

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

H. VILLAT

**Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide  
limité par une paroi fixe**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6<sup>e</sup> série, tome 7 (1911), p. 353-408.*

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1911\\_6\\_7\\_\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__353_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

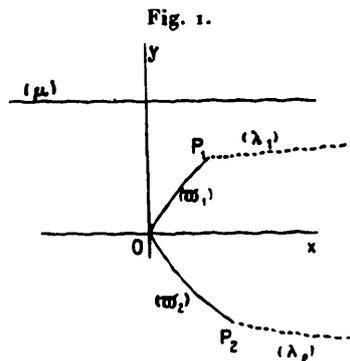
et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide  
limité par une paroi fixe;*

**PAR M. H. VILLAT.**

*A Monsieur Marcel Brillouin,  
Hommage de respectueuse admiration.  
Janvier 1911.*

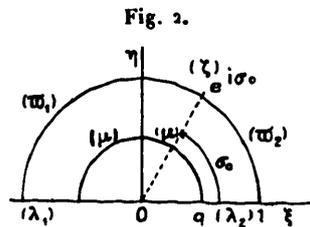
*Introduction.* — J'ai déterminé dans ma Thèse [*Sur la résistance des fluides*, première Partie (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 203)] l'intégrale générale du mouvement d'un solide dans un fluide plan limité par une paroi fixe ( $\mu$ ) rectiligne indéfinie, lorsque le fluide, dont la densité est prise pour unité, est supposé avoir



atteint un état irrotationnel permanent par rapport au corps (ce qui entraîne que le mouvement du solide se fasse parallèlement à la paroi). On admet en outre, conformément aux vues de Helmholtz, Kirchhoff, Levi-Cevità, la présence à l'arrière du solide d'un sillage fluide faisant corps avec lui, et limité par deux lignes de glissement (ou lignes libres)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , le long desquelles le fluide en mouvement par rapport au corps glisse sur la portion fluide adhérent à celui-ci.

Je rappelle que, dans le plan du mouvement  $z = x + iy$ , nous avons pris comme origine  $O$  le point du profil de l'obstacle où le courant se divise pour venir entourer celui-ci, en suivant tout d'abord les portions  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  de la paroi, puis les lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous avons appelé  $v$  la vitesse du corps, et nous avons vu qu'il était permis, sans rien modifier d'essentiel au problème, de supposer le corps immobile, en donnant au fluide à l'infini la vitesse  $v$  (parallèle à la paroi  $\mu$ ).

Ceci rappelé, j'ai démontré que tous les éléments du mouvement s'exprimaient facilement au moyen d'une certaine variable auxiliaire  $\zeta$  (sur le plan de laquelle le domaine du plan  $z$ , occupé par le fluide mobile par rapport au corps, est représenté sur la demi-couronne circulaire qu'indique la figure ci-dessous) et au moyen d'une fonction  $\Omega(\zeta)$



de cette variable; cette fonction est assujettie à certaines conditions (*cf.* ma Thèse, p. 233) et présente la même généralité qu'une série de Laurent dont un coefficient sur deux serait arbitraire.

Une fois déterminée cette fonction  $\Omega(= \Theta + iT)$  tous les éléments du mouvement en résultent; je donne ci-dessous les principaux résultats, renvoyant, pour leur démonstration, au Mémoire détaillé.

*Parois  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  de l'obstacle.*

$$(1) \quad x = -A \frac{\omega}{\pi} (e_2 - e_1) (e_3 - e_2)^2 \\ \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-T} \cos \Theta \frac{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma,$$

$$(2) \quad y = -A \frac{\omega}{\pi} (e_3 - e_1) (e_3 - e_2)^2 \\ \times \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{-T} \sin \Theta \frac{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma.$$

*Élément d'arc d'une paroi.*

$$(3) \quad d\omega = -\frac{A\omega}{\pi}(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)^2 \times e^{-\tau} \frac{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right]^2} d\sigma.$$

*Résistance de l'obstacle.*

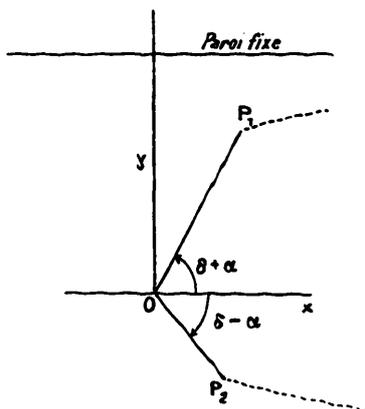
$$(4) \quad P = \varphi_x + i\varphi_y = \frac{1}{2i} \int_{|\zeta|=1} e^{i\Omega} df.$$

Dans ces formules,  $p$  est la fonction elliptique de Weierstrass, aux périodes  $2\omega$  réelle, et  $2\omega'$  imaginaire pure; et nous avons gardé les notations habituelles à la Théorie des Fonctions elliptiques (1). Le rayon intérieur de la demi-couronne sus-indiquée est égal à

$$(5) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega}} < 1.$$

Ceci posé, nous avons reconnu que la fonction  $\Omega$  correspondant à

Fig. 3.



un obstacle formé de deux lames issues du point O et faisant avec Ox

---

(1) Les notations adoptées dans ce Mémoire sont celles des Ouvrages fondamentaux sur les fonctions elliptiques (notamment APPELL et LACOUR, TANNERY et MOLK). D'autre part, nous espérons qu'aucune confusion n'est possible dans le texte, entre le point  $\zeta$ , d'argument  $\sigma$ , et les fonctions elliptiques  $\sigma$  et  $\zeta$ .

les angles  $\delta \pm \alpha$ , pouvait s'écrire, en posant

$$(6) \quad \zeta = \rho e^{i\sigma},$$

$$\Omega_0^! = \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \cos n\sigma - i \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \sin n\sigma$$

avec

$$A_n = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n \operatorname{sh}(n \log q)}$$

(cf. ma Thèse, p. 239); nous avons vu aussi que les constantes  $\alpha, \delta, \sigma_0$  devaient vérifier la condition

$$(7) \quad (\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) = 0.$$

Je vais maintenant faire voir que cette fonction  $\Omega_0^!$  est susceptible de recevoir une forme très condensée, par l'intervention de certaines fonctions de la Théorie des Fonctions elliptiques.

*Expression de la fonction  $\Omega_0^!$ .* — Observons tout d'abord qu'on a

$$\operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{\rho} \right)^n - \left( \frac{\rho}{q} \right)^n \right], \quad \operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{\rho} \right)^n + \left( \frac{\rho}{q} \right)^n \right],$$

$$\operatorname{sh}(n \log q) = \frac{1}{2} \left( q^n - \frac{1}{q^n} \right).$$

Donc, nous pouvons écrire

$$\Omega_0^! = \sum -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n} \rho^n \cos n\sigma \frac{1 - \left(\frac{q}{\rho}\right)^{2n}}{1 - q^{2n}} - \frac{4\alpha i}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n} \rho^n \sin n\sigma \frac{1 + \left(\frac{q}{\rho}\right)^{2n}}{1 - q^{2n}},$$

ce qu'on a évidemment le droit de mettre sous la forme

$$\Omega_0^! = \sum -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \rho^n (\cos n\sigma + i \sin n\sigma)$$

$$+ \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \frac{q^{2n} (\cos n\sigma - i \sin n\sigma)}{\rho^n},$$

ou encore, en remarquant les formules, évidentes d'après (6),

$$\rho^n (\cos n\sigma + i \sin n\sigma) = \zeta^n; \quad \frac{\cos n\sigma - i \sin n\sigma}{\rho^n} = \frac{1}{\zeta^n};$$

$$(8) \quad \Omega_0^! = \sum -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \zeta^n + \sum \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1 - q^{2n})} \frac{q^{2n}}{\zeta^n}.$$

De sorte qu'au fond la fonction  $\Omega_0^!$  se présente comme une série de Laurent, convergente dans la couronne circulaire étudiée dans ma

Thèse (exception faite de deux points  $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$  de la frontière). Ce fait ne doit d'ailleurs pas étonner, d'après ce qui a été dit dans cette étude.

Pour la transformation que j'ai en vue je m'appuierai, dans ce qui va suivre, sur l'égalité

$$(9) \quad -\frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\sigma_0}{n} \zeta^n = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}}$$

(dans laquelle le logarithme qui figure au second membre est celui qui s'annule pour  $\zeta = 0$  et qui est valable pour

$$|\zeta| \leq 1,$$

exception faite des deux points  $\zeta = e^{\pm i\sigma_0}$  de la frontière).

Cette égalité résulte de la formule

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

valable pour

$$|z| \leq 1$$

exception faite de  $z = -1$  (cf. PICARD, *Analyse*, t. II, p. 75). Nous pouvons donc écrire, dans et sur la circonférence de rayon 1, sauf au point  $\zeta = e^{-i\sigma_0}$ ,

$$\log(1 - \zeta e^{i\sigma_0}) = -\zeta e^{i\sigma_0} - \frac{\zeta^2}{2} e^{2i\sigma_0} - \dots - \frac{\zeta^n}{n} e^{ni\sigma_0} - \dots$$

Et de même, dans et sur la circonférence, sauf au point  $\zeta = e^{i\sigma_0}$ ,

$$\log(1 - \zeta e^{-i\sigma_0}) = -\zeta e^{-i\sigma_0} - \frac{\zeta^2}{2} e^{-2i\sigma_0} - \dots - \frac{\zeta^n}{n} e^{-ni\sigma_0} - \dots$$

D'où, par soustraction et observant l'égalité évidente

$$e^{ni\sigma_0} - e^{-ni\sigma_0} = 2i \sin n\sigma_0,$$

la formule

$$\log(1 - \zeta e^{i\sigma_0}) - \log(1 - \zeta e^{-i\sigma_0}) = -2i \left( \zeta \sin \sigma_0 + \frac{\zeta^2}{2} \sin 2\sigma_0 + \dots + \frac{\zeta^n}{n} \sin n\sigma_0 + \dots \right)$$

ou encore

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin n\sigma_0}{n} \zeta^n = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}},$$

c'est-à-dire la formule à démontrer (9).

Ce préliminaire établi, revenons à l'expression (8) de  $\Omega'_0$ , et considérons d'abord la première partie

$$(10) \quad -\frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \zeta^n$$

qui est entière en  $\zeta$ . Comme la quantité  $q$  est plus petite que l'unité, on a évidemment

$$(11) \quad \frac{1}{1-q^{2n}} = 1 + q^{2n} + q^{4n} + \dots + q^{2pn} + \dots$$

De cette dernière égalité, et des règles de calcul des séries à double entrée, nous déduisons immédiatement que l'on a, pour  $|\zeta| \leq 1$ , sauf toujours aux deux points  $e^{\pm i\sigma_0}$ ,

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \zeta^n = \sum_n \sum_p \frac{\sin n\sigma_0}{n} q^{2pn} \zeta^n,$$

ce qu'on a le droit d'ordonner comme il suit :

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \zeta^n = \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n} \zeta^n + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n} (q^2\zeta)^n + \dots + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n} (q^{2p}\zeta)^n + \dots$$

Mais alors, comme  $|q^2\zeta|$ ,  $|q^4\zeta|$ , ... sont inférieurs à 1 lorsque  $|\zeta|$  est  $\leq 1$ , la formule (9) ci-dessus démontrée nous donnera

$$(12) \quad -\frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \zeta^n = \frac{2\alpha i}{\pi} \left\{ \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} + \log \frac{1-q^2\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-q^2\zeta e^{i\sigma_0}} + \dots \right. \\ \left. + \log \frac{1-q^{2p}\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-q^{2p}\zeta e^{i\sigma_0}} + \dots \right\}.$$

Prenons maintenant la seconde partie de  $\Omega'_0$ , à savoir

$$\frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \frac{q^{2n}}{\zeta^n}.$$

D'une façon analogue, nous aurons

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \frac{q^{2n}}{\zeta^n} = \sum_n \sum_p \frac{\sin n\sigma_0}{n} q^{2n+2pn} \frac{1}{\zeta^n}$$

assurément valable dans toute notre couronne circulaire, où  $|\zeta|$  est

toujours supérieur ou égal à  $q$ , et par suite à  $q^2, q^4, \text{etc.}$  Ensuite, nous ordonnerons le second membre comme il suit

$$\sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \frac{q^{2n}}{\zeta^n} = \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n} \left(\frac{q^2}{\zeta}\right)^n + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n} \left(\frac{q^4}{\zeta}\right)^n + \dots + \sum_n \frac{\sin n\sigma_0}{n} \left(\frac{q^{2p}}{\zeta}\right)^n + \dots$$

Et comme, d'après ce qu'on vient de dire,  $\left|\frac{q^2}{\zeta}\right|, \left|\frac{q^4}{\zeta}\right|, \text{etc.}$  sont tous plus petits que 1 dans la couronne, l'égalité (9) nous donnera

$$(13) \quad \frac{4\alpha}{\pi} \sum_1^n \frac{\sin n\sigma_0}{n(1-q^{2n})} \frac{q^{2n}}{\zeta^n} = -\frac{2\alpha i}{\pi} \left\{ \log \frac{1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{-i\sigma_0}}{1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{i\sigma_0}} + \log \frac{1 - \frac{q^4}{\zeta} e^{-i\sigma_0}}{1 - \frac{q^4}{\zeta} e^{i\sigma_0}} + \dots + \log \frac{1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{-i\sigma_0}}{1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{i\sigma_0}} + \dots \right\}$$

Réunissant ces résultats, il est maintenant établi qu'on a dans la couronne

$$(14) \quad \Omega'_0 = \left\{ \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - q^2 \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - q^2 \zeta e^{i\sigma_0}} + \dots + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - q^{2p} \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - q^{2p} \zeta e^{i\sigma_0}} + \dots - \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{-i\sigma_0}}{1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{i\sigma_0}} - \dots - \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{-i\sigma_0}}{1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{i\sigma_0}} + \dots \right\}$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que, si  $q$  devenait nul, la fonction  $\Omega'_0$  se réduirait à celle que M. T. Levi-Civita a considérée dans sa théorie du fluide indéfini, et qu'il désigne par  $\omega_0$  (cf. son *Mémoire Scie e Leggi di resistenza*, § 10 et 11). Il est d'ailleurs possible de faire voir que l'hypothèse  $q = 0$  entraîne que la paroi  $\mu$  est éloignée à l'infini (cf. ma Thèse, p. 309). On devait donc retomber, dans ce cas, sur le problème étudié par M. Levi-Civita.

La formule à laquelle nous venons de parvenir peut maintenant

être écrite successivement sous les formes suivantes, toutes évidemment équivalentes :

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi} \lim_{(p=\infty)} \log \frac{(1 - q^2 \zeta e^{-i\sigma_0})(1 - q^4 \zeta e^{-i\sigma_0}) \dots (1 - q^{2p} \zeta e^{-i\sigma_0})}{(1 - q^2 \zeta e^{i\sigma_0})(1 - q^4 \zeta e^{i\sigma_0}) \dots (1 - q^{2p} \zeta e^{i\sigma_0})}$$

$$= \frac{2\alpha i}{\pi} \lim_{(p=\infty)} \log \frac{\left(1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{-i\sigma_0}\right) \left(1 - \frac{q^4}{\zeta} e^{-i\sigma_0}\right) \dots \left(1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{-i\sigma_0}\right)}{\left(1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{i\sigma_0}\right) \left(1 - \frac{q^4}{\zeta} e^{i\sigma_0}\right) \dots \left(1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{i\sigma_0}\right)}$$

ou

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}}$$

$$+ \frac{2\alpha i}{\pi} \lim_{(p=\infty)} \log \frac{(1 - q^2 \zeta e^{-i\sigma_0}) \left(1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{i\sigma_0}\right) \dots (1 - q^{2p} \zeta e^{-i\sigma_0}) \left(1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{i\sigma_0}\right)}{(1 - q^2 \zeta e^{i\sigma_0}) \left(1 - \frac{q^2}{\zeta} e^{-i\sigma_0}\right) \dots (1 - q^{2p} \zeta e^{i\sigma_0}) \left(1 - \frac{q^{2p}}{\zeta} e^{-i\sigma_0}\right)}$$

ou enfin

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}}$$

$$+ \frac{2\alpha i}{\pi} \lim_{(p=\infty)} \log \left[ \frac{1 - q^2 \left( \zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta} e^{-i\sigma_0} \right) + q^2}{1 - q^2 \left( \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta} e^{i\sigma_0} \right) + q^2} \right] \dots \left[ \frac{1 - q^{2p} \left( \zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta} e^{-i\sigma_0} \right) + q^{2p}}{1 - q^{2p} \left( \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta} e^{i\sigma_0} \right) + q^{2p}} \right],$$

c'est-à-dire

$$(15) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\prod_{p=1}^{p=\infty} \left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta} e^{-i\sigma_0} \right) + q^{2p} \right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty} \left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta} e^{i\sigma_0} \right) + q^{2p} \right]}$$

le symbole  $\Pi$  étant celui qui désigne un produit infini.

Or la Théorie des Fonctions elliptiques nous fournit des formules dans lesquelles interviennent de pareils produits infinis. Retenons pour l'instant particulièrement celle-ci (*cf.* TANNERY ET MOLK, Form. XXIX) :

$$(15') \quad \mathcal{J}u = \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi}{2\omega} u \frac{e^{\frac{\eta u^2}{e^{2\omega}}}}{\prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2p})^2} \prod_{1}^{\infty} \left( 1 - 2q^{2p} \cos \frac{\pi u}{\omega} + q^{4p} \right).$$

Nous pourrions identifier les deux trinomes

$$\left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}} \right) + q^{4p} \right] \quad \text{et} \quad \left( 1 - 2q^{2p} \cos \frac{\pi u}{\omega} + q^{4p} \right)$$

en posant

$$\zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}} = 2 \cos \frac{\pi u}{\omega} = e^{\frac{i\pi u}{\omega}} + \frac{1}{e^{\frac{i\pi u}{\omega}}}.$$

Une des solutions de cette équation est

$$e^{\frac{i\pi u}{\omega}} = \zeta e^{-i\sigma_0}.$$

(L'autre solution s'en déduirait en changeant le signe de  $u$ , ce qui ne change rien au rapport  $\frac{\sigma u}{\sin \frac{\pi}{2\omega} u}$ .)

De là nous tirons

$$u = \frac{\omega}{\pi} \left( -\sigma_0 + \frac{1}{i} \log \zeta \right)$$

et ensuite la formule (15') rappelée ci-dessus nous donne

$$(16) \quad \prod_{p=1}^{p=+\infty} \left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}} \right) + q^{4p} \right] \\ = \frac{\pi}{2\omega} \prod (1 - q^{2p})^2 \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 + \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{\sin \left( -\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\log \zeta}{2i} \right) e^{\frac{\eta\omega}{2\pi^2} \left( -\sigma_0 + \frac{\log \zeta}{i} \right)^2}}.$$

Il suffit de changer le signe de  $\sigma_0$  pour en conclure

$$(17) \quad \prod_{p=1}^{p=+\infty} \left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}} \right) + q^{4p} \right] \\ = \frac{\pi}{2\omega} \prod (1 - q^{2p})^2 \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 + \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{\sin \left( \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\log \zeta}{2i} \right) e^{\frac{\eta\omega}{2\pi^2} \left( \sigma_0 + \frac{\log \zeta}{i} \right)^2}}.$$

Transportant dans l'expression (15) de  $\Omega'_0$ , et supprimant les fac-

teurs communs, nous obtenons donc

$$(18) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)} e^{\frac{2\eta\omega\sigma_0}{\pi^2} \log \zeta}.$$

Nous pouvons encore simplifier cette expression. Observons en effet qu'on a

$$\frac{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\log \zeta}{2i}\right) + \operatorname{tang} \frac{\sigma_0}{2}}{\operatorname{tang}\left(\frac{\log \zeta}{2i}\right) - \operatorname{tang} \frac{\sigma_0}{2}}$$

et, d'après les formules d'Euler,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\log \zeta}{2i}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2} \log \zeta} - e^{-\frac{1}{2} \log \zeta}}{i\left(e^{\frac{1}{2} \log \zeta} + e^{-\frac{1}{2} \log \zeta}\right)} = \frac{\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}}{i\left(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\zeta - 1}{i(\zeta + 1)},$$

d'où encore

$$(19) \quad \frac{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)} = \frac{\zeta - 1 + i \operatorname{tang} \frac{\sigma_0}{2} (\zeta + 1)}{\zeta - 1 - i \operatorname{tang} \frac{\sigma_0}{2} (\zeta + 1)} = \frac{\zeta e^{\frac{i\sigma_0}{2}} - e^{-\frac{i\sigma_0}{2}}}{\zeta e^{-\frac{i\sigma_0}{2}} - e^{\frac{i\sigma_0}{2}}} = e^{-i\sigma_0} \frac{1 - \zeta e^{i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}.$$

Donc il vient, en remplaçant dans (18) et supprimant les termes qui se détruisent,

$$(20) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^2} \log \zeta + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} \quad (1).$$

*Vérification.* — Cette forme est notablement plus simple que la précédente; il est facile de vérifier après coup son exactitude, en constatant que la fonction de  $\zeta$  ainsi définie satisfait bien à toutes les

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 février 1911, t. 152, p. 304.

conditions voulues. Celles qui sont relatives à la continuité sont évidemment satisfaites ; voyons les conditions aux limites.

Sur la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$ , la partie réelle de  $\Omega'$  doit prendre les valeurs

$$\begin{aligned} \delta - \alpha & \text{ si } 0 < \varepsilon < \sigma_0 \\ \delta + \alpha & \text{ si } \sigma_0 < \varepsilon < \pi \end{aligned} \quad (\zeta = e^{i\varepsilon}).$$

Or si nous faisons  $\zeta = e^{i\varepsilon}$  dans l'expression (20), elle devient

$$(21) \quad U = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^2} i\varepsilon + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Or  $\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)$  est négatif pour  $0 < \varepsilon < \sigma_0$ , et positif pour  $\sigma_0 < \varepsilon < \pi$ . De là, en nous rappelant la condition (7), qui peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} = \delta + \alpha,$$

nous concluons immédiatement que la partie réelle de  $U$  est, pour  $0 < \varepsilon < \sigma_0$ ,

$$\Re U = \frac{2\alpha i}{\pi} (i\pi) + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} = \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} - 2\alpha = \delta - \alpha.$$

et, pour  $\sigma_0 < \varepsilon < \pi$ ,

$$\Re U = \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} = \delta + \alpha.$$

On retrouve donc bien les valeurs voulues.

La vérification est un peu moins simple, pour ce qui concerne la circonférence de rayon  $q$ , sur laquelle  $\Omega'_0$  doit prendre des valeurs imaginaires pures. Faisons  $\zeta = qe^{i\varepsilon}$ , et par suite

$$\log \zeta = \log q + i\varepsilon,$$

ou

$$\log \zeta = -\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon,$$

en nous souvenant de la valeur (5) de  $q$ . Transportant dans  $\Omega'_0$ , nous

obtenons le résultat suivant

$$V = \frac{2\alpha i}{\pi'} \log \frac{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^2} \left(-\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon\right) + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Or on connaît la formule (cf. TANNERY et MOLK, *Fonct. ellipt.*, XII)

$$\sigma(u + \omega') = e^{\eta' u} \sigma_{\omega'} \sigma_3 u.$$

D'où nous concluons

$$\frac{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} = \frac{e^{\eta' \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma_0)} \sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma_0)}{e^{\eta' \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \sigma_0)} \sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \sigma_0)} = \frac{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma_0)}{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \sigma_0)} \times e^{-\frac{2\eta'\omega\sigma_0}{\pi}}$$

et

$$(22) \quad V = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma_0)}{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \sigma_0)} + \frac{2\alpha i}{\pi} \left(-\frac{2\eta'\omega\sigma_0}{\pi}\right) + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^2} \left(-\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon\right) + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Observant maintenant que le quotient  $\frac{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \sigma_0)}{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + \sigma_0)}$  est positif pour

$-\pi < \varepsilon < \pi$ , nous en déduisons que, sur la circonférence de rayon  $q$ , la partie réelle de  $\Omega'_0$ , c'est-à-dire de  $V$ , est

$$\frac{2\alpha i}{\pi} \left(-\frac{2\eta'\omega\sigma_0}{\pi}\right) - \frac{4\alpha\eta\sigma_0\omega'}{i\pi^2} + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi},$$

ou bien

$$\frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} \left\{ 1 + \frac{2i}{\pi}(\eta\omega' - \eta'\omega) \right\},$$

résultat nul, si l'on tient compte de la formule classique

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}.$$

Enfin, on voit de suite que  $\Omega'_0$  est réel lorsque  $\zeta$  est sur l'axe réel. Il suffit en effet de remarquer que (en supposant  $\zeta > 0$ , pour fixer les

idées) l'expression

$$\frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}$$

ne change pas si l'on change partout  $i$  en  $-i$  : car elle devient, en observant que  $\sigma$  est une fonction impaire,

$$-\frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(-\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\sigma\left(-\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)} = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}.$$

La fonction  $\Omega'_0$ , dont la partie imaginaire devient en outre infinie pour  $\zeta = e^{\pm i\alpha}$ , satisfait donc à toutes les conditions qui lui étaient imposées.

Ces vérifications n'étaient pas inutiles, puisque cette fonction  $\Omega'_0$  va servir de base à la théorie que nous allons développer dans le Chapitre suivant.

Avant d'exposer cette théorie, je veux encore indiquer une forme pour  $\Omega'_0$ , équivalente à la forme (20), forme nouvelle qui nous sera utile ailleurs <sup>(1)</sup>, et qui se déduit en somme de la précédente, par les relations qui permettent de passer des fonctions de Weierstrass à celles de Jacobi et Hermite.

*Autre expression de  $\Omega'_0$ .* — Revenons à la formule (15), et observons que la théorie des fonctions H nous permet de calculer autrement les produits infinis étudiés ci-dessus. Avec la relation

$$(23) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

définissant la liaison qui existe entre les périodes avec lesquelles on doit construire les nouvelles fonctions, on sait qu'on a (cf. APPELL et LACOUR, *Fonct. ellipt.*, p. 121)

$$H\left(\frac{2Ku}{\pi}\right) = A 2q^{\frac{1}{2}} \sin u \prod_{p=1}^{p=\infty} [1 - 2q^{2p} \cos 2u + q^{4p}]$$

<sup>(1)</sup> Cf. H. VILLAT, *Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911 : à paraître).

avec

$$A = (1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2p}) \dots$$

Par suite, en posant

$$2 \cos 2u = \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}},$$

c'est-à-dire si l'on veut

$$u = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{1}{2i} \log \zeta,$$

il vient

$$\prod_1^{\infty} \left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{i\sigma_0}} \right) + q^{4p} \right] = \frac{H\left(\frac{K}{i\pi} \log \zeta + \frac{K}{\pi} \sigma_0\right)}{A 2q^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}.$$

De même, en changeant le signe de  $\sigma_0$ ,

$$\prod_1^{\infty} \left[ 1 - q^{2p} \left( \zeta e^{-i\sigma_0} + \frac{1}{\zeta e^{-i\sigma_0}} \right) + q^{4p} \right] = \frac{H\left(\frac{K}{i\pi} \log \zeta - \frac{K}{\pi} \sigma_0\right)}{A 2q^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)}.$$

Donc enfin

$$(24) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \left[ \frac{H\left(\frac{K}{i\pi} \log \zeta - \frac{K}{\pi} \sigma_0\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{H\left(\frac{K}{i\pi} \log \zeta + \frac{K}{\pi} \sigma_0\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)} \right],$$

ce qui, d'après la valeur (19) trouvée antérieurement pour le quo-

tient  $\frac{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)}$ , se réduit à la forme définitive

$$(25) \quad \Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{H\left(\frac{K}{i\pi} \log \zeta - \frac{K}{\pi} \sigma_0\right)}{H\left(\frac{K}{i\pi} \log \zeta + \frac{K}{\pi} \sigma_0\right)} + \frac{2\alpha \sigma_0}{\pi}.$$

#### Étude du cas où l'obstacle a une forme donnée.

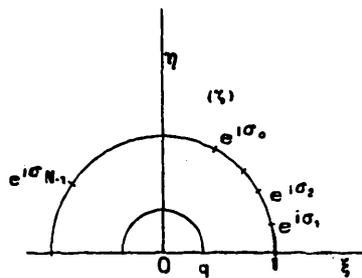
*Cas d'un obstacle polygonal.* — Considérons tout d'abord un obstacle polygonal, dont les côtés, en nombre  $N$ , passent avec  $Ox$  les

angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , respectivement; et soient

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p(=\sigma_0), \dots, \sigma_{N-1}, \pi,$$

les arguments des points de la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$  correspondant dans le plan  $\zeta$ , aux sommets de ce polygone. De sorte que, sur les

Fig. 4.



arcs successifs  $(1, e^{i\sigma_1}), (e^{i\sigma_1}, e^{i\sigma_2}), \dots$  de cette demi-circonférence, la partie réelle de la fonction  $\Omega_0$  particulière correspondant au polygone, devra prendre les valeurs constantes  $\theta_1, \theta_2, \dots$

Dans ces conditions, j'ai démontré dans ma Thèse (p. 249) qu'on pouvait écrire  $[\zeta = \rho e^{i\sigma}]$

$$(26) \quad \Omega_0 = \sum_1^n \left\{ A_n \operatorname{sh} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \cos n\sigma - i A_n \operatorname{ch} \left( n \log \frac{q}{\rho} \right) \sin n\sigma \right\},$$

les coefficients  $A_n$  étant donnés par les relations

$$A_n = \frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)} [\theta \sin n\sigma_1 + \theta_2 (\sin n\sigma_2 - \sin n\sigma_1) + \dots - \theta_N \sin n\sigma_{N-1}].$$

Il est à peine besoin de faire remarquer que, si le contour polygonal n'est pas concave vers le courant, la solution que nous développons n'a pour le moment aucun sens du point de vue hydrodynamique : car le fluide quitterait le contact avec la paroi dès qu'il atteindrait un sommet du polygone où ce fait se produirait. Comme le calcul actuel n'est destiné à nous servir *que comme intermédiaire purement analytique*, ainsi qu'on s'en rendra compte plus loin, nous n'insisterons pas sur ce point, la difficulté qui en résulte devant être levée *a posteriori*.

Cette remarque faite, observons qu'on peut évidemment écrire  $A_n$  sous la forme

$$(27) \quad A_n = \frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)} [(\theta_1 - \theta_2) \sin n\sigma_1 + (\theta_2 - \theta_3) \sin n\sigma_2 + \dots + (\theta_p - \theta_{p+1}) \sin n\sigma_p + \dots + (\theta_{N-1} - \theta_N) \sin n\sigma_{N-1}].$$

Or la substitution, dans (26), de la portion

$$\frac{2}{\pi n \operatorname{sh}(n \log q)} (\theta_1 - \theta_2) \sin n\sigma_1,$$

de  $A_n$ , fournirait, d'après le Chapitre précédent, une fonction qu'on pourrait déduire de  $\Omega'_0$  en y remplaçant  $2\alpha$  par  $\theta_2 - \theta_1$  et  $\sigma_0$  par  $\sigma_1$ .

De cette importante remarque, il résulte qu'en prenant  $\Omega'_0$  par exemple sous la forme (18), la fonction  $\Omega_0$  correspondant à notre polygone est

$$(28) \quad \Omega_0 = \frac{i(\theta_2 - \theta_1)}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_1}}{1 - \zeta e^{i\sigma_1}} + \frac{i(\theta_2 - \theta_1)}{\pi} \times \left\{ \log \left[ \frac{\varpi \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_1 \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_1}{2} \right)}{\varpi \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_1 \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_1}{2} \right)} \right] + \frac{2\gamma\omega\sigma_1 \log \zeta}{i\pi^2} \right\} + \dots + \frac{i(\theta_{p+1} - \theta_p)}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_p}}{1 - \zeta e^{i\sigma_p}} + \frac{i(\theta_{p+1} - \theta_p)}{\pi} \times \left\{ \log \left[ \frac{\varpi \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_p \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_p}{2} \right)}{\varpi \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_p \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_p}{2} \right)} \right] + \frac{2\gamma\omega\sigma_p \log \zeta}{i\pi^2} \right\} + \dots + \frac{i(\theta_N - \theta_{N-1})}{\pi} \log \frac{1 - \zeta e^{-i\sigma_{N-1}}}{1 - \zeta e^{i\sigma_{N-1}}} + \frac{i(\theta_N - \theta_{N-1})}{\pi} \times \left\{ \log \left[ \frac{\varpi \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_{N-1} \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_{N-1}}{2} \right)}{\varpi \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_{N-1} \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_{N-1}}{2} \right)} \right] + \frac{2\gamma\omega\sigma_{N-1} \log \zeta}{i\pi^2} \right\}.$$

Enfin il ne faut pas omettre de rappeler que les constantes  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}$ ,

et  $\theta_1, \dots, \theta_N$  sont liées par la relation

$$(29) \quad \theta_1 \sigma_1 + \theta_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \dots + \theta_N (\pi - \sigma_{N-1}) = 0$$

(*cf.* Thèse, p. 249 et p. 302).

Nous avons pris pour  $\Omega_0$  l'expression (18) [légèrement moins simple que l'expression (20)], pour avoir l'occasion de retrouver à titre de vérification, dans le courant du calcul qui va suivre, l'expression de la fonction  $\Omega$  qui convient à un contour donné, dans le cas du fluide indéfini, expression que j'ai déjà déterminée directement ailleurs (*cf.* Thèse, 2<sup>e</sup> Partie).

Ceci posé, imaginons que nous partions d'un polygone tel que celui dont il vient d'être parlé, et que nous fassions croître indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone, la longueur de chaque côté tendant vers zéro, de manière qu'à la limite cette ligne tende vers une courbe donnée. Dans ces conditions, la suite  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \pi$ , des valeurs de  $\sigma$  deviendra une suite continue variant de 0 à  $\pi$ ; et la succession des valeurs  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}$ , de  $\theta$  deviendra elle aussi une succession continue, sauf peut-être à la proue de l'obstacle, qui dans ce qui précède correspondait à  $\sigma = \sigma_p = \sigma_0$ . Pour ne pas compliquer les notations, nous continuerons à nommer  $\sigma_0$  la valeur de  $\sigma$  correspondant à la proue de l'obstacle auquel on parvient comme cas limite (bien que l'argument relatif à cette proue ait pu varier pendant la déformation du polygone).

Enfin, nous écrirons sous la forme

$$(30) \quad \theta = \Phi(\sigma)$$

la relation qui existe, dans la courbe limite, entre l'inclinaison  $\theta$  de la tangente en un point (dans le sens du courant) et l'argument  $\sigma$  du point correspondant sur la circonférence  $|\zeta| = 1$  dans la représentation sur demi-couronne. Si le profil de l'obstacle est continu et doué d'une tangente variant d'une façon continue ainsi que la courbure (sauf exception possible à la proue, pour  $\sigma = \sigma_0$ ), la fonction  $\Phi(\sigma)$  sera continue, sauf pour  $\sigma = \sigma_0$ ; pour cette valeur de  $\sigma$ ,  $\Phi(\sigma)$  tendra vers  $\Phi(\sigma_0 - 0)$  ou  $\Phi(\sigma_0 + 0)$  suivant qu'on arrivera vers  $\sigma_0$  par valeurs inférieures ou supérieures : ces deux valeurs limites sont du reste égales aux angles que font avec  $Ox$  les tangentes en  $O$  au profil de

l'obstacle. Enfin,  $\Phi(\sigma)$  possédera une dérivée pouvant être discontinue pour  $\sigma = \sigma_0$  (1).

Nous verrons que  $\Phi(\sigma)$  est la fonction arbitraire dont dépend tout le problème.

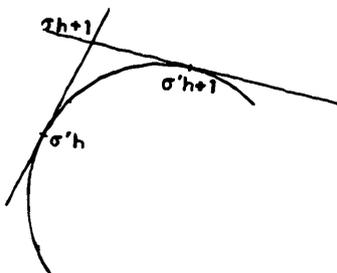
Il résulte de la relation (29) considérée à la limite, que cette fonction satisfait nécessairement à la condition

$$(31) \quad \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0,$$

sur l'établissement de laquelle je n'insiste pas, puisque aussi bien cette condition a été établie directement dans ma Thèse (p. 302).

Ceci posé, admettons, pour fixer les idées, que notre polygone variable soit circonscrit à la courbe vers laquelle il tend; alors,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  étant toujours les valeurs de  $\sigma$  correspondant aux sommets du polygone

Fig. 5.



dans la représentation sur demi-couronne, qui convient à ce polygone, appelons  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots$  les valeurs de  $\sigma$  qui correspondent aux points de contact dans la représentation qui convient à la courbe continue. De sorte que, dans la représentation relative au polygone, on a tout le long de l'arc  $e^{i\sigma_h}, e^{i\sigma_{h+1}}$ ,

$$\theta_{h+1} = \text{const.} = \Phi(\sigma'_h),$$

et par suite

$$\theta_{h+1} - \theta_h = \Phi(\sigma'_h) - \Phi(\sigma'_{h-1}).$$

(1) Ces hypothèses (entre autres la continuité de  $\Phi$  et l'existence de sa dérivée), qui se rattachent naturellement aux conditions physiques du problème traité, ne sont nullement nécessaires pour la validité des résultats qui seront obtenus plus loin, et notamment de la formule (A) et de la formule (51). Voir à ce sujet notre Note *Sur le problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 mars 1911), et le Mémoire détaillé (à paraître prochainement).

De là, et du fait *probable* qu'à la limite les trois quantités  $\sigma_h, \sigma'_h, \sigma'_{h-1}$ , deviennent égales, nous concluons que l'expression (28) de  $\Omega_0$  tend bien probablement vers une limite que nous allons écrire, et dans laquelle certaines intégrales définies interviennent tout naturellement : ce fait tient à ce que toutes les différences  $\theta_{h+1} - \theta_h$  tendent vers zéro, à part la suivante

$$\theta_{p+1} - \theta_p,$$

dont la limite est

$$\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0).$$

Envisageons donc dans la valeur (28) de  $\Omega_0$  le premier terme et les termes analogues, ne faisant pas intervenir la fonction  $\sigma$ . Ces termes groupés donnent vraisemblablement naissance à la limite suivante :

$$(32) \quad S = \frac{i}{\pi} \int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} d\sigma + \frac{i}{\pi} \int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} d\sigma \\ + \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)] \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}},$$

expression qui a un sens quel que soit  $\zeta$  dans la couronne connue du plan  $\zeta$ , et sur les bords. La transformation que je vais en faire n'est plus valable sur le bord extérieur.

Une intégration par parties permet d'écrire après simplifications faciles

$$\int \Phi'(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} d\sigma = \left[ \Phi(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} \right] - \int \Phi(\sigma) \frac{2i\zeta(\cos\sigma - \zeta)}{1-2\zeta\cos\sigma + \zeta^2} d\sigma.$$

Appliquons cette formule aux deux intervalles  $0, \sigma_0 - 0; \sigma_0 + 0, \pi$ . Il vient

$$\int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} d\sigma \\ = \Phi(\sigma_0 - 0) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} - \int_0^{\sigma_0-0} \Phi(\sigma) \frac{2i\zeta(\cos\sigma - \zeta)}{1-2\zeta\cos\sigma + \zeta^2} d\sigma, \\ \int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} d\sigma \\ = -\Phi(\sigma_0 + 0) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} - \int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi(\sigma) \frac{2i\zeta(\cos\sigma - \zeta)}{1-2\zeta\cos\sigma + \zeta^2} d\sigma.$$

Transportant dans  $S$  et simplifiant, nous avons

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\sigma) \frac{2\zeta\cos\sigma - 2\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma + \zeta^2} d\sigma.$$

A cause de la formule (31), ceci peut s'écrire

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \left( \frac{2\zeta \cos \sigma - 2\zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} + 1 \right) d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$(33) \quad S = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma.$$

Ce qui est exactement l'expression de  $\Omega$  qui convient au cas du fluide indéfini, comme je l'ai montré ailleurs. Cela devait être, puisqu'en ne conservant dans  $\Omega_0$  que le premier terme, on obtenait la fonction correspondant au fluide indéfini avec un obstacle formé de deux segments rectilignes (cf. infra, p. 359).

Prenons maintenant dans (28) les termes que nous avons négligés jusqu'ici. En posant

$$(34) \quad U(\sigma) = \log \frac{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right)} + \frac{2\gamma\omega\sigma}{i\pi^2} \log \zeta,$$

il est vraisemblable que la limite de cette somme de termes est

$$(35) \quad S_1 = \frac{i}{\pi} \int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) U(\sigma) d\sigma \\ + \frac{i}{\pi} \int_{\sigma_0+0}^\pi \Phi'(\sigma) U(\sigma) d\sigma + \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)] U(\sigma_0),$$

expression qui a un sens dans tout le domaine du plan  $\zeta$ ; la transformation qui suit n'est plus valable sur le bord extérieur.

On peut écrire

$$(36) \quad \int \Phi'(\sigma) U(\sigma) d\sigma = [\Phi(\sigma) U(\sigma)] - \int \Phi(\sigma) U'(\sigma) d\sigma.$$

Observons ensuite qu'on a

$$U(0) = 0$$

et

$$U(\pi) = \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \omega \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\pi}{2} \right)} + \frac{2\eta\omega}{i\pi} \log \zeta.$$

Mais (TANNERY et MOLK, XII)

$$\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \omega \right) = \sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega + 2\omega \right) = -e^{2\eta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)} \sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega \right).$$

De là immédiatement

$$U(\pi) = \log \frac{1}{e^{\frac{2\eta\omega}{i\pi} \log \zeta}} + \frac{2\eta\omega}{i\pi} \log \zeta = 0.$$

Appliquant alors la relation (36) aux deux intervalles  $0, \sigma_0 - 0$ ;  $\sigma_0 + 0, \pi$ , il vient

$$\int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) U(\sigma) d\sigma = \Phi(\sigma_0 - 0) U(\sigma_0) - \int_0^{\sigma_0-0} \Phi(\sigma) U'(\sigma) d\sigma,$$

$$\int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi'(\sigma) U(\sigma) d\sigma = -\Phi(\sigma_0 + 0) U(\sigma_0) - \int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi(\sigma) U'(\sigma) d\sigma.$$

Transportant dans  $S_1$ , nous avons enfin

$$(37) \quad S_1 = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\sigma) U'(\sigma) d\sigma.$$

Voyons maintenant quelle est la valeur de  $U'(\sigma)$ . En nous rappelant que  $\frac{\sigma''}{\sigma u} = \zeta u$ , un calcul facile nous donne

$$(38) \quad U'(\sigma) = -\frac{\omega}{\pi} \left[ \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) + \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\sin \left( \frac{\log \zeta}{i} \right)}{\sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2} \right)} + \frac{2\eta\omega}{i\pi^2} \log \zeta.$$

Or on a, d'une part (TANNERY et MOLK, VII; APPELL et LACOUR, p. 51),

$$(39) \quad \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) + \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) = 2\zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) + \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)},$$

et d'autre part

$$\sin \left( \frac{\log \zeta}{i} \right) = - \frac{1 - \zeta^2}{2i\zeta},$$

$$2 \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2} \right) \sin \left( \frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2} \right) = \cos \sigma - \cos \left( \frac{\log \zeta}{i} \right) = \frac{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2}{-2\zeta}.$$

De sorte que finalement il vient

$$(40) \quad S_1 = - \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \left\{ - \frac{\omega}{\pi} \left[ 2\zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) + \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \right] + \frac{1 - \zeta^2}{i(1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2)} + \frac{2\eta\omega}{i\pi^2} \log \zeta \right\} d\sigma.$$

De là, en transportant dans  $\Omega_0$  et supprimant la partie commune,

$$(41) \quad \Omega = \lim \Omega_0 = S + S_1 = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \left[ 2\zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - \frac{2\eta}{i\pi} \log \zeta + \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \right] d\sigma.$$

Ce qui, à cause de la condition (31), se réduit à

$$(42) \quad \Omega(\zeta) = \frac{i\omega}{\pi^2} p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{d\sigma}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}.$$

Remarquons qu'en posant

$$(43) \quad \frac{\omega}{\pi} \sigma = s, \quad \Phi(\sigma) = \Psi(s),$$

la formule précédente peut encore s'écrire

$$(44) \quad \Omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \int_0^\omega \Psi(s) \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - ps} ds,$$

avec la condition

$$(45) \quad \int_0^\omega \Psi(s) ds = 0.$$

La légitimité du résultat que nous venons d'obtenir est loin d'être assurée. Cette légitimité résultera de l'étude approfondie que nous ferons de la fonction  $\Omega(\zeta)$  définie par la formule (42), dans le prochain Chapitre.

Il ne manque pas d'intérêt de remarquer, immédiatement que l'application, sans autre forme de procès, de cette formule (42), au cas de l'obstacle formé de deux segments rectilignes, nous redonnera bien pour  $\Omega$  l'expression  $\Omega_0$  dont nous étions partis.

Faisons en effet

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \delta - \alpha & \text{pour} & \quad 0 < \sigma < \sigma_0, \\ \Phi(\sigma) &= \delta + \alpha & \text{pour} & \quad \sigma_0 < \sigma < \pi, \end{aligned}$$

et calculons la fonction correspondante

$$\Omega = \frac{i\omega}{\pi^2} \left[ \int_0^{\sigma_0} (\delta - \alpha) \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\pi} (\delta + \alpha) \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma \right],$$

où les constantes  $\sigma_0, \alpha, \delta$ , sont liées par la relation

$$(46) \quad (\delta - \alpha)\sigma_0 + (\delta + \alpha)(\pi - \sigma_0) = 0,$$

qui n'est autre que la condition (31). A cause de

$$\frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} = \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) + \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - 2\zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right),$$

il vient pour l'intégrale indéfinie

$$\frac{\omega}{\pi} \int \frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma = \log \frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} - 2 \frac{\omega}{\pi} \sigma \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right).$$

Et par suite

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{i}{\pi} (\delta - \alpha) \left[ \log \frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} - 2 \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right] \\ & + \frac{i}{\pi} (\delta + \alpha) \left\{ \log \left[ \frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \omega \right) \vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega \right) \vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} \right] \right. \\ & \left. - 2 \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) (\pi - \sigma_0) \frac{\omega}{\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Le terme de  $\zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)$  disparaît par suite de (46); on a d'autre part (TANNERY et MOLL, XII)

$$\frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \omega \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \omega \right)} = - e^{\frac{2\eta\omega \log \zeta}{i\pi}},$$

et de la relation (46), on tire

$$\delta + \alpha = \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}, \quad \delta - \alpha = -\frac{2\alpha}{\pi} (\pi - \sigma_0) = \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi} - 2\alpha.$$

Donc la fonction  $\Omega$  obtenue se met finalement sous la forme

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{2\alpha i}{\pi} \left( \frac{\sigma_0}{\pi} - 1 \right) \log \frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} \\ & + \frac{2\alpha i \sigma_0}{\pi^2} \log \left[ \frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} (-1) e^{\frac{2\eta\omega \log \zeta}{i\pi}} \right], \end{aligned}$$

ou encore.

$$\Omega = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3} \log \zeta + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

On retrouve donc bien la fonction  $\Omega'_0$  primitive, ce que nous voulions vérifier.

*Les deux formes de la fonction  $\Omega$ .* — En résumé, dans ce Chapitre, nous avons obtenu pour  $\Omega$  la forme

$$(A) \quad \Omega(\zeta) = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} d\sigma \quad (1)$$

valable dans la couronne circulaire du plan  $\zeta$ , sauf sur la frontière extérieure. Cette forme sera, pour les applications, de la dernière importance. Mais, des formules (32), (34), (35), il résulte une autre expression de  $\Omega$ , qui sera valable *partout*, y compris sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , et qui dans le domaine, sauf sur cette circonférence, sera exactement équivalente à l'expression (A). Cette forme partout valable est

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) = & \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma}}{1-\zeta e^{i\sigma}} d\sigma + \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)] \log \frac{1-\zeta e^{-i\sigma_0}}{1-\zeta e^{i\sigma_0}} \\ & + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \left\{ \log \left( \frac{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right)} \right) + \frac{2\eta\omega\sigma}{i\pi^2} \log \zeta \right\} d\sigma \\ & + \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)] \left\{ \log \left( \frac{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma_0}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) \sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma_0}{2}\right)} \right) + \frac{2\eta\omega\sigma_0}{i\pi^2} \log \zeta \right\} \end{aligned}$$

ou bien, après réductions évidentes, et à cause de

$$\frac{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} + \frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log \zeta}{2i} - \frac{\sigma}{2}\right)} = e^{-i\sigma} \frac{1-\zeta e^{+i\sigma}}{1-\zeta e^{-i\sigma}} \quad [cf(19)],$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 152, p. 305.

il vient

$$(B_0) \left\{ \begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \left\{ \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} - i\sigma + \frac{2\eta\omega}{i\pi^2} \sigma \log \zeta \right\} d\sigma \\ &+ \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)] \left\{ \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} - i\sigma_0 + \frac{2\eta\omega}{i\pi^2} \sigma_0 \log \zeta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ceci peut encore se simplifier, en remarquant l'égalité

$$\int \sigma \Phi'(\sigma) d\sigma = \sigma \Phi(\sigma) - \int \Phi(\sigma) d\sigma$$

qui nous donne, en tenant compte de la discontinuité pour  $\sigma = \sigma_0$ ,

$$\int_0^\pi \sigma \Phi'(\sigma) d\sigma = \sigma_0 [\Phi(\sigma_0-0) - \Phi(\sigma_0+0)] + \pi \Phi(\pi) - \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$(47) \quad \int_0^\pi \sigma \Phi'(\sigma) d\sigma = \sigma_0 [\Phi(\sigma_0-0) - \Phi(\sigma_0+0)] + \pi \Phi(\pi)$$

à cause de la condition (31).

Remplaçant dans (B<sub>0</sub>) et simplifiant, il vient

$$(B) \left\{ \begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma \\ &+ \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\sigma_0-0)] \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0 \right)} \\ &+ \left[ \frac{2\eta\omega}{\pi^2} \log \zeta + 1 \right] \Phi(\pi). \end{aligned} \right.$$

**Étude de la fonction  $\Omega(\zeta)$ .**

Il s'agit actuellement de vérifier que les formules obtenues dans le précédent Chapitre sont légitimes, et, à cet effet, de faire voir que la fonction  $\Omega(\zeta)$  définie par les relations (A) ou (B) satisfait bien dans la couronne à toutes les conditions voulues par la théorie. Voici le détail de ces conditions (*cf.* ma Thèse, p. 233) :

- 1° La fonction  $\Omega$  doit être réelle si le point  $\zeta$  est sur l'axe réel;
- 2° Elle doit prendre des valeurs conjuguées en deux points  $\zeta$  conjugués;
- 3° Elle doit être imaginaire pure pour  $|\zeta| = q$ ;
- 4° La partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  doit prendre sur la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$  ( $\zeta = e^{i\varepsilon}$ ) la succession de valeurs  $\Theta = \Phi(\varepsilon)$  (c'est la condition imposée par l'analyse du Chapitre précédent). Sur la demi-circonférence inférieure,  $\Theta$  prend naturellement les mêmes valeurs que sur la demi-circonférence supérieure aux points conjugués;
- 5° Sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , la partie imaginaire  $iT$  de  $\Omega$  doit être continue, sauf pour  $\zeta = e^{\pm i\sigma}$ , où  $T$  doit être infini.  $T$  doit être nul pour  $\zeta = \pm 1$ ;
- 6° La fonction  $\Omega(\zeta)$  doit être une fonction continue de  $\zeta$  dans tout le domaine constitué par la couronne circulaire de rayons extrêmes  $q$  et  $1$ , *limites comprises*, exception faite des deux points  $\zeta = e^{\pm i\sigma}$ , de la frontière extérieure.

Les premières tout au moins de ces conditions se vérifient ici sans peine.

$\Omega$  est réelle sur l'axe réel. — Prenons  $\Omega$  sous sa forme (A)

$$\Omega(\zeta) = \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} d\sigma,$$

et supposons  $\zeta$  réel et positif, pour fixer les idées : alors, le point  $\zeta$

étant dans la couronne, on a

$$q < \zeta < 1,$$

et, par suite,

$$\log q < \log \zeta < 0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\pi\omega'}{i\omega} < \log \zeta < 0;$$

donc  $\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta$  varie dans ces conditions, entre  $\omega'$  et 0, en restant imaginaire pure. On sait qu'alors (*cf.* APPELL et LACOUR, p. 70)  $p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  est réel (entre  $e$ , et  $-\infty$ ), et  $p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  est purement imaginaire. Donc  $\Omega$  est réelle.

$\Omega$  prend des valeurs conjuguées en deux points  $\zeta$  conjugués. — Cela encore est à peu près évident : on peut en effet écrire, en désignant par  $F$  une certaine fonction, que je n'explicité pas,

$$\Omega(\zeta) = ip'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) F\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)\right].$$

Prenons alors pour  $\zeta$  deux points conjugués, que nous pourrions écrire

$$\begin{array}{l} \zeta = \rho e^{i\sigma} \\ \zeta_1 = \rho e^{-i\sigma} \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} \log \zeta = \log \rho + i\sigma, \\ \log \zeta_1 = \log \rho - i\sigma. \end{array}$$

Alors il viendra

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= ip'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) F\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)\right], \\ \Omega(\zeta_1) &= ip'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \rho - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) F\left[p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \rho - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en observant que  $p$  est une fonction paire, et  $p'$  une fonction impaire,

$$\Omega(\zeta_1) = -ip'\left(-\frac{\omega}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) F\left[p\left(-\frac{\omega}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)\right].$$

Sous cette forme, on voit que  $\Omega(\zeta_1)$  se déduit de  $\Omega(\zeta)$  en changeant  $i$  en  $-i$ ; ces deux expressions sont donc bien imaginaires conjuguées.

On a un calcul analogue en prenant  $\Omega$  sous la forme (B).

$\Omega$  est imaginaire pure pour  $|\zeta| = q$ . — Partons toujours de la même expression (A) et faisons

$$\zeta = qe^{i\varepsilon},$$

$$\left( q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}} \right),$$

et par suite

$$\log \zeta = -\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon.$$

Dans ces conditions, la quantité  $p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  deviendra (APPELL et LACOUR, p. 402)

$$p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) = p\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right) = e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right) - e_3},$$

et elle sera réelle; de la même manière, on aura

$$p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) = p'\left(\omega' + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right) = \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\left[p\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right) - e_3\right]^2} p'\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right),$$

quantité qui sera aussi réelle; l'équation (A) montre alors bien que  $\Omega$  est imaginaire pure.

Valeurs de la partie réelle de  $\Omega$  sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ . — Prenons cette fois  $\Omega$  sous sa forme (B), puisque nous sommes sur la frontière extérieure, et faisons

$$\zeta = e^{i\varepsilon};$$

il vient de suite

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \Omega(e^{i\varepsilon}) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} d\sigma \\ &+ \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)] \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right)} \\ &+ \left(\frac{2\eta\omega}{\pi^2} i\varepsilon + 1\right) \Phi(\pi). \end{aligned} \right.$$

Pour fixer les idées, plaçons-nous sur la portion supérieure de la circonférence, et plus précisément supposons

$$0 < \varepsilon < \sigma_0,$$

de sorte que

$$\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) < 0, \quad \sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) > 0.$$

et que la portion imaginaire de  $\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}$  sera 0 pour  $\sigma$  com-

pris entre 0 et  $\varepsilon$ , et  $i\pi$  pour  $\sigma$  compris entre  $\varepsilon$  et  $\pi$ .

Dans ces conditions, la partie réelle de  $\Omega(e^{i\varepsilon})$  sera évidemment

$$\frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \Phi'(\sigma)(i\pi) d\sigma + \frac{i}{\pi} [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)](i\pi) + \Phi(\pi).$$

Mais

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \Phi'(\sigma) d\sigma = [\Phi(\sigma)]_{\varepsilon}^{\sigma_0-0} + [\Phi(\sigma)]_{\sigma_0+0}^{\pi} = \Phi(\pi) - \Phi(\sigma_0 + 0) + \Phi(\sigma_0 - 0) - \Phi(\varepsilon).$$

Donc, en remplaçant, la partie réelle en question devient

$$- \Phi(\pi) + \Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0) + \Phi(\varepsilon) - [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)] + \Phi(\pi) - \Phi(\varepsilon).$$

Démonstration analogue pour  $\sigma_0 < \varepsilon < \pi$ .

La partie réelle de la fonction  $\Omega$  construite reprend donc sur la demi-circonférence supérieure  $|\zeta| = 1$  les valeurs  $\Phi(\varepsilon)$  voulues.

Les valeurs prises par cette partie réelle sur la demi-circonférence inférieure, sont les mêmes que sur la portion supérieure, puisque  $\Omega$  prend des valeurs conjuguées en deux points conjugués.

*Valeurs de la partie imaginaire  $i\mathbb{T}$ , de  $\Omega$ , sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ .* -- Nous appellerons  $i\mathbb{T}$  la partie imaginaire de  $\Omega$ , en général, et  $i\mathbb{T}$ , la valeur qu'elle prend en un point  $\zeta = e^{i\varepsilon}$  de la circonférence de rayon 1. Nous savons que nous pouvons nous borner à considérer la demi-circonférence supérieure.

L'expression (48) écrite ci-dessus nous donnait la valeur de  $\Omega$  sur

cette circonférence; nous en extrayons immédiatement la partie imaginaire, à savoir

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma \\ &+ \frac{1}{\pi} [\Phi(\sigma_0 + 0) - \Phi(\sigma_0 - 0)] \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \right| + \frac{2\eta\omega}{\pi^2} \varepsilon \Phi(\pi). \end{aligned} \right.$$

Le second membre a toujours un sens, tant que  $\varepsilon$  n'est pas égal à  $\pm\sigma_0$ , c'est-à-dire tant que  $\zeta$  ne coïncide pas avec un des deux points exclus : pour  $\sigma = \varepsilon$ , la quantité à intégrer se comporte en effet comme  $\log|\sigma - \varepsilon|$ , dont l'intégrale reste finie, comme on sait.

On peut simplifier l'expression précédente en utilisant la formule

$$\begin{aligned} \int \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma &= [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| \\ &- \int [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma \end{aligned}$$

dans laquelle on a introduit la différence  $\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)$  pour que la partie tout intégrée reste finie pour  $\sigma = \varepsilon$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sigma_0-0} \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma \\ &= [\Phi(\sigma_0 - 0) - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \right| \\ &- \int_0^{\sigma_0-0} [\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\int_{\sigma_0+0}^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma = [\Phi(\pi) - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right)} \right|$$

$$- [\Phi(\sigma_0+0) - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \right|$$

$$- \int_{\sigma_0+0}^{\pi} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma.$$

D'ailleurs (TANNERY et MOLK, XII), on a

$$\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right) = -e^{\frac{2\eta\omega}{\pi}\varepsilon} \mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right),$$

et par suite

$$\left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right)} \right| = e^{-\frac{2\eta\omega}{\pi}\varepsilon}.$$

Donc

$$(50) \quad \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \omega\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \omega\right)} \right| = -\frac{2\eta\omega}{\pi}\varepsilon.$$

De là nous tirons

$$\int_0^{\pi} \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma$$

$$= [\Phi(\sigma_0-0) - \Phi(\sigma_0+0)] \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} \right|$$

$$- \frac{2\eta\omega}{\pi} [\Phi(\pi) - \Phi(\varepsilon)] \varepsilon - \int_0^{\pi} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega}{\pi}\sigma\right)} \right| d\sigma.$$

Remplaçant dans  $T_1$ , il vient enfin, après réductions faciles,

$$(51) \quad T_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} \right| d\sigma + \frac{2\eta\omega}{\pi^2} \varepsilon \Phi(\varepsilon).$$

Sur l'expression initiale (49) de  $T_1$ , on aperçoit immédiatement que cette fonction devient infinie (négative) pour  $\varepsilon = \pm \sigma_0$ . Sur la dernière expression (51) nous constatons sans aucune peine que  $T_1$  est nulle pour  $\varepsilon = 0$  et pour  $\varepsilon = \pi$ , c'est-à-dire pour  $\zeta = \pm 1$  (points où la vitesse  $e^{\mathcal{T}_1}$  du fluide doit être égale à 1).

On a de suite  $T_1 = 0$ , pour  $\varepsilon = 0$ .

Pour  $\varepsilon = \pi$ ,  $T_1$  se réduit à

$$T_1' = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\sigma) - \Phi(\pi)] \frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\omega - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\omega + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} \right| d\sigma + \frac{2\eta\omega}{\pi} \Phi(\pi).$$

Mais la formule (50) donne

$$\frac{d}{d\sigma} \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\omega - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\omega + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} \right| = \frac{d}{d\sigma} \left( -\frac{2\eta\omega}{\pi} \sigma \right) = -\frac{2\eta\omega}{\pi},$$

et par suite

$$T_1' = \frac{2\eta\omega}{\pi^2} \left[ \int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma - \int_0^\pi \Phi(\pi) d\sigma \right] - \frac{2\eta\omega}{\pi} \Phi(\pi),$$

ce qui est nul à cause de la condition (31).

Sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , sauf pour  $\varepsilon = \pm \sigma_0$ ,  $T_1$  est une fonction continue de  $\varepsilon$ . — Je vais maintenant faire voir que  $T_1$  est une fonction continue de  $\varepsilon$ , les valeurs  $\varepsilon = \pm \sigma_0$  étant toujours exceptées. Prenons  $T_1$  sous sa première forme (49), et laissons de côté la partie intégrée, qui est manifestement continue dans les conditions qu'on vient de dire. Tout revient évidemment à faire voir que la fonction

$$\int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{\omega}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} \right| d\sigma$$

est une fonction continue de  $\varepsilon$ ; ou encore, que la différence

$$(52) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left| \frac{\omega}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right|}{\sigma \left| \frac{\omega}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right|} d\sigma - \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left| \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right|}{\sigma \left| \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_1 + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right|} d\sigma \\ &= \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \left| \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_1 + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \right| d\sigma \end{aligned} \right.$$

tend vers zéro avec  $\varepsilon - \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1$  étant supposé fixe et non égal à  $\pm \sigma_0$ .

Nous pouvons nous borner au cas où le point  $e^{i\varepsilon_1}$  est sur la demi-circonférence supérieure; supposons d'abord que ce point ne coïncide pas avec  $\zeta = \pm 1$ . Isolons alors, sur la demi-circonférence, autour du point  $e^{i\varepsilon_1}$ , un arc AB ayant ce point pour milieu, et de longueur  $2h$ . Puisque le point  $e^{i\varepsilon}$  tend vers  $e^{i\varepsilon_1}$ , il finira par être compris dans cet arc, et nous supposerons dès maintenant qu'il en est ainsi. Cela étant, appelons  $\varkappa$  le module maximum de  $\Phi(\sigma)$  dans le voisinage de  $\varepsilon_1$ , et envisageons d'abord la portion

$$\mathbf{J} = \int_{\text{AB}} \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon - \sigma) \right|}{\sigma \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - \sigma) \right|} d\sigma$$

tirée de I.

On s'assure facilement qu'on a l'égalité

$$\int \log \sigma \left| \frac{\omega}{\pi} (\sigma - \varepsilon) \right| d\sigma = (\sigma - \varepsilon) \log \sigma \left| \frac{\omega}{\pi} (\sigma - \varepsilon) \right| - \int \frac{\omega}{\pi} (\sigma - \varepsilon) \zeta \left| \frac{\omega}{\pi} (\sigma - \varepsilon) \right| d\sigma.$$

Or, au voisinage de 0,  $u \zeta u$  est voisin de 1; nous pouvons par suite affirmer que son module n'y dépasse pas 2; d'autre part, on a  $\sigma |u| < |u|$  dans les mêmes conditions. De là, et du fait que  $x \left| \log \frac{\omega}{\pi} x \right|$  est une fonction croissante partant de zéro pour  $x = 0$ , il résulte qu'on peut écrire

$$\left| \int_{\text{arc MB}} \log \sigma \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon - \sigma) \right| \Phi'(\sigma) d\sigma \right| < \varkappa \left\{ \text{MB} \left| \log \frac{\omega}{\pi} \text{MB} \right| + 2 \text{MB} \right\}$$

et de même

$$\left| \int_{\text{arc AM}} \log \varpi \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon - \sigma) \right| \Phi'(\sigma) d\sigma \right| < \varpi \left\{ \text{AM} \left| \log \frac{\omega}{\pi} \text{AM} \right| + 2 \text{AM} \right\}.$$

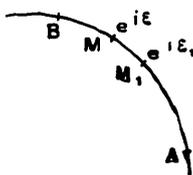
Et l'on a des inégalités analogues, en mettant  $M_1$  à la place de  $M$  ( $\varepsilon_1$  à la place de  $\varepsilon$ )

En conséquence, si, étant donné un nombre  $\gamma$  arbitrairement petit, nous choisissons  $h$  fixe satisfaisant à l'inégalité

$$\varpi \left\{ 2h \left| \log \frac{\omega}{\pi} h \right| + 4h \right\} < \gamma$$

(ce qu'on peut faire, puisque le premier membre tend vers zéro

Fig. 6.



avec  $h$ ), nous aurons (les arcs AM, MB, AM<sub>1</sub>, M<sub>1</sub>B étant tous au plus égaux à  $2h$ )

$$|J| < 4\gamma.$$

Reste à considérer dans I les deux intégrales

$$\int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\varpi \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + \sigma)}{\varpi \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon + \sigma)} d\sigma, \quad \int_{\frac{1}{2} \text{circonf.} - \text{arc AB}} \Phi'(\sigma) \log \frac{\varpi \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon - \sigma) \right|}{\varpi \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - \sigma) \right|} d\sigma.$$

Or on peut choisir  $|\varepsilon - \varepsilon_1|$  assez petit pour que, quel que soit  $\sigma$  sur les arcs d'intégration respectifs, les expressions

$$\left| \log \frac{\varpi \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + \sigma)}{\varpi \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon + \sigma)} \right| \quad \text{et} \quad \left| \log \frac{\varpi \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon - \sigma) \right|}{\varpi \left| \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - \sigma) \right|} \right|$$

soient moindres que  $\frac{\gamma}{\mathfrak{N}'\pi}$ , en appelant  $\mathfrak{N}'$  le module maximum de  $\Phi'(\sigma)$  sur la demi-circonférence.

$|\varepsilon - \varepsilon_1|$  étant ainsi choisi, les deux intégrales ci-dessus auront leur module plus petit que  $\mathfrak{N}' \frac{\gamma}{\mathfrak{N}'\pi} \pi$ , c'est-à-dire plus petit que  $\gamma$ .

Donc,  $|\varepsilon - \varepsilon_1|$  étant choisi comme on vient de dire, nous aurons l'inégalité

$$|I| < 6\gamma.$$

Ce qui démontre la continuité annoncée.

Le raisonnement précédent, avec une modification insignifiante, s'applique encore lorsque le point  $e^{i\varepsilon}$  coïncide avec l'un des points  $\zeta = \pm 1$ .

#### Continuité de la fonction $\Omega$ .

Nous arrivons maintenant au point le plus essentiel, qui est de montrer la continuité de notre fonction  $\Omega$ , dans tout le domaine constitué par la couronne circulaire, limites comprises, exception faite des deux points  $\zeta = e^{\pm i\sigma}$ .

Cette continuité est facile à mettre en évidence tant qu'on se place en un point  $\zeta$ , non situé sur la frontière extérieure  $|\zeta| = 1$ . On peut en effet prendre  $\Omega$  sous la forme (A); puis il vient

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) - \Omega(\zeta_1) &= \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \left\{ \frac{\rho' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)}{\rho \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - \rho \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} - \frac{\rho' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right)}{\rho \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) - \rho \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Or on peut montrer sans peine qu'on peut choisir  $|\zeta - \zeta_1|$  assez petit pour que le module du coefficient de  $\Phi(\sigma)$ , sous le signe  $\int$ , soit plus petit qu'un nombre positif  $\gamma$  arbitrairement petit, et cela quel que soit  $\sigma$  dans l'intervalle  $0, \pi$ . Appelant alors  $\mathfrak{N}$  le module maximum de  $\Phi(\sigma)$  dans cet intervalle, il vient

$$|\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta_1)| < \frac{\omega}{\pi^2} \mathfrak{N} \pi \gamma = \frac{\omega}{\pi} \mathfrak{N} \gamma.$$

Comme le second membre peut être choisi aussi petit qu'on veut, la continuité est bien démontrée au point  $\zeta_1$ .

Nous voyons donc que  $\Omega$  est continu partout, sauf peut-être sur la circonférence de rayon 1.

La démonstration est loin d'être aussi facile sur la frontière extérieure de la couronne. Mais nous allons pouvoir démontrer le théorème suivant :

*Si le point  $\zeta$  tend vers un point  $\zeta_1$ , de la circonférence extérieure, autre que l'un des deux points exclus  $e^{\pm i\sigma}$ , en suivant un chemin intérieur à la couronne, et qui n'arrive pas au point  $\zeta_1$ , tangentielle-ment à cette circonférence limite, — dans ces conditions,  $\Omega(\zeta)$  tend vers  $\Omega(\zeta_1)$ .*

Nous partirons cette fois de la forme (B) de  $\Omega$ . Laissant de côté une portion visiblement continue, sauf aux deux points exclus, nous sommes de suite ramenés à montrer la continuité de la fonction

$$(53) \quad U(\zeta) = \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma$$

ou bien à faire voir que, si  $\zeta_1 = e^{i\varepsilon}$  est un point de la frontière extérieure ( $\varepsilon_1 \neq \pm \sigma_0$ ) et si  $\zeta = \rho e^{i\varepsilon}$  tend vers  $\zeta_1$ , comme on l'a dit, la différence

$$(54) \quad J_1 = U(\zeta) - U(\zeta_1) = \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma$$

tend vers zéro.

Nous supposons d'abord  $\zeta_1 \neq \pm 1$ , et nous pouvons nous borner au cas où  $\zeta_1$  est sur la demi-circonférence supérieure ( $0 < \varepsilon_1 < \pi$ ).

Autour du point  $\zeta_1$  isolons un arc AB sur la circonférence, ayant ce point pour milieu; soit  $2h$  la longueur de cet arc; et appelons  $J_{AB}$  et  $J'$  les deux parties de l'intégrale  $J_1$ , correspondant à l'arc AB et à la partie restante de la demi-circonférence.

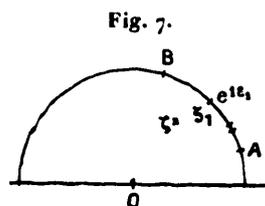
On verra facilement, comme dans ma Thèse (deuxième Partie, p. 278), que, si  $h$  est fixé, et la valeur qu'il faut lui donner résultera

de ce qui va suivre, on peut choisir  $|\zeta - \zeta_1|$  assez petit pour qu'on ait

$$|J'| < \gamma,$$

$\gamma$  désignant un nombre positif choisi d'avance aussi petit qu'on veut.

Il n'y a donc en réalité à s'occuper que de  $J_{AB}$ ; nous ferons voir qu'on



peut fixer la valeur de  $h$  de manière que  $|J_{AB}|$  soit aussi petit qu'on veut.

En observant que les valeurs de  $\sigma$  aux extrémités de l'arc AB sont  $\varepsilon_1 - h$  et  $\varepsilon_1 + h$ , une intégration par parties nous donne immédiatement

$$(55) \quad J_{AB} = \left[ \Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1) \log \frac{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \vartheta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} \right]_{\varepsilon_1 - h}^{\varepsilon_1 + h} \\ + \frac{\omega}{\pi} \int_{\varepsilon_1 - h}^{\varepsilon_1 + h} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)] \\ \times \left\{ \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) + \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right. \\ \left. - \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) - \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\} d\sigma$$

Nous étudierons séparément la partie intégrée et la partie restante.

*Partie intégrée.* — Cette partie est, en explicitant,

$$[\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\} \vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\}}{\vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\} \vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\}} \\ - [\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\} \vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\}}{\vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\} \vartheta \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\}}$$

Je la sépare en deux moitiés :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & [\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\}} \\ & - [\Phi(\varepsilon_1 - h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\}}, \\ \alpha_2 = & [\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\}} \\ & - [\Phi(\varepsilon_1 - h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\}}{\sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\}}, \end{aligned}$$

dont la première sera visiblement de module inférieur à  $\gamma$ , si l'on prend  $h < h_1$ ,  $h_1$  étant un nombre que l'on peut déterminer; car, lorsque  $h$  est petit, les quantités qui interviennent sous le signe log ne s'annulent pas.

Considérons donc la seconde moitié, pour laquelle il n'en est plus ainsi.

Appelons  $\pi$ , un nombre positif supérieur à la valeur absolue du quotient  $\frac{\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)}{\sigma - \varepsilon_1}$  lorsque le point  $e^{i\sigma}$  se déplace sur un arc entourant le point  $e^{i\varepsilon_1}$ , et auquel l'arc AB soit assujetti à rester intérieur. Puis remarquons que

$$\begin{aligned} \sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\} &= \sigma \left( -\frac{\omega}{\pi} h \right) \quad \text{est réel et diffère peu de} \quad -\frac{\omega}{\pi} h, \\ \sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\} &= \sigma \left( \frac{\omega}{\pi} h \right) \quad \text{est réel et diffère peu de} \quad \frac{\omega}{\pi} h, \\ \sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h) \right\} &\quad \text{diffère peu de} \quad \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 + h), \\ \sigma \left\{ \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h) \right\} &\quad \text{diffère peu de} \quad \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} (\varepsilon_1 - h), \end{aligned}$$

tout ceci résultant de ce que, pour  $u$  petit,  $\sigma u$  diffère peu de  $u$ . Plus

précisément, on pourra déterminer un nombre  $h_2$  tel que, pour  $h < h_2$ , on ait les inégalités

$$\left| \log \frac{\sigma\left(-\frac{\omega}{\pi}h\right)}{-\frac{\omega}{\pi}h} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1}, \quad \left| \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}h\right)}{\frac{\omega}{\pi}h} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1},$$

$$\left| \log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)\right\}}{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1}, \quad \left| \log \frac{\sigma\left\{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)\right\}}{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1}$$

(dont les deux premières ne sont d'ailleurs pas distinctes), et cela quel que soit  $\zeta$  au voisinage de  $\zeta_1$ , à condition que  $\zeta$  soit suffisamment voisin de  $\zeta_1$ . En effet, les inégalités ci-dessus seront assurées, dès que l'argument de chaque fonction  $\sigma$  sera suffisamment petit; et il en sera ainsi, par exemple, de

$$\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h) = \frac{\omega}{i\pi} \log \frac{\zeta}{\zeta_1} - \frac{\omega}{\pi}h,$$

dès que  $\log \frac{\zeta}{\zeta_1}$  et  $h$  seront assez petits.

Il résulte de ce qu'on vient de dire, qu'en négligeant une expression dont le module est inférieur à  $4\mathfrak{N}_1 h \times \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1} = 4\gamma h$ , on peut remplacer la quantité  $\alpha_2$  par la suivante :

$$\alpha'_2 = [\Phi(\varepsilon_1 + h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 + h)}{-\frac{\omega}{\pi}h}$$

$$- [\Phi(\varepsilon_1 - h) - \Phi(\varepsilon_1)] \log \frac{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - h)}{\frac{\omega}{\pi}h},$$

dont le module sera inférieur à

$$\alpha''_2 = \mathfrak{N}_1 h \left| \log \frac{\frac{1}{i} \log \zeta - \varepsilon_1 - h}{-h} \right| + \mathfrak{N}_1 h \left| \log \frac{\frac{1}{i} \log \zeta - \varepsilon_1 + h}{h} \right|.$$

Si nous prenons d'abord la partie imaginaire du logarithme de chaque quotient, nous voyons immédiatement que la portion corres-

pondante de  $\alpha_2''$  est en module inférieure à  $\mathfrak{N}_1 h \times 4\pi$ ; de sorte qu'en choisissant  $h < h_3$ , avec  $h_3$  satisfaisant à

$$4\pi \mathfrak{N}_1 h_3 < \gamma,$$

la portion en question de  $\alpha_2''$ , sera plus petite que  $\gamma$  en valeur absolue.

Prenons ensuite la partie réelle des logarithmes ci-dessus; ce qui en provient a pour expression

$$\mathfrak{N}_1 h \left| \log \frac{\left| \frac{1}{i} \log \zeta - \varepsilon_1 - h \right|}{h} \right| + \mathfrak{N}_1 h \left| \log \frac{\left| \frac{1}{i} \log \zeta - \varepsilon_1 + h \right|}{h} \right|$$

ou ( $\zeta = \rho e^{i\varepsilon}$ )

$$\alpha_2'' = \mathfrak{N}_1 h \left\{ \left| \log \frac{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 - h)^2 + (\log \rho)^2}}{h} \right| + \left| \log \frac{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 + h)^2 + (\log \rho)^2}}{h} \right| \right\}.$$

Or,  $|h \log h|$  est aussi petit que l'on veut, pour  $h$  assez faible. Cette remarque rappelée, assujettissons  $\zeta$  à être assez voisin de  $\zeta$ , pour qu'on ait les inégalités

$$|\varepsilon - \varepsilon_1| < \frac{h}{2}, \quad |\log \rho| < \frac{h}{2}.$$

Alors les deux radicaux

$$\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 - h)^2 + (\log \rho)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_1 + h)^2 + (\log \rho)^2}$$

seront certainement compris entre

$$\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(\frac{3h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2},$$

c'est-à-dire entre  $\frac{h}{2}$  et  $h \frac{\sqrt{10}}{2}$ .

Si donc on détermine un nombre  $h_4$  fixe satisfaisant à l'inégalité

$$\left| h_4 \log \frac{h_4}{2} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1},$$

et par suite à

$$|h_4 \log h_4| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1},$$

$$\left| h_4 \log h_4 \frac{\sqrt{10}}{2} \right| < \frac{\gamma}{\mathfrak{N}_1},$$

il en résultera dans ces conditions

$$|\alpha_2^n| < 4\gamma.$$

Donc finalement, la partie intégrée de  $J_{AB}$ , si l'on choisit  $h$  plus petit que le plus petit des nombres  $h_1, h_2, h_3, h_4$ , est en module plus petite que

$$6\gamma + 4\gamma h$$

ou, si l'on préfère, que

$$10\gamma.$$

Elle est donc aussi petite que l'on veut.

*Partie non intégrée de  $J_{AB}$ .* — Reprenons maintenant la partie non intégrée dans la formule (55). A cause des formules (cf. TANNERY et MOLK, VII)

$$\begin{aligned} & \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \\ &= 2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}, \\ & \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 + \frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \\ &= 2\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1\right) + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)}, \end{aligned}$$

l'expression à étudier prend la forme

$$\int_{\varepsilon_1 - h}^{\varepsilon_1 + h} \frac{\omega}{\pi} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)] \times \left\{ 2 \left[ \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1\right) \right] + \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} - \frac{p'\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1\right)}{p\left(\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right)} \right\} d\sigma.$$

J'en extrais de suite la quantité

$$2 \frac{\omega}{\pi} \int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)] \left[ \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - \zeta \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) \right] d\sigma,$$

dont le module sera plus petit que  $\gamma$  pour  $h$  assez petit, comme cela est évident. Et il reste à s'occuper d'une expression que je désignerai par  $\mathfrak{A}$ , et qu'on peut écrire

$$(56) \quad \frac{\omega}{\pi} \int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h} [\Phi(\sigma) - \Phi(\varepsilon_1)] \times \frac{\left[ p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) \left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\} - p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) \left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\} \right]}{\left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\} \left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\}} d\sigma.$$

La quantité entre crochets au numérateur s'annule pour  $\zeta = \zeta_1$ . Soit  $\varkappa'$  le module maximum de

$$\frac{p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) \left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\} - p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) \left\{ p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right) \right\}}{\zeta - \zeta_1},$$

lorsque le point  $e^{i\sigma}$  est quelconque sur un petit arc auquel AB reste inférieur, et que  $\zeta$  est voisin de  $\zeta_1$ .

Les deux facteurs du dénominateur s'annulent si l'on y remplace  $\zeta$  ou  $\zeta_1$  par  $e^{i\sigma}$ . Désignons par  $\varkappa''$  et  $\varkappa'''$  des nombres positifs plus petits respectivement que les quantités

$$\left| \frac{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma} \right|, \quad \left| \frac{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 \right) - p \left( \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\frac{\omega}{i\pi} \log \zeta_1 - \frac{\omega}{\pi} \sigma} \right|,$$

au voisinage du point  $\zeta_1 = e^{i\sigma}$ .

Le choix de ces deux nombres est possible, car les deux quantités ci-dessus diffèrent peu de  $p' \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_1 \right)$ , dont la valeur n'est sûrement pas nulle, puisque  $\varepsilon_1$  n'est pas égal à  $\pi$ .

Dans ces conditions, le module de l'intégrale  $\mathfrak{A}$  à étudier sera infé-

rieur à

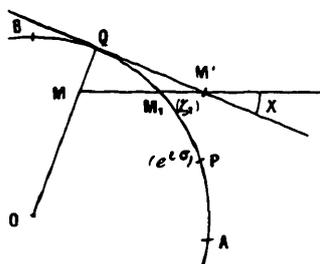
$$\frac{\pi}{\omega} \frac{\partial \pi_1 \partial \pi'}{\partial \pi'' \partial \pi''} \int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h} \left| \frac{(\sigma - \varepsilon_1)(\zeta - \zeta_1)}{\left(\frac{\log \zeta}{i} - \sigma\right)(\varepsilon_1 - \sigma)} \right| d\sigma.$$

Faisons enfin une dernière transformation : soit  $\varkappa$  un nombre positif inférieur au module du rapport

$$\frac{\log \zeta - i\sigma}{\zeta - e^{i\sigma}},$$

au voisinage de la région considérée; le choix de  $\varkappa$  est encore possible,

Fig. 8.



car le rapport envisagé diffère peu de  $e^{-i\varepsilon_1}$ . Alors l'intégrale de tout à l'heure aura sa valeur absolue plus petite que

$$\frac{\pi}{\omega} \frac{\partial \pi_1 \partial \pi'}{\partial \pi'' \partial \pi''} \int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_1+h} \left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - e^{i\sigma}} \right| d\sigma.$$

Or supposons maintenant que le point  $\zeta$  tende vers le point  $\zeta_1$  en suivant un chemin rectiligne; comme on a (voir *fig. 8*)

$$\left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - e^{i\sigma}} \right| = \frac{MM_1}{MP},$$

pour  $\zeta$  donné, on aura le maximum de ce rapport lorsque le point P sera situé en Q, à l'intersection de la circonférence avec le rayon qui passe en M. En appelant maintenant M' le point de rencontre de MM<sub>1</sub> avec la tangente en Q au cercle, il est évident qu'on a

$$\frac{MM_1}{MP} < \frac{MM_1}{MQ} < \frac{MM'}{MQ} = \frac{1}{\sin \chi},$$

$\chi$  désignant l'angle de la figure.

Si alors nous avons eu soin de restreindre suffisamment l'arc AB entourant  $M_1$ , de telle sorte que quand M décrit le segment  $MM_1$ , l'angle  $\gamma$  ait un minimum  $\gamma'$  non nul (il suffira pour cela que sur l'arc AB il n'y ait aucune tangente parallèle à  $MM_1$ ), dans ces conditions nous aurons constamment

$$\frac{MM_1}{MP} < \frac{1}{\sin \gamma'},$$

et, par suite,

$$|\mathcal{A}| < \frac{\pi}{\omega} \frac{\partial \mathcal{K}_1 \partial \mathcal{K}'}{\partial \mathcal{K}'' \partial \mathcal{K}''' \partial \mathcal{K}} \frac{1}{\sin \gamma'} 2h.$$

Donc  $|\mathcal{A}|$  sera inférieur à  $\gamma$ , si nous prenons  $h$  plus petit que

$$\frac{\omega \partial \mathcal{K}'' \partial \mathcal{K}''' \partial \mathcal{K} \sin \gamma' \gamma}{2\pi \partial \mathcal{K}_1 \partial \mathcal{K}'}$$

De tout ceci résulte qu'alors le module de la partie non intégrée de  $J_{AB}$  sera inférieur à  $2\gamma$ .

En conséquence on aura finalement

$$|J_{AB}| < 12\gamma,$$

et  $J_{AB}$  sera aussi petit qu'on voudra.

En se rappelant ce que nous avons dit au début, de  $J'$ , nous en concluons la continuité de  $U(\zeta)$ , c'est-à-dire celle de  $\Omega(\zeta)$  dans les conditions annoncées.

*Cas où  $\zeta_1 = \pm 1$ .* — Les raisonnements précédents ne s'appliquent pas intégralement si le point  $\zeta_1$  de la frontière extérieure, vers lequel tend le point  $\zeta$ , est l'un des deux points  $\zeta_1 = \pm 1$ . Éluçidons, pour fixer les idées, le cas où l'on aurait

$$\zeta_1 = +1.$$

Prenant toujours  $\Omega$  sous sa forme (B), et négligeant une partie visiblement continue au point  $\zeta = +1$ , tout revient à montrer, en ce point, la continuité de la fonction

$$G(\zeta) = \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \log \zeta - \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)}{\sigma \left( \frac{\omega}{\pi} \log \zeta + \frac{\omega}{\pi} \sigma \right)} d\sigma$$

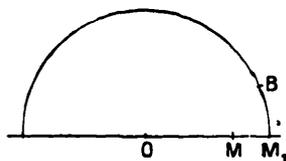
ou bien à faire voir que la différence

$$(57) \quad L = G(\zeta) - G(1) = \int_0^\pi \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)} d\sigma$$

tend vers zéro avec  $|\zeta - 1|$ ; je ferai cette démonstration en supposant que  $\zeta$  tend vers 1 en restant sur l'axe réel.

Sur la demi-circonférence j'isolerai un arc M, B de longueur  $h$ , ayant pour origine le point 1, et j'appellerai  $L_{M,B}$  et  $L'$  les deux por-

Fig. 9.



tions de  $L$ , relatives à ce petit arc, et au reste de la demi-circonférence. Une fois  $h$  fixé comme nous allons le faire dans un instant, rien ne sera plus facile que de choisir  $|\zeta - 1|$  assez petit pour que  $|L'|$  soit inférieur à tout nombre  $\gamma$  donné d'avance aussi petit qu'on veut. Le seul point délicat est de faire voir qu'on peut rendre

$$L_{M,B} = \int_0^h \Phi'(\sigma) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)} d\sigma$$

plus petit que tout nombre donné, par un choix convenable de  $h$ .

Or, dans cette dernière intégrale,  $\log \zeta$  étant par hypothèse réel lorsque  $\zeta$  réel tend vers 1, la quantité

$$\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)}$$

est imaginaire pure, puisque  $\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  et  $\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta\right)$  sont deux imaginaires conjuguées, et que le module de leur quotient

est par suite l'unité. Et comme le module du logarithme ci-dessus ne dépasse certainement pas  $4\pi$ , il en résulte qu'en appelant  $\mu$  un nombre positif supérieur aux valeurs absolues de  $\Phi'(\sigma)$  au voisinage de  $\sigma = 0$ , on a l'inégalité

$$|L_{M,B}| < 4\pi\mu h,$$

et par suite on peut choisir  $h$  de manière que  $|L_{AB}|$  soit inférieur à  $\gamma$ .

Dans ces conditions, on aura, moyennant ce qui a été dit au début,

$$|L| < 2\gamma$$

et la continuité sera assurée.

Enfin, en utilisant ce fait, qu'on a démontré que sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ ,  $T$  et par suite  $\Omega(\zeta)$  étaient continus, sauf toujours aux deux points exclus  $e^{\pm i\sigma_0}$ , on conclura sans peine par un raisonnement élémentaire, que, quel que soit le chemin suivi par le point  $\zeta$  tendant vers un point  $\zeta_1$  de la circonférence autre que  $e^{\pm i\sigma_0}$ ,  $\Omega(\zeta)$  tendra vers la valeur  $\Omega(\zeta_1)$ .

La continuité de la fonction  $\Omega(\zeta)$  est donc complètement démontrée dans tout le domaine, limites comprises, à l'exclusion des deux points  $e^{\pm i\sigma_0}$ .

*Conclusion.* — La fonction  $\Omega(\zeta)$ , définie par les formules (A) ou (B), est la *fonction la plus générale* permettant de résoudre le problème du mouvement d'un solide dans un fluide limité par une paroi fixe; c'est, si l'on veut, l'intégrale générale de ce problème. L'arbitraire dont la question dépend est ici représentée par la fonction  $\Phi(\sigma)$  qui n'est assujettie qu'à vérifier la condition (31)

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0.$$

Une fois  $\Phi(\sigma)$  choisi, la forme de l'obstacle, et tous les éléments du mouvement en résultent. On peut former du reste l'équation intégrale que doit vérifier  $\Phi(\sigma)$  si l'on se donne le profil de l'obstacle. Mais la résolution de cette équation n'est pas absolument nécessaire pour résoudre pratiquement le problème avec un obstacle de forme donnée.

En effet, notre fonction arbitraire  $\Phi(\sigma)$  possède avec la forme de

l'obstacle un lien étroit et évident. Car, si  $\sigma$  varie de 0 à  $\pi$ , le point  $\zeta$  décrit le profil de l'obstacle dans le sens  $P_2OP_1$  (*cf.* ma Thèse, p. 216). L'allure de  $\Phi(\sigma)$ , qui le long de ce profil est égal à l'angle de la tangente au profil avec l'axe des  $x$ , est donc parfaitement connue.

Donc, le profil étant supposé donné, nous pourrions immédiatement déterminer les propriétés caractéristiques de la fonction  $\Phi(\sigma)$  particulière qui lui correspond. Cette fonction particulière appartiendra à une certaine classe de fonctions correspondant toutes à ces profils de même allure; et l'on pourra sans peine trouver dans cette classe une fonction particulière fournissant un obstacle aussi voisin que l'on voudra, d'un obstacle exactement donné d'avance.

*Sur l'équation intégrale correspondant à un profil donné.* — L'équation intégrale dont il vient d'être question est facile à former. En effet, le rayon de courbure en un point de la paroi, correspondant à  $\zeta = e^{i\sigma}$  est donné par l'équation (*cf.* ma Thèse, p. 226, éq. 36)

$$R = \frac{d\varpi}{d\Theta} = -\frac{A\omega}{\pi} (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2 \times \frac{e^{-\tau_1} \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) \right] p'\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right)}{\left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right) - e_3 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_2 \right] \left[ p\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma\right) - e_3 \right]^2} \frac{d\sigma}{d\Theta}.$$

Or, rappelons-nous que, sur le profil (le point  $\zeta$  étant sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ ), on a

$$\Theta = \Phi(\sigma),$$

et, d'autre part, que  $T_1$  y est fourni par l'équation (51)

$$T_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d}{d\varepsilon} \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma - \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi}\sigma + \frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)} \right| d\varepsilon + \frac{2\eta\omega}{\pi^2} \sigma\Phi(\sigma),$$

où j'ai interverti  $\varepsilon$  et  $\sigma$  pour avoir l'expression de  $T_1$ , convenant au point  $\zeta = e^{i\sigma}$ .

Cela étant, si la courbe qui constitue le profil de l'obstacle est déter-

minée (ce que l'on a le droit de supposer) par la relation

$$R = R(\Theta)$$

qui lie le rayon de courbure à l'angle  $\Theta$ , nous voyons que la fonction  $\Phi(\sigma)$  devra satisfaire à la relation suivante :

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} & R[\Phi(\sigma)] \Phi'(\sigma) e^{-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(\sigma)] \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}} \log \left| \frac{\mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma - \frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right)}{\mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma + \frac{\omega}{\pi} \varepsilon\right)} \right| d\varepsilon + \frac{2\gamma\omega}{\pi^2} \sigma \Phi(\sigma) \\ & = -\frac{A\omega}{\pi} \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2}{\left[\mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - e_3\right] \left[\mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_2\right] \left[\mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) - e_3\right]^2} \left[ \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0\right) - \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \right] \mathcal{P}'\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma\right) \end{aligned} \right.$$

qu'il ne paraît pas possible de résoudre complètement par les moyens dont dispose actuellement l'analyse.

**Application au problème du mouvement d'un solide de forme donnée.**

On peut former de multiples exemples, où les intégrations puissent être poussées jusqu'au bout, dans lesquels on se donne à l'avance la forme de l'obstacle placé dans le fluide, et où l'on détermine tous les éléments du mouvement correspondant. Remarquons du reste que la possibilité d'effectuer en termes finis les intégrations n'est nullement indispensable pour la pratique : c'est seulement une commodité.

La principale question, dans le problème ainsi posé, consiste à déterminer la fonction  $\Omega(\zeta)$  qui correspond à l'obstacle donné. A cet effet, il est essentiel de remarquer qu'il n'y aura pas en général besoin de recourir *aux deux* formules (A) et (B) qui donnaient  $\Omega(\zeta)$  dans le cas général. Car, si, partant de la forme (A) (nous choisissons d'abord évidemment la plus simple), nous obtenons pour  $\Omega(\zeta)$  après l'intégration, une expression en termes finis représentant une fonction continue de  $\zeta$  dans tout le domaine constitué par la couronne circulaire que l'on sait (sauf bien entendu pour  $\zeta = e^{\pm i\sigma}$ ), cette fonction  $\Omega(\zeta)$  sera valable aussi bien sur les bords qu'à l'intérieur de ce domaine, à

cause de la continuité que l'on a démontrée en général relativement à la fonction  $\Omega$ , jusqu'aux limites du domaine en question.

Ceci nous dispensera, dans la pratique, d'avoir recours à la formule (B), évidemment moins maniable que la formule (A).

Cette remarque faite, pour donner ici au moins un exemple, considérons un obstacle ayant la forme indiquée par le dessin ci-dessous, et proposons-nous de résoudre le problème pour ce profil. Les tangentes en O aux deux branches font par hypothèse avec Ox deux angles opposés, dont la valeur absolue est quelconque.

*Exemple.* — En prenant la fonction  $\Omega(\zeta)$  sous la forme

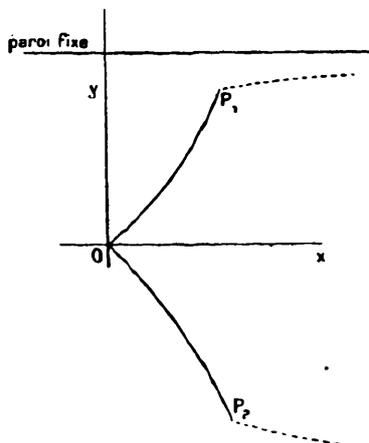
$$\Omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) \int_0^\omega \frac{\Psi(s) ds}{p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) - p s}$$

avec la condition

$$(45') \quad \int_0^\omega \Psi(s) ds = 0 \quad \left( s = \frac{\omega}{\pi} \sigma \right),$$

si l'on se rappelle que le point  $z$  décrit la partie  $P_2O$  du contour

Fig. 10.



lorsque  $\sigma$  varie de 0 à  $\sigma_0$ , et la partie  $OP_1$ , lorsque  $\sigma$  varie de  $\sigma_0$  à  $\pi$ , on voit qu'on doit prendre pour  $\Psi(s)$  une fonction constamment négative et croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\omega}{\pi} \sigma_0$ ; constamment positive et crois-

sante dans l'intervalle  $\frac{\omega}{\pi} \sigma_0, \omega$ ; en outre, en valeur absolue, la fonction  $\Psi(s)$  ne doit pas dépasser  $\frac{\pi}{2}$ ; et les deux valeurs  $\Psi\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0 - 0\right)$  et  $\Psi\left(\frac{\omega}{\pi} \sigma_0 + 0\right)$  doivent être opposées.

Toutes ces conditions seront satisfaites si nous prenons, P étant une constante,

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < P < \frac{\pi}{4}.$$

$$(59) \quad \begin{cases} \Psi(s) = P \frac{p's}{(ps)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } 0 < s < \frac{\omega}{2}, \\ \Psi(s) = -\Psi(\omega - s) & \text{si } \frac{\omega}{2} < s < \omega. \end{cases}$$

Il suffit évidemment de vérifier que la fonction  $\Psi(s)$ , dont la valeur initiale pour  $s = 0$  est  $-2P$ , va constamment en croissant jusqu'à  $s = \frac{\omega}{2}$ ; ce qui revient à dire que son carré Z décroît constamment. Or, posons

$$Z = \frac{(p's)^2}{(ps)^3} = \frac{4(ps - e_1)(ps - e_2)(ps - e_3)}{(ps)^3}.$$

Si  $s$  croît de 0 à  $\frac{\omega}{2}$ ,  $ps$  décroît de  $+\infty$  à  $e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}$ , et  $\mu = \frac{1}{ps}$  croît de 0 à  $\frac{1}{e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}$ ; je vais alors faire voir que  $\frac{dZ}{d\mu}$  reste négatif dans cet intervalle, où l'on a

$$Z = 4(1 - \mu e_1)(1 - \mu e_2)(1 - \mu e_3),$$

et par suite

$$\frac{dZ}{d\mu} = -4[3e_1 e_2 e_3 \mu^2 - \mu(e_1(e_2 + e_3) + e_2(e_3 + e_1) + e_3(e_1 + e_2))]$$

ou

$$\frac{dZ}{d\mu} = -4[3e_1 e_2 e_3 \mu^2 + \mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)].$$

Les deux racines du trinôme entre crochets, zéro et la racine non nulle  $\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{-3e_1 e_2 e_3}$ , sont, d'après le théorème de Rolle, comprises dans les

intervalles

$$\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}; \frac{1}{e_2}, \frac{1}{e_3}.$$

D'après cela, je distinguerai deux cas :

1°  $e_2 < 0$ . — Alors la seconde racine  $\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{-3e_1e_2e_3}$  sera négative ( $e_1, e_2, e_3 > 0$ ), et il est clair que  $\frac{dZ}{d\mu}$  reste négative dans l'intervalle  $0, \frac{1}{e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}$  considéré pour  $\mu$ .

2°  $e_2 > 0$ . — Alors le produit  $e_1, e_2, e_3$  est négatif, et  $\mu$  commençant par être entre les racines du trinôme,  $\frac{dZ}{d\mu}$  est d'abord négatif. Il ne pourrait changer de signe dans l'intervalle  $0, \frac{1}{e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}$  considéré, que si la racine positive de  $\frac{dZ}{d\mu}$  tombait dans cet intervalle; or ceci exigerait l'inégalité

$$\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{-3e_1e_2e_3} < \frac{1}{e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}$$

évidemment équivalente à

$$e_1(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 3e_2e_3) + (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} < 0.$$

Mais, en se souvenant que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 3e_1e_3 &= 2e_1^2 + e_2e_3 = 2e_1^2 - e_2(e_1 - e_2) \\ &= (e_1 - e_2)(2e_1 + e_2) = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) > 0. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus est donc impossible, puisque son premier membre est essentiellement positif, et  $\frac{dZ}{d\mu}$  reste négatif dans l'intervalle considéré, comme dans le premier cas.

Si  $e_2 = 0$ ,  $\frac{dZ}{d\mu}$  est bien négatif d'une façon évidente, dans l'intervalle.

Le choix de la fonction  $\Psi(s)$  correspond donc bien à la forme de profil donné.

Y a-t-il besoin de dire que notre fonction  $\Psi(s)$  vérifie d'elle-même la condition (45').

Ceci posé, abordons le calcul de  $\Omega$ .

*Calcul de  $\Omega$ .* — Nous poserons, pour abrégér momentanément l'écriture,

$$r = p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right),$$

et nous écrirons

$$U = \frac{\pi \Omega(\zeta)}{P i p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)} = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\Psi(s) ds}{r - ps} + \frac{1}{P} \int_{\frac{\omega}{2}}^{\omega} \frac{\Psi(s) ds}{r - ps}.$$

En posant  $s = \omega - s'$  dans la seconde intégrale, et supprimant ensuite l'accent, il vient sans peine

$$U = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{\omega}{2}} \Psi(s) \left[ \frac{1}{r - ps} - \frac{1}{r - p(\omega - s)} \right] ds.$$

D'ailleurs on a (TANNERY et MOLK, VII)

$$p(\omega - s) = p(\omega + s) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{ps - e_1}.$$

D'où, après réductions faciles,

$$U = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{\omega}{2}} \Psi(s) \frac{(ps - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(r - ps) \{ (r - e_1)(ps - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \}} ds$$

ou

$$U = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{p's}{(ps)^{\frac{3}{2}} (r - ps) \{ (r - e_1)(ps - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \}} ds.$$

Or en posant

$$ps = X,$$

il vient

$$U = \int_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{dX}{X^{\frac{3}{2}} (r - X) [(r - e_1)(X - e_1) - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}.$$

Puis le changement de variable tout indiqué

$$X = Y^2$$

donne

$$U = -\frac{2}{r-e_1} \int \frac{(Y^2 - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{Y^2(Y^2 - r) \left[ Y^2 - e_1 - \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1} \right]} dY.$$

On vérifie maintenant facilement l'identité suivante

$$\begin{aligned} & \frac{(Y^2 - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{Y^2(Y^2 - r) \left[ Y^2 - e_1 - \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1} \right]} \\ & \equiv \frac{a_0}{Y^2} + \frac{b_0}{Y^2 - r} + \frac{\ominus}{Y^2 - e_1 - \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}, \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients ont les valeurs

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{e_1^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r \left[ e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1} \right]}, \\ b_0 &= \frac{r - e_1}{r}, \quad \ominus = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)}, \end{aligned}$$

et par suite il vient en passant aux primitives :

$$U = -\frac{2}{r-e_1} \left[ -\frac{a_0}{Y} + \frac{b_0}{2\sqrt{r}} \log \frac{Y - \sqrt{r}}{Y + \sqrt{r}} + \frac{\ominus}{2\sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}} \log \frac{Y - \sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}}{Y + \sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}} \right]_{s=0}^{s=\frac{n}{2}}.$$

Pour  $s = 0$ , on a évidemment  $Y = \infty$ . Pour  $s = \frac{n}{2}$ , on a

$$X = p \frac{n}{2} = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3},$$

et par suite

$$Y = \sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}.$$

Et par suite, en remplaçant dans U les coefficients par leurs valeurs écrites ci-dessus :

$$(60) \quad \Omega(\zeta) = \frac{Pi}{\pi} p' \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right) \left[ \begin{aligned} & \frac{2[e_1^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)]}{r[(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)] \sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}} \\ & - \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \log \frac{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} - \sqrt{r}}{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \sqrt{r}} \\ & - \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\sqrt{r - e_1} [(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)]^{\frac{3}{2}}} \\ & \times \log \frac{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} - \sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}}{\sqrt{e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} + \sqrt{e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}}} \end{aligned} \right]$$

dans laquelle on n'oubliera pas que  $r = p \left( \frac{\omega}{i\pi} \log \zeta \right)$ .

*Vérification.* — Il est facile de s'assurer que la partie réelle de la fonction  $\Omega$  qu'on vient d'écrire reprend bien, sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , les valeurs primitivement données. Faisons en effet

$$\zeta = e^{i\varepsilon},$$

et supposons par exemple  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ . Alors  $r$  deviendra  $p \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right)$  et variera entre  $+\infty$  et  $e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$ .

Dans ces conditions :  $r - e_1$  restera positif,

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) + e_1(r - e_1)$$

également, et

$$e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{r - e_1}$$

variera de  $e_1$  à  $e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$ . Donc dans  $\Omega$  un seul loga-

rithme aura une partie imaginaire non nulle, à savoir celui qui intervient dans le second terme du crochet. Par suite, la partie réelle de  $\Omega$  sera

$$\frac{Pi}{\pi} p' \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right) \frac{-i\pi}{\left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right) \right]^{\frac{3}{2}}} = p \frac{p' \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right)}{\left[ p \left( \frac{\omega}{\pi} \varepsilon \right) \right]^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui est bien celle qu'on devait trouver *a priori*.

La fonction  $\Omega(\zeta)$  étant maintenant explicitée, il suffira de la transporter dans les formules (1), (2), (4) rappelées au début de ce Mémoire, pour en déduire les équations de la paroi, et la valeur de la résistance correspondante.

Nous n'insisterons pas davantage sur cet exemple, ni sur les multiples autres qu'il serait facile de former. On aperçoit notamment que  $\Omega(\zeta)$  pourra s'exprimer en termes finis, lorsque la fonction  $\Psi(s)$  sera de la forme

$$\Psi(s) = \{ \text{fonction quelconque de } (ps) \} \times p's.$$

Dans un autre Mémoire [*Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle (Annales de l'École Normale supérieure, 1911)*] j'indique de nouvelles applications de la fonction  $\Omega(\zeta)$  étudiée en détail dans le Mémoire actuel. J'indiquerai également, ailleurs, comment il faut modifier les calculs exposés ci-dessus lorsque le fluide est limité par une paroi fixe ( $\mu$ ) donnée *non forcément rectiligne*, cette généralisation étant rendue possible par la résolution simple que j'ai fait connaître (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 152, p. 680*) du problème de Dirichlet dans une couronne circulaire.