégrations; termes dont une limite supérieure du module est

$$K(2Na)^{n-1} \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

K étant un nombre convenablement choisi. On en déduit, en nommant P une limite supérieure de $\Phi'_1(x, y)$, que

$$|\Phi'_n(x, y)| < [(n-1)K + P](2Na)^{n-1}\frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

d'où résulte la convergence de la série $\Sigma\Phi'_n$.

Nous avons ainsi trouvé toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$ et finies et continues dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a.$$

Elles dépendent d'une fonction arbitraire dérivable

$$\theta\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

définie dans le même domaine et telle que $\theta(0)$ soit nul.

M. Volterra les met sous une forme qui montre clairement la façon dont elles dépendent de l'arbitraire θ; il pose

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\, d\eta$$

et constate que (¹)

$$\Phi(x, y) = \int_0^{y-x} \psi(\eta)\, K(\eta \mid x, y)\, d\eta,$$

$K(\eta \mid x, y)$ étant une fonction définie pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a, \qquad 0 \leqq \eta \leqq y - x,$$

d'ailleurs solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} K(\eta \mid x, y) = 1 + \int_u^{v} d\zeta \int_\eta^{2u} [&K(\eta \mid \zeta + u - \xi, \zeta + u)\, g_{21}(\zeta - u, \zeta + u - \xi) \\ &- g_{12}(\xi + \zeta - u, \zeta + u)\, K(\eta \mid \zeta - u, \xi + \zeta - u)]\, d\xi; \end{aligned}$$

en tirant alors la valeur de $\varphi(x, y)$ de la seconde des relations (4), on trouve

$$(\alpha) \qquad \varphi(x, y) = \psi(y - x) + \int_0^{y-x} \psi(\eta)\, H(\eta \mid x, y)\, d\eta$$

(¹) Il met sous cette forme les fonctions Φ_n successives.

avec

$$H(\eta \mid x, y) = K'_y(\eta \mid x, y) + \int_{\eta}^{y-x} K(\eta \mid x, \xi + x)\, g_{12}(\xi + x, y)\, d\xi.$$

Grâce à cette formule (α), M. Vessiot a démontré (¹) une propriété importante des fonctions permutables : *Toutes les fonctions permutables avec la fonction $f(x, y)$ sont permutables entre elles.* Nous aurons l'occasion de retrouver, par une voie différente, cette proposition (²).

Remarquons enfin que l'on peut se donner, pour déterminer la fonction arbitraire $\psi(y - x)$, la valeur de la fonction $\varphi(x, y)$ pour $x = 0$. Il viendra, en effet, pour déterminer cette fonction arbitraire, l'équation, facile à résoudre,

$$\varphi(0, y) = \psi(y) + \int_0^y \psi(\eta)\, H(\eta \mid 0, y)\, d\eta.$$

Comme la formule (α) exprime toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$, il est clair que ces fonctions peuvent être caractérisées par leurs valeurs en $x = 0$. On pourra d'ailleurs les mettre sous la forme

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, y - x) + \int_0^{y-x} \varphi(0, \eta)\, L(\eta \mid x, y)\, d\eta,$$

$L(\eta \mid x, y)$ étant une fonction facile à former à partir de $H(\eta \mid x, y)$.

II. — Les fonctions permutables avec une fonction d'ordre n.

6. M. Volterra a traité de même (³) le problème de la recherche des fonctions permutables avec une fonction du second ordre. La méthode du paragraphe précédent s'étend sans modifications essentielles : des difficultés se présentent, au contraire, si l'on veut, comme je vais le faire dans ce paragraphe, passer au cas d'une fonction d'ordre n quelconque. Il faut, et le lecteur comprendra plus loin la

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 154, 1912, p. 682.
(²) Chapitre IV, n° 16.
(³) *Rend. dei Lincei*, 1er semestre 1911, p. 296.

raison de cette restriction, se limiter au cas où la fonction donnée est analytique et où l'on recherche les fonctions analytiques permutables avec elle.

Soit $f(x, y)$ une fonction donnée, analytique, holomorphe dans un domaine autour de $x = 0$, $y = 0$, par exemple

$$(8) \qquad |x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R \quad (^1),$$

et d'ordre $(n+1)$, c'est-à-dire telle que

$$\left[\frac{\partial^p f(x,y)}{\partial x^s \, \partial y^{p-s}}\right]_{y=x} = 0 \qquad (\text{pour } p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

et que

$$\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right]_{y=x} = -\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^{n-1}\, \partial x}\right]_{y=x} = \ldots = (-1)^n \left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\right]_{y=x} = \alpha(x),$$

$\alpha(x)$ ne s'annulant pas dans et sur le cercle de rayon R. En effectuant les deux transformations précédentes (§ I, n° 3), nous pourrons toujours supposer (en remplaçant au besoin R par un nombre plus petit) que

$$\alpha(x) = 1,$$

et que les dérivées $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de $f(x, y)$ sont nulles pour $x = y$ (²).

Cherchons à déterminer toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes dans le domaine (8) et permutables avec $f(x, y)$. Nous prendrons comme précédemment l'inconnue auxiliaire

$$\Phi(x,y) = \int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \varphi(x,\xi) f(\xi,y)\,d\xi,$$

qui est, en même temps que $\varphi(x, y)$, une fonction holomorphe dans le domaine (8) (³). On a, d'après les conditions imposées à $f(x, y)$,

$$\left[\frac{\partial^p \Phi}{\partial x^s \, \partial y^{p-s}}\right]_{y=x} = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots, n)$$

(¹) Ou dans tout autre domaine entourant un point de la multiplicité $x = y$.

(²) C'est ici qu'intervient l'hypothèse que $f(x, y)$ est d'un ordre déterminé, pour que ces changements de variables soient réguliers autour de $x = y = 0$. Nous revenons au Chapitre suivant, n° **1**, sur ces changements de variables.

(³) *Cf.* Chapitre I, n° **12**.

et

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial x^{n+1}} = (-1)^{n-1}\varphi(x,y) + \int_x^y \frac{\partial^{n+1} f(x,\xi)}{\partial x^{n+1}}\varphi(\xi,y)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial y^{n+1}} = \varphi(x,y) + \int_x^y \varphi(x,\xi)\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial y^{n+1}}\,d\xi,$$

d'où, en résolvant ces dernières équations

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(x,y) = (-1)^{n+1}\dfrac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial x^{n+1}} + \displaystyle\int_x^y \mathrm{H}(x,\xi)\frac{\partial^{n+1}\Phi(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}\,d\xi, \\ \varphi(x,y) = \dfrac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial y^{n+1}} + \displaystyle\int_x^y \frac{\partial^{n+1}\Phi(x,\xi)}{\partial \xi^{n+1}}\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi. \end{cases}$$

On en conclut que $\Phi(x,y)$ est une fonction holomorphe dans (8), vérifiant une équation intégro-différentielle qui peut s'écrire

$$(a)\qquad \frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi(x,y)}{\partial x^{n+1}} + \int_x^y \left[h(x,\xi)\frac{\partial^n\Phi(\xi,y)}{\partial\xi^n} - \frac{\partial^n\Phi(x,\xi)}{\partial\xi^n}k(\xi,y)\right]d\xi = 0$$

[$h(x,y)$ et $k(x,y)$ étant des fonctions connues holomorphes dans le domaine (8)] et vérifiant aussi les conditions

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{\partial^p\Phi}{\partial x^s\,\partial y^{p-s}}\right)_{y=x} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Inversement toute solution $\Phi(x,y)$ de l'équation (a) sous les conditions (α), fonction holomorphe de x et y dans le domaine (8), conduit, par application de l'une quelconque des formules (9), à une fonction $\varphi(x,y)$ répondant à la question : la recherche des fonctions $\varphi(x,y)$ est entièrement équivalente à celle des fonctions $\Phi(x,y)$.

7. Reste donc à résoudre l'équation (a) sous les conditions (α). Ici commencent les difficultés.

Supposons d'abord $n = 1$ (la fonction donnée $f(x,y)$ est du deuxième ordre). L'équation (a) s'écrit

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \int_x^y \left[h(x,\xi)\frac{\partial\Phi(\xi,y)}{\partial\xi} - \frac{\partial\Phi(x,\xi)}{\partial\xi}k(\xi,y)\right]d\xi = 0$$

ou, par une nouvelle intégration par parties,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + [h(x, x) - k(y, y)]\Phi(x, y)$$
$$+\int_x^y [h'(x, \xi)\Phi(\xi, y) - \Phi(x, \xi)k'(\xi, y)]\, d\xi = 0.$$

On peut alors, utilisant une formule qui donne la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \lambda(x, y) = 0,$$

sous les conditions (α)

$$\Phi(x, x) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi(x, x)}{\partial x} = 0,$$

transformer l'équation (a) en une équation *intégrale* qui se résout, comme l'équation (B) du paragraphe I, par approximations successives ([1]).

Mais, si n est plus grand que 1, il est impossible d'amener l'équation (a) à ne plus contenir, comme dérivées de Φ, que les deux termes

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi(x, y)}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi(x, y)}{\partial x^{n+1}},$$

de sorte qu'on ne pourra plus, par le procédé employé par M. Volterra pour $n = 0$ et $n = 1$, remplacer l'équation *intégro-différentielle* (a) par une équation *intégrale*. Nous pouvons néanmoins chercher à nous prévaloir de la solution de l'équation

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = \lambda(x, y)$$

sous les conditions (α) pour transformer cette équation (a).

([1]) Pour le détail des calculs, *cf.* Volterra, *loc. cit.*, p. 38. L'hypothèse de l'analyticité n'est pas nécessaire; il suffit, comme dans le cas de $n = 0$, d'admettre l'existence des dérivées de $f(x, y)$ jusqu'à un certain ordre. Il faut aussi admettre l'existence des premières dérivées des fonctions $\varphi(x, y)$ qu'on cherche.

8. Ouvrant une parenthèse, nous allons donc résoudre l'équation

$$(a') \qquad \frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = \lambda(x, y)$$

sous les conditions (α)

$$\left(\frac{\partial^p\Phi}{\partial x^{p-s}\,\partial y^s}\right)_{y=x} = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

C'est un problème aux limites du type Cauchy pour une équation qui a des caractéristiques imaginaires (au moins dès que $n > 1$). Aussi sommes-nous obligés de supposer $\lambda(x, y)$ analytique et de nous limiter à la recherche des solutions analytiques de (a') [1]. C'est ce que nous ferons désormais.

L'équation (a') peut s'écrire symboliquement

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - m_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - m_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y} - m_n\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi = \lambda(x, y),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant les racines $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité autres que l'unité changées de signe. Ce sont donc des nombres tous différents et différents de -1. En y faisant le changement de variable déjà utilisé au paragraphe I,

$$u = \frac{y - x}{2}, \qquad v = \frac{y + x}{2} \qquad (y = u + v,\ x = v - u),$$

elle devient

$$(a'') \quad k\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_n\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi = \mu(u, v),$$

k étant un coefficient constant et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n nombres tous différents et faciles à déduire des $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Il faut trouver

---

(1) Cette apparition d'une équation à caractéristiques imaginaires est la difficulté la plus grave que nous rencontrions dans cette étude. Si $n = 1$, la difficulté ne se présentait pas et c'est pourquoi M. Volterra a pu faire l'étude des fonctions permutables avec une fonction du second ordre sans supposer cette fonction analytique.

une solution de cette équation, nulle pour $u=0$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n (et il suffit évidemment d'envisager les dérivées par rapport à u).

Mais la solution générale de l'équation (a'') est, si $\psi(u, v)$ est une solution particulière,

$$\psi(u, v)+\varpi_0(u)+\varpi_1(v+\alpha_1 u)+\varpi_2(v+\alpha_2 u)+\ldots+\varpi_n(v+\alpha_n u),$$

$\varpi_0, \varpi_1, \ldots, \varpi_n$ étant des fonctions analytiques arbitraires. Il est aisé d'en déduire qu'il existe une infinité de solutions de (a''), nulles ainsi que leurs dérivées d'ordre $(n-1)$ inclus, pour $u=0$. Ces solutions ont la forme

$$\psi_1(u, v)+\varpi_0(u),$$

$\psi_1(u, v)$ étant l'une d'elles et $\varpi_0(u)$ une fonction arbitraire de u nulle, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ inclus pour $u=0$.

Il est aisé de donner une expression très simple de $\psi_1(u, v)$: soient N_i les nombres définis par la décomposition en éléments simples

$$(10)\qquad \frac{1}{k(U-\alpha_1 V)(U-\alpha_2 V)\ldots(U-\alpha_n V)}=\frac{1}{V^{n-1}}\sum_{1}^{n}{}_i\frac{N_i}{U-\alpha_i V};$$

ils vérifient les relations

$$(11)\quad \sum_{1}^{n}{}_i N_i=0,\quad \sum_{1}^{n}{}_i N_i\alpha_i=0,\quad \ldots,\quad \sum_{1}^{n}{}_i N_i\alpha_i^{n-2}=0,\quad \sum_{1}^{n}{}_i N_i\alpha_i^{n-1}\neq 0.$$

Posons

$$M(u, v)=\int_0^v d\xi_1\int_0^{\xi_1} d\xi_2\ldots\int_0^{\xi_{n-1}} d\xi_n\,\mu(u, \xi_n),$$

nous pouvons prendre

$$\psi_1(u, v)=\sum_{1}^{n}{}_i N_i\int_0^u d\eta\, M[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)].$$

C'est bien une solution de l'équation (a'') car si l'on forme $\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_i\frac{\partial}{\partial v}\right)$

de l'intégrale coefficient de N_i on trouve $M(u, v)$. On a donc

$$k\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_n\frac{\partial}{\partial v}\right)\psi_1$$
$$=k\frac{\partial}{\partial v}\sum_1^n {}_i N_i\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_1\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_{i-1}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial u}-\alpha_n\frac{\partial}{\partial v}\right)M(u, v$$

ou, en vertu de l'égalité (10),

$$=\frac{\partial^n}{\partial v^n}M(u, v)=\mu(u, v).$$

D'autre part, on a

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u}&=\sum N_i M(u, v)+\sum_1^n {}_i N_i\alpha_i\int_0^u d\eta\, M'[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)].\\
\frac{\partial^2\psi_1(u, v)}{\partial u^2}&=M'(u, v)\Sigma N_i\alpha_i+\Sigma N_i\alpha_i^2\int_0^u d\eta\, M''[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\frac{\partial^{n-1}\psi_1(u, v)}{\partial u^{n-1}}&=M^{(n-2)}(u, v)\,\Sigma N_i\alpha_i^{n-2}+\Sigma N_i\alpha_i^{n-1}\int_0^u d\eta\, M^{(n-1)}[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)],\\
\frac{\partial^n\psi_1(u, v)}{\partial u^n}&=M^{(n-1)}(u, v)\,\Sigma N_i\alpha_i^{n-1}+\Sigma N_i\alpha_i^n\int_0^u d\eta\, M^{(n)}[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)],
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$M^{(p)}(u, v)=\frac{\partial^p}{\partial v^p}M(u, v),$$

de sorte que

$$M^{(n-1)}(u, v)=\int_0^v \mu(u, \xi)\,d\xi,\qquad M^{(n)}(u, v)=\mu(u, v).$$

Des relations (11) et des premières relations (12) on déduit que, pour $u=0$, les $(n-1)$ dérivées de ψ_1 par rapport à u, et par conséquent aussi toutes les dérivées de ψ_1 jusqu'à l'ordre $(n-1)$, sont nulles.

Mais nous désirons les solutions de l'équation (a'') nulles, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclus. Il faut pour cela, d'après la dernière des formules (12), que

$$M^{(n-1)}(o, v) = \int_0^v \mu(o, \xi)\, d\xi = o,$$

ce qui entraîne

$$\mu(o, v) = o.$$

Sous cette condition il y aura une infinité de solutions du type cherché, de forme

$$(13) \qquad \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta\, M[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)] + \varpi(u),$$

$\varpi(u)$ étant une fonction arbitraire assujettie seulement à être nulle, ainsi que ses n premières dérivées, pour $u = o$.

9. Tous les raisonnements précédents supposent les fonctions, sur lesquelles on opère, analytiques. Mais nous avons besoin, avant de les appliquer au problème des fonctions permutables, de préciser un peu les domaines d'existence.

Supposons que $\lambda(x, y)$ soit holomorphe pour

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R,$$

on ne peut pas en conclure que

$$(14) \qquad \sum_1^n {}_i N_i \int_0^u d\eta\, M[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]$$

soit une fonction de x et de y holomorphe dans le même domaine : pour s'en rendre compte, il suffit de suivre les intégrations qui nous font passer de $\lambda(x, y)$ à (14) et de constater qu'elles obligent à sortir du domaine précédent.

Au contraire, si l'on suppose que $\lambda(x, y)$ soit holomorphe dans le domaine (coïncidant avec le premier si $n = o$)

$$|x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R, \qquad |v + \alpha_i u| \leqq R, \qquad |\alpha_i u| \leqq R \text{ [1]} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1] Ce domaine est, au point de vue de l'*Analysis situs*, tout à fait analogue au domaine $|x| \leqq R$, $|y| \leqq R$: si l'on représente les deux variables x et y dans un espace à quatre dimensions, c'est un domaine de cet espace, contenant l'origine, convexe et par conséquent simplement connexe.

on peut affirmer que l'expression (14) *est holomorphe dans le même domaine.* En effet le domaine précédent peut, en introduisant les seules variables u et v, s'écrire

$$(15) \qquad |u-v| \leqq R, \qquad |v+u| \leqq R, \qquad |v+\alpha_i u| \leqq R, \qquad |\alpha_i u| \leqq R.$$

Quand on forme l'intégrale

$$\int_0^v \mu(u, \xi)\, d\xi,$$

le couple de variables u, ξ ne sort pas du domaine précédent: $\xi - u$ décrit en effet un segment de droite joignant les deux points $-u$ et $v-u$ et, comme des inégalités (15) on déduit

$$|u| \leqq R, \qquad |v-u| \leqq R,$$

on a constamment

$$|\xi - u| \leqq R;$$

des raisonnements analogues permettront de prouver que

$$|\xi + u| \leqq R, \qquad |\xi + \alpha_i u| \leqq R.$$

Ainsi les différentes intégrations nécessaires pour calculer $M(u, v)$ ne nous font pas sortir du domaine (15) et $M(u, v)$ est holomorphe dans ce domaine.

Pour prouver le même fait pour l'expression (14) il suffit de vérifier que l'intégration

$$\int_0^u M[\eta, v + \alpha_i(u-\eta)]\, d\eta$$

ne nous fait pas non plus sortir du domaine (15). En effet, dans cette intégration, la quantité complexe

$$\left.\begin{matrix} v+\alpha_i(u-\eta)-\eta \\ v+\alpha_i(u-\eta)+\eta \\ v+\alpha_i(u-\eta)+\alpha_j\eta \\ \alpha_j\eta \end{matrix}\right\} \text{décrit le segment joignant} \left\{\begin{matrix} v+\alpha_i u \ \text{à} \ v-u, \\ v+\alpha_i u \ \text{à} \ v+u, \\ v+\alpha_i u \ \text{à} \ v+\alpha_j u, \\ 0 \ \text{à} \ \alpha_j u; \end{matrix}\right.$$

les extrémités de ces segments étant, d'après les formules (15), dans le cercle de rayon R, il en est de même de tout point de ces segments.

Nous pouvons enfin réunir les résultats des deux numéros précédents dans l'énoncé suivant :

Si son second membre est holomorphe dans le domaine (15) *et s'annule pour* $u = 0$, *toutes les solutions de l'équation* (a''), *holomorphes dans le même domaine et nulles ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre* n *pour* $u = 0$, *sont données par la formule*

$$\varpi(u) + \sum_1^n {}_i \mathrm{N}_i \int_0^u d\eta\, \mathrm{M}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)],$$

$\varpi(u)$ *étant une fonction arbitraire holomorphe dans le même domaine et nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre* n *pour* $u = 0$.

On se rendra compte aisément que, pour que $\varpi(u)$ soit holomorphe dans le domaine (15), il faut et il suffit qu'elle le soit dans et sur le cercle de rayon ρ, ρ étant le plus petit des nombres R et $\frac{\mathrm{R}}{|\alpha_i|}$.

10. Revenons enfin au problème des fonctions permutables posé au début de ce paragraphe. Nous en modifierons un peu l'énoncé : nous nous donnerons la fonction $f(x, y)$ holomorphe, non pas dans le domaine (8) du n° **6**, mais dans le domaine

$$(16) \qquad |x| \leqq \mathrm{R}, \quad |y| \leqq \mathrm{R}, \quad |v + \alpha_i u| \leqq \mathrm{R}, \quad |\alpha_i u| \leqq \mathrm{R}$$

et nous rechercherons les fonctions permutables avec elle et holomorphes dans ce domaine.

Tous les raisonnements des n^{os} **6** et **7** subsistent et le problème est ramené à la recherche d'une fonction $\Phi(x, y)$ holomorphe dans le même domaine (16) ([1]), nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n

---

([1]) Par un raisonnement déjà fait bien des fois, on se rendra compte que le résultat de la composition de deux fonctions holomorphes dans (16) est une nouvelle fonction holomorphe dans (16).

inclus pour $x = y$ et vérifiant l'équation

$$(a) \qquad \frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = -\int_x^y \left[h(x,\xi)\frac{\partial^n \Phi(\xi,y)}{\partial \xi^n} - \frac{\partial^n \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^n} k(\xi,y)\right] d\xi.$$

Si nous désignons par $\mu_\Phi(u, v)$ le second membre de cette équation, il vérifie la relation $\mu_\Phi(0, v) = 0$. Des résultats précédents on déduit que Φ vérifie une équation de la forme

$$(b) \qquad \Phi(x,y) = \varpi(u) + \sum_1^n {}_i \mathrm{N}_i \int_0^u d\eta_i \, \mathrm{M}_\Phi[\eta_i, v + \alpha_i(u - \eta_i)],$$

$\varpi(u)$ étant une fonction arbitraire holomorphe dans le domaine (16) et nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n pour $u = 0$, M_Φ étant formé à partir de μ_Φ comme M à partir de μ.

Cette équation (b) est intégro-différentielle, car dans M_Φ apparaissent les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ. Il est impossible, sauf dans les deux cas traités par M. Volterra, de la réduire à une équation intégrale. *Mais cela n'a pas d'importance pour sa résolution*; nous allons montrer, en effet, qu'elle se comporte tout à fait comme une équation intégrale et qu'elle admet une solution et une seule holomorphe dans (16), que l'on obtient par approximations successives (¹). Il suffit de prendre

$$\Phi(x,y) = \sum_0^\infty {}_p \Phi_p(x,y)$$

avec

$$\Phi_0(x,y) = \varpi(u)$$

et

$$(17) \qquad \Phi_p(x,y) = \sum_1^n {}_i \mathrm{N}_i \int_0^u d\eta \, \mathrm{M}_{\Phi_{p-1}}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)].$$

(¹) Comme la solution de l'équation (B) du paragraphe I.

La raison de ce fait est bien claire : l'équation (b) exprime Φ en fonction de ses dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Mais en dérivant n fois cette équation on n'introduit pas de nouvelles dérivées de Φ, de sorte qu'on obtient, pour déterminer les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ, un système d'équations intégrales auxquelles s'applique la méthode des approximations successives. Comparer aux formules (18).

Φ_p est ainsi exprimé au moyen des dérivées partielles de Φ_{p-1}. Mais on a [formules (12)]

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^n \Phi_p}{\partial u^n} &= \int_0^v \mu_{\Phi_{p-1}}(u,\xi)\,d\xi\,\Sigma N_i \alpha_i^{n-1} \\ &\quad + \Sigma N_i \alpha_i^n \int_0^u d\eta\,\mu_{\Phi_{p-1}}[\eta, v + \alpha_i(u-\eta)] \\ \frac{\partial^n \Phi_p}{\partial u^{n-q}\,\partial v^q} &= \Sigma N_i \alpha_i^{n-q} \int_0^u d\eta\,\mu_{\Phi_{p-1}}[\eta, v+\alpha_i(u-\eta)] \\ &\qquad (q = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

formules qui expriment les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ_p en fonction de celles de Φ_{p-1}. De ces formules (18) on déduit l'existence d'un nombre K indépendant de p, tel que, si les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ_{p-1} sont limitées par $K^p \frac{|y-x|^{p-1}}{(p-1)!}$, les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de Φ_p soient limitées par $K^{p+1}\frac{|y-x|^p}{p!}$. Il en résulte la convergence de séries formées par dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des Φ_p, et enfin celle de la série des Φ_p dont les termes sont formés, à partir des termes des séries précédentes, par les intégrations exprimées par la formule (17).

Ainsi, quelle que soit la fonction $\varpi(u)$ holomorphe dans (16), l'équation (b) admet une solution holomorphe dans (16), solution dont on prouvera sans peine l'unicité. Le passage de l'équation (b) à l'équation (a) ne souffre aucune difficulté et nous obtenons ainsi toutes les fonctions $\Phi(x,y)$ et enfin toutes les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$ et holomorphes dans (16). Elles dépendent d'une fonction arbitraire $\varpi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ holomorphe dans (16), c'est-à-dire (fin du n° 9) lorsque

$$\left|\frac{y-x}{2}\right| \leqq \rho,$$

ρ étant le plus petit des nombres R et $\frac{R}{|\alpha_i|}$.

Comme toute fonction holomorphe dans le voisinage de $x=0$, $y=0$, sera holomorphe dans un domaine tel que (16) correspondant à une valeur de R assez petite, on peut encore interpréter comme suit le résultat précédent :

Soit $f(x,y)$ une fonction holomorphe autour de $x=y=0$ (ou de tout autre point de la multiplicité $x=y$) et d'un ordre déterminé autour de ce point. Nous savons, d'après ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $\varphi(x,y)$ holomorphes autour de ce point et permutables avec $f(x,y)$.

III. — De quelques propriétés des fonctions permutables.

11. Les propriétés que nous étudions dans ce numéro trouveront leur application au Chapitre suivant.

En se reportant à l'équation (b) on vérifie sans peine que :

La solution $\Phi(x,y)$ de l'équation (b) a le même ordre que la fonction arbitraire $\varpi\left(\frac{y-x}{2}\right)$ et, si $n+2+q$ est cet ordre ($q \geqq 0$), on a

$$\Phi^{(n+1+q)}(x,x)=\varpi^{(n+1+q)}(0)=\text{const.},$$

$\Phi^{(n+1+q)}(x,y)$ désignant, comme au Chapitre I (n° **15**), la dérivée $(n+1+q)^{\text{ième}}$ de $\Phi(x,y)$ par rapport à y. La fonction $\varphi(x,y)$ correspondante est d'ordre $(1+q)$ et l'on a

$$\varphi^{(q)}(x,x)=\Phi^{(n+1+q)}(x,x)=\text{const.}$$

Ceci suppose que

$$f^{(n)}(x,x)=1;$$

en effectuant en sens inverse le changement de variable (§ I, n° **3**) qui nous avait permis de réaliser cette dernière égalité, on constate que, dans le cas général, on a

$$\frac{[\varphi^{(q)}(x,x)]^{n+1}}{[f^{(n)}(x,x)]^{q+1}}=\text{const.}, \tag{19}$$

la constante pouvant d'ailleurs prendre une valeur arbitraire.

Ce résultat généralise celui de M. Volterra, d'après lequel, si $f(x,y)$ est du premier ordre, on a

$$\frac{\varphi(x,x)}{f(x,x)}=\text{const.}$$

Il trouvera son application au Chapitre suivant par la conséquence que voici. Supposons que $(n+1) = p(q+1)$, p étant un entier. Il vient

$$[\varphi^{(q)}(x, x)]^p = K f^{(n)}(x, x) \qquad (K = \text{const.})$$

et l'on en conclut aisément ([1]), en multipliant φ par une constante convenable, que :

On peut toujours trouver une fonction $\varphi(x, y)$ d'ordre $q+1$ permutable avec $f(x,y)$ telle que

$$\overset{*}{\varphi}{}^{p}(x, y) - f(x, y)$$

soit d'ordre supérieur à $n+1$.

12. Un cas particulier important, particulièrement pour la théorie de l'hérédité, est celui où la fonction $f(x,y)$ pour laquelle on résout le problème précédent ne dépend que de la différence $y-x$.

Soit $f(y-x)$ cette fonction. Les deux fonctions $h(x,y)$ et $k(x,y)$ qui s'introduisent dans l'équation intégro-différentielle (a) sont aussi de simples fonctions de $y-x$ et telles de plus que

$$k(y-x) = (-1)^n h(y-x).$$

Si, tenant compte de cette relation, on forme les approximations successives qui, au n° **10**, nous ont servi à résoudre l'équation (a), on constate que toutes ces approximations sont nulles, sauf la première, et l'on trouve

$$\Phi(x, y) = \varpi\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Les fonctions permutables avec $f(y-x)$ sont de la forme $\varphi(y-x)$ et il est d'ailleurs bien évident qu'une fonction quelconque de ce type sera permutable avec $f(y-x)$.

13. Les fonctions permutables avec $f(y-x)$ ainsi trouvées jouissent de propriétés importantes qu'il est naturel de chercher à étendre aux fonctions permutables les plus générales :

([1]) Se reporter aux remarques de la note 1 de la page 17, Chapitre I.

I. Toutes les fonctions permutables avec $f(y-x)$ sont permutables entre elles.

Nous avons déjà indiqué cette propriété pour les fonctions permutables avec une fonction $f(x,y)$ du premier ordre (n° **5**). Au Chapitre IV (n° **16**) nous la retrouverons dans le cas général.

II. Une fonction permutable avec $f(y-x)$ et holomorphe autour d'un point de la multiplicité $y=x$ est holomorphe au voisinage de tout point de cette multiplicité.

C'est l'extension de ce résultat que je veux présenter ici. Elle prend la forme suivante :

Théorème. — *Soit, dans le plan où nous représentons les deux variables complexes x et y, un domaine $\mathfrak{D}$ simplement connexe tel que la fonction $f(x,y)$* (¹) *soit holomorphe autour de tout point $y=x_0$, $x=x_0$, x_0 étant intérieur à $\mathfrak{D}$ ou sur sa frontière. Toute fonction permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de $x=a$, $y=a$, a étant un point intérieur à $\mathfrak{D}$, est de même holomorphe autour de $x=x_0$, $y=x_0$, x_0 étant un point quelconque intérieur à $\mathfrak{D}$.*

Nous supposerons dans la démonstration que a soit l'origine o. Soit donc $\varphi(x,y)$ permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de de l'origine; la fonction $\Phi(x,y)=\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}(x,y)$ sera, d'après ce qui précède, donnée par la résolution de

$$(b) \qquad \Phi(x,y)=\varpi(u)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{N}_i\int_0^{u}\mathrm{M}_\Phi[\eta,\ v+\alpha_i(u-\eta)]\,d\eta,$$

$\varpi(u)$ étant une fonction holomorphe autour de $u=0$.

Étant données les hypothèses faites sur la fonction $f(x,y)$, nous pouvons toujours choisir un nombre ρ assez petit pour que cette fonc-

---

(¹) Nous prenons la fonction $f(x,y)$ sur laquelle on ait effectué le changement de variables du n° 3, rendant ainsi égale à 1 la première dérivée non identiquement nulle pour $x=y$, et égale à zéro la dérivée suivante. Il n'y a pas de difficultés, on le verra au Chapitre suivant, à passer de là au cas général (Chap. III, p. 56).

tion soit holomorphe dans le domaine suivant :

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \text{(le point du plan complexe représentant } v \text{ est dans } \mathbb{O} \text{ ou sur } \mathbb{O}), \\ |u| \text{ et } |\alpha_j u| \leqq r_v \qquad (j=1, 2, \ldots, n), \\ |u| \leqq \rho, \end{cases}$$

r_v étant la plus courte distance v à la frontière du domaine $\mathbb{O}$. ρ étant enfin choisi assez petit pour que $\varpi(u)$ soit analytique dans le même domaine, je dis que les approximations successives qui servent à résoudre (b) convergent dans le domaine Δ. Cette convergence sera immédiate, si nous prouvons seulement qu'elles permettent, partant d'un $\Phi_{n-1}(x,y)$ défini dans Δ, d'en déduire un $\Phi_n(x,y)$ lui aussi défini dans tout Δ; en d'autres termes, si elles ne nous font pas sortir du domaine Δ.

Mais $\Phi_{n-1}(x,y)$ étant donné, il faut pour former $\mu_{\Phi_{n-1}}(u, v)$ en calculer les compositions avec $h(x,y)$ et $k(x,y)$. Ces compositions peuvent s'effectuer en faisant décrire à ξ le segment de droite xy sans que les couples de variables $x\xi$ et ξy sortent du domaine Δ : en effet tous les points du segment x, y, et en particulier $\frac{x+\xi}{2}$ et $\frac{\xi+y}{2}$, sont intérieurs à $\mathbb{O}$, et l'on a de plus

$$r_{\frac{x+\xi}{2}} \geqq r_v - \frac{|y-\xi|}{2}, \qquad r_{\frac{\xi+y}{2}} \geqq r_v - \frac{|\xi-x|}{2};$$

tout revient alors à démontrer des relations telles que

$$\frac{|\xi-x|}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_j\left|\frac{\xi-x}{2}\right| \leqq r_v - \frac{|y-\xi|}{2};$$

c'est une conséquence des relations (Δ).

Pour former $M_{\Phi_{n-1}}(u, v)$ à partir de $\mu_{\Phi_{n-1}}(u, v)$ il faut effectuer des intégrations telles que

$$\int_0^v \mu(u, \xi)\, d\xi.$$

Or, quand u est donné, ξ peut prendre dans le plan toutes les valeurs intérieures à $\mathbb{O}$ et telles que $|u|$ et $|\alpha_j u| \leqq r_\xi$. Cette condition définira un certain domaine $\mathbb{O}'$ intérieur à $\mathbb{O}$, qui, si ρ est pris assez petit, sera toujours connexe ([1]). Ce domaine contient l'origine et le point v, et l'intégrale

$$\int_0^v \mu(u, \xi)\, d\xi$$

y est définie sans difficultés.

Reste enfin le calcul de l'intégrale

$$\int_0^u \mathrm{M}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]\, d\eta$$

qui n'offre pas de difficultés si l'on fait décrire à η le segment de droite o, u :

$$v + \alpha_i(u - \eta)$$

reste dans $\mathcal{D}$ et il est aisé de vérifier que

$$|\eta| \qquad \text{et} \qquad |\alpha_j \eta| \leqq r_{v+\alpha_i(u-\eta)}.$$

Le théorème annoncé est ainsi démontré : il subsisterait si le domaine $\mathcal{D}$ était tracé sur une surface de Riemann.

IV. — Les fonctions permutables avec une fonction non analytique.

14. Nous avons supposé jusqu'à présent, tant pour simplifier que pour avoir des énoncés directement comparables à ceux que nous obtiendrons par d'autres procédés au Chapitre IV, que la fonction donnée et les fonctions cherchées étaient analytiques.

La méthode précédente peut s'appliquer à des cas un peu plus étendus. L'analyticité est intervenue quand on a voulu résoudre l'équation

$$\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial y^{n+1}} - (-1)^{n+1}\frac{\partial^{n+1}\Phi}{\partial x^{n+1}} = \mu(u, v)$$

avec des conditions limites du type de Cauchy, par la formule

$$\varpi(u) + \int_0^u \sum_1^n {}_i \mathrm{N}_i \mathrm{M}[\eta, v + \alpha_i(u - \eta)]\, d\eta.$$

([1]) Pourvu que $\mathcal{D}$ soit un domaine simple, ce qui peut toujours être le cas.

Le lecteur se rendra compte que tous les résultats du paragraphe II subsistent si l'on suppose la fonction donnée $f(x,y)$ définie lorsque

$$u \text{ réel} \quad \text{et} \quad -a \leqq u \leqq +a,$$

et

$$|v-u| \leqq R, \quad |v+u| \leqq R, \quad |v+\alpha_i u| \leqq R$$

avec

$$|a| \leqq R, \quad |\alpha_i a| \leqq R,$$

cette fonction étant analytique en v et seulement dérivable jusqu'à un certain ordre en u. Il faut faire les mêmes hypothèses sur la fonction cherchée $\varphi(x,y)$.

15. Dans le cas où la fonction $f(x,y)$ n'est pas du type précédent et est d'un ordre supérieur au second ([1]), le problème de la recherche des fonctions permutables présente des difficultés difficilement surmontables. Sont-elles inhérentes au problème posé, ou simplement à la méthode employée? Je dois me contenter ici de poser la question.

CHAPITRE III.

COMPLÉMENTS ET APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

I. — Étude des fonctions permutables avec $f(x,y)$ autour d'un point où elle n'est d'aucun ordre.

1. Revenons sur les deux changements de variable indiqués au n° 6 du Chapitre précédent : l'équation

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}(x,y) = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}(x,y)$$

est invariante, c'est-à-dire se transforme successivement en

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_1}(x_1,y_1) = \overset{*}{\varphi_1}\overset{*}{f_1}(x_1,y_1), \qquad \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_2}(x_1,y_1) = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_2}(x_1,y_1)$$

([1]) *Cf.* n° 8, p. 42.

par les transformations

$$
(1) \qquad \begin{cases} x = g(x_1) \qquad [y = g(y_1), \xi = g(\xi_1)], \\ f_1(x_1, y_1) = \pm\sqrt{g'(x_1)g'(y_1)}\, f(x, y), \\ \varphi_1(x_1, y_1) = \pm\sqrt{g'(x_1)g'(y_1)}\, \varphi(x, y) \end{cases}
$$

et

$$
(2) \qquad \begin{cases} f_2(x_1, y_1) = f_1(x_1, y_1)\dfrac{m(x_1)}{m(y_1)}, \\ \varphi_2(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)\dfrac{m(x_1)}{m(y_1)}. \end{cases}
$$

Pour que, la fonction $f(x,y)$ étant d'ordre $n+1$, la fonction $f_2(x_1, y_1)$ soit telle que

$$
\left[\frac{\partial^n f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^n}\right]_{y_1 = x_1} = 1, \qquad \left[\frac{\partial^{n+1} f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^{n+1}}\right]_{y_1 = x_1} = 0,
$$

il faut prendre, pour la relation entre x et x_1,

$$
(1) \qquad x_1 = \int [\pm\alpha(x)]^{\frac{1}{n+1}} dx \qquad \text{avec} \qquad \alpha(x) = \left[\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]_{y=x}
$$

et pour valeur de $m(x_1)$

$$
(2) \qquad m(x_1) = e^{\frac{1}{n+1}\int\left[\frac{\partial^{n+1} f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1^{n+1}}\right]_{y_1 = x_1} dx_1}.
$$

Autour d'un point $x = a, y = a$ tel que la fonction $f(x,y)$ soit d'un ordre $n+1$ déterminé $[\alpha(a) \neq 0]$ la transformation (1) est régulière et inversable et les transformations précédentes ramènent, comme nous l'avions déjà indiqué (Chap. II, n° **6**), la recherche des fonctions permutables avec $f(x,y)$ à celle, effectuée au Chapitre précédent, des fonctions permutables avec $f_2(x_1, y_1)$.

On peut aller plus loin en appliquant les transformations précédentes au théorème du Chapitre II (n° **15**) : soit un domaine D simplement connexe du plan complexe sur lequel nous représentons les variables x et y, domaine évitant les zéros de $\alpha(x)$ et pouvant les contourner pour venir se recouvrir lui-même (mais nous le supposerons alors tracé sur une surface de Riemann se ramifiant autour de ces zéros); par la transformation (1) lui correspondra biunivoquement un domaine ω

du plan complexe dans lequel nous représentons les variables x_1 et y_1; le théorème du Chapitre II (n° **13**) s'applique à ce domaine et nous obtenons le résultat suivant : Toute fonction permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de $x=a$, $y=a$, a étant un point du domaine D, est holomorphe autour de $x=b$, $y=b$, b étant un point quelconque du domaine D. Puisque D peut être quelconque, pourvu qu'il évite les zéros de $\alpha(x)$, on peut encore dire :

Toute fonction analytique permutable avec $f(x,y)$ est holomorphe autour de tout point $x=a$, $y=a$ autour duquel $f(x,y)$ est d'un ordre déterminé.

2. Pour que l'étude autour de la multiplicité $y=x$ (1) des fonctions permutables avec $f(x,y)$ soit terminée, il nous reste à étudier les mêmes fonctions autour d'un point pour lequel $f(x,y)$ n'est pas d'un ordre déterminé : nous supposerons que ce point soit $x=y=0$ et que la première dérivée de $f(x,y)$ non identiquement nulle pour $x=y$ soit

$$\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right]_{y=x} = \alpha(x) = x^a(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots),$$

a entier positif et non nul.

L'équation (1) a alors la forme

$$x_1 = x^{\frac{a}{n+1}+1}(\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots)$$

et définit une correspondance biunivoque, non plus entre le voisinage de l'origine de deux plans, mais entre le voisinage de l'origine de deux surfaces de Riemann, à nombre fini de feuillets se ramifiant autour de l'origine. La fonction $f_1(x_1, y_1)$ admet alors les points critiques $x_1=0$, et $y_1=0$, et il en est de même de la fonction $f_2(x_1, y_1)$ (2);

(1) Cette multiplicité joue dans la théorie en question un rôle analogue à celui que joue, dans la théorie du problème de Cauchy (pour les équations aux dérivées partielles), la multiplicité qui porte les données aux limites.

(2) Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la définition de $f_1(x_1, y_1)$ et $f_2(x_1, y_1)$ il faut partir d'une détermination de ces fonctions et la suivre par continuité.

cette dernière sera une fonction bien définie des points x_1 et y_1 représentés non plus dans le plan, mais sur une surface de Riemann ayant un point de ramification d'ordre infini autour de l'origine. Si, par exemple, $f(x, y) = ax + by$ avec, pour simplifier, $a + b = 1$, il vient

$$x_1 = x^2,$$

$$f_1(x_1, y_1) = \frac{a x_1^{\frac{1}{2}} + b y_1^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{4}} y_1^{\frac{1}{4}}}, \qquad f_2(x_1, y_1) = \frac{a x_1^{\frac{1}{2}} + b y_1^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{a}{2}} y_1^{\frac{b}{2}}}.$$

On peut alors utiliser les formules du Chapitre précédent pour se faire une idée de la singularité autour de l'origine des fonctions permutables avec $f_2(x_1, y_1)$ et donc avec $f(x, y)$. Nous ne ferons pas cette étude, car, et c'est là un point qui sera montré au Chapitre IV (n° 9), la méthode précédente donnerait une idée très imparfaite et trop compliquée des singularités de ces fonctions.

5. Nous nous occuperons seulement du cas particulier le plus simple : c'est celui où, bien que l'origine soit un zéro de $\alpha(x)$, la fonction $f_2(x_1, y_1)$ est une fonction holomorphe de x_1 et y_1 autour de $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Cherchons d'abord à le caractériser.

On doit avoir alors

$$(3) \qquad f_2(x_1, y_1) = f(x, y)\sqrt{g'(x_1) g'(y_1)}\,\frac{m(x_1)}{m(y_1)},$$

$m(x_1)$ étant analytique autour de l'origine, mais ayant d'ordinaire cette origine pour point critique, la relation $x = g(x_1)$ étant la relation inverse de

$$x_1 = x^{\frac{n}{n+1}+1}(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots) \qquad [\text{ou } x_1 = h(x)],$$

les fonctions f et f_2 étant fonctions holomorphes autour de l'origine des variables qui y figurent et contenant respectivement en facteur $(y - x)^n$ et $(y_1 - x_1)^n$. La fonction f_2 vérifie de plus les conditions

$$\left[\frac{\partial^n f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^n}\right]_{y_1 = x_1} = 1, \qquad \left[\frac{\partial^{n+1} f_2(x_1, y_1)}{\partial y_1^{n+1}}\right]_{y_1 = x_1} = 0 \quad (^1).$$

(1) Cette seconde condition n'a rien d'essentiel; on peut toujours la réaliser sans troubler l'analyticité de $f_2(x_1, y_1)$ en multipliant cette fonction par une autre bien choisie.

On peut remplacer (3) par

$$(3')\qquad f(x,y) = f_2(x_1,y_1)\sqrt{h'(x)\,h'(y)}\,\frac{n(x)}{n(y)},$$

$n(x)$ ayant, comme $m(x_1)$, l'origine pour point critique et

$$h'(x) = \frac{1}{g'(x_1)} = x^{\frac{a}{n+1}}(\nu_0 + \nu_1 x + \ldots).$$

L'équation (3') *entraîne d'abord que a soit un multiple de n* + 1. Supposons en effet que non, $\frac{a}{n+1} + 1$ est alors égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$. De (3') on tire

$$(4)\qquad \frac{n(x)}{n(y)} = \frac{f(x,y)}{f_2(x_1,y_1)\sqrt{h'(x)\,h'(y)}},$$

et la partie principale du second membre quand x et y sont tous deux infiniment petits du même ordre, partie principale qui s'écrit

$$\frac{(y-x)^n p(x,y)}{\left(y^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}\right)^n \mu_0^n \nu_0\, x^{\frac{a}{2(n+1)}} y^{\frac{a}{2(n+1)}}},$$

ne peut pas être le quotient de deux fonctions de x et de y.

Il faut donc que a soit multiple de $n+1$, soit $a = k\,(n+1)$, k étant un entier positif [1]. On peut alors se donner arbitrairement la fonction holomorphe $f_2\,(x_1, y_1)$ d'ordre $n+1$ autour de l'origine (*cf.* note 1, page 58), et le changement de variable

$$x_1 = x^{k+1}(\mu_0 + \mu_1 x + \ldots)$$

(ce qui détermine $\nu_0, \nu_1, \ldots$).

On doit avoir

$$f(x,y) = f_2(x_1,y_1)\,x^{\frac{k}{2}} y^{\frac{k}{2}} \sqrt{(\nu_0 + \nu_1 x + \ldots)(\nu_0 + \nu_1 y + \ldots)}\,\frac{n(x)}{n(y)},$$

$f(x,y)$ étant holomorphe. Il en résulte immédiatement que $n(x)$ est de forme $x^{\pi}\,n_0(x)$, $n_0(x)$ étant holomorphe et telle que $n_0(0) \gtrless 0$, et

(1) Le cas où k serait nul a déjà fait l'objet du Chapitre précédent.

l'indice π étant tel que les nombres $\frac{k}{2}+\pi$ et $\frac{k}{2}-\pi$ soient entiers et positifs. On a finalement

$$(5)\quad f(x,y)=f_2(x_1,y_1)x^\alpha y^\beta\sqrt{(\nu_0+\nu_1 x+\ldots)(\nu_0+\nu_1 y+\ldots)}\,\frac{n_0(x)}{n_0(y)},$$

α et β étant deux entiers positifs quelconques dont la somme donne k.

Voici donc comment s'obtiendront toutes les fonctions $f(x,y)$ holomorphes telles que la fonction $f_2(x_1,y_1)$ correspondante soit, elle aussi, holomorphe. *Il suffira de partir de toutes les fonctions $f_2(x_1,y_1)$ holomorphes et d'ordre $n+1$ autour de $x_1=y_1=0$ et d'y faire tous les changements de variables*

$$x_1=x^{k+1}(\mu_0+\mu_1 x+\ldots),$$

d'en déduire enfin $f(x,y)$ par la formule (5); α et β étant deux entiers positifs arbitraires dont la somme est k; $n_0(x)$, une fonction holomorphe arbitraire non nulle pour $x=0$.

4. Les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$ s'obtiendront en appliquant la formule (5) aux fonctions $\varphi_2(x_1,y_1)$ permutables avec $f_2(x_1,y_1)$. Il en résulte que : *Une fonction $\varphi(x,y)$ permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour d'un point $x=\alpha$, $y=\alpha$ de la multiplicité $x=y$ est holomorphe, non seulement autour de tous les points de cette multiplicité, tels que $f(x,y)$ y soit d'un ordre donné, mais encore autour du point $x=0$, $y=0$.*

5. Donnons une application simple des considérations précédentes : les fonctions permutables avec l'unité sont de forme

$$\varphi(y_1-x_1)$$

en faisant le changement de variable $x_1=x^{k+1}$, on prouve que les fonctions permutables avec $x^\alpha y^\beta$ (avec $\alpha+\beta=k$) sont les fonctions

$$x^\alpha y^\beta\varphi(y^{\alpha+\beta+1}-x^{\alpha+\beta+1}).$$

C'est un point qu'il est d'ailleurs aisé de démontrer directement.

II. — Application à la résolution d'une équation intégrale.

6. La recherche, exposée au Chapitre précédent, des fonctions permutables avec une fonction donnée permet de résoudre l'équation intégrale

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\psi}{}^{p}(x, y) = f(x, y)$$

par rapport à l'inconnue $\psi(x, y)$. Cette résolution est très importante, car elle permet d'introduire dans la théorie des fonctions permutables le symbole $\sqrt[p]{}$, et d'étendre ainsi à des relations implicites intégrales du genre de celles envisagées au Chapitre I (§ I) la théorie de Puiseux ([1]).

Si la solution $\psi(x, y)$ admet en facteur $(y - x)^q$, il est facile de se rendre compte que $\overset{*}{\psi}{}^{p}(x, y)$ admettra en facteur $(y - x)^{pq+p-1}$ ([2]). Il faudra donc supposer que $f(x, y)$ ait en facteur $(y - x)^n$, $n+1$ étant un multiple de p. Nous ferons même, d'abord, l'hypothèse plus restrictive suivante : $f(x, y)$ est *d'ordre* $n+1$ multiple de p.

Le cas où $(n+1) = 2$ et où $p = 2$ a été traité par M. Volterra qui a de plus montré ([3]) le lien qui existe en général entre la résolution de l'équation (E) et le problème qui nous a occupé au Chapitre II. Voici, en utilisant les résultats de M. Volterra et les résultats démontrés au Chapitre II (§ II), comment on peut résoudre l'équation (E) quand son second membre $f(x, y)$ est holomorphe.

7. Nous établirons que :

L'équation

$$\text{(E)} \qquad \overset{*}{\psi}{}^{p}(x, y) = f(x, y),$$

([1]) Nous n'insisterons pas sur ce point de vue développé par M. Volterra (*cf. Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 178). Il nous a suffi de montrer l'intérêt de l'équation (E).

([2]) *Cf.* Chapitre I, p. 17, note 1.

([3]) *Cf. Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 170-178.

$f(x, y)$ étant holomorphe autour de $x = y = 0$ et d'ordre $n+1$ multiple de p, admet autour de ce point p solutions holomorphes et p seulement. Ces solutions se déduisent de l'une d'elles en la multipliant par les p racines p^ièmes de l'unité. Elles sont d'ordre $\frac{n+1}{p} = q+1$.

Il est tout d'abord clair que les solutions holomorphes seront d'ordre $\frac{n+1}{p} = q+1$.

Prouvons leur existence : d'après un résultat précédent (Chap. II, n° **11**) nous pouvons trouver une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$, d'ordre $q+1$ et telle que

$$f(x, y) - \overset{*}{\varphi}^{p}(x, y)$$

soit d'ordre au moins $n+2$. L'équation en $\chi(x, y)$

$$f(x, y) - \overset{*}{\varphi}^{p}(x, y) = \overset{*}{\varphi}^{p} \overset{*}{\chi}(x, y)$$

aura alors une solution holomorphe et permutable avec $\varphi(x, y)$ (Chap. I, n° **10**) et l'on pourra prendre pour solution de l'équation (E)

$$\psi(x, y) = \alpha_i \left[\varphi + \frac{1}{p} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\chi} + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)}{2!} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\chi}^{2} + \ldots \right],$$

α_i étant l'une quelconque des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité [1].

---

[1] Remarquons que la théorie de l'équation (E) repose en dernière analyse sur la formule (19) du Chapitre II, du n° **11**, grâce à laquelle on pouvait affirmer l'existence d'une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$ et telle que $f(x, y) - \overset{*}{\varphi}^{p}(x, y)$ soit au moins d'ordre $n+2$. Jusqu'à présent cette formule est démontrée comme conséquence de la recherche des fonctions permutables, c'est-à-dire sous bien des restrictions. Nous la démontrerons au Chapitre IV (n° 3) directement, sans restrictions autres que l'existence de quelques dérivées. Dès lors, toutes les fois que nous connaîtrons, peu importe comment, une fonction $\varphi(x, y)$ d'ordre $q+1$ permutable avec $f(x, y)$, nous pourrons toujours, en la multipliant par une constante, faire en sorte que $f(x, y) - \overset{*}{\varphi}^{p}(x, y)$ soit au moins d'ordre $n+2$, *c'est-à-dire résoudre l'équation* (E).

Prouvons enfin qu'il n'y a pas d'autre solution : en d'autres termes que, si ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions de l'équation (E), on a

$$\psi_1 = \alpha_i \psi_2.$$

On aura en effet

$$\dot{\psi}_1^p - \dot{\psi}_2^p = 0.$$

d'où, en posant

$$\psi_1 - \alpha_i \psi_2 = \Psi_i,$$

$$\dot{\Psi}_1 \dot{\Psi}_2 \ldots \dot{\Psi}_p + \dot{\Psi}_2 \dot{\Psi}_3 \ldots \dot{\Psi}_p \dot{\Psi}_1 + \ldots + \dot{\Psi}_p \dot{\Psi}_1 \ldots \dot{\Psi}_{p-1} = 0. \tag{6}$$

Cette équation entraîne que l'un des Ψ_i soit nul : sinon, en effet, le développement de chacun d'eux considéré comme fonction de y, développement effectué suivant les puissances de $y - x$, commencerait par un terme dont le coefficient est une fonction non identiquement nulle $b_i(x)$. Le développement analogue du premier membre de (6) commencerait par un terme de coefficient

$$b_1(x)\, b_2(x) \ldots b_p(x)$$

(à un facteur constant près) non identiquement nul.

Remarquons enfin que les solutions de l'équation (E) sont permutables avec $f(x, y)$: cela résulte de la formule donnant ces solutions. On pourrait le démontrer directement.

8. La méthode précédente pourra s'appliquer quand on remplace l'hypothèse d'analyticité de $f(x, y)$ par des hypothèses moins restrictives. En voici une autre, strictement limitée au cas où $f(x, y)$ est analytique, qui nous sera utile dans l'étude de la solution $\psi(x, y)$ autour d'un point où $f(x, y)$ cesse d'être d'ordre $n + 1$.

Étudions l'équation (E) autour du point $x = 0$, $y = 0$; $f(x, y)$ peut être définie par une série

$$\sum_{n}^{\infty}{}_{i} \frac{(y - x)^i}{i!} f^{(i)}(x)$$

dont les coefficients $f^{(i)}(x)$ sont holomorphes. Nous chercherons à calculer $\psi(x,y)$ par une série à coefficients holomorphes

$$\sum_q^\infty {}_i \frac{(y-x)^i}{i!}\psi^{(i)}(x).$$

La méthode que nous allons donner est donc analogue à celle du Chapitre I (n° **15**) pour résoudre l'équation de Volterra. Il vient, pour déterminer les $\psi^{(i)}(x)$, les équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} [\psi^{(q)}(x)]^p = f^{(pq+p-1)}(x) \qquad (pq+p-1=n), \\ p[\psi^{(q)}(x)]^{p-1}\psi^{(q+1)}(x) + \mathfrak{P}_1[\psi^{(q)}(x)] = f^{(pq+p)}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p[\psi^{(q)}(x)]^{p-1}\psi^{(q+j)}(x) + \mathfrak{P}_j(\psi^{(q)}, \psi^{(q+1)}, \dots, \psi^{(q+j-1)}) = f^{(pq+p-1+j)}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

$\mathfrak{P}_j$ étant un polynome par rapport à $\psi^{(q)}$, $\psi^{(q+1)}$,... $\psi^{(q+j-1)}$ et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. La première équation donne

$$\psi^{(q)}(x) = [f^{(n)}(x)]^{\frac{1}{p}}$$

et les suivantes déterminent, par résolution d'équations du premier degré,

$$\psi^{(q+1)}(x), \quad \psi^{(q+2)}(x), \quad \dots, \quad \psi^{(q+j)}(x).$$

Deux cas sont à distinguer :

1° $f(x,y)$ est d'ordre $n+1$ autour de $x=0, y=0$. Alors $f^{(n)}(0)$ est différent de zéro; $\psi^{(q)}(0)$ aussi, $\psi^{(q)}(x)$ est holomorphe autour de $x=0$ et il en est de même des $\psi^{(q+j)}(x)$ successives. La convergence de la série

$$\sum_q^\infty {}_i \frac{(y-x)^i}{i!}\psi^{(i)}(x)$$

peut s'établir directement. Elle est d'ailleurs une conséquence de l'existence de p, et de p seulement, solutions holomorphes de l'équation (E), solutions pouvant s'obtenir à partir de l'une d'elles par multiplication par les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

2° $f(x,y)$ n'est pas d'ordre $(n+1)$ autour de $x=0$, $y=0$. Alors $f^{(n)}(0)$ est nul et les fonctions $\psi^{(q+j)}(x)$ successives ne sont pas, en général, holomorphes : pas de solution holomorphe autour de l'origine, du moins en général.

Dans des cas particuliers, pourtant, notre équation aura ses solutions holomorphes, et notre méthode va nous permettre, comme au Chapitre I, de caractériser ces cas : il faudra d'abord que les fonctions $\psi^{(q+j)}(x)$ déterminées par les relations (7) soient holomorphes. Le développement

$$\sum_{q}^{\infty} i \frac{\psi^{(i)}(x)}{i!}(y-x)^i$$

satisfera alors formellement à l'équation (E). *Il y satisfera aussi effectivement;* la démonstration est la même qu'au Chapitre I (n° **16**). Les p solutions de l'équation (E) sont alors holomorphes autour de $x=0, y=0$.

9. Nous venons de dire que dans le deuxième cas une solution $\psi(x,y)$ de l'équation (E) ne sera en général pas holomorphe autour de $x=0$, $y=0$. Mais elle sera régulière autour de tout point $x=a$, $y=a$, a étant assez voisin de l'origine. Il est intéressant de se demander ce qu'elle devient si le point a tourne une fois autour de l'origine [1] : on pourra, après le mouvement, retrouver la solution dont on est parti, ou la même solution multipliée par une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces différents cas sont faciles à distinguer : la première équation (7) donne $\psi^{(q)}(x)$ sous la forme

$$x^{\frac{r'}{p'}}(a_0+a_1x+\ldots),$$

$\frac{r'}{p'}$ étant irréductible et p' un diviseur de $p\,(p=p'k)$. Il résulte des formules (7) que les p solutions de l'équation (E) se divisent en k systèmes de p' solutions se permutant entre elles dans le mouvement précédent.

L'étude complète de la singularité de $\psi(x,y)$ autour de $x=y=0$ est très compliquée; elle est en effet étroitement liée à celle de la

[1] En d'autres termes, si l'on fait tourner simultanément les deux points x et y, maintenus très voisins, autour de l'origine.

singularité des fonctions permutables avec $f(x, y)$ autour de l'origine. Nous nous contenterons de montrer l'ordre des difficultés qui se présentent, dans un cas particulier où l'équation (E) peut se réduire directement à une équation intégrale, à laquelle s'applique la méthode d'approximations successives.

III. — Étude directe, dans un cas particulier, de l'équation (E).

10. C'est le cas particulier où l'équation est homogène en x et y. Prenons, pour fixer les idées, l'équation du second degré

$$(e)\qquad \int_x^y \psi(x, \xi)\psi(\xi, y)\,d\xi = (y-x)[x^m + A_1 x^{m-1}(y-x) + \ldots + A_m (y-x)^m],$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant des coefficients constants. En recherchant sa solution sous la forme

$$\sum_0^\infty {}_i\,\psi^{(i)}(x)\frac{(y-x)^i}{i!},$$

on s'aperçoit [formules (7)] que la fonction $\psi^{(i)}(x)$ est homogène en x et de degré $\frac{m}{2} - i$. On est donc conduit à chercher directement $\psi(x, y)$ sous la forme

$$x^{\frac{m}{2}} u\left(\frac{y-x}{x}\right),$$

$u\left(\frac{y-x}{x}\right)$ étant une nouvelle fonction inconnue *d'une variable*. L'équation (e) s'écrit, en posant

$$\frac{y-x}{x} = t, \qquad \frac{\xi - x}{x} = \tau,$$

$$\int_0^t x^{\frac{m}{2}} u(\tau)\, x^{\frac{m}{2}} (1+\tau)^{\frac{m}{2}} u\left(\frac{t-\tau}{1+\tau}\right) x\,d\tau = (y-x)[x^m + A_1 x^{m-1}(y-x) + \ldots],$$

d'où

$$\int_0^t u(\tau)\, u\left(\frac{t-\tau}{1+\tau}\right)(1+\tau)^{\frac{m}{2}}\,d\tau = t(1 + A_1 t + \ldots + A_m t^m)$$

et, en dérivant une fois par rapport à t,

$$u(t)\,u(o)(1+t)^{\frac{m}{2}}+\int_0^t u(\tau)\,u'\left(\frac{t-\tau}{1+\tau}\right)(1+\tau)^{\frac{m}{2}-1}d\tau$$
$$=[1+2A_1t+\ldots+(m+1)A_m t^m].$$

On en conclut que $u(o)$ est égal à 1 et, en posant $\frac{t-\tau}{1+\tau}=\tau'$,

$$u(t)(1+t)^{\frac{m}{2}}+\int_0^t u\left(\frac{t-\tau'}{1+\tau'}\right)u'(\tau')\frac{(1+t)^{\frac{m}{2}}}{(1+\tau')^{\frac{m}{2}+1}}d\tau'=(1+2A_1t+\ldots),$$

d'où en divisant par $(1+t)^{\frac{m}{2}}$, puis en dérivant par rapport à t, l'équation intégrale

$$(8)\qquad u'(t)\left[1+(1+t)^{-\frac{m}{2}-1}\right]+\int_0^t u'\left(\frac{t-\tau}{1+\tau}\right)u'(\tau)\frac{d\tau}{(1+\tau)^{\frac{m}{2}+2}}=G(t),$$

propre à déterminer la dérivée $u'(t)$. La fonction

$$G(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1+2A_1t+\ldots}{(1+t)^{\frac{m}{2}}}\right]$$

est une fonction connue.

11. L'équation (8) peut être traitée par approximations successives et il est aisé de montrer la convergence de ces approximations au voisinage de $t=0$; on en déduit la solution de l'équation (e) au voisinage de tout point $x=a$, $y=a$, a étant différent de zéro.

L'étude de la solution $\psi(x,y)$ au voisinage de $x=0$, $y=0$ nécessite au contraire la connaissance de la fonction $u'(t)$ pour toutes les valeurs de t. Cette dernière étude est difficile, car, s'il est très aisé d'étudier les singularités des diverses approximations successives, on n'est plus assuré, l'équation n'étant pas *linéaire*, que sa solution a pour seules singularités celles de ces approximations successives : on ne peut plus affirmer la convergence de la série des approximations successives, partout en dehors de leurs singularités; il y a même bien des chances pour que cette convergence n'ait pas lieu.

CHAPITRE IV.

NOUVELLE ÉTUDE DES FONCTIONS PERMUTABLES AVEC UNE FONCTION DONNÉE.

I. — But de ce Chapitre; un théorème sur les fonctions permutables.

1. J'ai été conduit aux résultats exposés dans ce Chapitre, en cherchant à répondre à diverses questions qui se posent à propos d'un résultat très simple, qui a joué son rôle au Chapitre I ([1]).

Rappelons d'abord ce résultat : soit $f(x,y)$ une fonction holomorphe dans un certain domaine, par exemple

$$(d) \qquad |x| \leqq R, \qquad |y| \leqq R,$$

où son module est borné par le nombre M. Soit la série

$$(1) \qquad a_0 f(x,y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x,y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y) + \ldots;$$

les modules de ses différents termes sont respectivement inférieurs aux termes de la série

$$|a_0| M + |a_1| M^2 \frac{|y-x|}{1!} + \ldots + |a_n| M^{n+1} \frac{|y-x|^n}{n!} + \ldots,$$

de sorte que : *Si la série*

$$(2) \qquad a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

représente une fonction de z analytique autour de l'origine, la série (1) *convergera pour x et y situés dans le domaine* (d) *et de plus suffisamment voisins, et elle représentera une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$.*

2. A ce point, il est naturel de se poser les questions suivantes : réciproquement, peut-on obtenir toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$ par des séries telles que (1)? Si c'est impossible, quelles

---

([1]) *Cf.* Chapitre I, n^{os} 3 et 6.

sont les fonctions permutables avec $f(x, y)$ que l'on peut obtenir par des séries telles que (1)?

L'étude de ces questions est très simple dans un cas particulier qui pourra donner une idée du cas général : prenons $f(x, y) = 1$, il vient alors

$$\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) = \frac{(y - x)^n}{n!},$$

et les fonctions permutables avec $f(x, y)$ sont toutes les fonctions $\varphi(y - x)$. Celles de ces fonctions qui sont analytiques, et celles-là seulement, admettent des développements de la forme (1). Les autres peuvent, si elles sont continues, se représenter comme séries convergentes de polynomes symboliques

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{n} [\alpha_n^{(0)} f(x, y) + \alpha_n^{(1)} \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + \alpha_n^{(p)} \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y)];$$

c'est le théorème même de Weierstrass sur le développement en série de polynomes d'une fonction continue.

L'étude des mêmes questions dans le cas général, étude faite dans ce Chapitre, nous conduira à une nouvelle manière de répondre à la question suivante :

Étant donnée une fonction $f(x, y)$ holomorphe autour de l'origine $(x = 0, y = 0)$, déterminer toutes les fonctions holomorphes autour de l'origine et permutables avec elle.

Elle nous fournira de plus des résultats importants et très simples sur les fonctions permutables avec une fonction $f(x, y)$ que nous supposerons, et ce sera essentiel, analytique.

Remarquons enfin que nous aurons ainsi, pour étudier les fonctions permutables, deux méthodes, celle du Chapitre II et celle-ci : si elles s'appliquent au même problème, ces deux méthodes s'y appliquent de façon suffisamment différente pour ne pas faire double emploi et pour mériter d'être étudiées toutes deux. Elles peuvent d'ailleurs se prêter un mutuel appui, comme nous en verrons un exemple au paragraphe III.

3. Voici, d'abord, un théorème sur les fonctions permutables qui nous servira par la suite.

THÉORÈME. — *Si deux fonctions permutables $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ admettent respectivement en facteur exactement $(y-x)^a$ et $(y-x)^b$, et si l'on pose*

$$f(x,y) = (y-x)^a g(x,y),$$
$$\varphi(x,y) = (y-x)^b h(x,y),$$

on a

$$\frac{[h(x,x)]^{a+1}}{[g(x,x)]^{b+1}} = \text{const.}$$

Nous avons déjà démontré ce théorème comme conséquence de la recherche des fonctions permutables effectuée au Chapitre II. Ici nous procédons en sens inverse et sur le théorème précédent, démontré directement, nous baserons la recherche des fonctions permutables.

En voici la démonstration directe qui nécessite simplement l'existence et la continuité des premières dérivées de $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ (¹). On doit avoir

$$(4) \qquad \int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi - \int_x^y \varphi(x,\xi) f(\xi,y)\,d\xi = 0,$$

d'où, en dérivant $p+1$ fois par rapport à y,

$$\sum_0^p{}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i}[f(x,y)\,\varphi_{p-i}(y,y) - \varphi(x,y) f_{p-i}(y,y)]$$
$$+ \int_x^y [f(x,\xi)\,\varphi_{p+1}(\xi,y) - \varphi(x,\xi) f_{p+1}(\xi,y)]\,d\xi = 0,$$

avec les notations abrégées

$$\varphi_k(x,y) = \frac{\partial^k \varphi(x,y)}{\partial y^k}, \qquad f_k(x,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x,y),$$

d'où, en faisant $y = x$,

$$(5) \quad \sum_0^p{}_i \sum_0^i{}_s C_i^s \left\{ f_s(x,x) \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}}[\varphi_{p-i}(x,x)] - \varphi_s(x,x) \frac{d^{i-s}}{dx^{i-s}}[f_{p-i}(x,x)] \right\} = 0.$$

(¹) Cette démonstration est donc bien plus générale que celle du Chapitre II; nulle restriction relative à l'ordre ou à l'analyticité n'est nécessaire.

Dans le cas qui nous occupe, les fonctions

$$f(x, x),\quad f_1(x, x),\quad \ldots,\quad f_{a-1}(x, x),$$
$$\varphi(x, x),\quad \varphi_1(x, x),\quad \ldots,\quad \varphi_{b-1}(x, x)$$

sont identiquement nulles, tandis que

$$f_a(x, x),\quad \varphi_b(x, x)$$

ne sont pas identiquement nulles. Alors la première équation (5) qui ne soit pas vérifiée identiquement, correspond à $p = a + b + 1$ et s'écrit

$$(a+1) f_a(x, x) \frac{d}{dx} \varphi_b(x, x) - (b+1) \varphi_b(x, x) \frac{d}{dx} f_a(x, x) = 0,$$

d'où le résultat demandé

$$\frac{[\varphi_b(x, x)]^{a+1}}{[f_a(x, x)]^{b+1}} = \text{const.}$$

Si $a = b$ on en tire, λ étant une constante,

$$\varphi_a(x, x) - \lambda f_a(x, x) = 0,$$

et, si $b > a$, il suffira de prendre $\lambda = 0$ pour satisfaire à la même équation, d'où le corollaire suivant, d'un grand intérêt pour la suite :

$f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ étant des fonctions permutables telles que la première admette exactement, la seconde au moins, $(y - x)^a$ en facteur, on peut toujours trouver une constante λ et une seule telle que

$$\varphi(x, y) - \lambda f(x, y)$$

admette au moins $(y - x)^{a+1}$ en facteur.

II. — Les fonctions analytiques permutables avec une fonction analytique $f(x, y)$ telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul.

4. Donnons d'abord une définition ; considérons un développement, convergent ou non, peu importe dans ce numéro, procédant suivant

les puissances positives de x et y. Soit

$$(6) \qquad \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q c_{pq} x^p y^q;$$

nous le désignerons par la notation abrégée $f(x, y)$. Si on le compose avec lui-même 1, 2, ..., n fois, on obtient des développements analogues

$$\overset{*}{f}{}^2(x, y), \quad \overset{*}{f}{}^3(x, y), \quad \ldots, \quad \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

très bien définis. De plus, leur degré minimum total par rapport à x et à y va en croissant : si par exemple $f(x, y)$ commence par un terme constant, $\overset{*}{f}{}^2(x, y)$ commencera par des termes du premier degré, $\overset{*}{f}{}^3(x, y)$ par des termes du deuxième degré, etc. Soient alors

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

des nombres arbitraires, l'expression

$$(7) \qquad a_0 \overset{*}{f}(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots$$

représentera un développement analogue à (6), soit

$$(8) \qquad \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q c_{p,q} x^p y^q.$$

Ceci résulte de ce que, d'après la remarque précédente, il n'entre dans le développement (7) qu'un nombre fini de termes d'un degré déterminé, de termes en $x^p y^q$ par exemple.

Donnons-nous inversement un développement (8) ; il pourra arriver qu'il se laisse mettre sous la forme (7). Si cela est, il sera bien facile de le reconnaître, du moins théoriquement, et les a_n seront déterminés de façon unique.

Définition. — *Nous dirons de toute série* (8) *qui se laisse mettre sous la forme* (7), *qu'elle est composée de* f.

5. Soit une fonction $f(x, y)$ holomorphe autour de $x = 0$, $y = 0$, et telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul.

Nous allons déterminer, d'abord quant à leur forme, toutes les fonctions holomorphes autour de l'origine et permutables avec $f(x, y)$. En effet :

I. *Toute série des puissances de x et de y convergente autour de l'origine et composée de $f(x, y)$ représente une fonction $\varphi(x, y)$ répondant à la question.*

Car si $\varphi(x, y)$ est une telle série, de forme

$$a_0 f + a_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1} + \ldots,$$

en écrivant que

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f},$$

on obtient certaines relations entre les $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, relations dont chacune ne contient, d'après une remarque précédente, qu'un nombre fini de ces $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Comme ces relations sont vérifiées identiquement quand les $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont en nombre fini non nuls, elles sont identiquement vérifiées.

II (Réciproque). *Toute série des puissances de x et de y, représentant une fonction $\varphi(x, y)$ holomorphe autour de l'origine et permutable avec $f(x, y)$, est composée de f.*

Appliquons en effet le corollaire du n° **3**. Les fonctions $f(x, y)$, $\overset{*}{f}{}^2(x, y), \ldots, \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y), \ldots$ admettent respectivement en facteur $(y-x)^0$, $(y-x)^1$, ..., $(y-x)^n$, ... On peut donc trouver un nombre a_0 tel que

$$\varphi(x, y) - a_0 f(x, y)$$

admette au moins $(y - x)$ en facteur, et généralement un nombre a_n tel que

$$\varphi(x, y) - a_0 f(x, y) - \ldots - a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

admette au moins $(y - x)^{n+1}$ en facteur. Mais alors cette différence n'a pas de terme en x et y de degré inférieur à $n + 1$. Il en est de même de la différence

$$\varphi(x, y) - \sum_{0}^{\infty}{}_p \, a_p \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y).$$

C'est dire que cette dernière différence est identiquement nulle, ou que $\varphi(x, y)$ est composée de $f(x, y)$.

Ainsi nous aurons toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ en formant tous les développements

$$\sum_0^\infty{}_p\, a_p \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y), \tag{7}$$

tels que la série

$$\sum\sum c_{pq} x^p y^q,$$

obtenue en ordonnant la série (7), converge autour de l'origine. Ceci n'entraîne pas *a priori* la convergence de la série (7). Nous allons voir que si, en cherchant quelle condition ceci entraîne pour a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

6. Nous nous restreindrons d'abord, dans cette étude, au cas où la fonction $f(x,y)$ est du *premier ordre*, et nous supposerons même que, par le changement de variable déjà envisagé au Chapitre II, on l'ait réduite sous une forme telle que

$$f(x, x) = 1.$$

Dans un certain domaine de l'origine, les fonctions $\dfrac{n!\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n}$ seront holomorphes. C'est dire qu'elles admettront par exemple pour $|x| \leqq h$ et $|y-x| \leqq R$, des développements convergents (séries entières de $y-x$)

$$\frac{n!\overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p\, (y-x)^p g_p^{(n)}(x),$$

les $g_p^{(n)}(x)$ étant des fonctions holomorphes de x pour $|x| \leqq h$.

Nous aurons besoin de développements majorant les précédents, c'est-à-dire de limites supérieures des

$$|g_p^{(n)}(x)|.$$

Soit d'abord

$$f(x, y) = 1 + \sum_1^\infty{}_p\, (y-x)^p g_p^{(0)}(x).$$

Nous pouvons toujours trouver ρ plus petit que R et tel qu'on ait, pour $|x| \leqq h$,

$$|g_p^{(0)}(x)| < \frac{1}{\rho^p}.$$

Il est alors aisé de prouver le lemme suivant :

On peut trouver un nombre positif a tel que $2a < \rho$ et tel que dans le domaine

$$\text{(D)} \qquad |x| \leqq a, \qquad |y| \leqq a,$$

on ait

$$(8) \qquad \frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_p (y-x)^p \gamma_p^{(n)}(x,y),$$

$\gamma_p^{(n)}(x,y)$ étant une fonction de x et y analytique dans (D) et telle que

$$|\gamma_p^{(n)}(x,y)| < \frac{1}{\rho^p};$$

le développement (8) étant, puisque $2a < \rho$, convergent dans D.

Il suffit de prendre a assez petit pour que le développement précédemment écrit de $f(x,y)$ vérifie les conditions du lemme $\left(\text{donc } a < \frac{\rho}{2}\right.$ et $\left. a < h\right)$. Montrons en effet que si le lemme est vrai pour $\overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y)$ il est vrai pour $\overset{*}{f}{}^{n+2}(x,y)$. Il vient

$$\overset{*}{f}{}^{n+2}(x,y) = \int_x^y \left[\frac{(\xi-x)^n}{n!}\sum_{0}^{\infty}{}_p (\xi-x)^p \gamma_p^{(n)}(x,\xi)\right]\left[\sum_{0}^{\infty}{}_p (y-\xi)^p g_p^{(0)}(\xi)\right] d\xi;$$

les séries qu'on intègre étant absolument et uniformément convergentes, on en tire

$$\begin{aligned}
\overset{*}{f}{}^{n+2}(x,y) &= \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{0}^{\infty}{}_q \frac{1}{n!}\int_x^y (\xi-x)^{n+p}(y-\xi)^q \gamma_p^{(n)}(x,\xi)\, g_q^{(0)}(\xi)\, d\xi \\
&= \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{0}^{\infty}{}_q \frac{(y-x)^{n+p+q+1}}{n!}\int_0^1 t^{n+p}(1-t)^q \\
&\qquad \times \gamma_p^{(n)}[x, x+t(y-x)]\;\; g_q^{(0)}[x+t(y-x)]\, dt \\
&= \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg\{ 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_\pi (y-x)^\pi (n+1) \sum_{p+q=\pi} \int_0^1 t^{n+p}(1-t)^q \\
&\qquad \times \gamma_p^{(n)}[x, x+t(y-x)]\;\; g_q^{(0)}[x+t(y-x)]\, dt \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Reste à prouver que

$$\gamma_p^{(n+1)}(x,y) = (n+1) \sum_{i+j=p}^{\infty} \int_0^1 t^{n+i}(1-t)^j$$
$$\times \gamma_i^{(n)}[x, x+t(y-x)] g_j^{(0)}[x+t(y-x)]\, dt$$

est en module inférieur à $\frac{1}{\rho^p}$ dans le domaine D. Or

$$|\gamma_p^{(n+1)}(x,y)| < (n+1) \sum_{i+j=p} \frac{(n+i)!\,j!}{(n+i+j+1)!} \frac{1}{\rho^i} \frac{1}{\rho^j}$$
$$< \frac{n+1}{n+p+1} \frac{1}{\rho^p} \sum_{i+j=p} \frac{(n+i)!\,j!}{(n+p)!}.$$

Il faut prouver que

(9) $$\frac{n+1}{n+p+1} \sum_{i+j=p} \frac{(n+i)!\,j!}{(n+p)!} < 1.$$

Si $n=0$ cette inégalité est vraie, car on a au premier membre la somme de $p+1$ quantités inférieures ou égales à 1 divisée par $p+1$. Si $n>1$, elle est aussi vérifiée car la somme $\sum\limits_{i+j=p}$ contient un terme égal à 1 et p termes inférieurs ou égaux à $\frac{1}{p+n}$; le premier membre de (9) est donc inférieur à

$$\frac{n+1}{n+p+1}\left(1+\frac{p}{n+p}\right) = \frac{n+1}{n+p+1}\,\frac{n+2p}{n+p} < 1.$$

Le lemme est ainsi démontré.

On peut alors, dans un domaine

(D') $$\begin{cases} |x| \leqq \alpha, \\ |y-x| \leqq R_1, \end{cases}$$

avec $\alpha + R_1 < a$, développer $\gamma_p^{(n)}(x,y)$ sous la forme

$$\gamma_p^{(n)}(x,y) = \sum_0^{\infty}{}_i (y-x)^i \chi_{p,i}^{(n)}(x);$$

les $\chi_{p,i}^{(n)}$ étant des fonctions de x analytiques dans (D') et telles que

$$|\chi_{p,i}^{(n)}(x)| < \frac{1}{\rho^p}\,\frac{1}{R_1^i} < \frac{1}{R_1^{i+p}}.$$

En ordonnant la série double ainsi obtenue suivant les puissances de $(y-x)$ on a un développement

$$\frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p (y-x)^p g_p^{(n)}(x),$$

et il résulte des inégalités précédentes que, pour

$$|x| \leqq \alpha,$$

on a

$$|g_p^{(n)}(x)| < \frac{p+1}{R_1^p} < \frac{1}{r^p},$$

r étant un nombre qu'il est facile d'assigner. Nous avons ainsi le résultat suivant :

On a

$$\frac{n!\,\overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y)}{(y-x)^n} = 1 + \sum_1^\infty{}_p (y-x)^p g_p^{(n)}(x),$$

il existe deux nombres r et α tels que pour

$$|x| \leqq \alpha$$

on ait

$$|g_p^{(n)}(x)| < \frac{1}{r^p}.$$

7. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant, qui vient compléter ceux du n° **5** :

Toute fonction $\varphi(x,y)$, permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour de $x=0$, $y=0$, peut s'écrire

$$(10) \qquad \varphi(x,y) = a_0 f(x,y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x,y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x,y) + \ldots,$$

les $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant arbitraires sous la seule restriction que la série

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

représente, autour de $z=0$, une fonction holomorphe de z. La série (10) est alors absolument convergente dans un certain domaine autour de $x=0$, $y=0$.

Faisons dans l'équation (10) $x = 0$, il vient

$$(11) \qquad \varphi(0, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{p} d_p y^p = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} a_n \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \frac{y^{n+i}}{n!} h_i^{(n)},$$

les d_p étant certains coefficients, les $h_i^{(n)}$ d'autres coefficients tels que

$$h_i^{(n)} = g_i^{(n)}(0).$$

Et, d'après le n° 5, la série du premier membre de (11) doit être identiquement égale à celle obtenue en ordonnant, suivant les puissances de y, le second membre de la même équation. Donc

$$d_p = \sum_{n+i=p} \frac{a_n}{n!} h_i^{(n)},$$

ou

$$d_p = \frac{a_p}{p!} + \sum_{1}^{p}{}_{i} \frac{a_{p-i}}{(p-i)!} h_i^{(p-i)}.$$

Nous pouvons toujours, en supposant r assez petit, admettre que

$$|d_p| \leqq \frac{M}{r^p};$$

nous avons aussi, d'après le numéro précédent,

$$|h_i^{(p-i)}| < \frac{1}{r^i}.$$

Les a_p sont donc en module inférieurs aux a'_p définis par les relations

$$(12) \qquad \frac{a'_p}{p!} = \frac{M}{r^p} + \sum_{1}^{p}{}_{i} \frac{a'_{p-i}}{(p-i)!} \frac{1}{r^i} \qquad (p = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Mais des relations (12) on tire

$$a'_p = p! \frac{2^p M}{r^p}.$$

Il est clair alors que la série

$$\sum \frac{a_p z^p}{p!}$$

représentera autour de l'origine une fonction holomorphe de z.

Ainsi $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ choisis, comme nous devons le faire au n° **5**, de façon que la série double

$$\Sigma c_{pq} x^p y^q,$$

obtenue en ordonnant la série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y),$$

représente $\varphi(x, y)$, sont de plus tels que cette série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

converge absolument et uniformément et représente donc effectivement $\varphi(x, y)$. C'est le résultat annoncé. Il peut servir de réciproque au résultat énoncé au n° **1**, et, réunissant dans un même énoncé la proposition directe et la réciproque, on peut dire :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *On obtiendra toutes les fonctions analytiques permutables avec $f(x, y)$ en formant tous les développements*

$$a_0 f(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots,$$

les $a_0, a_1, \ldots, a_n$ étant seulement tels que la série

$$\Sigma a_n \frac{z^n}{n!}$$

converge.

8. Indiquons enfin deux propositions qui ne sont pas essentiellement distinctes de la précédente et dont en tout cas la démonstration directe est très simple, après les considérations du n° **6**.

Si une série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) \tag{12}$$

est telle qu'en ordonnant ses termes par rapport aux puissances de x et de y on obtienne une série double $\Sigma_p \Sigma_q c_{pq} x^p y^q$ convergente, cette série (12) *est absolument et uniformément convergente.*

Si une série

$$\Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) \tag{12}$$

est convergente en un point x_1, y_1 voisin de l'origine $x = 0$, $y = 0$, *les a_n sont tels que la série*

$$\Sigma a_n \frac{z^n}{n!}$$

converge et la série (12) *converge pour tout le voisinage de $x = 0$, $y = 0$.*

9. Le résultat fondamental du n° **7** semble limité au cas d'une fonction $f(x, y)$ telle que

$$f(x, x) = 1. \tag{13}$$

Mais comme le changement de variable employé pour réaliser cette égalité (13) ne modifie pas les nombres a_n introduits au n° **5**, le *théorème* fondamental subsiste pour toute fonction holomorphe $f(x, y)$ autour d'un point $x = a$, $y = a$, où elle est du premier ordre.

La restriction de l'ordre est elle-même sans importance. Soit $f(x, y)$ homolorphe autour de $x = \alpha$, $y = \alpha$, quand le point du plan complexe α est intérieur à une aire A, et telle que $f(x, x)$ ne soit pas identiquement nul. Elle est du premier ordre, sauf autour des points de l'aire A qui vérifient l'équation

$$f(x, x) = 1.$$

Ce sont des points isolés. Soit alors une fonction $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$ et analytique autour d'un point $x = \alpha$, $y = \alpha$ intérieur à l'aire A. On pourra toujours supposer que α ne soit pas un zéro de $f(x, x)$. Mais alors on aura

$$\varphi(x, y) = \Sigma a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y), \tag{13}$$

les a_n étant tels que

$$\Sigma a_n \frac{z^n}{n!}$$

converge. La série (13) converge donc et représente $\varphi(x, y)$ au voisinage de n'importe quel point $x = \beta$, $y = \beta$ intérieur à l'aire A, et même *au voisinage des zéros de $f(x, x)$*. C'est, *dans le cas particulier où $f(x, x)$ n'est pas identiquement nul, et dans ce cas seulement*, un complément important au résultat du Chapitre II (n° **12**) : *Toute* *fonction permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour d'un point de la multiplicité $y=x$ est holomorphe autour de tous les points de cette multiplicité, y compris les zéros de $f(x, x)$.*

On aurait pu faire l'étude des fonctions $\varphi(x,y)$ au voisinage d'un zéro de $f(x, x)$ par la méthode du Chapitre II, généralisée comme nous l'avons brièvement indiqué au Chapitre III (n° **2**) : on est alors conduit à définir les fonctions permutables par des approximations successives qui ont des singularités autour de ce zéro, alors que, d'après le résultat précédent, les fonctions permutables elles-mêmes n'en possèdent pas. *Ainsi, au moins dans ce cas, la méthode du Chapitre III* (n° **2**) *donne une idée très imparfaite et trop complexe de la nature analytique des fonctions permutables avec $f(x,y)$.* C'est pourquoi nous ne nous sommes pas attachés au développement de cette méthode.

10. Voici, enfin, des applications des considérations précédentes à la résolution d'équations intégrales des deux types envisagés précédemment, c'est-à-dire

$$\overset{*}{\psi}\overset{*}{\chi}=\overset{*}{\varphi} \tag{14}$$

et

$$\overset{*}{\chi}{}^{n}=\overset{*}{\omega}, \tag{15}$$

$\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $\omega(x,y)$ étant des fonctions connues et $\chi(x,y)$ l'inconnue.

Imaginons que φ, ψ, ω soient holomorphes autour de $x=\alpha$, $y=\alpha$, α étant un point de l'aire (A) précédente et qu'ils soient permutables avec $f(x,y)$. On pourra les représenter, quand x et y seront voisins d'un point quelconque de l'aire (A) par les séries convergentes

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \overset{*}{f}{}^{a}(\alpha_0+\alpha_1\overset{*}{f}+\alpha_2\overset{*}{f}{}^2+\ldots),\\ \psi(x,y) &= \overset{*}{f}{}^{b}(\beta_0+\beta_1\overset{*}{f}+\beta_2\overset{*}{f}{}^2+\ldots),\\ \omega(x,y) &= \overset{*}{f}{}^{c}(\gamma_0+\gamma_1\overset{*}{f}+\gamma_2\overset{*}{f}{}^2+\ldots), \end{aligned} \tag{16}$$

avec [pour que (14) et (15) aient des solutions]

$$a>b \qquad \text{et} \qquad c \text{ multiple de } n.$$

On pourra donc représenter $\chi(x,y)$ par des développements du même type, eux aussi convergents au voisinage de tout point du domaine (A):

ces développements étant obtenus, pour l'équation (14) par *quotient* des deux séries (16) et (17), pour l'équation (15) par l'*extraction d'une racine* $n^{\text{ième}}$ de la série (18).

Le résultat obtenu, bien fait pour mettre en évidence l'importance de la notion de permutabilité, peut s'énoncer ainsi :

Si les données d'une équation (14) *ou* (15) *sont analytiques et permutables avec une fonction $f(x,y)$ telle que $f(x,x)$ ne soit pas identiquement nul, la solution n'admet les points où $f(x,x)$ s'annule que comme singularités apparentes.*

Nous sommes en chacun de ces points dans les conditions étudiées au Chapitre I (n° **15**).

III. — Les fonctions non analytiques permutables avec $f(x,y)$ telle que $f(x,x)$ ne soit pas identiquement nul.

11. Nous utiliserons ici simultanément les méthodes du Chapitre II et celles du paragraphe précédent. Commençons par quelques remarques préliminaires : Supposons qu'autour de l'origine $f(x,x)=1$ [1] et posons

$$\overset{*}{f}{}^{n+1}(0,y)=f_n(y).$$

Nous aurons

$$f_n(y)=\frac{y^n}{n!}\left(1+\sum_1^\infty {}_p\, y^p h_p^n\right)$$

avec

$$|h_p^n|<\frac{1}{r^p}.$$

Remarquons d'autre part que nous avons démontré incidemment que :

Si $\varphi(y)$ est une fonction holomorphe de y pour $|y|\leqq r_0$, on peut déterminer un nombre r_1 tel que $\varphi(y)$ soit développable dans le

[1] Cette supposition n'ayant, comme précédemment, pas d'influence sur les résultats qui seront valables au voisinage de tout point $y=x$ autour duquel $f(x,y)$ est du premier ordre. La restriction de l'ordre est maintenant essentielle.

domaine $|y| \leqq r_1$ *en série absolument et uniformément convergente*

$$a_0 f_0(y) + a_1 f_1(y) + \ldots + a_n f_n(y) + \ldots. \tag{19}$$

Il faudra en effet déterminer les a_n par la condition déjà écrite (nº **7**)

$$\sum_{0}^{\infty}{}_p d_p x^p = \sum_{0}^{\infty}{}_n a_n \sum_{0}^{\infty}{}_i \frac{y^{n+i}}{n!} h_i^n.$$

Mais si $|\varphi(y)| < M$, nous avons

$$|d_p| < \frac{M}{r_0^p} < \frac{M}{r^p},$$

en diminuant r si c'est nécessaire. Les calculs du nº **7** donnent alors

$$|a_n| < n! \left(\frac{2}{r}\right)^n M$$

et permettent dès lors d'affirmer la convergence de la série (19) dans le domaine

$$|y| \leqq r_1 < \frac{r}{2}.$$

On peut alors prouver que :

Si $\varphi(y)$ *est une fonction de la variable réelle* y *continue pour* $-r_0 < y < +r_0$, *on peut trouver un nombre* r_1 *et des constantes* $a_p^{(n)}$ *tels que, dans le domaine* $-r_1 < y < +r_1$, *on ait*

$$\varphi(y) = \sum_{0}^{\infty}{}_n [a_0^{(n)} f_0(y) + \ldots + a_p^{(n)} f_p(y)],$$

cette série étant absolument et uniformément convergente.

Il suffit pour cela de prouver que l'on peut, par un polynome en $f_0(y)$, $f_1(y)$, ..., approcher de $\varphi(y)$ à moins de ε. C'est tout à fait immédiat. On peut tout d'abord trouver un polynome ordinaire en y, $\mathfrak{P}(y)$, tel que

$$|\varphi(y) - \mathfrak{P}(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } -r_0 \leqq y \leqq +r_0.$$

Prenant alors r_1, nombre quelconque inférieur à $\frac{r}{2}$, on peut trouver, d'après le résultat précédent, une suite

$$\sum_0^p{}_n a_n f_n(y)$$

telle que, pour $|y| \leq r_1$, on ait

$$\left| \varphi(y) - \sum_0^p{}_n a_n f_n(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où, pour $-r_1 \leq y \leqq + r_1$,

$$\left| \varphi(y) - \sum_0^p{}_n a_n f_n(y) \right| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. Il n'est plus difficile maintenant de démontrer le résultat essentiel que nous avons en vue dans ce paragraphe.

THÉORÈME. — *Toutes les fonctions $\varphi(x,y)$ des variables réelles x et y, définies et continues dans le voisinage de l'origine et y étant permutables avec $f(x,y)$, sont développables, dans le voisinage de l'origine, en série uniformément et absolument convergente de type*

$$(19) \quad \varphi(x,y) = \sum_0^\infty{}_n [a_0^{(n)} f(x,y) + a_1^{(n)} \overset{*}{f}{}^2(x,y) + \ldots + a_p^{(n)} \overset{*}{f}{}^{p+1}(x,y)].$$

En effet, d'après les résultats du Chapitre II (nº 6), une fonction $\varphi(x,y)$ permutable avec $f(x,y)$ peut être caractérisée par ses valeurs

$$\varphi(o, y) = \varpi(y)$$

et est alors donnée par la formule

$$\varphi(x,y) = \varpi(y-x) + \int_0^{y-x} \varpi(\eta)\, L(\eta \mid x, y)\, d\eta.$$

Tout revient donc à démontrer le développement (19) où l'on fait $x=o$; mais c'est précisément ce que nous avons fait au numéro précédent.

13. Insistons sur la signification des résultats ainsi obtenus. Toutes les fonctions permutables avec l'unité sont de forme $\varphi(y-x)$, ce sont les fonctions d'une variable $y-x$. Toutes les fonctions permutables avec $f(x,y)$, fonctions dont l'ensemble dépend aussi d'une fonction arbitraire, peuvent être considérées comme généralisant les fonctions d'une variable. Les propriétés démontrées dans les deux paragraphes précédents ne font que généraliser les propriétés classiques des fonctions d'une variable :

Toute fonction analytique d'une variable est développable en série de Taylor.

Toute fonction continue d'une variable est développable en série de polynomes.

Il est aisé de poursuivre plus loin l'analogie : nous allons montrer que la théorie des polynomes de Tchebicheff s'étend sans difficultés.

14. Soient $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ deux fonctions permutables des variables réelles x et y, définies et continues dans un domaine $\mathfrak{D}$, par exemple celui que nous avons couvert de hachures dans la figure

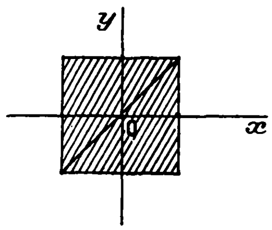

Fig. 5 *bis*.

ci-dessus. Essayons de représenter $f(x,y)$, dans ce domaine, par un polynome symbolique

$$A_0 f + A_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + A_n \overset{*}{f}{}^{n+1}$$

et formons la différence

$$y = \varphi - A_0 f - A_1 \overset{*}{f}{}^2 - \ldots - A_n \overset{*}{f}{}^{n+1}.$$

La fonction $|y|$, continue dans le domaine $\mathfrak{D}$, y atteindra au moins une fois son maximum m. Quand les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ vont varier, ce maximum sera une fonction

$$m(A_0, A_1, \ldots, A_n).$$

C'est une fonction continue, constamment positive si nous admettons, ce qui n'est pas une restriction, que φ ne coïncide pas avec l'une des fonctions

$$A_0 f + A_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + A_n \overset{*}{f}{}^n.$$

Cette fonction $m(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ aura donc une limite inférieure μ lorsque les nombres A_0, A_1, ..., A_n prennent toutes les valeurs possibles.

Reste à prouver que cette limite inférieure est effectivement atteinte. Pour cela, nous remarquerons, comme dans la théorie ordinaire des polynomes de Tchebicheff [1], que l'on a

$$\mu \leqq m(0, 0, \ldots, 0) = \max |\varphi(x, y)| = \mathrm{M};$$

nous pouvons donc, sans modifier le minimum, nous restreindre aux polynomes pour lesquels on a

$$m \leqq \mathrm{M}.$$

Mais ces polynomes sont tels que les modules de leurs coefficients soient bornés, car de

$$|\varphi(x, y) - A_0 f - A_1 \overset{*}{f}{}^2 - \ldots| < \mathrm{M},$$

on tire

$$|A_0 f + A_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots| < 2\mathrm{M}.$$

Cela suffira à prouver que A_0, A_1, ... sont bornés supérieurement si l'on peut trouver $n + 1$ systèmes de valeurs de x et de y

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad \ldots, \quad x_n y_n, \quad x_{n+1} y_{n+1}$$

tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1 & \overset{*}{f}{}_1^2 & \ldots & \overset{*}{f}{}_1^{n+1} \\ f_2 & \overset{*}{f}{}_2^2 & \ldots & \overset{*}{f}{}_2^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n+1} & \overset{*}{f}{}_{n+1}^2 & \ldots & \overset{*}{f}{}_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

---

[1] *Cf.* BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions de variable réelle*, p. 82 et suiv.

ne soit pas nul. Les coefficients A_0, A_1, ..., A_n peuvent alors s'obtenir par résolution d'équations du premier degré à déterminant non nul et à second membre borné par la quantité $2M$; ils sont donc bornés.

Qu'il soit possible de trouver les $(n+1)$ systèmes de valeurs de x et de y, c'est une conséquence de la proposition immédiate suivante : il ne peut exister, quels que soient x et y, une relation de forme

$$M_0 f + M_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + M_n \overset{*}{f}{}^{n+1} = 0$$

sans que l'on ait

$$M_0 = M_1 = \ldots = M_n.$$

Le déterminant précédent peut en effet s'écrire

$$M_0 f_1 + M_1 \overset{*}{f}{}_1^2 + \ldots + M_n \overset{*}{f}{}_1^{n+1} = 0.$$

M_0, M_1, ..., M_n étant des constantes en x_1 et y_1. S'il n'existe pas de système x_1, y_1 tel qu'il soit différent de zéro, c'est que M_0 en particulier sera nul. Mais c'est un déterminant de même type à une ligne de moins, etc.

Nous avons montré ainsi l'existence d'un polynome d'approximation. On voit comme les raisonnements suivent pas à pas ceux de la théorie ordinaire des polynomes de Tchebicheff.

IV. — Les fonctions permutables avec une fonction analytique $f(x, y)$ admettant $(y-x)^n$ en facteur.

15. Nous nous restreignons de nouveau dans ce Chapitre à la recherche des fonctions *analytiques* permutables avec $f(x, y)$.

Prenons donc une fonction $f(x, y)$ quelconque holomorphe quand x et y sont voisins d'un point a intérieur à un domaine ω du plan complexe. Elle pourra avoir en facteur une puissance quelconque de $(y-x)$: soit $(y-x)^n$. Nous venons de traiter le cas de $n=0$; si $n>0$, la première dérivée de f non identiquement nulle pour $y=x$ sera

$$\left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right]_{y=x} = \alpha(x);$$

c'est une fonction de x holomorphe dans ω et pouvant y avoir des zéros isolés a, b, c, ... Résolvons alors l'équation

$$\overset{*}{\psi}{}^{n+1}(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

ce que nous savons faire. Nous déterminons ainsi une fonction holomorphe au voisinage de tout point $x = y = \alpha$, α étant un point du domaine $\mathfrak{D}$ ne coïncidant pas avec a, b, c, ... Les fonctions permutables avec $f(x,y)$ seront les mêmes que les fonctions permutables avec $\psi(x,y)$. En effet, il est d'abord évident que toute fonction permutable avec $\psi(x,y)$ le sera avec $f(x,y)$; inversement, si

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} \quad \text{ou} \quad \overset{*}{\psi}{}^{n+1}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}{}^{n+1},$$

je dis que

$$\overset{*}{\psi}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}.$$

En effet, posons

$$\overset{*}{\psi}\overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} = \overset{*}{\chi}.$$

Il vient pour χ l'équation

$$\overset{*}{\psi}{}^{n}\overset{*}{\chi} + \overset{*}{\psi}{}^{n-1}\overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi} + \ldots + \overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi}{}^{n} = 0, \tag{2}$$

d'où l'on conclut que χ est identiquement nul [*cf.* Chap. III (nº 6), éq. (7)].

Mais $\psi(x,x)$ n'est pas identiquement nul. Nous pouvons donc appliquer à la recherche des fonctions permutables avec $\psi(x,y)$ les méthodes des paragraphes précédents et dire :

Toute fonction permutable avec $f(x,y)$ et holomorphe autour d'un point de la multiplicité $y = x$ est holomorphe autour de tout point de cette multiplicité, mis à part les zéros de la première dérivée de f non identiquement nulle pour $x = y$; elle est donnée par un développement

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu \overset{*}{\psi}{}^{\nu+1}(x,y).$$

les coefficients a_ν étant tels que la série

$$\Sigma a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$$

converge.

Parmi les conséquences immédiates de cette forme des fonctions permutables, citons le théorème démontré par M. Vessiot (*cf.* Chap. II, n° **5**) : « Deux fonctions permutables avec une même troisième sont permutables entre elles. » Mais nous supposons ici les fonctions analytiques.

16. Un cas important à caractériser sera celui où l'un des zéros, a par exemple, serait un point régulier pour toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$. Il sera pour cela *nécessaire et suffisant* que la solution $\psi(x, y)$ de l'équation (1) soit holomorphe autour de $x = y = a$. Nous savons (Chap. III, n° **8**) reconnaître s'il en est ainsi.

La condition est en effet nécessaire puisque $\psi(x, y)$ est l'une particulière des fonctions cherchées, elle est suffisante d'après le résultat du n° **9** sur les fonctions permutables avec une fonction n'admettant pas $y - x$ en facteur.

17. Plaçons-nous dans le cas où cette circonstance ne se produit pas en a, a étant par exemple l'origine. Dans ce cas il existe des fonctions permutables avec $f(x, y)$ et non holomorphes autour de $x = y = 0$: que peut-on dire alors de celles des fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ qui sont holomorphes à l'origine ? Cette question est bien dans l'ordre d'idées qui nous a occupé tout le long de ce travail.

Il est clair qu'il existe des fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes autour de $x = y = 0$; par exemple les fonctions

$$(3) \qquad a_0 f(x, y) + a_1 \overset{*}{f}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y) + \ldots,$$

les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant tels que $\Sigma a_n \frac{\alpha^n}{n!}$ converge. La formule (3) peut-elle inversement représenter toutes les fonctions permutables avec f et holomorphes autour de l'origine? C'est la question que nous allons étudier et qui se rapproche de celle à laquelle nous avons consacré le début de ce Chapitre.

Dans le cas que nous allons étudier, l'équation

$$(1) \qquad \overset{*}{\psi}{}^{n+1}(x, y) = f(x, y)$$

n'a pas de solution holomorphe autour de l'origine. Mais il pourra arriver qu'une autre équation

$$\overset{*}{\psi}{}^{p}(x, y) = f(x, y) \tag{4}$$

ait une solution holomorphe autour de l'origine. Nous remplacerons alors la fonction f par la fonction ψ. De sorte que, dans l'étude suivante, nous pourrons supposer, et c'est essentiel, que :

A. *Aucune équation telle que* (4) *n'a de solution holomorphe autour de* $x = y = 0$.

18. Cherchons alors à démontrer que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor convergente

$$\Sigma c_{pq} x^p y^q$$

représente une fonction $\varphi(x, y)$ *permutable avec* $f(x, y)$ *est qu'elle soit composée de* $f(x, y)$.

Je crois ce résultat exact, sauf peut-être dans des cas très particuliers; j'indiquerai plus loin des cas étendus dans lesquels on peut le démontrer. Je vais prouver ici qu'il serait conséquence du résultat suivant, auquel il est d'ailleurs tout à fait équivalent :

B. *Toute équation en* $\psi(x, y)$

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\psi}(x, y) = F_1(x, y),$$

où $F_1(x, y)$ *et* $f_1(x, y)$ *sont des fonctions holomorphes autour de l'origine et permutables avec* $f(x, y)$, *admet, autour de l'origine, une solution holomorphe.*

Soit, en effet, $\varphi(x, y)$ une fonction régulière autour de $x = y = 0$ et permutable avec $f(x, y)$. Elle admet au moins $(y - x)^n$ en facteur. Si, en effet, elle admet seulement en facteur $(y - x)^p$ $(p < n)$, la résolution de l'équation

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} = \overset{*}{f}$$

donnera une nouvelle fonction holomorphe $\psi(x, y)$ permutable avec les précédentes et ayant en facteur $(y-x)^q$ $(q<n)$. D'où, si $p>q$ par exemple, une troisième fonction χ telle que

$$\dot{\psi}\dot{\chi}=\dot{\varphi}.$$

Toutes les fonctions ainsi obtenues sont, d'après l'hypothèse B, holomorphes; l'exposant de $(y-x)$ y va en décroissant. On pourra arriver ainsi à une fonction holomorphe permutable avec $f(x, y)$ et n'admettant plus $(y-x)$ en facteur, cela voudra dire (nº **10**) que l'équation

$$\dot{\varpi}^{n+1}(x, y)=\dot{f}$$

admet une solution holomorphe, ce qui contredit A. Ou bien le procédé s'arrêtera; il faudra alors qu'à un moment donné deux des fonctions, ψ et χ par exemple, aient en facteur la même puissance de $y-x$, soit $(y-x)^b$: alors on ne pourra pas écrire l'équation suivante. Mais il est aisé de voir alors que $n=ab+a-1$, a étant un entier, et de prouver qu'en vertu de l'hypothèse B l'équation

$$\dot{\varpi}^a=f$$

admettrait une solution holomorphe autour de l'origine; ce qui contredit encore l'hypothèse A.

La fonction $\varphi(x, y)$ admet donc au moins $(y-x)^n$ en facteur. Mais alors, d'après le corollaire du nº **5**, on peut trouver une constante a_0 telle que

$$\varphi(x, y)-a_0 f(x, y)$$

admette au moins $(y-x)^{n+1}$ en facteur. Cette nouvelle fonction admettra au moins $(y-x)^{2n+1}$ en facteur, sinon on en déduirait, par résolution de

$$\dot{f}\dot{\chi}=\dot{\Phi},$$

une fonction holomorphe permutable avec f et admettant moins de $(y-x)^n$ en facteur. On pourra donc trouver une nouvelle constante a_1 telle que

$$\varphi(x, y)-a_0 f(x, y)-a_1 \dot{f}^2(x, y)$$

admette en facteur au moins $(y-x)^{2n+2}$. Mais cette différence aura alors au moins $(y-x)^{2n+2}$ en facteur et ainsi de suite. Le lecteur s'est déjà aperçu que la démonstration se développe toute parallèle à celle que nous avons donnée pour $n=0$, à cela près qu'il a fallu admettre la proposition B.

19. Il faut étudier cette proposition B. Je n'ai pu, ni démontrer en général que :

B'. *Toute équation*

$$\overset{\bullet}{f_1}\overset{\bullet}{\psi}=\overset{\bullet}{\varphi_1},$$

telle que f_1 et φ_1 soient holomorphes autour de $x=y=0$ et permutables, a une solution holomorphe; ni donner des exemples du contraire. Je me contente de faire observer que la proposition B' serait une conséquence de la suivante :

C. *Une fonction analytique, permutable avec une fonction holomorphe autour de l'origine $x=y=0$ et qui admet, au voisinage de cette origine, les seules multiplicités de ramification $x=0$ et $y=0$, est tout à fait régulière autour de $x=y=0$.*

C entraîne bien B', car la solution $\overset{\bullet}{\psi}$ de l'équation $\overset{\bullet}{f_1}\overset{\bullet}{\psi}=\overset{\bullet}{F_1}$ admet, d'après les résultats du Chapitre I, les seules ramifications $x=0$ et $y=0$.

Or, si par les méthodes que j'ai rapidement indiquées au Chapitre III, on pousse, un peu plus que nous ne l'avons fait, l'étude de la singularité autour de $x=y=0$ des fonctions permutables avec $f(x,y)$, on se rendra compte que la proposition C est vraie, au moins en général.

20. Laissant de côté la démonstration de B', nous allons considérer un cas étendu où cette proposition est vraie, et où l'on peut affirmer, par conséquent, le théorème de la page 90.

Considérons la dérivée

$$\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right]_{y=x}=f_n(x,x),$$

elle admet un développement de forme

$$x^p(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots),$$

p étant un entier positif. Le cas où p est nul a été étudié déjà et n'offre pas de difficultés. Nous allons démontrer le théorème de la page 90 dans le cas où p et $n + 1$ sont premiers entre eux : nous montrerons en effet que dans ces conditions une fonction holomorphe permutable avec $f(x, y)$ doit admettre en facteur $(y - x)$ à une puissance égale à un multiple de $n + 1$ moins 1 ; et c'est là la conséquence de la proposition B qui nous a servi à prouver le théorème de la page 90.

Soit, en effet, $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x, y)$, admettant en facteur $(y - x)^{n'}$ et telle que

$$\left[\frac{\partial^{n'} \varphi(x, y)}{\partial y^{n'}}\right]_{y=x} = \varphi_{n'}(x, x) = x^{p'}(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots),$$

on doit avoir (*cf.* n° **3**)

$$\frac{[\varphi_{n'}(x, x)]^{n+1}}{[f_n(x, x)]^{n'+1}} = \text{const.},$$

d'où

$$p'(n + 1) = p(n' + 1),$$

et, comme p et $n + 1$ sont premiers entre eux, on en tire

$$(n' + 1) = \lambda(n + 1).$$

λ étant entier. C'est le résultat annoncé.

Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit qu'on pourra démontrer le théorème de la page 90 dans des cas de plus en plus étendus.

21. Lorsque le théorème de la page 90 est vrai, toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ holomorphes autour de $x = 0$, $y = 0$ et permutables avec $f(x, y)$ s'obtiennent en prenant tous les développements

$$a_0 f + a_1 \overset{*}{f}{}^2 + a_2 \overset{*}{f}{}^3 + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n+1} + \ldots,$$

les constantes a_0, a_1, ..., a_n étant arbitraires sous la seule restriction que la série

$$\Sigma c_{pq} x^p y^q$$

converge. Précisons la condition ainsi imposée à ces constantes.

Soit $\psi(x, y)$ la fonction, non régulière autour de l'origine, telle que

$$\overset{*}{\psi}{}^{n+1}(x, y) = f(x, y).$$

Autour d'un point $x = y = \alpha$, distinct de l'origine, mais voisin, on a

$$\varphi(x, y) = \Sigma \alpha_\nu \overset{*}{\psi}{}^{\nu+1}(x, y),$$

la série

$$\sum \frac{\alpha_\nu z^\nu}{\nu!}$$

convergeant. Mais nécessairement

$$a_p = \alpha_{pn+p+n},$$

de sorte que ces a_p doivent être tels que la série

$$(1) \qquad \sum \frac{a_p z^{pn+p+n}}{(pn+p+n)!} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{a_p z^p}{(pn+p+n)!}$$

converge. Cette condition est d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante imposée aux a_p : je dis en effet qu'elle entraîne la convergence absolue et uniforme, autour de $x = y = 0$, de la série

$$(2) \qquad \Sigma a_p \overset{*}{f}{}^{p+1}(x, y).$$

Faisons en effet varier x et y dans le domaine suivant : ils sont tous

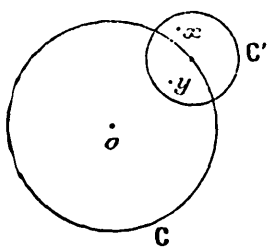

Fig. 5 *ter*.

deux intérieurs à un petit cercle C' de rayon ρ dont le centre décrit un cercle C de centre l'origine et de rayon r. Dans un tel domaine, si le rayon ρ est assez petit, la série (2) converge, car ses termes sont en modules inférieurs à ceux de la série

$$\sum |a_p| \frac{|y-x|^{pn+p+n}}{(pn+p+n)!} N^{pn+p+n+1},$$

N étant un maximum de $\psi(x, y)$. Or, on peut écrire la série (2)

$$(2') \qquad \sum_0^\infty{}_p (y-x)^{pn+p+n}\, \Pi_p(x, y).$$

$\Pi_p(x, y)$ étant holomorphe quand x et y sont voisins de zéro; $\Pi_p(x, y)$ est, lorsque x et y restent dans le domaine précédent, limité par $\frac{1}{R^p}$, R étant un nombre bien choisi. Il est alors facile de trouver un développement majorant $\Pi_p(x, y)$ au voisinage de l'origine; car si x est le centre du cercle C′, on a

$$\Pi_p(x, y) = \sum (y-x)^q\, \Pi_{p,q}(x),$$

$\Pi_{p,q}(x)$ étant une fonction de x régulière dans et sur le cercle C et inférieure à $\frac{1}{R^p \rho^q}$ puisque le développement précédent converge dans et sur C′. La fonction $\Pi_{pq}(x)$ est donc majorée dans C par

$$\frac{1}{R^p \rho^q \left(1 - \frac{x}{r}\right)}$$

et $\Pi_p(x,y)$ par

$$\frac{1}{R^p} \frac{1}{\left(1 - \frac{y+x}{\rho}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)}.$$

Il n'en faut pas plus pour affirmer la convergence absolue et uniforme autour de l'origine de (2′) ou de (2).

22. Une remarque pour terminer. Nous avons été amené, dans ce qui précède, à étudier la convergence des séries

$$\sum a_n \overset{*}{f}{}^{n+1}(x, y)$$

généralisant, dans notre théorie, les séries de puissances d'une variable.

Il n'est pas plus difficile d'étudier la convergence des séries généralisant, dans notre théorie, les séries des puissances de plusieurs variables : cette étude conduira à déterminer les hypothèses *les plus générales* qu'on puisse faire sur les coefficients d'une série déterminant une équation intégrale du type (a') envisagé au Chapitre I (p. 10), pour que cette équation intégrale ait un sens. Ces hypothèses sont à peu près celles que nous avons faites au n° 6 de ce Chapitre; en tout cas, la méthode de M. Volterra donnée au Chapitre I s'appliquera toujours.

V. — Conclusion.

23. Toutes les équations étudiées précédemment rentrent dans la classe générale des équations qu'on peut former à partir de fonctions inconnues et de fonctions connues par des additions et des compositions. Nous avons développé, pour leur résolution, deux méthodes principales : la première consiste à les réduire à une équation résoluble par approximations successives, cette réduction étant toute réalisée (Chap. I, équations des paragraphes I et II) ou s'obtenant par dérivation [équation de Volterra de première espèce, équation (e) du Chapitre III] et par changement d'inconnue (Chap. II). La seconde méthode consiste à rechercher la solution sous la forme

$$\Sigma (y-x)^p \, \Pi_p(x).$$

Les méthodes de ce Chapitre appartiennent à ce second type.

24. Ces deux catégories de méthodes s'appliquent à toute équation de la classe précédente : c'est ainsi que M. Volterra a appliqué les méthodes du Chapitre II aux équations

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_2} = \overset{*}{F},$$

φ étant inconnue, f_1 et f_2 deux fonctions connues du premier ordre, F une fonction connue d'ordre supérieur (¹). Cette équation admet

(¹) Cours fait à l'Université de Rome en 1912-1913. Il serait aisé, après les développements du Chapitre II, de passer à des cas plus généraux.

une seule solution lorsque

$$f_1(x, x) \neq f_2(x, x);$$

elle admet (comme l'équation $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$) une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire si $f_1(x, x) = f_2(x, x)$. Cet exemple aidera à comprendre que les deux équations principales

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{F}, \tag{1}$$

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = 0 \tag{2}$$

sont respectivement types de deux grandes catégories d'équations de la classe précédente : la solution des équations de la première catégorie étant déterminée, celle des autres dépendent de fonctions arbitraires. La distinction des deux classes est très aisée si l'on emploie la deuxième méthode rappelée au n° **22** : les équations du type (1) étant telles que, pour déterminer les $\text{H}_p(x)$ successifs, on ait à résoudre des équations algébriques, les équations du type (2) telles que pour déterminer les $\text{H}_p(x)$ on ait à résoudre des équations différentielles.

Remarquons enfin que la multiplicité $y = x$ jouera, pour les équations de cette classe les plus générales, le même rôle essentiel que pour les équations particulières que nous avons étudiées : les solutions de ces équations y seront régulières, sauf en des points fixes jouant le rôle des points où $f(x, y)$ cesse d'être d'un ordre déterminé.