JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 85-96.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__85_0>

Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement;

PAR M. PAUL APPELL.

1. Le problème du mouvement d'une bille de billard, avec frottement de glissement, est classique ([1]). Mais il paraît intéressant d'étudier le mouvement plus complètement, en tenant compte également du frottement de roulement, qu'on peut négliger dans une première approximation.

2. Prenons comme plan $\xi O \eta$ le plan du tapis, comme axe $O\zeta$ un axe perpendiculaire vers le haut. La bille, étant supposée composée de couches concentriques et homogènes, a pour centre de gravité G le centre de figure : les coordonnées de ce point sont $\xi, \eta, \zeta = R$, en appelant R le rayon de la bille. Soient $Gxyz$ des axes parallèles aux axes fixes menés par G; p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω de la bille par rapport à ces axes. Désignons par V la vitesse de la molécule de la bille située, à l'instant t, au point de contact A avec le tapis, et α l'angle de V avec l'axe $O\xi$: les composantes u, v, w de V, suivant les axes, sont

$$u = V\cos\alpha, \qquad v = V\sin\alpha, \qquad w = 0. \tag{1}$$

On a, d'autre part, en considérant cette vitesse comme résultant de la vitesse due à la translation des axes $Gxyz$ et de la rotation instan-

([1]) *Voyez*, par exemple, mon *Traité de Mécanique*, t. II. — On trouvera des indications bibliographiques dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, IV, 6 : *Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper*, von Paul Stäckel, p. 652.

tanée de la sphère, par rapport à ces axes,

$$u = \xi' - qR, \qquad v = \eta' + pR, \tag{2}$$

les accents désignant les dérivées de ξ, η par rapport à t.

Désignons de même par Ω *la projection horizontale* de la rotation instantanée ω de la sphère dans son mouvement autour de G. Le vecteur Ω est issu de A, et il a pour projections

$$p = \Omega \cos\beta, \qquad q = \Omega \sin\beta, \tag{3}$$

où β désigne l'angle de Ω avec $O\xi$. La réaction normale n du plan sur la sphère est verticale ascendante et a pour grandeur $n = mg$, où m est la masse totale de la bille. La force du frottement de glissement, à l'état de glissement, est une force F, dirigée en sens contraire de V, ayant pour intensité $fn = fmg$, où f est le coefficient du frottement de glissement; cette force F a pour projection

$$X = -fmg \cos\alpha, \qquad Y = -fmg \sin\alpha, \qquad Z = 0.$$

L'axe du couple du frottement de roulement est un vecteur H dirigé en sens contraire de Ω, ayant pour grandeur $\delta n = \delta mg$, δ étant une longueur appelée *coefficient du frottement de roulement* (Voyez *Traité de Mécanique*, t. II, Chap. XIX); cet axe de couple H a pour projections

$$L = -\delta mg \cos\beta, \qquad M = -\delta mg \sin\beta, \qquad N = 0.$$

Enfin le frottement de pivotement se traduit par un couple dont l'axe K est dirigé en sens contraire de la composante verticale r de la rotation instantanée ω de la bille; il a pour grandeur εmg, ε désignant un coefficient linéaire appelé *coefficient du frottement de pivotement*.

Dans ces conditions, en supposant qu'il y ait à la fois glissement, roulement et pivotement, on a, pour les équations du mouvement,

$$\left\{\begin{aligned} m\xi'' &= X, & m\eta'' &= Y, \\ mk^2 p' &= RY + L, & mk^2 q' &= -RX + M, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$mk^2 r' = \pm \varepsilon mg, \tag{5}$$

où il faut prendre $-$ si r est positif et $+$ si r est négatif. Les accents désignent des dérivées par rapport à t, et mk^2 le moment d'inertie de la bille par rapport à un diamètre.

Supposons, pour fixer les idées, r_0 positif; la dernière équation, avec le signe $-$, donne alors

$$k^2(r - r_0) = -\varepsilon g t;$$

donc, à l'instant

$$t_1 = \frac{k^2 r_0}{\varepsilon g},$$

le pivotement est *nul :* il reste ensuite nul. Il suffit donc d'étudier les quatre équations (4).

Calculons les dérivées u' et v' de u et v par rapport à

$$u' = \xi'' - Rq', \qquad v' = \eta'' + Rp';$$

nous avons

$$mu' = X\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) - \frac{R}{k^2}M,$$

$$mv' = Y\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R}{k^2}L,$$

ou, en remplaçant X, Y, L, M par leurs valeurs,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)\cos\alpha + \frac{R\delta}{k^2} g \sin\beta, \\ v' &= -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)\sin\alpha - \frac{R\delta}{k^2} g \cos\beta. \end{aligned} \right.$$

Comme $u = V\cos\alpha$, $v = V\sin\alpha$, ces équations deviennent

$$V'\cos\alpha - V\sin\alpha\alpha' = -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)\cos\alpha + \frac{R\delta}{k^2} g \sin\beta,$$

$$V'\sin\alpha + V\cos\alpha\alpha' = -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)\sin\alpha - \frac{R\delta}{k^2} g \cos\beta;$$

d'où

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} V' &= -fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R\delta}{k^2} g \sin(\beta - \alpha), \\ V\alpha' &= -\frac{R\delta}{k^2} g \cos(\beta - \alpha). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, dans les équations (4), remplaçant p et q par $\Omega\cos\beta$

et $\Omega \sin\beta$, nous avons

$$\Omega' \cos\beta - \Omega \sin\beta\beta' = -\frac{fR}{k^2} g \sin\alpha - \frac{\delta}{k^2} g \cos\beta,$$

$$\Omega' \sin\beta + \Omega \cos\beta\beta' = +\frac{fR}{k^2} g \cos\alpha - \frac{\delta}{k^2} g \sin\beta;$$

d'où

$$(8) \quad \begin{cases} \Omega' = \dfrac{fR}{k^2} g \sin(\beta - \alpha) - \dfrac{\delta}{k^2} g, \\ \Omega\beta' = \dfrac{fR}{k^2} g \cos(\beta - \alpha). \end{cases}$$

Ces quatre équations (7) et (8) présentent une symétrie digne d'attention entre le glissement et la rotation; elles donnent V, Ω, α et β en fonction de t et des conditions initiales. On aura immédiatement, une fois ces quantités connues, u, v, p et q, puis ξ et η par des quadratures.

Ces équations subsistent tant qu'il y a, en même temps, glissement et roulement. Elles doivent être modifiées à partir du moment où l'on aurait constamment $V = 0$ (pas de glissement), avec $\Omega \neq 0$, ou $\Omega = 0$ (pas de roulement) avec $V \neq 0$; le dernier cas n'a qu'un intérêt mathématique, car, en réalité, si à un instant on avait $\Omega = 0$ et $V \neq 0$, le roulement reparaîtrait immédiatement. Nous reviendrons sur ces cas plus loin.

3. *Vérification pour le cas classique où l'on néglige le frottement de roulement.* — Si l'on suppose $\delta = 0$, on a

$$\alpha' = 0;$$

donc α reste constant. La vitesse de glissement V est parallèle à une direction fixe qu'on peut toujours prendre pour direction $O\xi$, de façon que $\alpha = 0$, $u = V$, $v = 0$. La grandeur V de la vitesse de glissement est alors donnée par

$$V - V_0 = -fgt\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right);$$

elle s'annule au bout d'un temps fini, puis reste nulle.

On a en même temps, d'après (4),

$$p = \Omega \cos\beta = \Omega_0 \cos\beta_0,$$
$$q = \Omega \sin\beta = \frac{fR}{k^2} gt + \Omega_0 \sin\beta_0,$$

jusqu'au moment où $V = 0$.

On a de plus

$$\xi' = u + qR, \qquad \eta' = v - pR,$$
$$\xi' = V_0 + R\Omega_0 \sin\beta_0 - fgt,$$
$$\eta' = \quad - R\Omega_0 \cos\beta_0;$$

d'où l'on déduit, en intégrant, le mouvement parabolique du centre, jusqu'au moment où $V = 0$.

4. *Cas analogue obtenu en supposant le frottement de glissement nul et le frottement de roulement différent de zéro.* — Au point de vue analytique on pourrait supposer $f = 0$, $\delta \neq 0$; mais ce cas est purement idéal. On aurait alors

$$\beta' = 0, \qquad \beta = 0,$$

en prenant $O\xi$ parallèle à Ω : puis

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{\delta}{k^2} gt;$$

Ω a donc une direction fixe et s'annule au bout d'un temps fini; $p = \Omega$, $q = 0$. Les équations (6), où $f = 0$, $\beta = 0$, donnent alors

$$u = V \cos\alpha = V_0 \cos\alpha_0,$$
$$v = V \sin\alpha = -\frac{R\delta}{k^2} gt + V_0 \sin\alpha_0.$$

Les expressions de ξ' et η' deviennent dans ce cas

$$\xi' = V_0 \cos\alpha_0,$$
$$\eta' = V_0 \sin\alpha_0 - \Omega_0 R,$$

ce qui donne un mouvement rectiligne uniforme pour le centre.

5. Avant de discuter les équations générales, remarquons qu'au point de vue des Mathématiques pures, il y aurait différents cas à distinguer suivant les grandeurs relatives des coefficients.

Nous n'envisagerons que le cas réel du billard ordinaire, dans lequel le frottement de roulement a une importance beaucoup plus petite que le frottement de glissement. Nous admettrons que le coefficient δ est assez petit pour que

$$\delta < f\mathrm{R}. \tag{9}$$

Dans cette hypothèse la discussion se simplifie comme il suit.

6. *Cas où la rotation Ω_0 est nulle à l'instant initial, V_0 étant différent de zéro.* — Dans ce cas, la rotation ne peut pas rester nulle : nous allons voir en effet qu'on arriverait à une contradiction en imaginant un mouvement avec glissement sans roulement. Dans cette hypothèse $\Omega = 0$, le couple du frottement de roulement devrait suivre les lois du frottement de roulement au repos : l'axe de ce couple serait un vecteur H_1, appliqué à A, opposé au sens faisant avec $\mathrm{O}\xi$ un certain angle β, et ayant pour grandeur $\delta_1 mg$, δ_1 étant un coefficient linéaire moindre que δ, $\delta_1 \leqq \delta$.

En écrivant dans cette hypothèse les équations du mouvement, on aurait des équations de la forme (7) et (8), où δ serait remplacé par δ_1 et Ω par zéro. Les équations (8) donneraient en particulier

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) \qquad &= 0, \\ f\mathrm{R}\sin(\beta - \alpha) - \delta_1 &= 0. \end{aligned}$$

La première donne $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. En portant dans la deuxième équation on voit que $\beta - \alpha$ ne peut pas être égal à $\frac{3\pi}{2}$, car les deux termes seraient négatifs. On doit donc avoir $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$f\mathrm{R} - \delta_1 = 0.$$

Mais cette relation est impossible, car

$$\delta_1 \leqq \delta \qquad \text{et} \qquad \delta < f\mathrm{R}.$$

Donc le mouvement supposé, glissement sans roulement, est impossible; tant qu'il y a glissement, il y a en même temps roulement.

7. *Cas où le glissement est nul à l'instant initial* $V_0 = 0$. — Si, au contraire, le glissement est nul, à un certain instant qu'on peut toujours regarder comme initial, le glissement reste nul par la suite.

En effet, nous allons voir qu'un roulement sans glissement vérifie les équations du mouvement. S'il n'y a pas glissement, la force F du frottement de glissement vérifie les lois du frottement de glissement à l'état de repos. Cette force a une direction inconnue *a priori;* nous la supposerons de sens opposé au vecteur qui ferait un angle α avec $O\xi$; elle a pour grandeur

$$f_1 mg,$$

f_1 étant inférieur ou égal à f,

$$f_1 \leqq f.$$

Dans ces conditions, les équations du mouvement conservent les formes (7) et (8) avec $V = 0$, f étant remplacé par f_1. Les équations (7) deviennent alors

$$\cos(\beta - \alpha) = 0,$$

$$-f_1\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R\delta}{k^2}\sin(\beta - \alpha) = 0.$$

Il faut prendre encore $(\beta - \alpha) = \frac{\pi}{2}$ pour que la seconde équation puisse être satisfaite; puis on a, par la seconde,

$$(10) \qquad f_1 = \frac{\delta}{R}\,\frac{1}{1 + \frac{k^2}{R^2}},$$

valeur de f_1 qui est bien inférieure à f, car $\frac{\delta}{R}$ est supposé inférieur à f (n° 5).

Le mouvement persiste donc dans ces conditions : V reste nul, $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, et f_1 conserve la valeur constante (10) inférieure à f.

Les équations (8) montrent alors que $\beta' = 0$, $\beta = \beta_0$, et que

$$\Omega' = -\frac{\delta - f_1 R}{k^2} g,$$

ou, en remplaçant f_1 par sa valeur (10),

$$\Omega' = -\frac{\delta g}{R^2 + k^2};$$

Ω diminue donc proportionnellement au temps et s'annule au bout d'un temps

$$t_1 = \Omega_0 \frac{R^2 + k^2}{\delta g}.$$

Les coordonnées du centre sont données par

$$\xi' = q R, \qquad \eta' = - p R,$$

car $u = v = 0$. On peut supposer $\beta = 0$. Alors $p = \Omega$, $q = 0$. Donc le centre est animé d'un mouvement rectiligne perpendiculaire à la direction de la rotation instantanée, uniformément retardé. L'accélération de ce mouvement est

$$\eta'' = - R p' = - R \Omega' = + \frac{\delta R}{R^2 + k^2} g.$$

8. *Cas général.* — Supposons maintenant que $V_0 > 0$, $\Omega_0 > 0$. Au début il existe, à la fois, un glissement et un roulement.

Les équations (7) et (8) commencent par être applicables, jusqu'au moment où l'une des deux grandeurs V ou Ω s'annule. Si Ω s'annule avant V, à un instant t_0, immédiatement après Ω cesse d'être nul, d'après le cas particulier du n° **6**.

Si, au contraire, V s'annule, il reste nul, d'après le cas examiné au n° **7**.

Or les équations du mouvement montrent que V diminue constamment et s'annule au bout d'un temps fini. En effet,

$$\sin(\beta - \alpha) \leqq 1;$$

donc la première équation (7) donne

$$V' < - f g \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{R \delta}{k^2} g,$$

et, comme

$$\delta < f R.$$

a fortiori

$$V' < - f g;$$

donc

$$V - V_0 < - f g t,$$

et V s'annule au bout d'un temps moindre que $\frac{V_0}{fg}$. A partir de ce moment, le mouvement se fait suivant les lois du n° **7**.

Les équations du mouvement admettent une intégrale qu'on obtient en éliminant $\sin(\beta - \alpha)$ entre la première des équations (7) et la première des équations (8) : on a ainsi

$$fV' - \delta\Omega' = -f^2 g\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) + \frac{\delta^2}{k^2} g,$$

où le second membre est négatif à cause de l'hypothèse $\delta < fR$. Pendant la période considérée du mouvement, où V et Ω sont différents de zéro tous deux, la quantité

$$fV - \delta\Omega$$

diminue donc proportionnellement au temps :

$$(11) \qquad fV - \delta\Omega = fV_0 - \delta\Omega_0 - \left[f^2\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) - \frac{\delta^2}{k^2}\right] gt.$$

Nous pouvons également remarquer la forme que prend l'équation des forces vives. La force vive totale est

$$m[\xi'^2 + \eta'^2 + k^2(p^2 + q^2 + r^2)],$$

c'est-à-dire

$$2T = m[V^2 + R^2\Omega^2 + 2R\Omega V \sin(\beta - \alpha) + k^2(\Omega^2 + r^2)].$$

On a alors

$$dT = -mfgV\,dt - m\,\delta g\Omega\,dt \pm \varepsilon mgr\,dt,$$

où le signe devant le dernier terme est contraire à celui de r. Dans cette relation les termes en r se détruisent. Le second membre est essentiellement négatif : la force vive va constamment en diminuant, et cela dans toutes les phases du mouvement, jusqu'au moment où la bille s'arrête.

Signalons encore la relation

$$\frac{d}{dt}[\Omega V \cos(\beta - \alpha)] = \Omega V \cos(\beta - \alpha)\left[-\frac{fg\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)}{V} - \frac{\delta g}{\Omega k^2}\right].$$

Le coefficient du second membre est essentiellement négatif; la valeur absolue de

$$\Omega V \cos(\beta - \alpha)$$

va donc constamment en diminuant; elle s'annule au bout d'un temps fini, car V au moins s'annule, comme nous l'avons vu.

On peut enfin être renseigné sur le sens de la variation de $\beta - \alpha$, en remarquant que β' et α' sont de signes contraires et qu'on a :

$$\beta' - \alpha' = \frac{Rg}{k^2}\left(\frac{f}{\Omega} + \frac{\delta}{V}\right)\cos(\beta - \alpha),$$

où le coefficient de $\cos(\beta - \alpha)$ est positif. Par exemple, si l'angle $\beta - \alpha$ est d'abord positif et aigu, il augmente constamment et devient droit en un temps fini, parce que $U < V_0 - fgt$.

9. *Problème de l'intégration.* — Nous avons donné des indications qualitatives sur la marche générale du mouvement. Mais il reste à résoudre le problème de l'intégration des quatre équations (7) et (8) définissant V, Ω, α et β en fonction de t.

Posons pour abréger

$$fV = x, \qquad \delta\Omega = y, \qquad \beta - \alpha = \theta,$$
$$a = f^2\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)g, \qquad b = f\frac{R\delta}{k^2}g, \qquad c = \frac{\delta^2}{k^2}g;$$

a, b, c sont des constantes positives qui, dans le problème réel, vérifient les inégalités

$$a > b > c,$$

parce que $\delta < fR$.

Les quatre équations (7) et (8) s'écrivent alors

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -a + b\sin\theta, \\ &x\frac{d\alpha}{dt} = -b\cos\theta, \\ &\frac{dy}{dt} = b\sin\theta - c, \\ &y\frac{d\beta}{dt} = b\cos\theta, \\ &\beta - \alpha = \theta. \end{aligned} \right.$$

Écrivons-les

$$(13)\qquad \frac{dx}{-a+b\sin\theta}=\frac{dy}{b\sin\theta-c}=\frac{d\beta}{\frac{b}{y}\cos\theta}=\frac{-d\alpha}{\frac{b}{x}\cos\theta}=\frac{d\theta}{b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cos\theta}=dt;$$

nous aurons, en égalant les deux premiers rapports au cinquième, les équations

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta}&=\frac{xy}{x+y}\left(\operatorname{tang}\theta-\frac{a}{b\cos\theta}\right),\\ \frac{dy}{d\theta}&=\frac{xy}{x+y}\left(\operatorname{tang}\theta-\frac{c}{b\cos\theta}\right),\end{aligned}\right.$$

qui définissent x et y en fonction de θ.

Ces équations étant supposées intégrées, la relation entre θ et t est donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}=a-c,$$

$$y-x=(a-c)t+y_0-x_0;$$

on a ensuite

$$d\alpha=-\frac{b\cos\theta}{x}dt,$$

d'où α par une quadrature.

Enfin

$$\beta-\alpha=\theta.$$

Il s'agit donc d'intégrer les deux équations (14).

10. *Cas particulier.* — En se plaçant au point de vue purement analytique, on a une intégration immédiate, si $a=c$. Posons alors $\frac{a}{b}=h$. Nous avons l'intégrale

$$y-x=\mathrm{A},$$

où A est une constante. La première équation s'écrit, en remplaçant y par $x+\mathrm{A}$,

$$\frac{2x+\mathrm{A}}{x(x+\mathrm{A})}dx=\left(\operatorname{tang}\theta-\frac{h}{\cos\theta}\right)d\theta,$$

d'où

$$x(x+\text{A}) = \frac{\text{C}}{\cos\theta\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{h}}.$$

On a ainsi $y-x$ et yx, et l'on peut calculer x et y en fonction de θ.

11. *Réduction à l'intégration d'une équation d'un type connu.* — Faisons d'abord le changement de variable

$$d\varphi = \left(\operatorname{tang}\theta - \frac{a}{b\cos\theta}\right)d\theta.$$

Les équations prennent la forme

$$x' = \frac{xy}{x+y}, \qquad y' = \frac{xy}{x+y}\lambda,$$

où λ peut être considéré comme une fonction connue de φ et où x' et y' désignent des dérivées *par rapport* à φ. On en déduit

$$y' = \lambda x', \qquad y = \frac{xx'}{x-x'}.$$

Éliminant y, on a

$$x^2 x'' = x'^3 + \lambda x'(x-x')^2.$$

Posant enfin

$$x = e^{\int z\,d\varphi},$$

z désignant une nouvelle fonction de φ, on a l'équation

$$z' = z^3 - z^2 + \lambda z(1-z)^2.$$

Cette équation rentre dans un type étudié d'abord par M. Roger Liouville, auquel j'ai consacré une monographie détaillée dans le Tome V de ce *Journal*, 1889, pages 361-423. On la ramènera aisément à la forme normale indiquée dans cette étude.