JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE GEVREY

Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 10 (1914), p. 105-148.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10__105_0>

Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite);

PAR MAURICE **GEVREY**.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS SINGULIÈRES.

Étant donnée l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

nous avons supposé jusqu'ici (¹) que, dans la région $\mathcal{R}$ où nous l'envisagions, le coefficient b *gardait un signe constant sans s'annuler* et restait d'ailleurs fini. Étudions maintenant le cas où b *s'annule dans* $\mathcal{R}$ *le long d'une ligne* L, dont nous pourrons préciser plus tard la nature; pour le moment, supposons que L n'admette pas de tangente caractéristique, à moins d'être elle-même caractéristique : nous aurons donc à examiner deux genres d'équations, que nous appelons *équations singulières*.

63. Réduction a une forme canonique. — D'après ce que nous venons de dire, il y a deux cas à envisager.

1. L *n'est ni caractéristique ni tangente à une caractéristique.* —

(¹) *Voir*, pour les Chapitres I, II et III (§ **1** à **62**), le *Journal de Mathématiques* de 1913. Le lecteur est prié de se reporter à ce premier Mémoire pour les notations s'il y a lieu et, d'une façon générale, *pour tout ce qui concerne les paragraphes* **1** *à* **62**. Voir dans l'Introduction p. 313 ce qui a rapport aux Chapitres **IV** et **V**.

Supposons que L ne soit coupée qu'en un point par les caractéristiques, et soit $x = \varphi(y)$ son équation. Nous prenons le coefficient b sous la forme

$$b = -[x - \varphi(y)]^p \mathrm{B}(x, y), \tag{1}$$

en supposant tout d'abord que p soit *un nombre entier positif*. La fonction B garde, dans la région $\mathcal{R}$ envisagée, un signe constant, qu'on peut toujours choisir positif. En prenant une nouvelle variable x', au lieu de x, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + a\frac{\partial x'}{\partial x} - (x-\varphi)^p \mathrm{B}\frac{\partial x'}{\partial y}\right]\frac{\partial z}{\partial x'}$$
$$- (x-\varphi)^p \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0.$$

Déterminons la fonction x' de x et de y par la condition

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 = \frac{[x-\varphi(y)]^p \mathrm{B}(x, y)}{x'^p},$$

et, pour cela, posons

$$\frac{2\,|x'|^{\frac{p+2}{2}}}{p+2} = \left|\int_{\varphi(y)}^{x} |x-\varphi|^{\frac{p}{2}}\sqrt{\mathrm{B}}\,dx\right| = |x-\varphi|^{\frac{p+2}{2}}\int_0^1 t^{\frac{p}{2}}\sqrt{\mathrm{B}[\varphi + t(x-\varphi), y]}\,dt.$$

Désignant par $\mathfrak{B}$ l'intégrale de cette formule, il nous suffira donc de prendre

$$x' = \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{2}{p+2}}[x - \varphi(y)]\,[\mathfrak{B}(x, y)]^{\frac{2}{p+2}},$$

et l'équation (E) deviendra

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - x'^p\frac{\partial z}{\partial y} + a'\frac{\partial z}{\partial x'} + c'z + f' = 0.$$

L'hypothèse de p *entier*, que nous avons faite, n'est ***nullement essentielle.*** Si, d'une manière générale, nous avions écrit b sous la forme

$$b = \pm|x - \varphi(y)|^\alpha \mathrm{B}(x, y) \qquad (\alpha \text{ positif quelconque}),$$

le signe $\pm$ signifiant que b peut ou non changer de signe quand on traverse la ligne L (mais garde un signe constant d'un même côté), nous aurions trouvé

$$x' = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} [x - \varphi(y)] [\psi(x, y)]^{\frac{2}{\alpha+2}}.$$

Nous obtenons, en définitive, x' en fonction de x d'une manière *univoque*. La transformation fait correspondre à L une portion de Oy, et elle est même *biunivoque* pour les points situés suffisamment près de L de part et d'autre. La fonction $\varphi(y)$ est supposée dérivable.

En supprimant les accents, nous avons donc réduit l'équation à la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f = 0,$$

ou

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm |x|^\alpha \frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f = 0.$$

Dans tout ce qui concerne ce genre d'équations singulières, nous les envisagerons sous la forme $(\mathcal{E})$. Tout ce que nous dirons du cas *où p est pair* s'appliquera *sans modification*, sauf mention expresse, au cas où, dans l'équation (1′), on prend le signe + *de chaque côté de* Oy; et tout ce que nous dirons du cas *où p est impair* s'appliquera au cas où, dans l'équation (1′), on prend le signe + *à droite* de Oy et le signe − *à gauche* (1).

II. L *est caractéristique.* — Dans ce cas, nous supposons que le coefficient b a la forme (avec $\varepsilon = \pm 1$)

$$b = \varepsilon y^p B(x, y) \qquad \text{ou} \qquad b = \pm |y|^\alpha B(x, y),$$

et un changement de variable analogue à celui du paragraphe **17** nous conduit à la forme

$$(\mathcal{E}') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

(1) Quand p est pair, le changement de variable que nous avons utilisé au paragraphe **17** ne peut servir ici, car il n'est pas biunivoque, et il introduit un pôle dans les coefficients.

ou à une forme analogue, dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ serait $\pm |y|^{\alpha}$, avec la même remarque que plus haut (1).

Il résulte de là que *les deux types les plus simples*, rentrant dans les formes $(\bar{\mathcal{E}})$ et $(\bar{\mathcal{E}}')$, sont

$$(\bar{e}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad (\bar{e}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(\bar{e}_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y), \qquad (\bar{e}'_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y).$$

I. — Cas où la ligne singulière n'est pas caractéristique.

Nous commençons donc par l'étude de l'équation $(\bar{e})$.

64. Solution fondamentale. — Si nous posons $s = x^q$, avec $q = p + 2$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{1}{s}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{q^2 s}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (q = p + 2),$$

équation d'un type étudié par M. Kepinsky (*Math. Annalen*, t. LXI), qui a envisagé

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{m+1}{s}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{n}{s}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

La solution fondamentale de l'équation (2) est

$$(3) \qquad \frac{s^{m+1}}{(y-\eta)^{m+1}} e^{-n\frac{s+\sigma}{y-\eta}} \zeta^{-m} G_m(\zeta) \qquad \left(\zeta = 2in\frac{\sqrt{s\sigma}}{y-\eta}\right),$$

G_m étant l'intégrale générale de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 G}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dG}{d\zeta} + \left(1 - \frac{m^2}{\zeta^2}\right) G = 0,$$

c'est-à-dire $G_m = AJ_m + BJ_{-m}$, la lettre J désignant la fonction de Bessel classique, en supposant $m \neq 0$.

---

(1) La notation ε n'a pas ici le même sens que la notation $\pm$, car nous supposons que ε ne change pas quand on traverse Ox (*voir* § **69**).

La fonction (3) est solution de (2) en s, y et de l'adjointe en σ, η; en revenant aux variables primitives, on aurait une solution de $(\overline{e})$, mais il faudrait diviser par ξ^{p+1} pour avoir une solution de l'adjointe.

Ayant ainsi prévu la forme de la solution, nous opérons synthétiquement en posant

$$U(\xi, \eta; x, y) = \frac{x\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} I(\theta) \qquad \left[\theta = \frac{(x\xi)^q}{q^4(y-\eta)^2}\right],$$

et, portant dans $(\overline{e})$, nous trouvons alors que I vérifie l'équation

$$I\frac{d^2 I}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{1}{q}\right)\frac{dI}{d\theta} - I = 0.$$

C'est une équation qui dérive de l'équation de Bessel, et dont la solution est de la forme $AI_{\frac{1}{q}}(\theta) + B\theta^{-\frac{1}{q}} I_{-\frac{1}{q}}(\theta)$, A et B étant des constantes et $I_m(\theta)$ désignant la fonction

$$I_m(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} = \frac{J_m(2i\sqrt{\theta})}{(i\sqrt{\theta})^m}.$$

Nous obtenons donc en définitive comme *solution fondamentale, valable dans tout le plan,*

$$U(\xi, \eta; x, y) = e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} \left[A \frac{x\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} I_{\frac{1}{q}}(\theta) + B \frac{q^{\frac{4}{q}}}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} I_{-\frac{1}{q}}(\theta) \right].$$

Appelons U_1 et U_2 les deux fonctions ainsi introduites, de sorte que $U = AU_1 + BU_2$: U est solution de la proposée et de l'adjointe : soit en x, y, de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

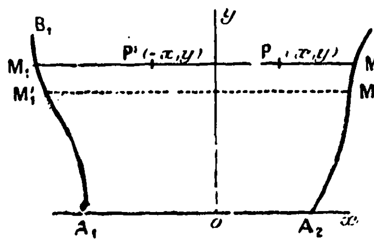
en ξ, η, de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi^p \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Nous allons avoir à distinguer deux cas, suivant la parité de p. Supposons tout d'abord que *p soit pair.*

65. Formule fondamentale. — Le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ n'étant jamais positif, le contour portant les données a la même disposition que les contours (C), envisagés dans l'étude de l'équation $\delta z = 0$ (premier Mémoire, p. 307 et § 1). Si ce contour est tout entier d'un même côté de Oy, on est ramené évidemment aux problèmes résolus au

Fig. 15.



Chapitre II. Mais en utilisant la solution fondamentale U, le résultat auquel nous parviendrons sera *indépendant de la situation* de (C).

En opérant comme il a été dit au paragraphe 1, nous trouvons (*fig.* 15) par la formule de Riemann (ou de Green)

$$\int_{M'_1}^{M'_2} \xi^p \, U z \, d\xi = \int_{M'_1 A_1 A_2 M'_2} \xi^p \, U z(\xi, \eta) \, d\xi + \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) d\eta.$$

Pour évaluer la limite du premier membre quand la caractéristique $M'_1 M'_2$, d'ordonnée $y - \varepsilon$, tend vers $M_1 M_2$, c'est-à-dire quand ε tend vers zéro, nous utiliserons la *valeur asymptotique* de $I_m(\theta)$, qui est

$$I_m(\theta) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{\theta}}}{\theta^{\frac{2m+1}{4}}} \qquad (\theta > 0).$$

Si nous posons $q = 2r$, donc $m = \frac{1}{q} = \frac{1}{2r}$, nous avons sur $M'_1 M'_2$

$$\theta = \left[\frac{(x\xi)^r}{4 r^2 \varepsilon} \right]^2, \qquad I_{\frac{1}{2r}}(\theta) \sim \frac{(2r)^{1+\frac{1}{r}}}{2\sqrt{\pi}} \left| \frac{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}{x\xi} \right|^{\frac{r+1}{2}} e^{\frac{|x\xi|^r}{2r^2\varepsilon}}.$$

D'où la valeur asymptotique du premier terme U_1 de la solution fondamentale

$$U_1 \sim \frac{(2r)^{1+\frac{1}{r}}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{1}{|x\xi|^{\frac{r-1}{2}}} e^{-\frac{(|x|^r - |\xi|^r)^2}{4r^2\varepsilon}}.$$

Si nous supposons P entre M_1 et M_2, tous les éléments de l'intégrale envisagée tendent vers zéro, sauf au voisinage des points $P(x, y)$ et $P'(-x, y)$, du moins si ce dernier point est entre M_1 et M_2. Suivant un raisonnement classique, que nous ne reproduirons pas, la partie de l'intégrale $\int_{M'_1}^{M'_2}$ qui contient U_1 aura donc pour limite, en ce qui concerne le point P (en supposant $x > 0$),

$$A \frac{(2r)^{1+\frac{1}{r}}}{2\sqrt{\pi}} z(x, y) \lim_{\varepsilon=0} \int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}|x\xi|^{\frac{r-1}{2}}} e^{-\frac{(x^r - \xi^r)^2}{4r^2\varepsilon}} \xi^{2(r-1)} d\xi.$$

Si nous posons $\xi^r = x^r + 2r\sqrt{\varepsilon}t$, l'intégrale précédente devient

$$2\int \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{r-1}{2}} e^{-t^2} dt,$$

h étant choisi de telle sorte que $\frac{\xi}{x}$ soit aussi voisin de *un* qu'on le veut. Quand ε tend vers zéro, les limites d'intégration deviennent $-\infty$ et $+\infty$, et nous obtenons, au total,

$$\text{en P} \quad A(2r)^{1+\frac{1}{r}} z(x, y), \qquad \text{en P}' \quad -A(2r)^{1+\frac{1}{r}} z(-x, y).$$

Un calcul tout à fait analogue nous donnerait, pour la partie contenant U_2, une limite égale à $B(2r)^{1+\frac{1}{r}}[z(x, y) + z(-x, y)]$.

Si donc nous prenons

$$(4) \qquad A = B = \frac{1}{2}(2r)^{-1-\frac{1}{r}} = \frac{1}{2} q^{-1-\frac{2}{r}},$$

nous obtenons en définitive *la formule fondamentale*

$$(5) \qquad z(x, y) = \int_{(C_y)} \xi^p U(\xi, \eta; x, y) z(\xi, \eta) d\xi + \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) d\eta,$$

valable quand P est entre M_1 et M_2, c'est-à-dire à l'intérieur de S [1], (C_y) désignant la partie de (C) située au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y. Si le contour était situé d'un même côté de Oy, il *suffirait* de prendre un seul des termes de la solution fondamentale, en ayant soin de doubler son coefficient; dans ce cas, comme dans le précédent, il peut se faire qu'une partie de (C) soit formée par un segment de Oy. Mais, en définitive, la formule est valable quel que soit (C), satisfaisant aux mêmes conditions que dans le paragraphe **1**.

Si nous avions supposé P sur le contour même, nous aurions trouvé la même formule, au facteur $\frac{1}{2}$ près dans le premier membre, à la condition toutefois de faire sur l'arc contenant P l'hypothèse (3) (§ **1**).

D'ailleurs, si nous faisons sur la fonction $X(y)$ les mêmes hypothèses que dans le paragraphe **2** et si, en posant $V(\xi, \eta; x, y) = \frac{\partial U}{\partial \xi}$, nous envisageons les intégrales

$$\mathfrak{I}_0 = \int_0^y U[X(\eta), \eta; x, y]\varphi(\eta)\,d\eta, \qquad \mathfrak{I} = \int_0^y V[X(\eta), \eta; x, y]\varphi(\eta)\,d\eta,$$

nous pouvons établir pour $\mathfrak{I}$ une limitation analogue à la formule (6) (§ **2**) et ainsi obtenir, par la même voie que dans ce paragraphe, P_0 étant un point de l'arc $x = X(y)$, la *formule de discontinuité* [2]

$$\lim_{P \to P_0} (\mathfrak{I}_P - \mathfrak{I}_{P_0}) = \pm \frac{A + B}{2} q^{1+\frac{2}{q}} \varphi(P_0).$$

---

(1) Il est manifeste, en effet, que l'hypothèse $x > 0$ faite plus haut n'a servi qu'à simplifier les notations. Mais nous avons supposé P′ dans S : s'il est à l'extérieur, il n'y a pas dans le calcul de terme $z(-x, y)$, et le résultat est le même. Si P′ est sur (C), les termes relatifs à P′ n'ont pas les valeurs indiquées, mais *ils se détruisent* à cause de $A = B$. Si P est sur Oy, $U_1 = 0$, et la deuxième intégrale seule intervient; mais comme, sur Oy, $z(-x, y) = z(x, y)$, le résultat final est toujours le même. Donc, la formule est valable *quel que soit* P *dans* S. La méthode employée est d'ailleurs applicable à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - |x|^\alpha \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, non seulement, d'après ce que nous avons déjà dit (§ **63**), pour $\alpha > 0$, mais encore pour $-1 < \alpha < 0$, c'est-à-dire $1 < q < 2$ (avec discontinuité de la dérivée seconde sur Oy). Pour $-2 < \alpha \leqq -1$, un examen spécial serait nécessaire.

(2) Si P_0 est sur Oy, il faut supposer $A = B$ dans la formule; celle-ci convient donc à tous les cas si A et B ont les valeurs (4).

66. Problèmes aux limites. — La formule de discontinuité nous permet d'obtenir la solution prenant des valeurs données sur un contour (C) coupant ou non Oy. Nous ne voulons pas reproduire à ce sujet des détails de calculs analogues à ceux qu'on rencontre dans l'étude de l'équation de la chaleur. Indiquons simplement la marche, qui est d'ailleurs tout à fait semblable à celle dont nous avons parlé dans le premier Chapitre. Désignant toujours par Φ_1, Φ_2, Φ les données sur A_1B_1, A_2B_2, A_1A_2, et supposant A_1A_2 sur Ox, nous formerons tout d'abord la fonction

$$\bar{z}(x, y) = \int_{a_1}^{a_2} U(\xi, o;\ x, y)\Phi_0(\xi)\,d\xi,$$

les notations ayant la même signification qu'au paragraphe **5** et les constantes de U ayant les valeurs (4). Puis, nous poserons

$$z - \bar{z} = \int_0^y V[X_1(\eta), \eta;\ x, y]\,\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_0^y V[X_2(\eta), \eta;\ x, y]\,\varphi_2(\eta)\,d\eta;$$

$\bar{z}$ prend les valeurs données sur A_1A_2 : nous avons donc à écrire que z se réduit à $\Phi_i(y)$ sur A_iB_i, ce qui nous donnera un système d'équations intégrales de deuxième espèce [1]. Les autres problèmes aux limites se traitent comme nous avons dit au paragraphe **5** : d'une manière générale, on exprime z par une somme d'intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ [2].

Unicité. — Si nous posons $z = u(l^2 - x^2)$, l'équation $(\bar{e})$ devient

$$(l^2 - x^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 4x\frac{\partial u}{\partial x} - 2u = o.$$

Si l est suffisamment grand, nous sommes donc dans les conditions

(1) *Du type de* Volterra [Le contour satisfaisant à la condition (Γ), § 3].

(2) Si l'arc A_1B_1, par exemple, est constitué entièrement par une portion de Oy, on utilisera des intégrales de la forme

$$\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q}{q^2(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta, \qquad \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q}{q^2(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta,$$

tout à fait analogues aux intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ du paragraphe **2**, pour lesquelles $q = 2$ (en supposant AM sur Oy).

envisagées au paragraphe **18** ($c < 0$) et par suite u ne peut admettre ni maximum positif, ni minimum négatif, propre ou impropre, relativement aux valeurs prises en tout point d'ordonnée inférieure ou égale. De là résulte, par le raisonnement habituel, *l'unicité d'une solution de l'équation* $(\overline{e})$, ou même $(\overline{e}_1)$, prenant des valeurs données sur un contour $\mathfrak{C}$ continu simple, formant avec toute caractéristique qui le coupe un ou plusieurs contours fermés; la solution est supposée régulière à l'intérieur du contour ainsi formé et continue sur $\mathfrak{C}$. D'ailleurs, ce que nous venons de dire est vrai pour toute équation (E) (p. 105) si $b \leqq 0$ et $c \leqq 0$ (*cf.* Picard, *Analyse*, t. II, p. 35, 2e éd.).

Dès lors, P étant un point intérieur au contour $\mathfrak{C}$, si M est le maximum d'une solution z de $(\overline{e})$ sur la partie de $\mathfrak{C}$ située au-dessous de la caractéristique passant par P, on a sûrement $z_P \leq$ M. Si, en effet, dans l'hypothèse contraire, on avait $z_P = M_1 > M$, sur tout rayon vecteur issu de P il existerait au moins un point où $z = N$, avec $M < N < M_1$; et le lieu de ce point serait un contour $\mathfrak{C}'$, sur lequel z serait constant, ce qui est impossible, puisque la seule solution de $(\overline{e})$ réalisant ce fait est la constante N. Ceci montre l'impossibilité d'un *maximum propre* relativement aux points d'ordonnée inférieure ou égale.

Le théorème du paragraphe **25** sur les séries des solutions est donc vrai pour l'équation $(\overline{e})$, d'après les considérations précédentes.

67. La fonction Z, solution de l'équation $(\overline{e}_1)$ — La formule fondamentale relative à l'équation

$$(\overline{e}_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

ne diffère de la formule (5) que par la présence, dans le second membre, de l'intégrale double (S_y désignant le domaine $M_1 A_1 A_2 M_2$)

$$Z(x, y) = -\iint_{S_y} U(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Ceci nous conduit à supposer que cette intégrale, où les constantes A et B de U ont toujours les valeurs (4), est solution de l'équation $(\overline{e}_1)$. La méthode à suivre pour le démontrer serait analogue à celle qui a été utilisée pour l'équation de la chaleur. Nous allons tout d'abord montrer l'existence de l'intégrale Z et de l'intégrale

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\int\!\!\int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial x} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Supposons, pour fixer les idées, $x > 0$ et envisageons l'intégrale (en supprimant l'indice S_y) $\int\!\!\int |U_1|\, d\xi\, d\eta$. Or, on peut écrire (¹)

$$|I_m(\theta)| < (K) \frac{e^{2\sqrt{|\theta|}}}{|\theta|^{\frac{2m+1}{4}}}.$$

Donc (en posant toujours $q = 2r$),

$$\int\!\!\int |U_1|\, d\xi\, d\eta < (K) \int\!\!\int \frac{e^{-\frac{(x^r - |\xi|^r)^2}{4r^2(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \frac{d\xi\, d\eta}{|x\xi|^{\frac{r-1}{2}}},$$

intégrale qui a parfaitement un sens, si ξ ne peut s'annuler, c'est-à-dire si l'aire envisagée n'est pas traversée par Oy. Dans le cas où ξ peut s'annuler, remarquons que nous pouvons écrire

$$(5') \qquad \left| I_{\frac{1}{q}}(\theta) \right| < (K) \frac{e^{2\sqrt{|\theta|}}}{|\theta|^{\alpha}},$$

pourvu que (²) $\alpha \leqq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2q}$. D'où

$$\int\!\!\int |U_1|\, d\xi\, d\eta < (K) \int\!\!\int \frac{e^{-\frac{(x^r - |\xi|^r)^2}{4r^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2r}-2\alpha}} |x\xi|^{1-2\alpha r}\, d\xi\, d\eta.$$

Nous pouvons prendre (puisque $q \geqq 2$)

$$\frac{1}{2r} < 2\alpha \leqq \frac{1}{r}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{q} < 2\alpha \leqq \frac{2}{q},$$

(¹) Ceci résulte de la valeur asymptotique de I_m. La notation (K) désigne *tout coefficient numérique fini* : voir § 2, note (⁴).

(²) Car α sera alors inférieur à l'exposant de θ dans le dénominateur de la valeur asymptotique de $I_{\frac{1}{q}} = I_{\frac{1}{2r}}$.

et alors l'exposant de $(y-\eta)$ sera inférieur à *un* et l'exposant de $|x\xi|$ sera positif ou nul.

Donc, l'intégrale *a un sens* et, quand x tend vers zéro, elle tend vers zéro. Si nous prenons $\alpha = \frac{1}{2r} = \frac{1}{q}$, le changement de variable $x^r - |\xi|^r = 2rt\sqrt{y-\eta}$ montre aisément que l'intégrale est $<(\mathrm{K})y^{\frac{2}{q}}$ quel que soit x.

Quant à $\int\int |\mathrm{U}_2|\, d\xi\, d\eta$, un raisonnement tout à fait analogue nous donne les mêmes conclusions.

Étudions maintenant l'intégrale $\int\int \left|\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta$. Remarquant que $\frac{d\mathrm{I}_m(\theta)}{d\theta} = \mathrm{I}_{m+1}(\theta)$, nous avons

$$\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x} = \frac{1}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} \left[\xi \mathrm{I}_{\frac{1}{q}} - \frac{x^q\xi}{q(y-\eta)} \mathrm{I}_{\frac{1}{q}} + \frac{(x\xi)^q\xi}{q^3(y-\eta)^2} \mathrm{I}_{\frac{1}{q}+1}\right].$$

$\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}$ se décompose donc en *trois* termes : voyons le premier. On se rend compte aisément que l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int\int \frac{1}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} \xi\, \mathrm{I}_{\frac{1}{q}}\, d\xi\, d\eta$$

a un sens si x et ξ ne s'annulent pas. Pour élucider le cas où ils peuvent s'annuler, envisageons tout d'abord la partie de l'aire située *à droite* de Oy (en supposant $x>0$) et partageons-la en deux régions 1 et 2 par la verticale d'abscisse $2x$. Dans la bande 1 qui contient P(x, y), nous avons $0 \leqq \frac{\xi}{x} \leqq 2$, et la formule (5′), avec $\alpha = \frac{1}{2q}$, nous permet d'écrire notre intégrale

$$\mathrm{J}_1 = \int\int_1 \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x\xi}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{(x^r-\xi^r)^2}{q^2(y-\eta)}} \mathrm{I}_{\frac{1}{q}}\, d\xi\, d\eta < (\mathrm{K}) \int\int_1 \frac{e^{-\frac{(x^r-\xi^r)^2}{q^2(y-\eta)}}}{y-\eta}\, d\xi\, d\eta.$$

En posant $\xi^r = x^r + tq\sqrt{y-\eta}$ pour $x \leqq \xi \leqq 2x$, nous obtenons une intégrale comparable à $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}\, dt}{(x^r + tq\sqrt{y-\eta})^{1-\frac{1}{r}}}$, qui a un sens, même si x tend vers zéro. D'autre part, dans la partie de la région 1 où l'on a $0 \leqq \xi \leqq x$, l'inégalité facile à vérifier $(2x-\xi)^r - x^r \leqq (2^r-1)(x^r-\xi^r)$ nous permet d'obtenir une intégrale de comparaison analogue à la précédente.

Pour la région 2 restante, dans laquelle $\xi \geqq 2x$, nous avons, en prenant $\alpha = 0$, une intégrale dont le module est plus petit que

$$(\mathrm{K})\int\!\!\int_2 \frac{\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{(x^r-\xi^r)^2}{q^2(y-\eta)}} d\xi\, d\eta < (\mathrm{K})\int\!\!\int_2 \frac{\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\lambda^2\xi^q}{q^2(y-\eta)}}$$

avec $\lambda = 1 - 2^{-r}$, puisque $\xi \geqq 2x$. Or, cette intégrale a un sens.

On opérerait de même pour la région située *à gauche* de Oy.

Donc, l'intégrale J a un sens, même quand x tend vers zéro; quand y tend vers zéro, on établit sans peine qu'elle est infiniment petite d'ordre $\frac{1}{q}$. Il est facile également de voir que cette intégrale est continue pour $x = 0$: il suffit, pour s'en convaincre, de partager l'aire en deux parties par une caractéristique voisine de $M_1 M_2$; l'intégrale relative à la partie inférieure est évidemment continue pour $x = 0$ et l'autre, d'après ce que nous venons de voir, peut être rendue aussi petite qu'on le veut, ce qui suffit à établir la continuité.

Les mêmes conclusions s'appliquent aux deux autres termes de la dérivée $\frac{\partial U_1}{\partial x}$; il est inutile de reproduire ici des calculs analogues aux précédents.

Quant à l'intégrale $\int\!\!\int \left|\frac{\partial U_2}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta$, son étude ne présente aucune difficulté. Nous obtenons en définitive des intégrales qui sont *des fonctions continues de* x, y : leurs valeurs pour $x = 0$ sont

$$Z(0, y) = B\, \frac{q^{\frac{1}{q}}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)} \int\!\!\int_{S_y} \frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(0, y) = \frac{A}{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)} \int\!\!\int_{S_y} \frac{\xi e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Les dérivées $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \frac{\partial Z}{\partial y}$ ne peuvent se calculer par la règle de Leibniz :

les mêmes raisonnements que dans le cas de l'équation de la chaleur s'appliquent ici, avec cette différence cependant que les points $P(x, y)$ et $P'(-x, y)$ *jouent le même rôle*. Dans les conditions d'existence de ces dérivées, relatives à $f(x, y)$, s'introduiront les courbes c ayant pour équation : $(|\xi|^r - |x|^r)^2 = \lambda(y-\eta)$ ou, ce qui revient au même, les paraboles envisagées aux paragraphes **8** et **9**, car si les conditions (A) sont supposées réalisées pour les paraboles, elles le sont pour les courbes c, et réciproquement. Nous obtiendrons donc les mêmes conditions d'existence, mais relatives *à la fois* aux points P et P'.

En décomposant l'intégrale Z en deux autres Z_1 et Z_2, correspondant à U_1 et U_2 $(Z = Z_1 + Z_2)$, nous trouverons alors

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z_1}{\partial y} = A q^{1+\frac{2}{q}} [f(x, y) - f(-x, y)],$$
$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z_2}{\partial y} = B q^{1+\frac{2}{q}} [f(x, y) + f(-x, y)];$$

d'où, en prenant pour A et B les valeurs (4) et additionnant,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z}{\partial y} = f(x, y).$$

Nous avons vu plus haut que les limitations de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ étaient respectivement de l'ordre de $y^{\frac{2}{q}}$ et $y^{\frac{1}{q}}$. Nous possédons par suite tous les éléments pour former une *fonction de Green* et appliquer aux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

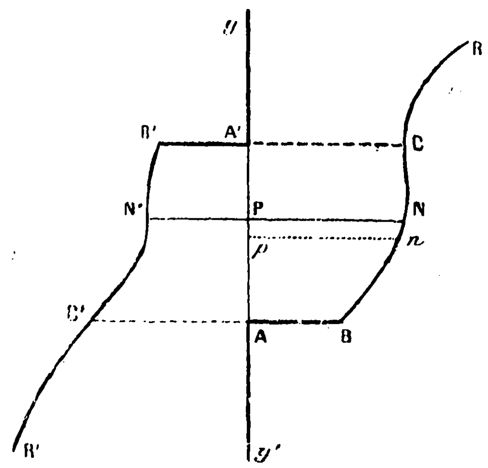
la méthode des approximations successives. Les théorèmes relatifs aux *séries de solutions* et ses applications aux *contours présentant des singularités* (§ **25** et **26**) subsistent ici sans modifications.

68. Étude du cas où p est impair : problème du raccordement. — Les formules obtenues jusqu'ici en supposant *p pair* sont vraies également, *quand p est impair*, pour un contour (C) situé d'*un même côté de* Oy et pouvant même comprendre une portion de cette droite :

si (C) est *à droite* de Oy, il devra être ouvert *vers le haut*, et *vers le bas* au contraire s'il est *à gauche*. Pour un contour coupant Oy, il se pose un problème d'un genre tout à fait spécial, et que nous appelons le *problème du raccordement*.

Envisageons le contour de la figure 16 : nous pouvons le considérer

Fig. 16.



comme résultant de la juxtaposition des contours $yABR$ et $y'A'B'R'$, à l'intérieur desquels une solution de l'équation $(\bar{e})$ est déterminée par les valeurs qu'elle prend au bord. Pour que deux solutions z et z' relatives à ces deux contours constituent *une seule et même solution régulière*, il faudra que les valeurs de z, z' et de leurs dérivées premières *se raccordent* sur la portion AA' de l'axe des y, commune aux deux contours.

Le problème consiste donc à déterminer *les valeurs que doit prendre z sur* AA' pour qu'il en soit ainsi, et cela en fonction des valeurs données sur ABC, $A'B'C'$. Si nous connaissons, de plus, les valeurs de z et z' sur CR et $A'y$, $C'R'$ et Ay' — ces valeurs formant un prolongement *continu* des précédentes à partir des points C et A', C' et A —, nous pourrons ainsi construire une solution régulière *à l'intérieur d'une bande ouverte dans les deux sens.*

Une première méthode pour arriver à ce résultat consisterait à opérer de la façon suivante : a et a' étant les ordonnées de A et A', la formule fondamentale appliquée au contour PABN et au point P nous donne (en posant toujours $q = p + 2$)

$$(6) \quad q^{1-\frac{2}{q}}\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)z(0, y)$$
$$= -\int_a^y \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \eta)}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} d\eta + \int_{\mathrm{ABN}} \xi^{q-2} u_2 z \, d\xi + \left(u_2 \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right) d\eta,$$

u_2 désignant la fonction

$$(6') \qquad u_2(\xi, \eta; y) = \frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}.$$

Si l'on peut éliminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur BC, on formera une relation entre $z(0, y)$ et $\frac{\partial z}{\partial x}(0, y)$. Opérant de même pour le contour PA'B'N', on trouvera une deuxième relation entre $z'(0, y)$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}(0, y)$. Identifiant les valeurs de $z(0, y)$ et $z'(0, y)$, on aura une relation vérifiée par la valeur commune de $\frac{\partial z}{\partial x}(0, y)$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}(0, y)$. Mais, comme il faudrait ensuite s'assurer du raccordement de $\frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial z'}{\partial y}$, nous allons opérer un peu différemment en réalisant tout d'abord le *raccordement des deux dérivées* de z et z'. Envisageons la fonction

$$(7) \qquad u_1(\xi, \eta; y) = \frac{\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}.$$

formée en dérivant U_1 par rapport à x et faisant $x = 0$. C'est une solution de l'équation adjointe et nous pouvons appliquer la formule de Riemann au domaine $p\mathrm{AB}n$: il vient

$$(8) \quad \int_p^n \xi^{q-2} u_1 z \, d\xi = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \xi^{q-2} u_1 z \, d\xi + \int_a^{y-\varepsilon} \frac{z(0, \eta)\, d\eta}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}$$
$$+ \int_{\mathrm{B}}^{n} \xi^{q-2} u_1 z \, d\xi + \left(u_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) d\eta.$$

y étant l'ordonnée de PN, $y - \varepsilon$ celle de pn. Une intégration par parties nous donne

$$(8') \qquad \int_p^n \xi^{q-2} u_1 z\, d\xi = \frac{-q}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}[z]_p^n + \int_p^n \frac{q}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2 \varepsilon}} \frac{\partial z}{\partial \xi}\, d\xi,$$

$$\int_a^{y-\varepsilon} \frac{z(o, \eta)\, d\eta}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} = q\left[\frac{z(o, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\right]_a^{y-\varepsilon} - q\int_a^{y-\varepsilon} \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}(o, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta.$$

Remarquons que nous pouvons toujours supposer les valeurs $z(o, a)$ et $z(o, a')$, c'est-à-dire z_A et $z_{A'}$, nulles : il suffit pour cela de prendre comme fonction inconnue, au lieu de z elle-même, la fonction $z - \zeta$, ζ étant la fonction linéaire en y, solution de $(\overline{e})$,

$$\zeta = z_A + \frac{z_{A'} - z_A}{a' - a}\left[y - a + \frac{x^q}{q(q-1)}\right].$$

Si, maintenant, nous faisons tendre ε vers zéro, il n'y a aucune difficulté à calculer la limite de la dernière intégrale de la formule (8'); d'autre part, les parties infinies se détruisent et il vient

$$(9) \qquad q^{\frac{2}{q}}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\partial z}{\partial x}(o, y)$$
$$= -q\int_a^y \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}(o, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta + \int_{\mathrm{ABN}} \xi^{q-2} u_1 z\, d\xi + \left(u_1\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) d\eta.$$

Il est facile d'obtenir une formule ne contenant pas les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur BN. En effet, on peut déterminer $\varphi(s, y)$ telle que la fonction

$$w(\xi, \eta; y) = \int_\eta^y \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}[\xi, \eta; \mathrm{X}(s), s]\, \varphi(s, y)\, ds,$$

solution de l'équation adjointe nulle sur PN et sur AP, prenne sur BN la même valeur que u_1 : il suffit de résoudre une équation intégrale (*voir* § **66**). Par suite, en utilisant dans les calculs précédents la fonction $u_1 - w$ au lieu de u_1, on trouve une relation de la forme

$$(10) \qquad q^{\frac{2}{q}}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\partial z}{\partial x}(o, y)$$
$$= -q\int_a^y \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}(o, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta - \int_a^y \frac{\partial w}{\partial \xi}(o, \eta; y)\, z(o, \eta)\, d\eta + \mathrm{F}(y),$$

$F(y)$ étant une fonction connue, renfermant les données sur ABC.

Une méthode toute semblable appliquée au contour AA′B′C′ nous donne une relation analogue :

$$(10') \quad q^{\frac{2}{q}}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\partial z'}{\partial x}(0, y)$$
$$= q\int_y^{a'} \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\frac{\partial z}{\partial \eta}(0,\eta)\,d\eta - \int_y^{a'}\frac{\partial w'}{\partial \xi}(0,\eta\,;y)\,z(0,\eta)\,d\eta + F_1(y).$$

Les valeurs des deux dérivées premières de z et z' devant *coïncider sur* Oy, les premiers membres des formules (10) et (10′) sont *identiques* et, en égalant les seconds membres et posant

$$q\,\mathfrak{F}(y,\eta) = \begin{cases} \displaystyle\int_\eta^y \frac{\partial w}{\partial \xi}(0, s\,; y)\,ds & \text{pour} \quad \eta < y \\ \displaystyle\int_y^\eta \frac{\partial w'}{\partial \xi}(0, s\,; y)\,ds & \text{pour} \quad \eta > y \end{cases} \qquad [\mathfrak{F}(y, y) = 0],$$

il vient facilement, après une intégration par parties,

$$(11) \quad \int_a^{a'}\left[\mathfrak{F}(y,\eta) + \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\right]\varphi(\eta)\,d\eta = \Phi(y) \qquad \left[\varphi(\eta) = \frac{\partial z}{\partial \eta}(0,\eta)\right],$$

Φ étant une fonction connue ($q\Phi = F - F_1$). Cette équation est une *équation de Fredholm de première espèce :* la partie $\mathfrak{F}$ du noyau est continue quand y et η appartiennent à l'intervalle (a, a') et la partie infinie change de signe quand η traverse la valeur y. Quant à Φ, si nous voulons que cette fonction soit continue aux bornes, il faudra supposer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}$ *existent en* A *et* A′, afin qu'une intégration par parties permette de faire disparaître le pôle qui s'introduit pour $y = a$ et $y = a'$ dans les intégrales $\int_A^B$ [formule (8)] et $\int_{A'}^{B'}$.

Si l'équation (11) admet une solution, nous en déduirons aisément la valeur commune de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}$ sur Oy par l'une ou l'autre des équations (10) et (10′); quant à z, on l'obtiendra par une intégration en écrivant que cette fonction s'annule en A, et elle s'annulera alors certainement en A′ : ceci résultera de la comparaison des équations utilisées.

Mais il nous faut montrer que *le noyau de l'équation* (11) *est fermé*. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, l'équation intégrale sans second membre admettrait une solution continue non nulle; il existerait donc une solution z_0, *régulière* à l'intérieur du contour fermé ABCA'B'C'A, *nulle* sur ABC et A'B'C'. Si l'on suppose BC et B'C' tels que $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ existe sur ces arcs [ce qui aura lieu s'ils satisfont à la condition (Γ) § **3**, z_0 s'annulant sur eux], on peut écrire, pour le domaine envisagé,

$$o = \int\int \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) z_0 \, dx \, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{C'}^{A} x^p z_0^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_{A'}^{C} x^p z_0^2 \, dx - \int\int \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 dx \, dy.$$

Les trois termes que nous venons d'écrire, étant négatifs ou nuls, doivent par conséquent s'évanouir. Donc $\frac{\partial z_0}{\partial x} \equiv o$ dans le domaine, $z_0 = o$ sur le bord, et par suite $z_0 \equiv o$. *Le noyau est donc bien fermé.*

En appliquant le raisonnement au cas où les courbes BC, B'C' s'éloignent à l'infini, on verrait également que *le noyau simple* $\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}$ *est fermé*. D'ailleurs, pour démontrer ce point, il suffirait d'utiliser la formule (9) et la formule analogue pour A A'B'C', sans calculer la fonction w. De même la formule (6) montrerait que le noyau $\frac{1}{|y-\eta|^{1-\frac{1}{q}}}$ est aussi fermé. D'après ce que nous avons dit plus haut [§ **63**, équation (1') et p. 112 en note], nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *les noyaux de la forme* $\frac{\varepsilon}{|y-\eta|^{\lambda}}$ $(o < \lambda < 1,\ \varepsilon = \pm 1)$, où ε peut ou non changer de signe pour $y = \eta$, *sont des noyaux fermés* $\left(\text{pour } \lambda = \frac{1}{2}, \text{ il faudrait utiliser l'équation } \delta z = o \text{ et son adjointe}\right)$.

Le théorème de M. Picard donne la condition de résolution de l'équation (11) : il y aurait là sans doute un point à approfondir.

L'étude du raccordement pour l'équation $(\bar{e}_1)$ à second membre est tout à fait analogue : *la fonction* Φ *seule a changé*.

On peut également se proposer de résoudre le problème du raccordement pour un contour *fermé* coupant Oy. Si AB ou A'B' se réduisent à un point, un examen spécial est nécessaire : il conviendrait d'envisager des *séries de solutions* comme au paragraphe **25**.

II. — Cas où la ligne singulière est caractéristique.

Nous allons donner quelques indications sommaires sur les équations du type $(\bar{\mathcal{E}}')$ indiqué dans le paragraphe **63**.

69. Solution fondamentale. — Envisageons tout d'abord l'équation $(\bar{e}')$, p. 108; le changement de variable $y' = \frac{-\varepsilon}{(p-1)y^{p-1}}$ ramène cette équation à la forme $\delta z = 0$, pour $p \neq 1$.

La solution fondamentale est donc

$$U(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta^{p-1}} - \frac{\varepsilon}{y^{p-1}}}} e^{-\frac{(p-1)(x-\xi)^2}{4\varepsilon\left(\frac{1}{\eta^{p-1}} - \frac{1}{y^{p-1}}\right)}}.$$

Dans le cas où $p = 1$, cette solution est

$$U = \left(\varepsilon \, \mathrm{L} \frac{y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon \, \mathrm{L} \frac{y}{\eta}}}.$$

L'introduction du nombre $\varepsilon = \pm 1$ a ici une *grande importance :* envisageons, en effet, le cas de $p = 1$, par exemple, et soient les équations

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

dont la seconde est l'adjointe de la première. Pour l'équation $\mathcal{F} = 0$, le contour portant les données doit être ouvert *vers le haut* s'il est *au-dessus de* Oy, *vers le bas* s'il est *au-dessous;* c'est l'inverse qui a lieu pour l'équation $\mathcal{F}_1 = 0$, de sorte qu'on peut se proposer de calculer une solution de $\mathcal{F}_1 = 0$ *de part et d'autre de* Ox, le contour total portant les données *étant fermé et coupant* Ox.

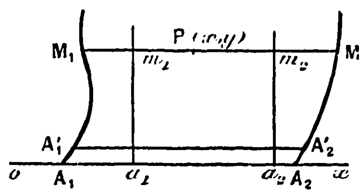
Examinons tout d'abord l'équation $\mathcal{F}(z) = 0$ et proposons-nous de voir ce qui se passe quand le contour (C) est *limité inférieurement par* Ox. Si nous envisageons les équations $\mathcal{F} = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 0$, la *formule* *fondamentale* est ici, pour un point intérieur (*fig.* 17),

$$2\sqrt{\pi}\,z(x,y) = \int_{(C'_y)} \left(\mathcal{L}\frac{y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mathcal{L}\frac{y}{\eta}}} \left[z\,d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{x-\xi}{2\mathcal{L}\frac{y}{\eta}}\right)\frac{d\eta}{\eta} \right],$$

(C') étant un contour limité inférieurement par une caractéristique $A'_1A'_2$ voisine de Ox et d'ordonnée β, et (C'_y) la partie de ce contour située au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y.

Si β tend vers zéro, l'ensemble des intégrales qui figurent dans le

Fig. 17.



second membre conserve un sens, mais l'intégrale relative à $A'_1A'_2$ *tend vers zéro*. Ceci suppose, il est vrai, que $\frac{\partial z}{\partial x}$ *existe* sur le contour. Mais nous pouvons choisir un contour intérieur à (C) et sur lequel $\frac{\partial z}{\partial x}$ existera, par exemple un contour rectangulaire $m_1a_1a_2m_2$ contenant le point P, si P est suffisamment voisin de Ox; cependant, $\frac{\partial z}{\partial x}$ peut admettre une discontinuité en a_1 et a_2, mais l'ensemble des intégrales portant sur $\frac{\partial z}{\partial x}$ doit avoir un sens, car toutes les autres quantités qui figurent dans la formule ont une limite quand β tend vers zéro.

On pourrait d'ailleurs, en formant la *fonction de Green*, faire disparaître les termes en $\frac{\partial z}{\partial x}$; mais, pour ne pas allonger cet exposé, nous allons supposer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ *existe en* a_1 *et* a_2 : disons simplement que *cette hypothèse n'est nullement indispensable* (voir p. 126 en note).

Posons alors $z = z' + z_0$; z sera nul en a_1 et a_2 (d'abscisses x_1 et x_2), si z_0 désigne la fonction linéaire en x, solution de l'équation $(\bar{c}')$, et coïncidant avec les données en a_1 et a_2. Nous trouvons alors, en dérivant la formule fondamentale appliquée à z' et au contour $m_1 a_1 a_2 m_2$,

$$(12)\quad 2\sqrt{\pi}\frac{\partial z'}{\partial x}(x,y) = -\int_0^y \left(\xi\frac{y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4\xi\frac{y}{\eta}}}\left(\frac{\partial z'}{\partial \xi} - \frac{x-x_1}{2\xi\frac{y}{\eta}} z'\right)\right]\frac{d\eta}{\eta}$$

$$+ \text{ une autre intégrale relative à } a_2 m_2.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial z}{\partial x}$ continue en a_1 sur $a_1 m_1$, on peut prendre y assez petit pour que $\frac{\partial z'}{\partial x}(x_1, y) = \frac{\partial z'}{\partial x}(x_1, 0) + \zeta$, avec $|\zeta| < \varepsilon$. Substituons dans (12) et remarquons qu'un changement de variable immédiat nous donne

$$\int_0^y \left(\xi\frac{y}{\eta}\right)^{-n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4\xi\frac{y}{\eta}}}\frac{d\eta}{\eta}$$
$$= \left(\frac{2}{x-x_1}\right)^{2n-1}\int_0^\infty e^{-t} t^{n-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2^{2n-1}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(x-x_1)^{2n-1}}.$$

On déduit de là (ici $n = 1,2$) que les intégrales portant sur z' et ζ ont une limite nulle quand y tend vers zéro, et que $\frac{\partial z'}{\partial x}$ tend vers $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial z'}{\partial x}(x_1, 0) + \frac{\partial z'}{\partial x}(x_2, 0)\right] = \text{const.}$ à l'intérieur de $a_1 a_2$; $z'(x, 0)$, fonction linéaire entre a_1 et a_2, continue et nulle en a_1 et a_2, est donc identiquement nulle. Par suite *z se réduit à z_0 sur* Ox (1).

Ce résultat est vrai pour toutes les équations (e') et nous pouvons

(1) On peut aussi démontrer cela, sans utiliser la fonction de Green, en supposant $\frac{\partial z}{\partial x}$ continue en a_1 seulement : il suffit d'appliquer la formule fondamentale à P et à son symétrique par rapport à m_2 et de retrancher, pour voir que z' tend vers zéro avec y. Quant à la fonction de Green, elle permettrait d'avoir z' sous la forme $\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int_{m_1 a_1 + a_2 m_2} z'\frac{\partial G}{\partial \xi}\,d\eta$: or, pour calculer $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, il suffit de remplacer, dans les formules (1') et (1'') du premier Mémoire (p. 466), $y-\eta$ et $\eta - s$ par $\xi\frac{y}{\eta}$ et $\xi\frac{\eta}{s}$, $d\eta$ et ds par $\frac{d\eta}{\eta}$ et $\frac{ds}{s}$. On constate alors sans difficulté que z' tend vers zéro, quand P tend vers Ox, sans avoir d'hypothèses à faire sur $\frac{\partial z}{\partial x}$.

énoncer la propriété suivante : *si une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

régulière d'un certain côté de Ox, *se réduit sur* Ox *à une fonction continue, celle-ci ne peut être que linéaire.*

70. Problèmes aux limites. — *Si* p *est pair*, le contour portant les données pourra *traverser* Ox : supposons par exemple $\varepsilon = +1$, le contour sera alors ouvert *vers le haut*. Nous pourrons résoudre le problème aux limites pour la partie du contour située *au-dessous* de Ox. Sur Ox même, la solution se réduit à une fonction linéaire qui se déduit immédiatement des valeurs connues de z $\left(\text{ou } \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ suivant le problème}\right)$ en A_1 et A_2. Pour le contour formé par A_1A_2 et la partie de (C) située au-dessus de Ox, nous aurons un nouveau problème aux limites. *Les valeurs prises par la solution au-dessus de* Ox *sont donc indépendantes des valeurs prises au-dessous;* d'ailleurs on se rend compte sans peine que leur ensemble constitue une solution régulière, pourvu que les données constituent une fonction de y *dérivable en* A_1 *et* A_2 (le contour étant supposé non tangent à Ox).

Si p *est impair et* $\varepsilon = -1$, on pourra constituer une solution régulière à l'intérieur d'une bande *ouverte dans les deux sens*, toujours avec la même condition en A_1 et A_2 : cette solution sera constituée par l'ensemble de deux solutions relatives à deux contours accolés suivant Ox; ils peuvent d'ailleurs ne pas rencontrer Ox aux mêmes points, si les valeurs des données et de leurs dérivées en ces points sont convenablement choisies.

Enfin si p *est impair et* $\varepsilon = +1$, les deux contours séparés par Ox s'ouvrent *l'un vers l'autre :* leur ensemble peut constituer un contour *fermé* coupant Ox en A_1 et A_2. On voit alors *qu'on pourra résoudre pour le contour total un véritable problème de Dirichlet;* la valeur de la solution sur Ox s'obtiendra par *interpolation linéaire* entre les valeurs prises en A_1 et A_2. Ce contour pourra admettre des tangentes horizontales aux points le plus haut et le plus bas, d'après ce que nous avons vu dans le Chapitre II.

Ces résultats s'étendent à l'équation

$$(\bar{e}'_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

et à l'équation générale $(\overline{\mathcal{E}}')$ (§ **63**, II). En ce qui concerne $(\bar{e}'_1)$, l'intégrale double formée avec la solution fondamentale n'aura de sens que si $f(x, 0) = 0$, en supposant de plus un certain mode de continuité, par exemple $|f| < K y^\alpha$ ou $K |\mathcal{L} y|^{-1-\alpha}$, pour y voisin de zéro. Si $f(x, 0) \neq 0$, on posera $z = z' + z_0$, z_0 étant solution de $\frac{d^2 z}{dx^2} = f(x, 0)$. En définitive *toute solution de* $(\overline{\mathcal{E}}')$, *régulière d'un certain côté de* Ox *et continue sur* Ox, *se réduit sur* Ox *à une solution de l'équation*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a(x, 0) \frac{dz}{dx} + c(x, 0) z + f(x, 0) = 0.$$

III. — Nature des solutions.

Il est manifeste que, dans toute région non traversée par Oy, les solutions régulières de l'équation $(\bar{e})$, étudiée dans la section I, sont par rapport à l'ensemble (x, y) des fonctions *analytiques en* x *et d'espèce* $\mathcal{H}$ *en* y. Ceci résulte de ce que nous avons vu dans le Chapitre III (¹). Supposons maintenant que la région envisagée soit traversée par Oy et étudions la nature de la solution sur Oy.

(¹) Voir § 13, pages 441 et suivantes. Il convient d'ailleurs de modifier légèrement la démonstration donnée à cet endroit : elle ne serait rigoureuse que si l'on avait $a \equiv 0$, car, si $a \neq 0$, la dérivée $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ contient $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}$, dont on veut précisément obtenir la limitation. Par suite, si la dérivée $\frac{\partial a}{\partial x}$ est d'espèce $\mathcal{H}$ en y, le changement d'inconnue indiqué au paragraphe **17** permet de ramener l'équation $(\mathcal{E})$ à la forme $\delta z = cz + f$, c et f étant d'espèce $\mathcal{H}$ en y, et la démonstration s'applique. Mais si $\frac{\partial a}{\partial x}$ n'est pas une fonction $\mathcal{H}$, il faut supposer les limitations de la page 441, ligne 10, établies pour $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ et $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}$ et remplacer, dans la suite de la démonstration, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ par $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ par $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ce

71. Étude de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ quand p est pair. Problème de Cauchy. — Examinons d'abord le cas où *p est pair* et figurons un contour rectangulaire compris dans la région étudiée et traversé par Oy. Si nous appliquons à ce contour la formule (5), p. 111, nous obtenons, en supposant $A_1 A_2$ sur Ox et $y \leqq y_1$ ($\overline{OA_1} = -l$, $\overline{OA_2} = l$)

$$(13)\quad 2q^{1-\frac{2}{q}}\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right) z(0,y) = \int_{-l}^{+l} \frac{\xi^p z}{y^{1-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2 y}} d\xi$$
$$+\int_0^y \frac{e^{-\frac{l^q}{q^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}}\left[\frac{\partial z}{\partial \xi}(l,\eta) - \frac{\partial z}{\partial \xi}(-l,\eta)\right] d\eta$$
$$+\int_0^y \frac{l^{q-1}}{q(y-\eta)^{2-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{l^q}{q^2(y-\eta)}}[z(l,\eta)+z(-l,\eta)]\, d\eta.$$

Or ceci est une fonction $\mathcal{H}$ de y pour $0 < y \leqq y_1$, car ces intégrales sont analogues à celles qu'on rencontre dans l'étude de l'équation de la chaleur ([1]). Il en résulte que z est bien *une fonction $\mathcal{H}$ de y dans toute la région* et il suffit de dériver la formule (5) par rapport à x, avant de l'appliquer à un point de l'axe des y, pour démontrer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ est aussi une fonction $\mathcal{H}$.

Nous concluons de là que z est *analytique en x* dans toute la région : sans doute il serait facile de le constater sur la formule (5), mais nous allons le voir ici en cherchant à résoudre *le problème de Cauchy pour l'axe des y*. Soit, sur Oy, $z(0,y) = \varphi(y)$ et $\frac{\partial z}{\partial x}(0,y) = \psi(y)$.

---

qui conduit à la limitation commune de $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}$ et $\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}}$. Avec cette modification, la formule (9) donne une limitation commune à $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, en supposant $|u|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < [U]$, ce qui est conforme à l'application que nous en faisons. Je reviendrai d'ailleurs sur ces questions dans un prochain Mémoire, développement de la Note parue aux *Comptes rendus* du 8 décembre 1913. Dans cette Note sont définies les fonctions de *classe* donnée : *les fonctions $\mathcal{H}$ sont les fonctions de classe* 2.

([1]) Nous supposons ici, et dans tout ce qui va suivre, *p entier*.

Posons

$$z = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \ldots.$$

Portant dans $(\bar{e})$, nous obtenons pour déterminer les z_p,

$$\begin{gathered} z_0 = \varphi, \quad z_1 = \psi, \quad z_2 = 0, \quad \ldots, \quad z_{p+1} = 0, \\ (p+1)(p+2) z_{p+2} = z'_0, \quad (p+2)(p+3) z_{p+3} = z'_1, \\ z_{p+4} = 0, \quad \ldots, \quad z_{2p+3} = 0, \quad (2p+3)(2p+4) z_{2p+4} = z'_{p+2}, \\ (2p+4)(2p+5) z_{2p+5} = z'_{p+3}, \ldots. \end{gathered}$$

En posant toujours $p + 2 = q$, nous trouvons ainsi

$$\begin{gathered} z_{kq} = \frac{1}{(q-1)q.(2q-1)2q\ldots(kq-1)kq} \frac{d^k\varphi}{dy^k}, \\ z_{kq+1} = \frac{1}{q(q+1).2q(2q+1)\ldots kq(kq+1)} \frac{d^k\psi}{dy^k}, \\ z_{kq+h} = 0 \ (h = 2, 3, \ldots, q-1). \end{gathered}$$

On peut donc écrire

$$(14) \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kq}}{q^k k!} \left[\frac{1}{(q-1)(2q-1)\ldots(kq-1)} \frac{d^k\varphi}{dy^k} + \frac{x}{(q+1)\ldots(kq+1)} \frac{d^k\psi}{dy^k} \right].$$

Si φ et ψ sont des fonctions $\mathcal{H}_R$, c'est-à-dire si l'on a

$$\left|\frac{d^k\varphi}{dy^k}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{d^k\psi}{dy^k}\right| < \frac{M(2k)!}{R^k},$$

on voit immédiatement que la série entière (14) sera convergente pour $|x| < \left(\frac{q^2 R}{4}\right)^{\frac{1}{q}}$: on a donc bien une *fonction analytique de x*. Réciproquement, toute solution z, analytique en x dans le domaine de $x = 0$ [1], se réduit sur Oy, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, à une fonction $\mathcal{H}$: la démonstration serait immédiate. Dans le cas où l'on suppose que φ et ψ sont analytiques, on constate que z est une *fonction entière en x d'ordre $\leq q$* (on a $|z| < e^{A|x|^q}$).

Ce qui précède montre également que *la condition nécessaire et*

[1] Par exemple, les intégrales de la formule (13) [*voir* § **43**, deuxième note] : ceci constitue un moyen de montrer que ce sont des fonctions $\mathcal{H}$ en y.

suffisante, pour qu'une solution définie d'un côté de Oy *soit prolongeable au delà, est qu'elle prenne sur* Oy *des valeurs constituant une fonction* $\mathcal{H}$ (*cf.* § **57**).

Mais les raisonnements précédents (sauf en ce qui concerne le problème de Cauchy) ne s'appliquent plus au cas où p est impair.

72. Cas où p est impair. — Soit z une solution régulière de l'équation $(\bar{e})$ (p impair) dans une région $\mathcal{R}$ traversée par Oy, A et A' deux points sur Oy et dans $\mathcal{R}$, et où l'on peut supposer z nulle; nous allons montrer que z *est une fonction* $\mathcal{H}$ *sur* AA'.

En effet, prenons un contour tel que celui de la figure 16, p. 119, situé dans la région $\mathcal{R}$ (nous pouvons même ici supposer que les arcs BC, $B'C'$ sont des segments de droites parallèles à Oy). Si nous appliquons la formule (9) au contour $A'ABC$ et la formule analogue au contour $AA'B'C'$ et si nous égalons les seconds membres, nous trouvons une équation de la forme

$$\int_a^{a'} \frac{\partial z(0,\eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} = F(y),$$

F étant une fonction qui se compose de termes tout à fait analogues à ceux qui figurent dans l'équation (13); c'est donc une *fonction* $\mathcal{H}$ *à l'intérieur* de l'intervalle (a, a') (les dérivées cessent d'exister pour les bornes). Puisque z s'annule en A et A', l'équation peut s'écrire

$$\frac{d}{dy}\int_a^{a'} \frac{z(0,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta = F(y), \qquad \text{d'où} \qquad \int_a^{a'} \frac{z(0,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta = F_1(y),$$

F_1 étant une nouvelle fonction $\mathcal{H}$. Or on peut toujours déterminer une fonction $v(x, y)$ — par exemple une solution de $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ —, égale à z sur AB, $A'C$, *nulle* sur AA' et *analytique en* x, y autour de tout point intérieur à AA'. Envisageons alors la fonction

$$\zeta(x, y) = \int_a^{a'} \frac{z_1(x,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta, \tag{15}$$

avec $z_1 = z - v$ (z_1 s'annule sur AB, A'C). Nous avons

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - x^p\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\int_a^{a'}\left[\frac{\partial^2 v(x,\eta)}{\partial x^2} - x^p\frac{\partial v(x,\eta)}{\partial\eta}\right]\frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} = \Phi(x,y).$$

Nous voyons donc que ζ est une solution d'une équation $(\overline{e_1})$ à second membre, et cette solution se réduit sur Oy à $F_1(y)$, c'est-à-dire à une fonction $\mathcal{H}$. Or la formule analogue à (9), appliquée à une équation $(\overline{e_1})$ à second membre d'espèce $\mathcal{H}$ en y, montre que, quand une solution se réduit sur Oy à une fonction $\mathcal{H}$, il en est de même de sa dérivée par rapport à x, le deuxième membre de la formule (9) étant alors une telle fonction. Or, le second membre Φ de l'équation en ζ est analytique en x et aussi en y autour des points intérieurs à AA'. Il résulte alors des paragraphes **71** et **73** [solution du problème de Cauchy par les formules (14) et (16)] que, $\zeta(x,y)$ et $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ prenant sur Oy des valeurs définissant des fonctions $\mathcal{H}$, ζ sera une *fonction analytique de x dans le voisinage de Oy.*

Montrons qu'il en sera de même pour z_1. Ainsi nous sommes ramenés à la propriété suivante : si, dans l'équation (15), ζ est une fonction *holomorphe de x* dans un certain domaine pour les valeurs de y comprises entre a et a', z_1 *jouit de la même propriété.* Soit, en effet, une courbe fermée Γ tracée dans le domaine de la variable x, nous aurons

$$\int_\Gamma \zeta(\xi,y)\,d\xi = \int_\Gamma d\xi\int_a^{a'}\frac{z_1(\xi,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\,d\eta = 0.$$

Mais le deuxième membre peut s'écrire

$$\int_a^{a'}\frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\int_\Gamma z_1(\xi,\eta)\,d\xi = 0.$$

Or $(y-\eta)^{-\frac{1}{q}}$ est un *noyau fermé :* donc, quelle que soit Γ,

$$\int_\Gamma z_1(\xi,\eta)\,d\xi = 0, \qquad (a \leqq \eta \leqq a')$$

et, d'après la réciproque du théorème de Cauchy, z_1 est analytique dans les mêmes conditions que ζ. Mais alors, v étant analytique en x au voisinage de $x = 0$, z l'est aussi et par suite (§ **71**) se réduit sur Oy à une fonction $\mathcal{H}$ de y : nous pouvons donc énoncer le même théorème qu'à la fin du paragraphe **71**.

73. Étude de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$. — Envisageons maintenant l'équation $(\overline{e}_1)$ avec second membre $f(x, y)$ d'espèce $\mathcal{H}$ en y et supposons d'abord p pair. La solution Z (§ **67**) est fonction $\mathcal{H}$ en tout point *extérieur* à Oy, car ceci résulte du paragraphe **55**. *Sur* Oy *même*, elle se réduit à une fonction $\mathcal{H}$, car pour $x = 0$ nous obtenons, à un facteur près, la fonction

$$\iint_{S_y} \frac{1}{|y-\eta|^{\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

dont les dérivées, par rapport à y, se calculent par la même méthode que celle que nous avons déjà suivie au paragraphe **55**, ce qui permet aisément de voir que cette fonction est d'espèce $\mathcal{H}$ ([1]).

Nous pouvons également nous proposer, p étant cette fois un entier positif quelconque, de calculer la solution de l'équation qui *s'annule sur* Oy, *ainsi que sa dérivée par rapport à* x. Supposons tout d'abord que f soit, ainsi que z, développable par la formule de Mac Laurin

$$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots,$$

les f étant fonctions de y. Le procédé d'identification déjà suivi dans le paragraphe **71** nous donne ici, en posant toujours $p + 2 = q$,

$$z_0 = z_1 = 0, \qquad 2z_2 = f_0, \qquad \ldots, \qquad q(q+1)z_{q+1} = f_{q-1},$$
$$(q+1)(q+2)z_{q+2} = z'_2 + f_q, \qquad \ldots,$$
$$(\lambda q + h + 1)(\lambda q + h + 2) z_{\lambda q + h + 2} = z'_{\lambda q + h} + f_{\lambda q + h} \qquad (h = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Si nous explicitons les z en fonction des f et si nous réunissons dans la série les termes contenant les dérivées d'ordre λ des fonctions f

([1]) Il pourrait se faire que, z étant une fonctien $\mathcal{H}_R$, R tende vers zéro, puis éprouve une discontinuité pour $x = 0$. Cela n'est pas, comme nous le verrons par la suite.

par rapport à y, il vient

$$x^{\lambda q+2}\left\{\frac{f_0^{(\lambda)}}{1.2.(q+1)(q+2)\ldots(\lambda q+1)(\lambda q+2)}\right.$$
$$+\frac{x f_1^{(\lambda)}}{2.3\ldots(\lambda q+2)(\lambda q+3)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x^{q-1} f_{(q-1)}^{(\lambda)}}{q(q+1)\ldots(\lambda+1)q[(\lambda+1)q+1]}+\ldots$$
$$+\frac{x^r f_r^{(\lambda)}}{(r+1)(r+2)\ldots(\lambda q+r+1)(\lambda q+r+2)}$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$f_r^{(\lambda)}=\frac{1}{r!}\,\frac{\partial^{r+\lambda} f(0,y)}{\partial x^r\,\partial y^\lambda};$$

de sorte que le terme envisagé peut s'écrire, r variant de 0 à ∞,

$$\frac{x^{\lambda q+2}}{q^{2\lambda+2}}\sum_r \frac{1}{r!}\,\frac{x^r f_r^{(\lambda)}}{\left(\frac{r+1}{q}\right)\left(1+\frac{r+1}{q}\right)\left(2+\frac{r+1}{q}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{r+1}{q}\right)\cdot\left(\frac{r+2}{q}\right)\ldots\left(\lambda+\frac{r+2}{q}\right)}$$
$$=\frac{x^{\lambda q+2}}{q^{2\lambda+2}}\cdot\frac{1}{|\lambda!|^2}\sum_r \frac{x^r f_r^{(\lambda)}}{r!}\;\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{q}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+1+\frac{r+1}{q}\right)}\;\frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{q}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+1+\frac{r+2}{q}\right)}.$$

Les deux derniers facteurs sont $\mathrm{B}\left(\frac{r+1}{q},\lambda+1\right)\mathrm{B}\left(\frac{r+2}{q},\lambda+1\right)$ et notre terme s'écrit, en explicitant les B,

$$\frac{x^2}{q^2}\int_0^1\int_0^1\left[\frac{(1-s)(1-t)x^q}{q^2}\right]^\lambda\frac{1}{|\lambda!|^2}s^{\frac{1}{q}-1}t^{\frac{2}{q}-1}\sum_r\frac{\left(x\,s^{\frac{1}{q}}t^{\frac{1}{q}}\right)^r}{r!}\,\frac{\partial^{r+\lambda} f(0,y)}{\partial x^r\,\partial y^\lambda}.$$

La somme $\sum_r$ (r variant de 0 à ∞) est un développement de Taylor et, sommant par rapport à λ, nous trouvons en définitive

$$\mathrm{Z}_0=\frac{x^2}{q^2}\int_0^1\int_0^1\sum_\lambda\left[\frac{(1-s)(1-t)x^q}{q^2}\right]^\lambda\frac{1}{|\lambda!|^2}s^{\frac{1}{q}-1}t^{\frac{2}{q}-1}\frac{\partial^\lambda f\left(t^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{q}}x,y\right)}{\partial y^\lambda}\,ds\,dt$$

et, en posant $t = \left(\frac{\xi}{x}\right)^q$, $s = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^q$,

$$Z_0 = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \sum_\lambda \frac{1}{|\lambda!|^2} \left[\frac{(x^q - \xi^q)(\xi^q - \xi'^q)}{q^2\xi^q}\right]^\lambda \frac{\partial^\lambda f(\xi', y)}{\partial y^\lambda} d\xi' \tag{16}$$

ou encore, par un changement dans l'ordre d'intégration,

$$Z_0 = \int_0^x \sum_\lambda \frac{\partial^\lambda f(\xi, y)}{\partial y^\lambda} \varphi_\lambda(x, \xi)\, d\xi, \tag{16'}$$

en posant

$$\varphi_\lambda(x, \xi) = \frac{1}{|\lambda!|^2} \int_\xi^x \left[\frac{(x^q - \xi'^q)(\xi'^q - \xi^q)}{q^2\xi'^q}\right]^\lambda d\xi'.$$

Sous cette forme, la solution est facile à vérifier : on trouve en effet

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = f(x, y) + \int_0^x \sum_\lambda \frac{\partial^{\lambda+1} f(\xi, y)}{\partial y^{\lambda+1}} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}(x, \xi)}{\partial x^2} d\xi,$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial y} = \int_0^x \sum_\lambda \frac{\partial^{\lambda+1} f(\xi, y)}{\partial y^{\lambda+1}} \varphi_\lambda(x, \xi)\, d\xi;$$

d'où

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z_0}{\partial y} = f(x, y) + \int_0^x \sum_\lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} - x^{q-2}\varphi_\lambda\right) \frac{\partial^{\lambda+1} f(\xi, y)}{\partial y^{\lambda+1}} d\xi. \tag{17}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} \equiv x^{q-2}\varphi_\lambda. \tag{18}$$

Au lieu d'établir directement l'identité (18), supposons que nous ayons vérifié les λ identités précédentes et prenons $f = x^n y^{\lambda+1}$, n étant un nombre *entier positif* quelconque : les calculs que nous avons faits *formellement* sont alors certainement valables et la solution est bien représentée par la formule (16), quel que soit n. Il en résulte que, d'après la formule (17), on a certainement, tous les autres termes de l'intégrale du second membre étant nuls par hypothèse,

$$(\lambda + 1)! \int_0^x \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} - x^{q-2}\varphi_\lambda\right) \xi^n\, d\xi = 0,$$

pour n entier et positif. Or la parenthèse est un polynome *homogène* et de degré $(\lambda + 1)q - 1$ en x et ξ, de la forme $\sum A_\mu x^m \xi^\mu$, de sorte qu'on aura en intégrant

$$\int_0^x \sum A_\mu x^m \xi^{\mu+n}\, d\xi = x^{(\lambda+1)q+n} \sum \frac{A_\mu}{\mu+n+1} = 0,$$

quel que soit n entier et positif, et par suite *quel que soit n*. Ceci exige (à cause des pôles) que tous les coefficients A_μ soient nuls, c'est-à-dire que $\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} - x^{q-2}\varphi_\lambda \equiv 0$. Ce raisonnement s'appliquant aussi au cas de $\lambda = 0$, la relation est démontrée quel que soit λ.

Avec la formule (16) ou (16'), nous n'avons *plus d'hypothèse à faire sur la nature de f* relativement à la variable x. Nous voyons sans peine que, *si f est une fonction* $\mathcal{H}_R$ *en y* pour $|x| < \rho$, la série sera convergente pour $|x|$ inférieur au plus petit des deux nombres ρ et $\left(\frac{q^2 R}{4}\right)^{\frac{1}{q}}$ et la solution Z_0 *sera elle-même une fonction* $\mathcal{H}$: il suffirait de reproduire ici un calcul analogue à celui que nous avons déjà fait (§ **55**). Pareillement, cette formule donne le moyen de déterminer par *approximations successives* la solution *du problème de Cauchy* pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f,$$

quand les données, supposées d'espèce $\mathcal{H}$, sont portées par un segment de Oy. Il suffit de ramener ces données à zéro, absolument comme nous l'avons déjà fait plus haut (§ **56**). En ce qui concerne l'équation $(\bar{e}_1)$, la solution du problème de Cauchy s'obtient en ajoutant les formules (14) et (16) : elle est analytique en x si f l'est.

Ce que nous venons de faire ne préjuge rien sur la nature du nombre entier positif p. Comme nous avons trouvé une solution de l'équation $(\bar{e}_1)$ qui est une fonction $\mathcal{H}$, il en résulte que *toutes les solutions régulières sont de cette nature*, quel que soit le nombre entier positif p, puisque cette propriété est vraie pour l'équation $(\bar{e})$.

74. Énoncé de quelques résultats. — Les calculs précédents et le problème du raccordement, que nous traiterons dans le paragraphe **79**, nous fournissent les éléments nécessaires à la démonstration des propriétés suivantes, que je me borne à énoncer. Étant donnée l'équation $(\bar{\mathcal{E}})$, où p est entier, et une solution z, régulière dans une région $\mathcal{R}$

pouvant être traversée par Oy : 1° si les coefficients sont dans la région $\mathcal{A}$ ou bien analytiques en x, ou bien d'espèce $\mathcal{H}$ en y, z sera ou bien analytique en x, ou bien d'espèce $\mathcal{H}$ en y; 2° si les coefficients sont analytiques en y et si z prend sur deux segments C_1, C_2, parallèles à Oy, une succession de valeurs analytiques en y, z sera analytique en y, sur tout segment de caractéristique limité par C_1 et C_2. Même théorème pour l'analyticité en x et y, C_1 et C_2 pouvant alors être des arcs analytiques; 3° quand les coefficients sont d'espèce $\mathcal{H}$ en y, la condition nécessaire et suffisante pour que z soit prolongeable au delà de Oy est que $z(0, y)$ soit d'espèce $\mathcal{H}$ en y.

Il serait facile de déduire de là des propriétés relatives à l'équation générale, dans laquelle b peut s'annuler le long de courbes $x = \varphi(y)$ quelconques (pour ce qui concerne l'analyticité en x), ou d'espèce $\mathcal{H}$ (pour ce qui concerne l'espèce $\mathcal{H}$ et pour le prolongement en y), ou analytiques (pour ce qui concerne l'analyticité en x et y).

Nous n'avons pas parlé jusqu'ici des solutions des équations $(\overline{\mathcal{E}}')$. Remarquons que les solutions régulières de l'équation $(\overline{e}')$ *ne sont pas en général des fonctions* $\mathcal{H}$ pour les points situés sur Ox. Cependant, si z est une fonction $\mathcal{H}$ en deux points A_1, A_2 de Ox, cette solution sera une fonction $\mathcal{H}$ dans la région commune au domaine, où z est régulière, et à la bande comprise entre les parallèles à Oy menées par les deux points A_1 et A_2.

Des remarques analogues s'appliquent à l'équation $(\overline{\mathcal{E}}')$. Pour cette équation, d'ailleurs, les théorèmes relatifs à l'analyticité par rapport à x ou y subsistent sans modifications.

CHAPITRE V.

LA SOLUTION FONDAMENTALE ET SES APPLICATIONS.

I. — Équations du type normal.

Étant donnée l'équation (E) (p. 105) avec $f = 0$, c'est-à-dire

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \qquad (b < 0),$$

M. Hadamard a formé sa solution fondamentale (*Comptes rendus*, 1^er^ mai 1911) en ramenant cette équation à la forme (*voir* § **17**)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = cz.$$

Outre les hypothèses de dérivabilité que ceci exige, le procédé de réduction est spécial *au cas de deux variables* ([1]). Nous allons faire l'extension de la méthode de M. Hadamard au cas général.

75. Solution fondamentale de l'équation a deux variables. — Remarquons tout d'abord que, l'équation (E) étant donnée, la solution fondamentale que nous devons utiliser est celle de l'équation *adjointe*. Nous aurons donc, en supposant (E) mise sous la forme normale (§ **17**), les deux équations

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f = 0,$$

$$\mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial au}{\partial x} + cu \qquad = 0.$$

Envisageons ces équations dans une région $\mathcal{R}$, où leurs coefficients sont supposés *continus*, et admettons, pour plus de simplicité (hypothèse nullement indispensable), que $\mathcal{R}$ soit définie par $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$. Pour former la solution fondamentale $U(\xi, \eta; x, y)$, solution de $\mathcal{F}_1 = 0$ en ξ, η, nous allons suivre l'ingénieuse méthode indiquée par M. Hadamard. Opérant par *approximations successives*, nous poserons

$$U_0(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

et d'une façon générale, à partir de $n = 1$ ([2]),

$$U_n(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_\eta^y dt \int_{x_1}^{x_2} \left[- \frac{\partial a(s,t)\, U_{n-1}(s,t; x,y)}{\partial s} + c\, U_{n-1} \right] \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{(s-\xi)^2}{4(t-\eta)}} ds,$$

les points $P(x, y)$ et $\Pi(\xi, \eta)$ étant situés dans $\mathcal{R}$ et tels que $\eta < y$.

([1]) Mais il va sans dire qu'il sera avantageux de l'employer chaque fois que la chose sera possible.

([2]) Ceci revient en somme à considérer la solution fondamentale cherchée U comme solution d'une équation intégrale qui s'écrit immédiatement.

Or nous pouvons écrire, en désignant par m_1, m_2 des points variables d'abscisses x_1, x_2 et m un point du domaine d'intégration,

$$\begin{aligned} U_n = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} a(m_1)\,U_{n-1}(m_1, P)\,U_0(\Pi, m_1)\,dt \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} a(m_2)\,U_{n-1}(m_2, P)\,U_0(\Pi, m_2)\,dt \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} dt\int_{x_1}^{x_2}\left[a(m)\frac{\partial U_0(\Pi, m)}{\partial s} + c(m)\,U_0(\Pi, m)\right] U_{n-1}(m, P)\,ds. \end{aligned}$$

Le terme U_1 (que le lecteur est prié d'écrire) est bien défini quand P et Π sont distincts et, si $x \neq \xi$, il tend vers zéro avec $y - \eta$. Il s'agit de voir comment se comporte ce terme quand $x - \xi$ et $y - \eta$ *tendent simultanément vers zéro.* Soit $|a| < A$, $|c| < C$: les intégrales simples restent finies; la partie qui contient c ne présente aucune difficulté car elle est limitée par

$$C\int\int\frac{U_0(s, t; x, y)}{\sqrt{t-\eta}}\,ds\,dt < (K)\sqrt{y-\eta},$$

d'après les formules (23′) et (24′), § **8** (intégrales I_{pq}); enfin la partie de l'intégrale double portant sur a admet comme limitation

$$\frac{A}{2\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{y} dt\int_{x_1}^{x_2}\frac{|s-\xi|}{(y-t)^{\frac{1}{2}}(t-\eta)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{(s-\xi)^2}{4(t-\eta)}}\,ds,$$

intégrale toujours finie, d'après les mêmes formules.

U_1 est donc toujours fini et par suite U_2, qui se compose d'intégrales des types $\mathfrak{J}_0$ (§ **2**), $I_{0\frac{1}{2}}$, $I_{1\frac{3}{2}}$ portant sur des fonctions bornées, est une fonction *continue dans* $\mathfrak{R}$ et tend vers zéro avec $y - \eta$. De même pour les termes suivants, et il résulte de ce que nous avons vu, dans le Chapitre II, que *les approximations convergent* et que la série $U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ représente une solution de l'équation $\mathcal{F}_1 = 0$, en supposant bien entendu que les coefficients satisfassent aux conditions (A) (§ **9**). Nous pouvons donc mettre U sous la forme $U = U_0 + V$, V étant une fonction bornée *pour tous les points* P et Π de $\mathfrak{R}$, même voisins, *continue et tendant vers zéro avec* $y - \eta$, sauf pour $\xi = x$. Si donc on intègre $|V|$ par rapport à ξ, l'intégrale s'annule avec $y - \eta$, même si l'intervalle contient la valeur x.

76. Application aux problèmes aux limites. — Étant données les équations $\mathcal{F} = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 0$, appliquons la formule de Riemann à l'intégrale

$$\int\int \{ U\mathcal{F}[z(\xi, \eta)] - z(\xi, \eta)\mathcal{F}_1(U) \} \, d\xi \, d\eta$$

et au domaine limité par un contour (C) et la caractéristique $M'_1 M'_2$ et situé dans $\mathcal{R}$ (voir *fig.* 1, § **1** ou *fig.* 15, p. 110). Il vient

$$(1) \quad \int_{M'_1}^{M'_2} U z \, d\xi = \int_{M'_1 A_1 A_2 M'_2} \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} + a U z \right) d\eta + U z \, d\xi + \int\int U f \, d\xi \, d\eta.$$

Or

$$\int_{M'_1}^{M'_2} U z \, d\xi = \int_{M'_1}^{M'_2} U_0 z \, d\xi + \int_{M'_1}^{M'_2} V z \, d\xi.$$

Quand $M'_1 M'_2$ tend vers $M_1 M_2$, la dernière intégrale tend vers zéro, comme nous l'avons déjà dit. Donc (§ **1**), la limite du premier membre de (1) est $2\sqrt{\pi}\, z(x, y)$, $\sqrt{\pi}\, z(x, y)$ ou zéro suivant que M est à l'intérieur de (C), sur (C) ou à l'extérieur de (C). D'où la formule

$$\left.\begin{array}{c} 2\sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} \\ 0 \end{array}\right\} z(x, y) = \int\int_{(C_y)} \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} + a U z \right) d\eta + U z \, d\xi + \int\int_{S_y} U f \, d\xi \, d\eta,$$

(C_y) et S_y désignant les portions de (C) et de S situées au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y. Dès lors, si l'on forme par la méthode des approximations successives une fonction H, solution de $\mathcal{F}_1 = 0$ en ξ, η, égale à $U(\xi, \eta; x, y)$ sur C_1 et C_2 et nulle sur $M_1 M_2$, la fonction $G = U - H$ sera une *fonction de Green* relativement au contour (C).

En appliquant la formule de Riemann à cette fonction, il vient, pour un point (x, y) intérieur,

$$2\sqrt{\pi}\, z(x, y) = \int_{(C_y)} - z \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta + G z \, d\xi + \int\int_{S_y} G f \, d\xi \, d\eta.$$

Il resterait à vérifier cette solution, car ceci nous montre simplement que, si la solution prenant sur (C) des valeurs données existe, elle est donnée par cette formule. Mais nous savons par ailleurs que cette solution existe, quand a, c, f satisfont aux conditions (A). Par suite, la formule que nous venons de trouver *représente bien* la solution cherchée. En particulier, la fonction $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_y} G f \, d\xi \, d\eta$ représente la solution de $\mathcal{F} = 0$, nulle au bord (¹).

Il est à remarquer que cette méthode exige deux opérations : 1° *Calcul de la solution fondamentale*, indépendant du contour; 2° *Calcul de la fonction de Green* pour un contour donné, indépendant des données. Ce dernier calcul se fait par les méthodes du Chapitre II et exige le calcul de la fonction de Green pour $\delta z = 0$ et la résolution d'une équation intégrale.

D'autre part, la méthode employée plus haut au paragraphe **22** n'exige qu'un calcul analogue au deuxième calcul que nous venons d'indiquer, mais ce calcul *varie avec les données*. Il peut donc y avoir avantage, suivant les cas, à employer l'une ou l'autre méthode.

77. Solution fondamentale des équations a plus de deux variables. — Le procédé que nous avons suivi pour former la solution fondamentale réussit également dans le cas où le nombre des variables est *supérieur à deux*. Envisageons, par exemple, dans le cas de *trois variables*, les deux équations

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + cu + f = 0,$$

$$\mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial a_1 u}{\partial x_1} - \frac{\partial a_2 u}{\partial x_2} + cu \qquad = 0.$$

Supposons que la région $\mathcal{R}$, où nous voulons former la solution, soit située à l'intérieur d'une surface Σ, ouverte vers les y positifs et négatifs (par exemple un cylindre) et soient $\Sigma_{y,\eta}$ la portion de Σ comprise entre les plans caractéristiques de cote y et η, $V_{y,\eta}$ le volume limité par ces plans et par $\Sigma_{y,\eta}$. Nous effectuerons alors les opérations

(¹) Moyennant des hypothèses très simples sur la nature des coefficients de l'équation à l'infini, on peut former une solution fondamentale valable dans tout le plan, ce qui permettra d'obtenir la solution prenant des valeurs données sur une caractéristique donnée.

Au sujet de la fonction de Green, remarquons enfin que la formule de Riemann nous donnerait aisément une *relation d'échange* entre la fonction de Green de l'équation et celle de son adjointe.

suivantes :

$$U_0(\xi_1, \xi_2, \eta; x_1, x_2, y) = \frac{1}{y-\eta} e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{4(y-\eta)}} = U_0(\Pi, P)\ldots,$$

$$U_n = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_{y,\eta}} \left[-\frac{\partial[a_1(m)\,U_{n-1}(m, P)]}{\partial s_1} - \frac{\partial a_2 U_{n-1}}{\partial s_2} + c\,U_{n-1} \right] U_0(\Pi, m)\, d\Omega_m,$$

m étant le point (s_1, s_2, t) et $d\Omega_m$ l'élément de volume correspondant.

Le même procédé qui nous a servi dans le plan nous donne une intégrale double étendue à la surface $\Sigma_{y,\eta}$ et une intégrale triple

$$(2) \qquad \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_{y,\eta}} \left[a_1(m) \frac{\partial U_0(\Pi, m)}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial U_0}{\partial s_2} + c\,U_0 \right] U_{n-1}(m, P)\, d\Omega_m.$$

Si nous portons notre attention sur le premier terme U_1, nous voyons tout d'abord que nous pouvons supposer, pour l'objet que nous avons en vue, que les points P et Π ne sont pas tous deux sur $\Sigma_{y,\eta}$ et alors l'intégrale de surface, qu'il est inutile d'écrire, est comparable à une intégrale $I_{0,1}$ (§ **8**) et *reste finie :* elle tend vers zéro avec $y-\eta$.

Appelons J_1 *l'intégrale triple* (2), *lorsque* $n = 1$, et posons

$$(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 = r^2, \qquad (\xi_1 - s_1)^2 + (\xi_2 - s_2)^2 = \rho^2,$$

d'où

$$(s_1 - x_1)^2 + (s_2 - x_2)^2 \geqq (r-\rho)^2.$$

Remarquant que $|\xi_1 - s_1|$ et $|\xi_2 - s_2|$ sont $\leqq \rho$, on a donc, si $|a_1| < A_1$, $|a_2| < A_2$, $|c| < C$,

$$|J_1| < \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_{y,\eta}} \left[(A_1 + A_2) \frac{\rho}{2(t-\eta)^2} + \frac{C}{t-\eta} \right] \frac{1}{y-t} e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\eta)} - \frac{(r-\rho)^2}{4(y-t)}} d\Omega_m.$$

L'emploi de coordonnées semi-polaires d'origine Π nous donne

$$|J_1| < \frac{1}{2} \int_\eta^y \frac{dt}{(y-t)(t-\eta)} \int_0^{+\infty} \left[\frac{(A_1 + A_2)\rho}{2(t-\eta)} + C \right] e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\eta)} - \frac{(r-\rho)^2}{4(y-t)}} \rho\, d\rho.$$

Or, p et θ étant des nombres positifs, avec $0 < \theta < 1$, et α une variable $\geqq 0$, on peut écrire $\alpha^p e^{-\alpha} < (K) e^{-\theta\alpha}$ (¹). Par suite, en appli-

(¹) En effet l'expression $\alpha^p e^{-(1-\theta)\alpha}$ reste finie quel que soit $\alpha > 0$.

quant cette remarque à la première exponentielle, il vient

$$|J_1| < (K) \int_{\eta}^{y} \frac{dt}{(y-t)\sqrt{t-\eta}} \left(\frac{A_1 + A_2}{\sqrt{t-\eta}} + C \right) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta\rho^2}{4(t-\eta)} - \frac{(r-\rho)^2}{4(y-t)}} d\rho.$$

Or on a évidemment $\frac{A_1+A_2}{\sqrt{t-\eta}} + C < \frac{(K)}{\sqrt{t-\eta}}$, et si nous partageons le domaine d'intégration en quatre parties par les droites $\rho = \frac{r}{2}$ et $t = \frac{y+\eta}{2}$, nous obtenons quatre intégrales analogues, dont l'une est (¹)

$$\int_{\eta}^{\frac{y+\eta}{2}} \int_0^{\frac{r}{2}} < (K) \frac{e^{-\frac{r^2}{16(y-\eta)}}}{y-\eta} \int_{\eta}^{\frac{y+\eta}{2}} \frac{dt}{t-\eta} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta\rho^2}{4(t-\eta)}} d\rho < \frac{(K)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{r^2}{16(y-\eta)}},$$

et les trois autres admettent la même limitation. En définitive

$$|U_1| < \frac{(K)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{\theta_1 r^2}{y-\eta}}.$$

On déduit de là que U_2 *reste fini* quelle que soit la position des points P et Π, et tous les autres termes sont continus et tendent vers zéro avec $y-\eta$, même si $x-\xi$ tend vers zéro. De plus, la série $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ converge et représente donc une solution U de l'équation adjointe, qu'on peut mettre sous la forme $U = U_0 + V$, V étant une fonction telle que l'intégrale $\int\int_D |V| \, d\xi \, d\eta$ *tende vers zéro avec* $y-\eta$, quel que soit le domaine d'intégration D : ceci résulte de la limitation de U_1. On en déduit immédiatement la *formule fondamentale* relative à une solution de l'équation $\mathcal{F}(z) = 0$. Si nous appliquons à l'intégrale $\int\int\int_{V_y} [u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{F}_1(u)] \, d\Omega$ la marche suivie au paragraphe **35**, en remplaçant u par U et tenant compte de la propriété de V, il vient, pour un point $P(x_1, x_2, y)$

(¹) En remarquant que, dans le domaine d'intégration que nous allons envisager, on a $r - \rho > \frac{r}{2}$, et en utilisant les propriétés des intégrales I_{pq} (§ **8**).

intérieur à (S) et avec les notations du paragraphe **35**,

$$4\pi z(x_1, x_2, y) = -\int\int_{\Sigma_y} \left(U\frac{\partial z}{\partial \xi_1} - z\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + a_1 U z\right) d\xi_2\, d\eta$$
$$+ \left(U\frac{\partial z}{\partial \xi_2} - z\frac{\partial U}{\partial \xi_2} + a_2 U z\right) d\eta\, d\xi_1 - U z\, d\xi_1\, d\xi_2$$
$$+ \int\int\int_{V_y} U f(\xi_1, \xi_2, \eta)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta$$
$$= -\int\int_{\Sigma_y} \left\{ U\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial U}{\partial n} + [a_1 \cos(n, x_1) + a_2 \cos(n, x_2)] U z \right\} d\sigma\, d\eta$$
$$+ \int\int_{\Sigma_y} U z\, d\xi_1\, d\xi_2 + \int\int\int_{V_y} U f(\xi_1, \xi_2, \eta)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta,$$

les intégrales de surface étant prises sur le côté intérieur.

Si la section inférieure S_0 ne se réduit pas à un point, nous pourrons calculer une *fonction de Green*, qui nous donnera la solution sous la forme

$$4\pi z(x_1, x_2, y) = \int\int_{\Sigma_y} z\frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma\, d\eta + \int\int_{S_0} G z\, d\xi_1\, d\xi_2 + \int\int\int_{V_y} G f\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta.$$

Si l'on avait appliqué la formule fondamentale à un point situé sur Σ ou extérieur, on aurait trouvé comme facteur dans le premier membre 2π ou 0.

II. — Équations singulières.

Le calcul de la solution fondamentale, lorsque la ligne singulière est une *caractéristique*, Ox par exemple, présente peu de difficulté, même dans une région contenant cette ligne comme frontière ou à son intérieur. Nous nous occuperons seulement des équations $(\overline{\mathcal{E}})$ et, pour simplifier les calculs, nous supposerons ici que nous ayons ramené, par un changement d'inconnue, les équations à la forme

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0, \qquad \mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^p \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

78. Calcul de la solution fondamentale. — Dans le calcul qui va suivre, nous supposerons le domaine donné quelconque si p est *pair;*

si p est *impair*, ce domaine sera situé tout entier d'*un même côté de* Oy et pourra admettre cette droite *comme frontière*.

Envisageons la fonction U du paragraphe **64**, et posons [A et B ayant les valeurs données par la formule (4) de la page 111]

$$(3)\qquad \overline{U}_0 = U, \qquad \overline{U}_1 = \iint_{S_{y,\eta}} c(s,t)\,U(\xi,\eta;s,t)\,\overline{U}_0(s,t;x,y)\,ds\,dt\ldots,$$
$$\overline{U}_n = \iint_{S_{y,\eta}} c(s,t)\,U(\xi,\eta;s,t)\,\overline{U}_{n-1}(s,t;xy)\,ds\,dt,$$

$S_{y,\eta}$ étant la région du domaine donné limitée par les caractéristiques d'ordonnée y et η. Tous ces termes tendent vers zéro avec $y-\eta$, si $x \neq \xi$. Étudions $\overline{U}_1$: il résulte de ce que nous avons vu dans le paragraphe **67**, qu'on peut écrire

$$|U| < (K)(y-\eta)^{-1+\frac{1}{q}} e^{-\frac{(|x|^r - |\xi|^r)^2}{q^2(y-\eta)}} \qquad (q = 2r = p+2);$$

si donc la région $S_{y,\eta}$ est finie, on voit que $\overline{U}_1$ est de l'ordre de $(y-\eta)^{-1+\frac{2}{q}}$ au plus. On peut donner une limitation plus précise. Désignons, en effet, par P′, Π′ les points symétriques de $P(x,y)$ et $\Pi(\xi,\eta)$ par rapport à Oy, au cas où ces points appartiennent au domaine d'intégration : supposons x et ξ positifs, c'est-à-dire, en somme, appelons P et Π ceux des quatre points qui sont à droite de Oy. Menons les parallèles à Oy équidistantes de P et Π, P′ et Π′ : avec Oy, elles partagent le domaine d'intégration en quatre régions. Soit R celle qui est le plus à droite et supposons qu'elle contienne $P(x,y)$: l'intégrale correspondante sera limitée par

$$(K)e^{-(L)\frac{(x^r-\xi^r)^2}{y-\eta}} \int_\eta^y \frac{dt}{[(y-t)(t-\eta)]^{1-\frac{1}{q}}} \int_{\frac{x+\xi}{2}}^{\infty} e^{-\frac{(s^r-x^r)^2}{q^2(y-t)}}\,ds.$$

Opérant comme pour l'intégrale J (p. 116), il nous suffira d'envisager la partie de R où l'on a $s \geqq x$ et d'y poser

$$s^r - x^r = q\sigma\sqrt{y-t} \qquad (\sigma \geqq 0)$$

et par suite

$$|ds\,dt| = 2\sqrt{y-t}\,(x^r + q\sigma\sqrt{y-t})^{\frac{1}{r}-1}\,|d\sigma\,dt| < (K)\frac{(y-t)^{\frac{1}{q}}}{\sigma^{1-\frac{2}{q}}}|d\sigma\,dt|.$$

L'intégrale correspondante admet donc comme limitation

$$(\mathrm{K})e^{-(\mathrm{L})\frac{(x^r-\xi^r)^2}{y-\eta}}\int_\eta^y \frac{dt}{(y-t)^{1-\frac{2}{q}}(t-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} < (\mathrm{K})\frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{3}{q}}}e^{-(\mathrm{L})\frac{(x^r-\xi^r)^2}{y-\eta}},$$

et les autres intégrales se limitent de la même façon (ici le domaine d'intégration peut être une bande indéfinie, c restant fini).

Or ceci reste fini si $p = 1$, ou si p est < 1 et alors non entier; si $p > 1$, la singularité pour $x = \xi$, $y = \eta$ est d'ordre moins élevé que dans le terme précédent et, en poursuivant la série d'approximations, on arrive à des termes *finis et continus* constituant une série *convergente* $\overline{\mathrm{U}}$. Ici encore nous pouvons écrire $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{U} + \mathrm{V}$, l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} |\mathrm{V}|\,d\xi$ *tendant vers zéro avec* $y - \eta$. D'où la *formule fondamentale* (¹)

$$z(x,y) = \int_{(\mathrm{C}_y)} \left(\overline{\mathrm{U}}\frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial \overline{\mathrm{U}}}{\partial \xi}\right) d\eta + \xi^p \overline{\mathrm{U}} z\, d\xi + \int\int_{\mathrm{S}_y} \overline{\mathrm{U}} f\, d\xi\, d\eta.$$

79. Application au problème du raccordement. — Étant données les deux équations $\mathcal{F} = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 0$, dans lesquelles nous supposons p impair, on peut se proposer de traiter pour une solution de l'équation $\mathcal{F} = 0$ le problème du raccordement, traité dans le paragraphe **68** dans le cas où $c \equiv 0$. Nous allons indiquer brièvement comment on peut résoudre cette question.

Si l'on veut employer la première méthode indiquée au paragraphe **68**, nous effectuerons les approximations (3) du paragraphe **78** en partant de $\overline{\mathrm{U}}_0 = u_2$ [u_2 étant la fonction définie par la formule (6′), p. 120] et en remplaçant U par U_2, second terme de la solution fondamentale U. Nous obtiendrons ainsi une solution fondamentale particulière $\overline{u}_2(\xi, \eta; y)$, telle que $\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial \xi}$ soit nulle pour $\xi = 0$. Nous appliquerons alors la formule de Riemann à l'intégrale $\int\int [\overline{u}_2 \mathcal{F}(z) - z\mathcal{F}_1(\overline{u}_2)]\, d\mathrm{S}$ et au domaine ABNP (*fig.* 16), ce qui nous donnera une formule analogue à la formule (6), dans laquelle nous pourrons faire disparaître

(¹) Tout ceci s'applique aussi aux équations (1′) du paragraphe **63**.

le terme en $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, dans l'intégrale relative à BN, par l'emploi d'une fonction auxiliaire. Nous obtiendrons, en définitive, une équation intégrale en $\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \eta)$.

Si, au contraire, nous voulons employer la deuxième méthode, c'est-à-dire calculer $\frac{\partial z}{\partial y}(0, y)$, nous partirons, dans les approximations (3) du paragraphe **78**, de $\overline{U_0} = u_1$ [formule (7), p. 120] et nous remplacerons U par U_1, premier terme de U. Nous formerons ainsi la solution $\overline{u}_1$ de l'adjointe, nulle pour $\xi = 0$, et nous pourrons ensuite appliquer la formule de Riemann au domaine ABnp; mais alors il faudra porter son attention sur la transformation de l'intégrale en $z(0, \eta)$: l'élément différentiel sera encore ici de l'ordre de $\frac{1}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}$. Après avoir éliminé le terme en $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, sur BN, nous arriverons encore à une équation intégrale en $\frac{\partial z}{\partial \eta}(0, \eta)$, analogue à l'équation (11).

Pour démontrer que le noyau est fermé, nous utiliserons l'intégrale (étendue au domaine limité par C'BCB')

$$\begin{aligned}\iint z_0\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0\right) dx\, dy \\ = \iint \left[-\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 + c z_0^2\right] dx\, dy - \frac{1}{2}\int_{AC'+A'C} x^p z_0^2\, dx = 0,\end{aligned}$$

z_0 étant une solution régulière de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0,$$

nulle sur ABC, A'B'C'. Mais ici, pour pouvoir tenir le même raisonnement que dans le paragraphe **68** et montrer que z_0 est identiquement nulle, nous sommes obligés de faire l'hypothèse que c est *négatif ou nul.* On peut cependant supposer c de signe quelconque, à condition que le contour n'ait pas une trop grande largeur, en utilisant le même artifice que dans le type elliptique (*voir* Picard, *Analyse*, 2e édition, t. II, p. 24). Le noyau sera fermé pour tout contour tel que la somme des valeurs maxima de PN et de PN' (*fig.* 16) soit inférieure à $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$, C étant le maximum de $|c|$.

I. *Observations sur le Chapitre IV.* — Les problèmes traités dans les Sections I et III de ce Chapitre (formule fondamentale, problème du raccordement, problème de Cauchy) deviennent des problèmes relatifs à l'équation de la chaleur $\delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, quand l'exposant p a la valeur *zéro*, c'est-à-dire quand $q = 2$. Il est facile de vérifier que les formules générales se réduisent bien, pour $q = 2$, à celles qui figurent dans les Chapitres précédents.

Envisageons, par exemple, la solution fondamentale U de la page 109 : on constate aisément que $\sqrt{\pi}\left[\sqrt{\theta}\,\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}(\theta) + \mathrm{I}_{-\frac{1}{2}}(\theta)\right] = e^{2\sqrt{\theta}}$, d'où il résulte que, si A et B ont les valeurs (4) [p. 111], U se réduit à $[4\pi(y-\eta)]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ et par suite la formule (5) devient la formule fondamentale (α) du paragraphe **1**.

De même, dans la solution (16) ou (16′) du problème de Cauchy [p. 135], faisons $q = 2$. En remarquant que φ_λ et $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x}$ s'annulent pour $x = \xi$, la formule (18) montre immédiatement par voie de récurrence que, pour $q = 2$, $\varphi_\lambda(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$ et l'on retrouve ainsi la formule (12) (§ **55**).

II. *Observations sur le Chapitre V.* — Dans la formation de la solution fondamentale U, pour l'espace par exemple (p. 142), le terme U_n se décompose en une intégrale double et une intégrale triple. On peut également supposer que U_n *soit représenté par l'intégrale triple seule*, car la décomposition inverse montre que la solution $\mathrm{U} = \Sigma \mathrm{U}_n$ ainsi formée est bien solution de $\mathcal{F}_1(u) = 0$ (p. 141).

Indiquons ici également un procédé de limitation plus précis que celui que nous avons utilisé p. 139 et 143. Plaçons-nous dans le cas de l'espace et posons $\rho = \lambda r$, $t - \eta = \mu(y - \eta)$: on constate alors que

$$\frac{\rho^2}{4(t-\eta)} + \frac{(\rho - r)^2}{4(y-t)} = \frac{r^2}{4(y-\eta)}\left[1 + \frac{(\lambda-\mu)^2}{\mu(1-\mu)}\right] = \frac{r^2}{4(y-\eta)} + \nu^2.$$

En prenant comme variables d'intégration μ et ν dans la dernière intégrale de la page 142, on arrive aisément à la limitation (α, β, γ étant des nombres positifs)

$$|\mathrm{U}_1| < \sqrt{y-\eta}\,\mathrm{U}_0\left(\alpha + \frac{\beta r}{\sqrt{y-\eta}} + \frac{\gamma r^2}{y-\eta}\right)$$

et l'on opérerait de même pour U_2.

En appliquant cette méthode à l'équation $\delta u + cu = 0$, on constate que $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 e^{\mathrm{H}(\xi,\eta;x,y)(y-\eta)}$, avec $|\mathrm{H}| < \mathrm{C}$, C étant le maximum de $|c|$; si l'on remplace H par C, on obtient la solution fondamentale de $\delta u + \mathrm{C}u = 0$.