JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE DUHEM

Sur les petites oscillations d'un corps flottant

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 7 (1911), p. 1-84.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1911_6_7__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les petites oscillations d'un corps flottant;

PAR M. PIERRE DUHEM.

INTRODUCTION.

Comme la plupart des problèmes de stabilité de l'équilibre, le problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants a été abordé par deux voies bien distinctes.

La première de ces deux voies, ouverte par Lagrange et rendue absolument sûre par une belle démonstration de Lejeune-Dirichlet, conduit à des conditions qui suffisent certainement à la stabilité de l'équilibre; elle consiste à indiquer en quelles circonstances le potentiel total du système est minimum. Dans le cas où le flotteur, soumis exclusivement à la pesanteur, est immergé en un liquide pesant, homogène et incompressible, cette méthode a donné lieu, de la part de Bravais, puis de M. Guyou, à de très élégantes démonstrations géométriques. Dans le cas où les actions extérieures sont quelconques et où le fluide est compressible suivant une loi quelconque, cette méthode peut encore être suivie analytiquement jusqu'à la solution complète du problème (¹); elle ramène, en effet, cette solution au problème purement algébrique que voici : *Exprimer qu'une certaine forme quadratique de six variables est une forme définie positive;* ou bien encore à celui-ci : *Exprimer qu'une certaine équation du sixième degré a toutes ses racines réelles et positives.*

Le second procédé propre à l'étude de la stabilité d'un flotteur est le procédé dit *des petits mouvements*. Il consiste à supposer que le flotteur et le fluide sont animés d'un petit mouvement pendulaire et à exprimer que la période de ce mouvement est nécessairement une quantité réelle.

La légitimité de l'emploi de ce procédé prête à des objections générales que nous ne voulons pas examiner ici, afin de nous borner à ce qui concerne spécialement le problème des oscillations pendulaires d'un flotteur.

Dans le cas où le fluide est homogène et où la pesanteur agit seule, les équations qui régissent ces oscillations ont été formées et étudiées par Poisson et par Duhamel; mais, dans la formation de ces équations, ces deux auteurs ont admis une supposition tout à fait inexacte ; pour calculer la pression qui s'exerce en chaque point de la surface du solide que baigne le liquide, ils ont suivi les règles posées par l'Hydrostatique; ils n'ont tenu aucun compte des forces d'inertie appliquées aux divers éléments du fluide en vertu du mouvement de ce dernier; de ce chef, donc, leur analyse est incorrecte. Chose bien digne de remarque : Cette manière de traiter le problème de la stabilité d'un flotteur, bien qu'elle ne soit pas justifiée en principe et qu'elle comporte une erreur incontestable au cours de son développement, fournit les mêmes conditions de stabilité que la méthode justifiée par Lejeune-Dirichlet et correctement appliquée par Bravais et par M. Guyou ; elle aboutit à la classique *règle du métacentre*.

(¹) P. Duhem, *De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire* (*Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7, session de 1896); *Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 7 janvier 1897); *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. III, 1897, p. 389).

Clebsch a repris (¹) la théorie des petites oscillations pendulaires qu'un solide pesant peut effectuer lorsqu'il flotte à la surface d'un liquide incompressible et pesant. Il a soigneusement signalé et évité l'erreur qu'avaient commise Poisson et Duhamel. Il a obtenu de la sorte des équations correctes, mais bien autrement compliquées que celles dont ses prédécesseurs avaient fait usage. En exprimant que les périodes de toutes les oscillations pendulaires sont réelles, il a été conduit à une condition qui ne concorde nullement avec celle que l'on déduit de la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet; celle-ci revient, en effet, au problème d'Algèbre par lequel on exprime qu'une certaine forme quadratique est définie positive; celle-là exige la solution d'une question toute différente; il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une certaine équation transcendante ait toutes ses racines réelles et positives.

Sans discuter plus profondément la nature et les causes de ce désaccord, Clebsch n'avait pas hésité à en conclure que la classique règle du métacentre était inexacte. Cette conclusion, vraisemblable si la règle du métacentre n'avait d'autre justification que la théorie de Poisson et de Duhamel, ne saurait être admise du moment que cette règle est tirée, par des raisonnements irréprochables, de la proposition énoncée par Lagrange et démontrée par Lejeune-Dirichlet. Il nous faut donc, de ce désaccord entre les résultats des deux méthodes qui ont servi à étudier la stabilité d'un corps flottant, donner une autre raison; et, dans ce but, il nous faut, tout d'abord, examiner ce désaccord plus complètement que Clebsch n'a cru le devoir faire ; c'est ce travail que nous nous proposons d'accomplir ici.

D'ailleurs, nous commencerons par prendre la question d'une manière beaucoup plus générale que Clebsch ne l'a fait. Au lieu de supposer le fluide incompressible, nous le regarderons comme compressible suivant une loi quelconque, mais de température uniforme et constante. Au lieu de supposer que la pesanteur est la seule force agissante, nous admettrons que le fluide et le flotteur sont l'un et l'autre soumis à des actions extérieures *newtoniennes* et dépendant d'un

(¹) CLEBSCH, *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LVII, 1860, p. 149).

potentiel. Le système dont nous étudierons les petits mouvements aura ainsi la même généralité que celui dont nous avons appris à former les conditions de stabilité par la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet ; nous pourrons, par conséquent, comparer entre eux les résultats auxquels nous conduisent ces deux méthodes.

De cette étude générale, il nous sera facile de repasser à celle que Clebsch a poursuivie.

I. — Étude cinématique des petits mouvements d'un solide flottant sur un fluide.

Nous garderons ici les notations que nous avons adoptées, en général, en nos divers Mémoires sur la stabilité des corps flottants. Nous désignerons donc par l'indice 3 le solide, par l'indice 2 le liquide compressible *unique* sur lequel il flotte, réservant l'indice 1 à l'espace vide qui surmonte ce fluide. S_{23} sera, à l'instant t, la surface de contact du solide et du fluide.

Nous supposerons que, pour faire passer le solide de sa position d'équilibre à la position qu'il occupe au temps t, il faille lui imposer :

1° Trois translations infiniment petites, $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz;

2° Trois rotations infiniment petites, $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$, effectuées respectivement autour de ces trois axes.

Un point de ce solide qui, dans l'état d'équilibre, avait pour coordonnées x_0, y_0, z_0, a, à l'instant t, des coordonnées x, y, z, et l'on peut écrire

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x - x_0 &= f(t) + z_0\, m(t) - y_0\, n(t),\\ y - y_0 &= g(t) + x_0\, n(t) - z_0\, l(t),\\ z - z_0 &= h(t) + y_0\, l(t) - x_0\, m(t).\end{aligned}\right.$$

Le fluide et le solide doivent demeurer contigus le long de la surface s_{23}; on voit sans peine que, si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on peut exprimer cette condition de la manière suivante :

En tout point (x_0, y_0, z_0) *de la surface* s_{23} *le long de laquelle le solide et le fluide confinent dans l'état d'équilibre, on a, quel que* *soit t,*

$$\begin{aligned}(2)\qquad & [f(t)+z_0 m(t)-y_0 n(t) - a(x_0, y_0, z_0, t)]\cos(\mathrm{N}_0, x)\\ & +[g(t)+x_0 n(t)-z_0 l(t) - b(x_0, y_0, z_0, t)]\cos(\mathrm{N}_0, y)\\ & +[h(t)+y_0 l(t)-x_0 m(t) - c(x_0, y_0, z_0, t)]\cos(\mathrm{N}_0, z)=0.\end{aligned}$$

En cette égalité,

$$a(x_0, y_0, z_0, t),\quad b(x_0, y_0, z_0, t),\quad c(x_0, y_0, z_0, t)$$

sont, à l'instant t, les composantes de l'élongation du point du fluide dont les coordonnées, en l'état d'équilibre, étaient x_0, y_0, z_0;

N_0 *est la direction de la normale menée au point (x_0, y_0, z_0), et vers l'intérieur du fluide, à la surface s_{23}.*

Le point du solide qui, dans l'état d'équilibre, occuperait la position (x_0, y_0, z_0) sur la surface S_{23}, occupe, à l'instant t, la position (x, y, z) sur la surface s_{23}; si N est la normale en (x, y, z), et vers l'intérieur du fluide, à la surface s_{23}, on a visiblement

$$(3)\qquad \begin{cases}\cos(\mathrm{N}, x)-\cos(\mathrm{N}_0, x)=\cos(\mathrm{N}_0, z)\,m(t)-\cos(\mathrm{N}_0, y)\,n(t),\\ \cos(\mathrm{N}, y)-\cos(\mathrm{N}_0, y)=\cos(\mathrm{N}_0, x)\,n(t)-\cos(\mathrm{N}_0, z)\,l(t),\\ \cos(\mathrm{N}, z)-\cos(\mathrm{N}_0, z)=\cos(\mathrm{N}_0, y)\,l(t)-\cos(\mathrm{N}_0, x)\,m(t).\end{cases}$$

Dans ce qui va suivre, nous admettrons l'existence, au sein du fluide, d'une *fonction potentielle des élongations* (¹) $\psi(x, y, z, t)$, en sorte que nous aurons, en tout point et à tout instant,

$$(4)\qquad \begin{cases}a(x, y, z, t)=-\dfrac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial x},\\ b(x, y, z, t)=-\dfrac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial y},\\ c(x, y, z, t)=-\dfrac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial z}.\end{cases}$$

Ces égalités montrent que, dans tout le fluide, $\psi(x, y, z, t)$ diffère infiniment peu d'une simple fonction de t.

(¹) P. DUHEM, *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, égalité (11), p. 259 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. IX, 1903).

La condition (2) pourra alors s'écrire

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&[f(t) + z_0 m(t) - y_0 n(t)] \cos(N_0, x) \\
&+ [g(t) + x_0 n(t) - z_0 l(t)] \cos(N_0, y) \\
&+ [h(t) + y_0 l(t) - x_0 m(t)] \cos(N_0, z) + \frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial N_0} = 0.
\end{aligned}
$$

Les formules (1) fournissent l'expression de la force vive du solide.

Posons

$$
(6)\quad
\left\{
\begin{array}{lll}
 & \mathfrak{M} = \int dm_3, & \\
M_x = \int x_0\, dm_3, & M_y = \int y_0\, dm_3, & M_z = \int z_0\, dm_3, \\
J_x = \int (y_0^2 + z_0^2)\, dm_3, & J_y = \int (z_0^2 + x_0^2)\, dm_3, & J_z = \int (x_0^2 + y_0^2)\, dm_3, \\
P_{yz} = \int y_0 z_0\, dm_3, & P_{zx} = \int z_0 x_0\, dm_3, & P_{xy} = \int x_0 y_0\, dm_3.
\end{array}
\right.
$$

En ces égalités, dm_3 est une masse élémentaire du corps solide; (x_0, y_0, z_0) est, dans l'état d'équilibre, la position occupée par un point de cette masse; les intégrales s'étendent toutes au solide entier tel qu'il est disposé dans l'état d'équilibre.

Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au second, la force vive du solide peut s'écrire

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{T} = {} & \frac{\mathfrak{M}}{2}\left[\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right] \\
&+ \frac{df}{dt}\left(M_z \frac{dm}{dt} - M_y \frac{dn}{dt}\right) + \frac{dg}{dt}\left(M_x \frac{dn}{dt} - M_z \frac{dl}{dt}\right) + \frac{dh}{dt}\left(M_y \frac{dl}{dt} - M_x \frac{dm}{dt}\right) \\
&+ \frac{J_x}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{J_y}{2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \frac{J_z}{2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \\
&- P_{yz} \frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt} - P_{zx} \frac{dn}{dt}\frac{dl}{dt} - P_{xy} \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt}.
\end{aligned}
$$

Remarquons de suite, comme conséquence de cette formule, que *la* *forme quadratique en* F, G, H, L, M, N

$$(8)\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{M}(F^2+G^2+H^2) + 2F(M_zM - M_yN) + 2G(M_xN - M_zL) + 2H(M_yL - M_xM) + J_xL^2 + J_yM^2 + J_zN^2 - 2P_{yz}MN - 2P_{zx}NL - 2P_{xy}LM$$

est une forme définie positive.

De l'expression (7) de la force vive $\mathfrak{C}$, on tire sans peine l'expression des actions d'inertie auxquelles le solide est soumis à l'instant t; si l'on en effectue la réduction à l'origine O des coordonnées, ces actions se réduisent à une force dont les composantes sont $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy, Oz sont $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$. En n'écrivant que les infiniment petits du premier ordre, on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi(t) = -\mathfrak{M}\frac{d^2f(t)}{dt^2} - M_z\frac{d^2m(t)}{dt^2} + M_y\frac{d^2n(t)}{dt^2}, \qquad \ldots\ldots \\ &\lambda(t) = -M_y\frac{d^2h(t)}{dt^2} + M_z\frac{d^2g(t)}{dt^2} \\ &\qquad - J_x\frac{d^2l(t)}{dt^2} + P_{xy}\frac{d^2m(t)}{dt^2} + P_{xz}\frac{d^2n(t)}{dt^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

II. — Étude dynamique des petits mouvements du corps solide.

Soit $U(x, y, z)$ la fonction potentielle des forces extérieures auxquelles le corps solide est soumis; lorsque x, y, z sont les coordonnées d'un point de la masse élémentaire dm_3, cette masse est supposée soumise à une force dont les trois composantes sont

$$-\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}dm_3,$$
$$-\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}dm_3,$$
$$-\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}dm_3.$$

Les forces de ce genre qui sollicitent le solide à l'instant t se réduisent à une force, de composantes $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, appliquée au point qui coïncide avec l'origine des coordonnées, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy et Oz sont respectivement $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$.

Soient X_0, Y_0, Z_0, P_0, Q_0, R_0 ce que sont ces mêmes quantités pour le corps en équilibre. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, nous trouvons sans peine six égalités dont la première est

$$(10)\quad \begin{aligned} X(t) = X_0 - f(t)\int \frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\,dm_3 - g(t)\int \frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0}\,dm_3 - h(t)\int \frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial z_0}\,dm_3 \\ - l(t)\int\left(y_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial z_0} - z_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)dm_3 \\ - m(t)\int\left(z_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} - x_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial z_0}\right)dm_3 \\ - n(t)\int\left(x_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0\,\partial y_0} - y_0\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2}\right)dm_3. \end{aligned}$$

En cette égalité, toutes les intégrations s'étendent à la masse entière du solide prise en la situation que ce solide occupe alors que l'équilibre est établi.

Pour écrire les équations du mouvement du solide, on peut, à chaque instant, faire abstraction de l'existence du fluide, à la condition d'adjoindre aux actions extérieures précédentes les pressions qu'à ce même instant le fluide exerce sur la surface mouillée du solide.

A chaque instant t, ces pressions peuvent se réduire à une force de composantes $X'(t)$, $Y'(t)$, $Z'(t)$, appliquée au point O, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy, Oz sont respectivement $P'(t)$, $Q'(t)$, $R'(t)$.

Formons, par exemple, $X'(t)$.

Si $\Pi(x, y, z, t)$ désigne la pression au point (x, y, z) du fluide et à l'instant t, nous aurons

$$(11)\qquad X'(t) = -\int \Pi(x, y, z, t)\cos(N, x)\,dS_{23},$$

l'intégration s'étendant à la surface mouillée du solide dans la position qu'elle occupe à l'instant t.

La valeur de $\Pi(x, y, z, t)$ est donnée par la formule suivante :

$$\Pi = \rho^2 \frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho},$$

où $\zeta(\rho, T)\,dm_2$ est le potentiel interne de la masse dm_2 du fluide de densité ρ et de température T.

D'ailleurs, si l'on désigne par $V(x, y, z)$ la fonction potentielle des actions extérieures auxquelles le fluide est soumis, on a [1], en tout point du fluide en mouvement et à tout instant, l'égalité

$$V + \zeta(\rho) + \rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Posons

$$\varphi(\rho, T) = \rho\,\zeta(\rho, T), \tag{12}$$

et nous pourrons écrire, en négligeant de noter la température T qui est constante en tout point du fluide et à tout instant,

$$\Pi(x, y, z, t) = -\varphi[\rho(x, y, z, t)] - \rho(x, y, z, t)\left[V(x, y, z) - \frac{\partial^2\psi(x, y, z, t)}{\partial t^2}\right]. \tag{13}$$

Désignons par $\rho_0(x, y, z)$ la valeur de la densité du fluide au point (x, y, z) lorsque l'équilibre est établi ; la différence

$$\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z)$$

est, en général et au plus, un infiniment petit du premier ordre. Si donc nous conservons seulement les termes finis et les termes infiniment petits du premier ordre, nous pourrons remplacer l'égalité (13) par celle-ci :

$$\begin{aligned}\Pi(x, y, z, t) = &-\varphi[\rho_0(x, y, z)] - [\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z)]\frac{d\varphi[\rho_0(x, y, z)]}{d\rho_0(x, y, z)} \\ &- \left[V(x, y, z) - \frac{\partial^2\psi(x, y, z, t)}{\partial t^2}\right]\rho_0(x, y, z) \\ &- V(x, y, z)[\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z)].\end{aligned} \tag{14}$$

Cette égalité, à son tour et au même degré d'exactitude, peut évidem-

[1] *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chap. II, égalité (33), p. 278 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903).

ment s'écrire

$$(15)\quad \begin{aligned}\Pi(x, y, z, t) = &- \varphi[\rho_0(x_0, y_0, z_0)] - V(x_0, y_0, z_0)\,\rho_0(x_0, y_0, z_0) \\ &- \left\{\frac{d\varphi[\rho_0(x_0, y_0, z_0)]}{d\rho_0(x_0, y_0, z_0)} + V(x_0, y_0, z_0)\right\} \\ &\quad\times \left[\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) + \frac{\partial\rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0}(x - x_0) \right.\\ &\quad\quad \left. + \frac{\partial\rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial\rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}(z - z_0)\right] \\ &- \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\quad \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0}(x - x_0) \right.\\ &\quad\quad + \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \\ &\quad\quad \left. + \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}(z - z_0)\right] \\ &+ \rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Mais, en tout point du fluide en équilibre, on a

$$(16)\qquad \frac{d\varphi[\rho_0(x, y, z)]}{d\rho(x, y, z)} + V(x, y, z) + C = 0,$$

C étant une constante.

En outre, si l'on désigne par $\Pi_0(x, y, z)$ la valeur de la pression au point (x, y, z) du fluide en équilibre, on a

$$(17)\qquad \varphi[\rho_0(x, y, z)] + [V(x, y, z) + C]\rho_0(x, y, z) + \Pi_0(x, y, z) = 0,$$

C étant la même constante qu'en l'égalité précédente.

La comparaison des égalités (14) et (17) nous montre que, dans tout le fluide et à tout instant, la quantité

$$\frac{\partial^2\psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} + C.$$

---

(1) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, égalité (38) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 127).

(2) *Ibid.*, égalité (39), p. 127.

qui se réduirait à zéro si le fluide était en équilibre, est, en général et au plus, un infiniment petit du premier ordre.

Les égalités (15), (16) et (17) donnent, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(18)\quad \begin{aligned} \Pi(x, y, z, t) = \Pi_0(x_0, y_0, z_0) &+ \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C\right] \\ &- \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0}(x - x_0)\right. \\ &\qquad + \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \\ &\qquad \left. + \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}(z - z_0)\right]. \end{aligned}$$

En vertu de cette égalité (18), l'égalité (11) devient, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre,

$$(19)\quad \begin{aligned} X'(t) = &-\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\cos(N_0, x)\, ds_{23} \\ &-\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\left[\cos(N, x) - \cos(N_0, x)\right] ds_{23} \\ &+\int \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial V_0}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial V_0}{\partial y_0}(y - y_0)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\partial V_0}{\partial z_0}(z - z_0)\right]\cos(N_0, x)\, ds_{23} \\ &-\int \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C\right]\cos(N_0, x)\, ds_{23}. \end{aligned}$$

En cette égalité, V_0 a été mis pour $V(x_0, y_0, z_0)$; les intégrales s'étendent toutes à la surface du solide que le liquide baigne dans l'état d'équilibre.

En cet état, les pressions que le fluide exerce sur le solide se réduisent à une force, de composantes X'_0, Y'_0, Z'_0, dont le point d'application est en O, et à un couple dont les moments par rapport à Ox, Oy, Oz sont respectivement P'_0, Q'_0, R'_0. On a

$$(20)\qquad X'_0 = -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\cos(N_0, x)\, ds_{23}.$$

On a également

$$Y'_0 = -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0) \cos(N_0, y)\, ds_{23},$$

$$Z'_0 = -\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0) \cos(N_0, z)\, ds_{23},$$

en sorte qu'en vertu de la première égalité (3),

$$\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\, [\cos(N, x) - \cos(N_0, x)]\, ds_{23} = Y'_0 n(t) - Z'_0 m(t).$$

D'ailleurs, en l'état d'équilibre, on a

$$Y_0 + Y'_0 = 0, \qquad Z_0 + Z'_0 = 0.$$

On a aussi

$$Y_0 = -\int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}\, dm_3, \qquad Z_0 = -\int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}\, dm_3,$$

ce qui permet d'écrire

$$(21) \quad \begin{aligned} &\int \Pi_0(x_0, y_0, z_0)\, [\cos(N, x) - \cos(N_0, x)]\, ds_{23} \\ &\quad = n(t) \int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0}\, dm_3 - m(t) \int \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0}\, dm_3. \end{aligned}$$

Si l'on observe enfin que, dans l'état d'équilibre,

$$X_0 + X'_0 = 0,$$

les équations (10), (19), (20) et (21) donneront

$$(22) \quad \begin{aligned} X(t) + X'(t) = &- A_{11} f(t) - A_{12} g(t) - A_{13} h(t) \\ &- A_{14} l(t) - A_{15} m(t) - A_{16} n(t) \\ &- \int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C \right] \cos(N_0, x)\, ds_{23}. \end{aligned}$$

Les coefficients A_{ij} ont, en cette égalité et dans les égalités analogues, les expressions que nous avions données en notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (1); il faut avoir soin, tou-

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, pp. 155-159.

tefois, de supposer nulle, en ces expressions, la densité du fluide 1.

Selon le principe de d'Alembert, pour mettre en équations le problème du mouvement du solide, il suffit d'écrire que les conditions d'équilibre de ce solide seraient vérifiées si ce corps était soumis :

1° Aux forces extérieures qui le sollicitent réellement ;

2° Aux actions de liaisons représentées par les pressions du fluide ;

3° Aux forces d'inertie.

Nous obtenons ainsi six équations dont la première est

$$X(t) + X'(t) + \xi(t) = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (9) et (22),

$$(23) \quad \begin{aligned} & A_{11} f(t) + A_{12} g(t) + A_{13} h(t) + A_{14} l(t) + A_{15} m(t) + A_{16} n(t) \\ & \quad + \mathfrak{M} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \mathrm{M}_z \frac{d^2 m(t)}{dt^2} + \mathrm{M}_y \frac{d^2 n(t)}{dt^2} \\ & \quad + \int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C \right] \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0. \end{aligned}$$

Le terme

$$\int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \left[\frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} + C \right] \cos(N_0, x)\, ds_{23}$$

et les termes correspondants qui figurent dans les cinq équations analogues à l'équation (23) compliquent étrangement le problème.

Poisson, Duhamel et tous les anciens auteurs faisaient abstraction de ces termes ; ils obtenaient ainsi des équations particulièrement faciles à intégrer, car ces équations, où rien ne dépendait plus du mouvement du fluide, étaient simplement linéaires et à coefficients constants. Cette méthode était entièrement illégitime, puisque les termes négligés étaient du même ordre que les termes conservés. Clebsch a très justement condamné cette théorie simplifiée.

Les termes négligés par Poisson et Duhamel dépendent des petits mouvements qui animent le fluide. Mais on ne peut songer à déterminer d'abord ces petits mouvements sans se préoccuper du mouvement du solide, puis, une fois les petits mouvements du liquide connus, à calculer le dernier terme de chacune des équations du mouvement du solide. Les petits mouvements du liquide ne peuvent être déterminés indépendamment des mouvements du solide, car la condition (5) doit être vérifiée, à chaque instant, en chaque point de la surface s_{23}.

La détermination des petits mouvements du liquide et la détermination des petits mouvements du solide ne constituent donc pas deux problèmes distincts qui puissent être traités indépendamment l'un de l'autre ou résolus l'un après l'autre; elles sont liées l'une à l'autre d'une manière indissoluble et sont l'objet d'un problème unique.

III. — Étude des petits mouvements du fluide.

Rappelons brièvement comment les petits mouvements du fluide sont déterminés.

En tout point (x, y, z) de la région de l'espace que le fluide remplit en l'état d'équilibre, on a, à tout instant ([1]),

$$(24)\qquad \frac{d^2\varphi[\rho_0(x,y,z)]}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-C=0.$$

En tout point de la surface libre σ qui termine le fluide au moment de l'équilibre, on a

$$\rho_0\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+C\right)-\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}=0.$$

n étant la normale à la surface, dirigée vers l'intérieur du fluide.

En tout point de la surface invariable du vase qui contient le système, on a

$$(26)\qquad \frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial n}=0.$$

n étant la normale à cette surface.

Enfin, en tout point de la surface mouillée du solide en sa position d'équilibre, on a l'égalité (5).

La fonction $[\psi(x,y,z,t)+Ct^2]$ a, par rapport à x, y, z, les mêmes

---

([1]) P. Duhem, *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides*, Chap. III (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IX, 1903, p. 282). La constante C qui figure en cet écrit est égale et de signe contraire à celle qui figure ici.

dérivées que la fonction $\psi(x, y, z, t)$; elle peut donc, comme celle-ci, jouer le rôle de fonction potentielle des élongations; adoptons désormais cette nouvelle fonction potentielle des élongations et continuons de la désigner par $\psi(x, y, z, t)$. Les équations (24) et (25) deviendront

$$(24\ bis)\qquad \frac{d^2\varphi[\rho_0(x, y, z)]}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.$$

$$(25\ bis)\qquad \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{d\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}=0.$$

tandis que les conditions (26) et (5) demeureront sans aucun changement.

Lorsque nous adopterons cette nouvelle détermination de la fonction ψ, nous ne devrons pas oublier d'*effacer la constante* C aux premiers membres de l'équation (23) et des cinq autres équations du mouvement du corps solide.

Dès maintenant, examinons quelques questions.

En premier lieu, le fluide peut-il prendre un mouvement tel que le solide demeure immobile?

Si le solide doit demeurer immobile, la surface s_{23} le long de laquelle le fluide le baigne forme une partie de la paroi du vase; la condition (26) doit être vérifiée en tout point de cette surface comme elle l'est en tout point de la paroi du vase. Les conditions (24 *bis*), (25 *bis*) et (26) déterminent alors la fonction ψ et, partant, le mouvement du fluide.

La pression $\Pi(x_0, y_0, z_0, t)$ en tout point de la surface immobile s_{23} sera, dès lors, donnée par l'égalité (18), où nous devrons effacer la constante C et faire

$$x-x_0=0, \qquad y-y_0=0, \qquad z-z_0=0.$$

Nous aurons donc

$$\Pi(x_0, y_0, z_0, t)=\Pi_0(x_0, y_0, z_0)+\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial^2\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}.$$

Les pressions $\Pi(x_0, y_0, z_0, t)$ doivent, à chaque instant, faire équilibre aux actions extérieures qui s'exercent réellement sur le flotteur, comme les pressions $\Pi_0(x_0, y_0, z_0)$ leur faisaient équilibre. Pour cela, il faut et il suffit que la fonction ψ, déterminée par les conditions précédentes, vérifie à chaque instant les six équations

$$\int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0, \quad \ldots,$$

$$\int \rho_0(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial^2 \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} = 0, \quad \ldots.$$

Il est clair qu'il n'en pourra être ainsi que dans des cas extrêmement particuliers ; en général, le fluide ne pourra prendre aucun mouvement qui laisse le flotteur immobile.

En étudiant la stabilité de l'équilibre d'un flotteur, nous avons été amené [1] à imposer au système du solide et du fluide, à partir de l'état d'équilibre, un déplacement virtuel composé de la manière suivante : Le déplacement du flotteur est un déplacement quelconque; le déplacement du fluide est ce que nous avons appelé un *déplacement associé* au déplacement du flotteur.

Considérons, à l'instant t, le déplacement que le fluide et le corps flottant ont éprouvé à partir de leur position d'équilibre, et demandons-nous si le déplacement du fluide peut être regardé comme *associé* au déplacement du flotteur.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de l'espace occupé par le fluide,

$$(27) \qquad \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) = \frac{\theta}{\dfrac{d^2 \varphi[\rho_0(x, y, z)]}{d\rho_0^2}};$$

2° En tout point de la surface libre σ qui terminait le fluide en équilibre,

$$(28) \qquad a(x_0, y_0, z_0, t)\cos(n, x) + b(x_0, y_0, z_0, t)\cos(n, y) + c(x_0, y_0, z_0, t)\cos(n, z) = \frac{\theta}{\dfrac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial n}}.$$

En ces conditions, θ est une certaine forme linéaire et homogène des

[1] P. DUHEM, *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un fluide compressible*, égalités (6) et (7) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 394).

six quantités $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$; les coefficients de cette forme sont indépendants des variables x, y, z.

Une formule bien connue nous donne la dilatation infiniment petite de la particule fluide dont un point, situé en (x_0, y_0, z_0) au moment de l'équilibre, est venu en (x, y, z) à l'instant t. Cette formule est

$$\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$= - \rho_0(x_0, y_0, z_0)\left[\frac{\partial a(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0} + \frac{\partial b(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial y_0} + \frac{\partial c(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial z_0}\right].$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\rho_0(x, y, z) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = {} & \frac{\partial \rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} a(x_0, y_0, z_0, t) \\ & + \frac{\partial \rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} b(x_0, y_0, z_0, t) \\ & + \frac{\partial \rho_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} c(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}$$

Ces deux égalités, jointes aux égalités (4), donnent l'égalité

$$\begin{aligned}\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) = {} & \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x_0}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y_0}\left[\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial y_0}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial \psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial z_0}\right]\end{aligned}$$

qu'on peut écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(29) \quad \begin{aligned}\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_0(x, y, z)\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(x, y, z)\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial y}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0(x, y, z)\frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial z}\right].\end{aligned}$$

Les égalités (24 *bis*), (27) et (29) exigeraient que l'on eût, en tout point de l'espace occupé par la masse fluide,

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

En vertu des égalités (4), la condition (28) peut s'écrire

$$\frac{\partial\psi(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial n}\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} + \theta = 0.$$

D'autre part, les lois de l'Hydrostatique donnent

$$\frac{\partial \Pi_0(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} + \rho_0(x_0, y_0, z_0)\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial n} = 0.$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (25 *bis*), exigeraient que la condition (30) fût vérifiée en tout point de la surface libre du fluide en équilibre.

La condition (30) *représenterait donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'à l'instant t, le déplacement du fluide fût un déplacement* ASSOCIÉ *à celui du flotteur.*

Si nous nous souvenons que θ ne dépend pas de x, y, z, la condition (30), jointe aux égalités (4), nous donne, en tout point de la masse fluide,

$$(31)\qquad \frac{\partial^2 a(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 b(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 c(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Ces égalités, jointes à la signification des quantités a, b, c, nous donnent la proposition suivante :

Pour qu'à l'instant t le déplacement du fluide puisse être regardé comme ASSOCIÉ *au déplacement du flotteur, il faut qu'à cet instant chacune des particules fluides ait une accélération nulle.*

Si, à tout instant t, le déplacement du fluide était associé au déplacement du solide, nous dirions que le mouvement du fluide est un *mouvement associé* au mouvement du flotteur. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que chaque particule fluide eût une accélération constamment nulle ou, en d'autres termes, qu'elle se mût d'un mouvement rectiligne et uniforme; mais un tel mouvement ne peut demeurer infiniment petit, à moins qu'il se réduise à l'immobilité ; d'où cette proposition :

Pour que le mouvement du fluide puisse être regardé comme ASSOCIÉ *au mouvement du flotteur, il faut et il suffit que le fluide demeure constamment immobile.*

Si la surface mouillée du solide est de révolution autour d'un certain axe, et si le mouvement du flotteur se réduit à une rotation autour de cet axe, le fluide pourra demeurer constamment immobile; *hors ce cas, il n'est pas possible que le mouvement infiniment petit du fluide et le mouvement infiniment petit du flotteur soient* ASSOCIÉS *l'un à l'autre.*

IV. — Mise en équations du problème des petites oscillations pendulaires d'un flotteur.

Pour que les mouvements du flotteur soient pendulaires, il faut et il suffit que l'on ait six égalités de la forme

$$(32)\quad \begin{cases} f(t) = \varepsilon\left(F \sin 2\pi \frac{t}{T} + F' \cos 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ g(t) = \varepsilon\left(G \sin 2\pi \frac{t}{T} + G' \cos 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ h(t) = \varepsilon\left(H \sin 2\pi \frac{t}{T} + H' \cos 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ l(t) = \varepsilon\left(L \sin 2\pi \frac{t}{T} + L' \cos 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ m(t) = \varepsilon\left(M \sin 2\pi \frac{t}{T} + M' \cos 2\pi \frac{t}{T}\right), \\ n(t) = \varepsilon\left(N \sin 2\pi \frac{t}{T} + N' \cos 2\pi \frac{t}{T}\right), \end{cases}$$

où

$$(33)\qquad F,\ G,\ H,\ L,\ M,\ N$$

et

$$(33\ bis)\qquad F',\ G',\ H',\ L',\ M',\ N'$$

sont douze constantes, et ε une quantité infiniment petite indépendante de t.

Nous admettrons, en même temps, que le mouvement du fluide est un mouvement pendulaire de même période T, ce qui revient, comme l'on sait, à attribuer au potentiel des élongations la forme

$$(34)\qquad \psi(x,y,z,t) = \varepsilon\left[\Psi(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{T}\right],$$

où ε représente la même quantité infiniment petite, indépendante de x, y, z, t, que dans les équations (32).

Si dans les équations (5), (23), (24 *bis*), (25 *bis*) et (26) qui régissent le mouvement du système, nous substituons les valeurs (32) et (34) de f, g, h, l, m, n, ψ, nous obtenons des équations au sujet desquelles on peut faire les deux remarques suivantes :

1° Le premier membre de chacune d'elles est affecté du facteur ε qui peut être biffé ;

2° Ce premier membre est linéaire et homogène en $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ et $\cos 2\pi\frac{t}{T}$; pour qu'il soit nul quel que soit t, il faut et il suffit que les coefficients de $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ et de $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ soient séparément nuls, en sorte que chacune de nos équations se scinde en deux autres.

Nous obtenons donc ainsi deux groupes de conditions. Le premier groupe, où figurent seulement la fonction $\Psi(x,y,z)$ et les six constantes

$$(33)\qquad F,\quad G,\quad H,\quad L,\quad M,\quad N,$$

est le suivant :

1° En tout point (x,y,z) de la région que le fluide occupe en l'état d'équilibre, on a l'égalité

$$(35)\qquad \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right] + \frac{4\pi^2}{T^2}\Psi = 0;$$

2° En tout point de la paroi immobile qui contient le fluide, on a

$$(36)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0;$$

3° En tout point de la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre, on a

$$(37)\qquad \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \frac{4\pi^2}{T^2}\Psi = 0;$$

4° En tout point de la surface s_{23} du flotteur que baigne le fluide lorsque l'équilibre est établi, on a

$$(38)\quad (F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0, x) + (G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_0, y) + (H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0, z) + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = 0;$$

5° On a, enfin, six équations dont la première est

$$(39)\quad A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N - \frac{4\pi^2}{T^2}\left[\mathfrak{M} F + M_z M - M_y N + \int \rho_0 \Psi \cos(N_0, x)\, ds_{23}\right] = 0.$$

La fonction $\Psi'(x, y, z)$ et les six constantes

$$(33\ bis)\qquad F',\quad G',\quad H',\quad L',\quad M',\quad N'$$

sont soumises à des conditions toutes semblables.

V. — Réduction du problème précédent à un problème de calcul des variations.

Considérons, d'une part, l'expression

$$(8)\quad \mathfrak{T} = \mathfrak{M}(F^2 + G^2 + H^2) + 2F(M_z M - M_y N) + 2G(M_x N - M_z L) + 2H(M_y L - M_x M) + J_x L^2 + J_y M^2 + J_z N^2 - 2P_{yz} MN - 2P_{zx} NL - 2P_{xy} LM$$

et l'expression

$$(40)\qquad \tau = \int_2 \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi_2,$$

où l'intégrale s'étend à tous les éléments $d\varpi_2$ du volume 2 que le fluide remplit en l'état d'équilibre.

Considérons, d'autre part, l'expression

$$(41)\quad \mathfrak{Q} = A_{11}F^2 + A_{22}G^2 + A_{33}H^2 + A_{44}L^2 + A_{55}M^2 + A_{66}N^2 + 2A_{23}GH + 2A_{31}HF + 2A_{12}FG + 2A_{14}FL + 2A_{15}FM + 2A_{16}FN + 2A_{24}GL + 2A_{25}GM + 2A_{26}GN + 2A_{34}HL + 2A_{35}HN + 2A_{36}HN + 2A_{56}MN + 2A_{64}NL + 2A_{45}LM,$$

et l'expression

$$(42) \quad \Omega = -\int_\sigma \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 d\sigma$$
$$+ \int_2 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right]^2 d\varpi_2,$$

en laquelle la première intégrale s'étend à la surface libre σ qui termine le fluide en l'état d'équilibre, et la seconde intégrale au volume 2 que le fluide occupe en ce même état.

Comme nous l'avons remarqué, la quantité $\mathfrak{S}$ est positive toutes les fois que l'on n'a pas à la fois les six égalités

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

La quantité τ est également positive, à moins que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Nous pouvons évidemment considérer un déplacement du système que nous nommerons le déplacement (εW) et que nous définirons de la manière suivante :

1° Le solide éprouve une translation dont les composantes suivant Ox, Oy, Oz sont

$$\varepsilon F, \quad \varepsilon G, \quad \varepsilon H,$$

et autour des axes Ox, Oy, Oz, des rotations

$$\varepsilon L, \quad \varepsilon M, \quad \varepsilon N.$$

2° Chaque point du fluide éprouve un déplacement dont les composantes sont

$$-\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad -\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad -\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

En ces formules ε est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

Quelles que soient les six constantes F, G, H, L, M, N et la fonction Ψ, un tel déplacement sera un déplacement virtuel du système s'il vérifie les conditions suivantes:

1° On a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \tag{36}$$

en tout point de la paroi immobile;

2° On a l'égalité

$$(F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0, x) + (G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_0, y) + (H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0, z) + \frac{\partial \Psi}{\partial N_0} = 0 \tag{38}$$

en tout point de la paroi.

D'après ce que nous venons de voir, tout déplacement virtuel (εW) qui ne se réduit pas à l'absence de tout déplacement fait prendre à la quantité ($\mathfrak{S} + \tau$) une valeur positive.

Un premier déplacement virtuel (εW) ayant été défini, on en obtiendra un second en multipliant par un même nombre k les six constantes F, G, H, L, M, N et la fonction Ψ; en ce second déplacement, la somme ($\mathfrak{S} + \tau$) prendra une valeur k^2 fois plus grande que dans le premier. On obtiendra donc aisément tous les déplacements virtuels (εW) possibles si l'on forme tous ceux pour lesquels

$$\mathfrak{S} + \tau = 1. \tag{43}$$

Désignons par (εW_1) tout déplacement virtuel (εW) qui vérifie cette condition (43).

Proposons-nous le problème suivant :

Chercher un déplacement virtuel (εW_1) *tel que la somme* ($\mathfrak{Q} + \Omega$) *éprouve une variation d'ordre supérieur au premier lorsqu'on remplace ce déplacement virtuel par un autre déplacement virtuel* ($\varepsilon W'_1$), *de même espèce que le premier, infiniment voisin du premier, mais quelconque d'ailleurs.*

Soient

$$\delta F, \quad \delta G, \quad \delta H, \quad \delta L, \quad \delta M, \quad \delta N, \quad \delta \Psi \tag{44}$$

les variations qu'éprouvent les six constantes F, G, H, L, M, N et la fonction Ψ lorsqu'on substitue le déplacement $(\varepsilon W'_1)$ au déplacement (εW_1).

Le déplacement $(\varepsilon W'_1)$ doit vérifier les conditions (36), (38) et (43) que, déjà, le déplacement (εW_1) vérifie par hypothèse; pour cela, il faut et il suffit que l'on ait:

1° En tout point de la surface immobile du vase,

$$\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n} = 0; \tag{45}$$

2° En tout point de la surface mouillée s_{22} du flotteur,

$$\begin{aligned}
&(\delta F + z_0\,\delta M - y_0\,\delta N)\cos(N_0, x) \\
&+ (\delta G + x_0\,\delta N - z_0\,\delta L)\cos(N_0, y) \\
&+ (\delta H + y_0\,\delta L - x_0\,\delta M)\cos(N_0, z) + \frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial N_0} = 0;
\end{aligned} \tag{46}$$

3°

$$\delta(\mathfrak{T} + \mathfrak{t}) = 0. \tag{47}$$

Nous voulons que ces conditions entraînent celle-ci:

$$\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) = 0. \tag{48}$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une quantité λ, indépendante des variations (44), telle que l'égalité

$$\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - \lambda\,\delta(\mathfrak{T} + \mathfrak{t}) = 0 \tag{49}$$

soit une conséquence des seules conditions (45) et (46).

Or, nous trouvons sans peine

$$\frac{1}{2}\delta\mathfrak{Q} = (A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N)\,\delta F + \ldots, \tag{50}$$

$$\frac{1}{2}\delta\mathfrak{T} = (\mathfrak{M}F + M_z M - M_y N)\,\delta F + \ldots, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta\Omega = &-\int \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}\,d\sigma \\
&+ \int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right] \\
&\qquad\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2,
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\frac{1}{2}\delta\mathfrak{t} = \int_2 \rho_0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\partial\frac{\delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\partial\frac{\delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\partial\frac{\delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2. \tag{53}$$

Une intégration par parties, jointe aux conditions (45) et (46), transforme aisément l'égalité (53) en la suivante :

$$(53\ bis)\quad \frac{1}{2}\delta\tau = -\int \rho_0 \Psi \frac{\partial\delta\Psi}{\partial n} d\sigma + \delta F \int \rho_0 \Psi \cos(N_0, x)\, ds_{23} + \ldots$$
$$-\int_2 \Psi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2.$$

Moyennant les égalités (50), (51), (52) et (53 *bis*), l'égalité (49) devient

$$(54)\quad \Big\{ A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N$$
$$-\lambda\left[\mathfrak{M} F + M_z M - M_y N + \int \rho_0 \Psi \cos(N_0, x)\, ds_{23}\right]\Big\} \delta F + \ldots$$
$$-\int \rho_0 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda\Psi\right)\frac{\partial\delta\Psi}{\partial n} d\sigma$$
$$+\int_2 \Big\{ \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right] + \lambda\Psi \Big\}$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2 = 0.$$

Cette condition exige tout d'abord que la quantité

$$(55)\quad P = \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right]$$

ait la même valeur en tous les points du volume que le fluide occupe au moment de l'équilibre.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, et montrons qu'il en résulte une contradiction.

S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions, et d'une infinité de manières, choisir une grandeur p telle que P prît certainement, en certaines parties du système, des valeurs supérieures à p et, en certaines autres, des valeurs inférieures à p. Nous pourrions donc partager le volume 2 que le fluide occupe, au moment de l'équilibre, en deux volumes, connexes ou non, u et u', qui posséderaient les propriétés suivantes : En tout point du volume u, P est au moins égal à p et, en certaines parties de ce volume, P surpasse p ; en tout point du volume u', P est au plus égal à p et, en certaines parties de ce volume, P est inférieur à p.

Cela posé, concevons une fonction $j(x, y, z)$, continue à l'intérieur du volume 2, et douée des propriétés suivantes, qu'on peut lui assurer d'une infinité de manières :

La fonction j est nulle en tout point où P est égal à p, positive en tout point où P surpasse p, négative en tout point où P est inférieur à p ; en outre, on a

$$\int_2 j\, d\varpi_2 = 0. \tag{56}$$

Ces conditions entraînent les deux égalités

$$\int_u j\, du = \mathrm{J}, \qquad \int_{u'} j\, du' = -\mathrm{J}, \tag{57}$$

où J est une quantité positive.

Formons maintenant le problème de conductibilité de la chaleur dont voici l'énoncé :

Le volume 2 que le fluide remplit au moment de l'équilibre est occupé par un corps conducteur; en chaque point, le coefficient de conductibilité est mesuré par le nombre $\rho_0(x, y, z)$; chaque élément $d\varpi_2$ du volume 2 dégage dans le temps dt une quantité de chaleur $j\, d\varpi_2\, dt$; enfin, le volume 2 est entouré de toutes parts de corps non conducteurs de la chaleur.

La condition (56) permet qu'une distribution permanente de températures s'établisse sur le corps conducteur. Soit $\mathfrak{T}(x, y, z)$ la température au point (x, y, z) lorsque cette distribution est établie. On sait que l'on a, en tout point du volume (2),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\right) = -j \tag{58}$$

et, en tout point des surfaces qui limitent le volume 2,

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial n} = 0. \tag{59}$$

Cette égalité (59) nous montre que nous pourrons prendre, en tout point du système

$$\delta\Psi = \mu \mathfrak{T},$$

μ étant une quantité positive, infiniment petite, indépendante de x, y, z, en même temps que nous ferons

$$\delta F = 0, \quad \delta G = 0, \quad \delta H = 0, \quad \delta L = 0, \quad \delta M = 0, \quad \delta N = 0.$$

Mais alors la condition 2 se réduira à l'égalité

$$\int_2 P j \, d\varpi_2 = 0$$

que la condition (56) permet d'écrire :

$$\int_u (P - p) j \, du + \int_{u'} (P - p) j \, du' = 0.$$

Or cette égalité ne saurait avoir lieu; le produit $(P - p)j$ n'est négatif en aucun point du système et, en chacun des volumes u et u', il existe des régions où il est positif.

La condition (54) exige donc que la quantité P ait une même valeur en tout point du volume 2; si nous désignons cette valeur par $-\lambda K$, K étant une quantité indépendante de x, y, z, nous pourrons dire que cette condition (54) exige que l'on ait, en tout point du volume occupé par le fluide au moment de l'équilibre,

$$(60) \quad \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \right] + \lambda(\Psi + K) = 0.$$

Introduisons cette condition (60) dans l'égalité (54); celle ci deviendra aisément, à l'aide d'une intégration par parties, et en tenant compte de la condition (46),

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_{11} F + A_{12} G + A_{13} H + A_{14} L + A_{15} M + A_{16} N \\ & \quad - \lambda \left[\mathfrak{M} F + M_z M - M_y N + \int_{s_{23}} \rho_0 (\Psi + K) \cos(N_0, x) \, ds_{23} \right] \right\} \delta F + \ldots \\ & \quad - \int \rho_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K) \right] \frac{\partial \delta \Psi}{\partial n} \, d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir que cette égalité (61) exige qu'en tout point de la surface libre σ qui bornait le fluide au moment de l'équilibre, on ait

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K) = 0. \tag{62}$$

Imaginons, en effet, qu'en un certain point de la surface σ, le premier nombre de cette égalité ne soit pas égal à zéro et qu'il y soit, par exemple, positif; par raison de continuité, il devra exister sur la surface σ une certaine aire finie a, comprenant le point considéré, et telle que le premier membre de l'égalité (62) soit positif en tout point de l'aire a.

Au sein du volume 2, nous pouvons d'une infinité de manières construire une fonction continue $f(x, y, z)$ telle qu'en tout point de l'aire a, $\frac{\partial f}{\partial n}$ soit positif, et que cette même quantité soit nulle en tout autre point de la surface qui enclôt le volume 2.

Posons

$$\delta\Psi = \mu f,$$

μ étant une quantité positive, infiniment petite, indépendante de x, y, z. $\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}$ sera nul en tout point de la surface qui entoure le volume 2, sauf aux divers points de l'aire a; aux divers points de cette aire a, $\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}$ sera positif. Nous pourrons évidemment adopter cette détermination de $\delta\Psi$, à la condition de prendre en même temps

$$\delta F = 0, \quad \delta G = 0, \quad \delta H = 0, \quad \delta L = 0, \quad \delta M = 0, \quad \delta N = 0.$$

La condition (61) se réduira alors à

$$\int_a \rho_0 \left[\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K)\right]\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}\,da = 0.$$

Mais elle ne pourra être vérifiée, puisque, en tout point de l'aire a, les trois quantités

$$\rho_0, \quad \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \lambda(\Psi + K), \quad \frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial n}$$

sont positives.

La condition (62) doit donc être vérifiée en tout point de la surface σ.

La condition (61) se réduit alors à

$$\left\{A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N - \lambda\left[\mathfrak{M}F + M_z M - M_y N + \int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\cos(N_0, x)\, ds_{23}\right]\right\}\delta F + \ldots = 0.$$

Pour que cette condition soit vérifiée quels que soient δF, δG, δH, δL, δM, δN, il faut et il suffit que l'on ait six équations dont la première est

$$(63)\quad \begin{aligned} &A_{11}F + A_{12}G + A_{13}H + A_{14}L + A_{15}M + A_{16}N \\ &\quad - \lambda\left[\mathfrak{M}F + M_z M - M_y N + \int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\cos(N_0, x)\, ds_{23}\right] = 0. \end{aligned}$$

Les équations (60), (62) et (63) sont donc requises pour que la condition (54) soit vérifiée ; qu'elles soient en même temps suffisantes à cet effet, c'est ce qui ressort de la marche même de la démonstration.

Ainsi, *pour que les six quantités* F, G, H, L, M, N, *jointes à la fonction* $\Psi(x, y, z)$, *soient une solution du problème posé, il faut et il suffit qu'il existe deux constantes* K *et* λ *telles que les équations* (60), (62) *et* (63) *soient vérifiées, et que la condition* (43) *soit, en outre, vérifiée.*

A ce premier théorème, nous allons en adjoindre un second :

Une solution

$$F,\ G,\ H,\ L,\ M,\ N,\ \Psi(x, y, z)$$

du problème posé fait prendre une valeur déterminée à la somme $(\mathfrak{Q} + \Omega)$; *cette valeur est égale à la constante* λ *qui correspond à cette solution.*

En effet, l'égalité (63), comparée à l'égalité (41) et à l'égalité (8), donne aisément

$$(64)\quad \begin{aligned} \mathfrak{Q} = \lambda\mathfrak{S} + \lambda\int_{s_{23}} \rho_0(\Psi + K)\Big[&(F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0, x) \\ &+ (G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_0, y) \\ &+ (H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0, z)\Big]\, ds_{23}. \end{aligned}$$

De même, en vertu des égalités (60) et (62), l'égalité (42) devient

$$\Omega = -\lambda \int_\sigma \rho_0 (\Psi + \mathrm{K}) \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma$$
$$-\lambda \int_2 (\Psi + \mathrm{K}) \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \right] d\varpi_2.$$

A l'aide d'une intégration par parties, et en tenant compte de l'égalité (40) et de la condition (36), cette dernière égalité devient

$$\Omega = \lambda\tau + \lambda \int_{s_{12}} \rho_0 (\Psi + \mathrm{K}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{N}_0} ds_{12}. \tag{65}$$

Si l'on tient compte de la condition (38), les égalités (64) et (65) donnent

$$\mathfrak{Q} + \Omega = \lambda(\mathfrak{S} + \tau) \tag{66}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (43),

$$\mathfrak{Q} + \Omega = \lambda. \tag{67}$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Imaginons maintenant que six quantités F, G, H, L, M, N et une certaine fonction $\Psi(x, y, z)$, assujetties aux conditions (36) et (38), *mais non pas à la condition* (43), puissent être associées à deux constantes K et λ de telle sorte que les équations (60), (62) et (63) soient vérifiées. Voyons quel est le problème dont nous obtenons ainsi la solution.

Les équations (60), (62) et (63) sont toujours les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (54) soit vérifiée par toute variation

$$\delta \mathrm{F}, \quad \delta \mathrm{G}, \quad \delta \mathrm{H}, \quad \delta \mathrm{L}, \quad \delta \mathrm{M}, \quad \delta \mathrm{N}, \quad \delta \Psi$$

qui satisfait aux conditions (45) et (46); et cette égalité (54) elle-même n'est qu'une forme plus explicite de l'égalité

$$\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - \lambda \delta(\mathfrak{S} + \tau) = 0. \tag{49}$$

D'autre part, les équations (60), (62), (63), jointes aux conditions (36) et (38), entraînent, comme nous venons de le voir, l'égalité

$$\mathfrak{Q} + \Omega - \lambda(\mathfrak{J} + \tau) = 0, \tag{66}$$

sans qu'il soit nécessaire de tenir compte de l'égalité (43).

Des égalités (49) et (66) résulte celle-ci :

$$(\mathfrak{J} + \tau)\,\delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - (\mathfrak{Q} + \Omega)\,\delta(\mathfrak{J} + \tau) = 0 \tag{67}$$

qui peut encore s'écrire, puisque $(\mathfrak{J} + \tau)$ est une quantité essentiellement positive,

$$\delta\,\frac{\mathfrak{Q} - \Omega}{\mathfrak{J} + \tau} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *étant assujettis seulement aux conditions* (36) *et* (38), *on cherche à déterminer ces quantités de telle manière qu'en éprouvant des variations infiniment petites, elles imposent au rapport* $\frac{\Omega + \mathfrak{Q}}{\mathfrak{J} + \tau}$ *une variation infiniment petite d'ordre supérieur au premier. Il faut et il suffit pour cela que l'on puisse adjoindre aux quantités* F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *deux constantes* λ *et* K *telles que les équations* (60), (62) *et* (63) *soient vérifiées;* λ *est précisément la valeur que prend alors le rapport* $\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\mathfrak{J} + \tau}$.

Comparons maintenant :

L'équation (60) à l'équation (35);
L'équation (62) à l'équation (37);
Les équations (63) aux équations (39).

Nous constatons que les équations de la première colonne se tirent des équations de la seconde colonne par substitution de $(\Psi + K)$ à Ψ et de λ à $\frac{4\pi^2}{T^2}$.

D'autre part, le mouvement pendulaire du fluide et du flotteur que l'on obtient en faisant

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} f(t) &= \varepsilon F \sin 2\pi \frac{t}{T}, & l(t) &= \varepsilon L \sin 2\pi \frac{t}{T},\\ g(t) &= \varepsilon G \sin 2\pi \frac{t}{T}, & m(t) &= \varepsilon M \sin 2\pi \frac{t}{T},\\ h(t) &= \varepsilon H \sin 2\pi \frac{t}{T}, & n(t) &= \varepsilon N \sin 2\pi \frac{t}{T},\\ & \psi(x, y, z, t) = \varepsilon \Psi(x, y, z) \sin 2\pi \frac{t}{T}, \end{aligned}\right.$$

ne change pas si l'on y remplace $\Psi(x, y, z)$ par la somme

$$[\Psi(x, y, z) + K],$$

où K est une quantité indépendante de x, y, z, puisque les composantes de l'élongation en un point quelconque du fluide sont

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} \sin 2\pi \frac{t}{T},\\ b(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y} \sin 2\pi \frac{t}{T},\\ c(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

1° *Toute solution de l'un ou de l'autre des deux problèmes de variations que nous avons considérés détermine un mouvement pendulaire possible du flotteur et du fluide; ce mouvement est représenté par les formules* (68) *et* (69), *et la période* T *en est donnée par la formule*

$$(70)\qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

2° *Tout mouvement pendulaire du solide et du fluide, représenté par les formules* (68) *et* (69), *fournit une solution du second problème de calcul de variations; en cette solution la valeur de la constante* λ *est donnée par la formule*

$$(70\ bis)\qquad \lambda = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

3° *Un mouvement pendulaire du flotteur et du fluide, représenté par les formules* (68) *et* (69), *fait prendre à la somme* ($\mathfrak{S} + \mathfrak{T}$) *une certaine valeur positive* B^2. *Si l'on pose*

$$
(71)\qquad \left\{
\begin{array}{lll}
F_1 = \dfrac{F}{B}, & G_1 = \dfrac{G}{B}, & H_1 = \dfrac{H}{B}, \\[2ex]
L_1 = \dfrac{L}{B}, & M_1 = \dfrac{M}{B}, & N_1 = \dfrac{N}{B}, \\[2ex]
\multicolumn{3}{c}{\Psi_1(x, y, z) = \dfrac{\Psi(x, y, z)}{B},}
\end{array}
\right.
$$

les quantités

$$F_1,\quad G_1,\quad H_1,\quad L_1,\quad M_1,\quad N_1,\quad \Psi_1(x, y, z),$$

jointes à la valeur de λ *que donne l'égalité* (70 *bis*), *fourniront une solution du premier problème de calcul des variations.*

VI. — Condition, fournie par la théorie des petits mouvements, qui suffit à assurer la stabilité du système.

Les géomètres qui ont fait usage de la considération des petits mouvements pour étudier les conditions de stabilité d'un flotteur ont admis l'exactitude de la proposition suivante :

Pour qu'un système soit en équilibre stable, il faut et il suffit que les équations des petits mouvements pendulaires de ce système ne puissent être vérifiées pour aucune valeur imaginaire de la période.

Appliqué au cas qui nous occupe, ce PRINCIPE, QUE NOUS NE DISCUTERONS PAS ICI, devient, en vertu des propositions démontrées au paragraphe précédent, le théorème suivant :

Pour la stabilité d'un système composé d'un fluide et d'un flotteur, il faut et il suffit que les deux problèmes de calcul des variations, équivalents entre eux, dont nous avons donné les énoncés, fournissent exclusivement, pour la constante λ, *des valeurs positives.*

Nous allons comparer ce critérium de stabilité à celui que fournit la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet.

Considérons un déplacement virtuel quelconque du flotteur, déplacement caractérisé par des valeurs déterminées des six quantités F, G, H, L, M, N et par un facteur infiniment petit ε indépendant de x, y, z. Considérons, en même temps, un déplacement de la masse fluide *associé* à ce déplacement du solide; soient, en ce déplacement,

$$\delta x = \varepsilon\xi, \qquad \delta y = \varepsilon\eta, \qquad \delta z = \varepsilon\zeta, \tag{72}$$

où ξ, η, ζ sont trois fonctions finies et continues de x, y, z, les composantes du déplacement du point qui se trouvait initialement en (x, y, z); soit

$$\delta\rho = -\varepsilon\left[\frac{\partial(\rho_0\xi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_0\eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_0\zeta)}{\partial z}\right] \tag{73}$$

la variation de la densité au même point.

Pour qu'un tel déplacement soit un déplacement virtuel *compatible* avec le déplacement du solide, il faut :

1° Que le contact demeure assuré entre le fluide et la paroi invariable qui le contient, ce qui exige, en chaque point de cette paroi, l'égalité

$$\xi\cos(n, x) + \eta\cos(n, y) + \zeta\cos(n, z) = 0; \tag{74}$$

2° Que le contact demeure assuré entre le fluide et le flotteur, ce qui exige, en tout point de la surface s_{23} le long de laquelle le flotteur en équilibre est mouillé par le fluide, l'égalité

$$\begin{aligned}(F + z_0 M - y_0 N - \xi)\cos(N_0, x) + (G + x_0 N - z_0 L - \eta)\cos(N_0, y)\\ + (H + y_0 L - x_0 M - \zeta)\cos(N, z) = 0.\end{aligned} \tag{75}$$

Ce déplacement virtuel, compatible avec le mouvement du solide, sera *associé* à ce déplacement si l'on a :

1° En tout point (x, y, z) du volume 2 que le fluide occupe au moment de l'équilibre, l'égalité

$$\delta\rho = \varepsilon\frac{\Sigma}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}; \tag{76}$$

2° En tout point de la surface libre $\hat{\sigma}$ qui borne le fluide en équilibre, l'égalité

$$(77)\qquad \xi\cos(n,x)+\eta\cos(n,y)+\zeta\cos(n,z)=\frac{\Sigma}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}.$$

En ces deux égalités, Σ est une même quantité finie, indépendante de x, y, z.

Cette quantité Σ *est une forme linéaire et homogène des six quantités* F, G, H, L, M, N, *forme dont les coefficients sont déterminés lorsque l'état d'équilibre du système est connu.*

Nous avons, en effet, l'identité

$$(78)\qquad \int_2\left[\frac{\partial(\rho_0\xi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_0\eta)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho_0\zeta)}{\partial z}\right]d\varpi_2 + \int \rho_0[\xi\cos(n,x)+\eta\cos(n,y)+\zeta\cos(n,z)]\,ds=0.$$

où la première intégrale s'étend au volume occupé par le fluide au moment de l'équilibre, et la seconde à toutes les surfaces qui enserrent ce volume. En vertu des égalités (73), (74), (75), (76) et (77), cette identité (78) devient

$$(79)\qquad \left(\int_2\frac{1}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}d\varpi_2-\int_\sigma\frac{\rho_0}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}d\sigma\right)\Sigma$$
$$\begin{aligned}= {} & F\int_{s_{23}}\rho_0\cos(N_0,x)\,ds_{23}+G\int_{s_{23}}\rho_0\cos(N_0,y)\,ds_{23}\\ & +H\int_{s_{23}}\rho_0\cos(N_0,z)\,ds_{23}\\ & +L\int_{s_{23}}\rho_0[y_0\cos(N_0,z)-z_0\cos(N_0,y)]\,ds_{23}\\ & +M\int_{s_{23}}\rho_0[z_0\cos(N_0,x)-x_0\cos(N_0,z)]\,ds_{23}\\ & +N\int_{s_{23}}\rho_0[x_0\cos(N_0,y)-y_0\cos(N_0,x)]\,ds_{23}.\end{aligned}$$

Admettons désormais, comme l'exige la stabilité du fluide (¹), *que l'on ait :*

1° *L'inégalité*

$$\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} > 0 \tag{80}$$

pour toutes les valeurs que prend ρ_0 *au sein du fluide en équilibre;*

2° *L'inégalité*

$$\frac{\partial V}{\partial n} < 0 \tag{81}$$

en tout point de la surface libre du fluide en équilibre.

Le coefficient de Σ en l'égalité (79) sera, alors, une quantité positive, et connue lorsque l'état d'équilibre du système est déterminé; la proposition énoncée sera ainsi démontrée.

Parmi les déplacements virtuels du fluide, ASSOCIÉS *à un déplacement donné du solide, il existe un et un seul déplacement dépendant d'un potentiel des élongations.*

Pour établir ce théorème, nous nous servirons d'un lemme, qui est une des propositions essentielles de la théorie de la chaleur, et dont nous avons fait usage au paragraphe précédent; ce lemme est le suivant :

Si $a(x, y, z)$ *est une fonction continue de* x, y, z, *donnée en tout point du volume* 2, *et* b *une quantité connue, variable d'une manière continue le long de la surface* s *qui limite ce volume; si, en outre, ces quantités sont liées entre elles par la condition*

$$\int_2 a\, d\varpi_2 + \int_s b\, ds = 0, \tag{82}$$

il existe une infinité de fonctions Ψ *qui satisfont à la condition*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = a \tag{83}$$

(¹) P. DUHEM, *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible*, inégalités (4) et (5) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. III, 1897, p. 392-393).

en tout point du volume 2, et à la condition

$$(84) \qquad \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} = b$$

en tout point de la surface limite s.

Toutes ces fonctions se tirent de l'une d'elles par addition d'une constante arbitraire.

Cela posé, supposons qu'un déplacement du fluide, *associé* au déplacement du solide, dépende d'une fonction potentielle des élongations $\varepsilon \Psi$; nous aurons

$$(85) \qquad \xi = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Les égalités (73) et (76) nous montrent que Ψ vérifiera, en tout point du volume 2, une équation de la forme (83), à condition de prendre

$$(86) \qquad a = \frac{\Sigma}{\dfrac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}.$$

Les égalités (85), (74), (75) et (77) nous montrent qu'en tout point de la surface qui limite le volume 2, Ψ vérifiera une équation de la forme (84), à condition de prendre

$$(87) \qquad b = 0$$

en tout point de la paroi immobile;

$$(88) \qquad b = -\rho_0(F + z_0 M - y_0 N)\cos(N_0, x) - \rho_0(G + x_0 N - z_0 L)\cos(N_3, y) \\ - \rho_0(H + y_0 L - x_0 M)\cos(N_0, z)$$

en tout point de la surface s_{23}; enfin

$$(89) \qquad b = -\frac{\rho_0 \Sigma}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}$$

en tout point de la surface σ.

L'égalité (79) nous montre, d'ailleurs, que ces valeurs de a et de b vérifient l'égalité (82); il existe donc, pour chaque ensemble de valeurs de

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N,$$

une infinité de fonctions Ψ qui satisfont aux conditions imposées; toutes ces fonctions se déduisent de l'une d'entre elles par addition d'une constante arbitraire, en sorte qu'elles correspondent toutes, en vertu des égalités (85), à un même système de valeurs de ξ, η, ζ, et qu'elles définissent toutes un même déplacement virtuel du fluide ([1]).

Ainsi, parmi les déplacements virtuels du système que représente le symbole (εW), il existe des déplacements où le mouvement du fluide est *associé* au mouvement du flotteur; nous désignerons ces derniers déplacements par le symbole (εA). A tout déplacement du flotteur correspond un et un seul déplacement (εA).

Considérons maintenant :

1° Un déplacement (εW) quelconque, défini par six valeurs arbitraires de F, G, H, L, M, N et par une fonction $\Psi(x, y, z)$;

2° Un déplacement du fluide, défini par trois fonctions ξ, η, ζ, et *associé* au déplacement précédent du solide.

Les identités

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n} + \frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}}\right) - \frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}},$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\\ &\quad = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - \frac{\Sigma}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\right] + \frac{\Sigma}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}},\end{aligned}$$

jointes à l'égalité (42), donnent l'expression suivante de Ω:

$$\Omega = \mathfrak{S} + \mathfrak{R} + \mathfrak{s}, \tag{90}$$

avec

$$\mathfrak{S} = \Sigma^2\left(\int_2 \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\,d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}}\,d\sigma\right), \tag{91}$$

([1]) La méthode suivie en notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible* admettait la possibilité de faire correspondre à tout déplacement du flotteur un déplacement *associé* du fluide; on voit que la démonstration de cette possibilité équivaut à l'établissement du principe fondamental de la théorie de la conductibilité thermique.

et

$$(92)\quad \mathfrak{R} = \int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\frac{\Sigma}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\right]^2 d\varpi_2 - \int_\sigma \rho_0\frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}}\right)^2 d\sigma,$$

$$(93)\quad \mathcal{S} = 2\Sigma\left\{\int_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)-\frac{\Sigma}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\right]d\varpi_2 + \int_\sigma \rho_0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}}\right)d\sigma\right\}.$$

Les égalités (73) et (74) nous donnent

$$\frac{\partial(\rho_0\xi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_0\eta)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho_0\zeta)}{\partial z} = -\frac{\Sigma}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}.$$

En vertu de cette égalité et de l'égalité (77), l'expression (93) de $\mathcal{S}$ peut s'écrire

$$\mathcal{S} = 2\Sigma\left\{\int_2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\rho_0\xi\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\rho_0\eta\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\rho_0\zeta\right)\right]d\varpi_2 + \int_\sigma \rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\xi\right)\cos(n,x)+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\eta\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\zeta\right)\cos(n,z)\right]d\sigma\right\}.$$

Observons maintenant :

1° Qu'en tout point de la paroi immobile, on a, en vertu des égalités (36) et (74),

$$\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x} + \xi\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y} + \eta\right)\cos(n, y) + \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial z} + \zeta\right)\cos(n, z) = 0;$$

2° Qu'en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, les égalités (38) et (75) donnent une égalité analogue.

Nous trouverons sans peine que l'on a toujours

$$\mathfrak{S} = 0,$$

ce qui réduit l'égalité (90) à

$$(94) \qquad \Omega = \varpi + \mathfrak{R}.$$

Nous savons que Σ est une forme linéaire et homogène des six quantités F, G, H, L, M, N. Dès lors, moyennant les inégalités (80) et (81) et l'égalité (91), ϖ *est une forme quadratique définie positive des six quantités* F, G, H, L, M, N *qui définissent un déplacement arbitraire du corps solide.*

En vertu des inégalités (80) et (81), la quantité $\mathfrak{R}$, définie par l'égalité (92), ne peut jamais être négative; pour qu'elle soit nulle, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point du volume 2, l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right) = \frac{\Sigma}{\frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}};$$

2° En tout point de la surface σ, l'égalité

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n} = -\frac{\Sigma}{\frac{\partial V}{\partial n}}.$$

Ce sont précisément les conditions par lesquelles on exprime que le déplacement du fluide, où Ψ' joue le rôle de fonction potentielle des élongations, est *associé* au déplacement du solide. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Nulle en tout déplacement (ε A), *la quantité* $\mathfrak{R}$ *est positive en tout déplacement* (ε W) *où le déplacement du fluide n'est pas* ASSOCIÉ *au déplacement du flotteur.*

L'étude de la stabilité de l'équilibre, suivie par la méthode de Lejeune-Dirichlet, nous a conduits à la proposition suivante ([1]) :

Pour que le potentiel d'un système formé par un fluide et un flotteur solide soit minimum dans l'état d'équilibre, il est nécessaire et suffisant d'adjoindre aux inégalités (80) *et* (81) *la condition suivante :*

La somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$, *qui est une forme quadratique des six quantités* F, G, H, L, M, N, *est définie positive.*

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Cette condition est, en même temps, nécessaire et suffisante pour que le rapport $\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\tau + \mathfrak{S}}$ *ne puisse prendre que des valeurs positives.*

L'égalité (94) nous permet, en effet, d'écrire ce rapport sous la forme

$$\frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{T} + \mathfrak{A}}{\tau + \mathfrak{S}}.$$

Comme la quantité $\mathfrak{A}$ ne peut être négative en aucun déplacement (εW), on voit que, si la somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ est une forme définie positive des quantités F, G, H, L, M, N, ce rapport ne prend assurément que des valeurs positives.

D'autre part, si un système de valeurs non toutes nulles des six quantités F, G, H, L, M, N pouvait faire prendre à la somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ une valeur nulle ou négative, comme le déplacement (εA) qui correspond à ce système de valeurs annule $\mathfrak{A}$, il ferait prendre au rapport considéré une valeur nulle ou négative.

Selon l'égalité (66), toutes les valeurs que peut prendre la quantité λ se trouvent parmi les valeurs que peut prendre le rapport $\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\tau + \mathfrak{S}}$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si la somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$, *qui est une forme quadratique des quan-*

([1]) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 396).

tités F, G, H, L, M, N, *est définie positive, les petits mouvements pendulaires du système ont tous des périodes réelles et finies.*

La méthode de Lejeune-Dirichlet et la méthode, moins sûre, *des petits mouvements conduisent donc, l'une et l'autre, à cette même conclusion :*

Pour qu'un système formé d'un liquide compressible et d'un flotteur soit en équilibre stable, il suffit qu'en l'état d'équilibre, la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{S})$ ***soit définie positive.***

Dans le cas où la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{S})$ est susceptible de prendre des valeurs nulles ou négatives, la méthode de Dirichlet ne nous permet pas de nier la stabilité de l'équilibre du système; la méthode des petits mouvements, *même si l'on en admet la légitimité*, n'autorise pas davantage un pareil jugement tant qu'on la présente sous la forme qui lui a été donnée ici; mais l'adjonction d'un nouveau postulat va nous fournir des conclusions plus complètes.

VII. — Comment la théorie des petits mouvements démontre que la condition précédente est nécessaire pour la stabilité de l'équilibre du système.

Considérons le rapport

$$\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\tau + \mathfrak{T}}.$$

Il est la somme des deux rapports $\frac{\Omega}{\tau + \mathfrak{T}}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{\tau + \mathfrak{T}}$.

Si nous nous reportons à l'expression (8) de $\mathfrak{T}$, à l'expression (40) de τ, nous voyons que la somme $(\tau + \mathfrak{T})$ est essentiellement positive ou nulle; l'expression (42) de Ω, jointe aux inégalités (80) et (81), nous montre que la quantité Ω ne peut, non plus, jamais être négative; le rapport $\frac{\Omega}{\tau + \mathfrak{T}}$ ne peut donc jamais être négatif, en sorte qu'il admet une limite inférieure positive ou nulle.

Le rapport $\frac{\mathfrak{Q}}{\tau + \mathfrak{T}}$ ne peut, en valeur absolue, surpasser le rapport $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{T}}$; mais $\mathfrak{Q}$ est une forme quadratique des six variables F, G, H, L, M, N, et $\mathfrak{T}$ est une forme quadratique définie positive des mêmes variables; la valeur absolue du rapport $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{T}}$ admet donc une limite supérieure; il en est de même de la valeur absolue de $\frac{\mathfrak{Q}}{\tau+\mathfrak{T}}$, en sorte que ce dernier rapport admet assurément une limite supérieure et une limite inférieure.

Le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$, somme de deux quantités dont chacune admet une limite inférieure, admet lui-même une limite inférieure.

Ce point acquis, voici le POSTULAT que nous formulerons et admettrons :

Le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$, qui est limité inférieurement, atteint sa limite inférieure pour des déterminations convenablement choisies des six quantités F, G, H, L, M, N *et de la fonction* $\Psi(x, y, z)$.

La limite inférieure de $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ est, alors, pour ce rapport, un minimum. Selon la théorie des minima, lorsque l'on donne à F, G, H, L, M, N, Ψ des déterminations qui correspondent à ce minimum, l'égalité

$$(\mathfrak{T}+\tau)(\delta\mathfrak{Q}+\delta\Omega)-(\mathfrak{Q}+\Omega)(\delta\mathfrak{T}+\delta\tau)=0 \tag{67}$$

est vérifiée quels que soient δF, δG, δH, δL, δM, δN, $\delta\Psi$. Cette valeur minima de $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ est donc une des valeurs que peut prendre la quantité λ. D'ailleurs, selon l'égalité

$$\lambda=\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}, \tag{66}$$

elle est la plus petite de ces valeurs. D'où le théorème suivant :

La plus petite des quantités λ est égale à la limite inférieure des valeurs du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$.

Or, à la fin du paragraphe précédent, nous avons établi ces propositions :

1° Si la forme $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{E})$, quadratique en F, G, H, L, M, N, est une forme définie positive de ces six variables, le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ est toujours positif;

2° Si la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$, incapable de devenir négative, peut s'annuler sans que les six variables F, G, H, L, M, N soient toutes égales à zéro, le rapport $\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\mathfrak{J} + \tau}$ ne peut être négatif, mais il peut s'annuler;

3° Si la forme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ peut prendre des valeurs négatives, il en est de même du rapport $\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\mathfrak{J} + \tau}$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si la somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ *n'est pas une forme définie positive des six variables* F, G, H, L, M, N, *la plus petite valeur de* λ *est nulle ou négative; les équations des petits mouvements pendulaires du système peuvent être vérifiées par une valeur infinie ou imaginaire de la période, et l'équilibre du système ne peut pas être stable.*

Cette dernière partie de la conclusion suppose, bien entendu, que l'on admette la légitimité du critère de stabilité déduit de la théorie des petits mouvements.

VIII. — Détermination approchée par défaut de la plus longue période que puisse affecter un mouvement pendulaire du système.

Imaginons désormais que la forme quadratique $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ soit définie positive; le système est en équilibre stable et tous les petits mouvements pendulaires ont des périodes finies et réelles; chacune de ces périodes est d'ailleurs une simple valeur absolue, non affectée de signe.

Si T_1 est la plus longue de ces périodes, le rapport $\frac{4\pi^2}{T_1^2}$, qui est la plus petite valeur λ_1 que puisse prendre la quantité λ, est égal à la plus petite valeur qu'un mouvement (εW) puisse faire prendre au rapport $\frac{\mathfrak{Q} + \Omega}{\mathfrak{J} + \tau}$. Le mouvement (εW), qui fait prendre à ce rapport la valeur minimum λ_1, est formé par l'ensemble des quantités F_1, G_1, H_1, L_1, M_1, N_1, $\Psi_1(x, y, z)$ qui, multipliées par $\varepsilon \sin 2\pi \frac{t}{T_1}$, représentent les éléments d'un petit mouvement pendulaire de période T_1.

Ce mouvement (εW) qui rend minimum le rapport $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ est-il un mouvement (εA)?

S'il en est ainsi, le mouvement pendulaire de période T_1 du système entier se compose d'un certain mouvement pendulaire infiniment petit du solide et d'un mouvement pendulaire infiniment petit, *associé* au précédent, de la masse fluide. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après ce qui a été démontré au paragraphe 3, que la surface immergée du solide soit de révolution autour d'un axe et que son mouvement se réduise à une oscillation autour de cet axe ; dans ce cas, d'ailleurs, le fluide est immobile.

Dans le cas donc où la surface immergée du flotteur est de révolution autour d'un axe et où le mouvement pendulaire de plus longue période T_1 *se réduit à une oscillation autour de cet axe, le rapport* $\frac{4\pi^2}{T_1^2}$ *est égal à la plus petite des valeurs que les mouvements* (εA) *fassent prendre au rapport* $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$.

Hors ce cas, le mouvement (εW) qui détermine le minimum λ_1 du rapport $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ n'est assurément pas un mouvement (εA); la limite inférieure des valeurs que les divers mouvements (εA) peuvent faire prendre à ce rapport est assurément supérieure à λ_1. Ainsi, *lorsque les conditions précédentes ne sont pas vérifiées, la limite inférieure des valeurs qu'un mouvement* (εA) *puisse faire prendre au rapport* $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ *est assurément supérieure à la quantité* λ_1.

Si l'on désigne par $\left(\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}\right)_A$ *la limite inférieure des valeurs qu'un mouvement* (εA) *puisse faire prendre au rapport* $\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}$ *et par* T_0 *la valeur absolue qui détermine l'égalité*

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2}=\left(\frac{\mathfrak{D}+\Omega}{\mathfrak{T}+\tau}\right)_A, \tag{95}$$

la quantité T_0 *sera au plus égale et, en général, elle sera inférieure à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires dont le système est susceptible.*

L'égalité $T_1 = T_0$ est réservée au cas où la surface mouillée du flotteur est de révolution autour d'un axe et où le mouvement pendulaire de période T_1 se réduit à une oscillation autour de cet axe.

Nous allons voir maintenant que, parmi les mouvements (ε A), il en est toujours au moins un qui fasse prendre à la valeur du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{J}+\tau}$ sa limite inférieure $\left(\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{J}+\tau}\right)_A$, et nous allons montrer comment il serait possible de déterminer effectivement la valeur de cette limite inférieure.

Dans ce but, nous allons montrer ce que devient le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\Omega}{\mathfrak{J}+\tau}$ lorsque, parmi tous les déplacements (ε W), on considère seulement les déplacements (ε A).

Nous savons déjà que le numérateur $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ se réduit à la somme $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{E})$ qui est une forme quadratique définie positive de F, G, H, L, M, N. Le dénominateur seul doit donc nous occuper.

La quantité Σ est une forme linéaire et homogène des six variables F, G, H, L, M, N :

$$\Sigma = \Sigma_1 F + \Sigma_2 G + \Sigma_3 H + \Sigma_4 L + \Sigma_5 M + \Sigma_6 N. \tag{96}$$

Les coefficients de cette forme sont définis par l'égalité (79), en sorte que l'on a

$$\tag{97} \left\{ \begin{aligned} &\left(\int_2 \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}} d\sigma \right) \Sigma_1 \\ &\quad = \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, x)\, ds_{23}, \qquad \ldots, \\ &\left(\int_2 \frac{1}{\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\frac{\partial V}{\partial n}} d\sigma \right) \Sigma_4 \\ &\quad = \int_{s_{23}} \rho_0 [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23}. \qquad \ldots. \end{aligned} \right.$$

Considérons la fonction Ψ déterminée, à une constante près, par les conditions (83) à (89); il est facile de voir qu'elle se peut mettre sous la forme

$$\Psi = \Phi_1 F + \Phi_2 G + \Phi_3 H + \Phi_4 L + \Phi_5 M + \Phi_6 N + \chi, \tag{98}$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5, Φ_6 étant six fonctions de x, y, z, indépendantes de F, G, H, L, M, N, et χ une simple constante arbitraire.

Déterminons, en effet, la fonction $\Phi_1(x, y, z)$ par les conditions suivantes :

En tout point du volume Σ rempli par le fluide en équilibre, elle vérifie la condition

$$\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)\right]=\Sigma_1; \tag{99}$$

En tout point de la paroi immobile, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=0; \tag{100}$$

En tout point de la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=-\Sigma_1; \tag{101}$$

En tout point de la surface s_{23}, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial N_0}=-\cos(N_0, x). \tag{102}$$

En vertu de la première des égalités (97), il existe une infinité de fonctions $\Phi_1(x, y, z)$ qui vérifient ces conditions (99) à (102), et ces diverses fonctions se tirent toutes de l'une d'entre elles par addition d'une constante arbitraire.

Déterminons d'une manière analogue les fonctions $\Phi_2(x, y, z)$, $\Phi_3(x, y, z)$.

Assujettissons la fonction $\Phi_4(x, y, z)$ à vérifier les conditions suivantes :

En tout point du volume Σ rempli par le fluide en équilibre, on a

$$\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right)\right]=\Sigma_4; \tag{103}$$

En tout point de la paroi immobile, on a

$$\frac{\partial\Phi_4}{\partial n}=0; \tag{104}$$

En tout point de la surface libre σ, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Phi_4}{\partial n} = -\Sigma_4; \tag{105}$$

Enfin, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur en équilibre, on a

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial N_0} = -[y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]. \tag{106}$$

En vertu de la quatrième égalité (97), la fonction $\Phi_4(x, y, z)$ est déterminée, à une constante additive près, par les conditions (103) à (106).

Assujettissons les fonctions $\Phi_5(x, y, z)$, $\Phi_6(x, y, z)$ à des conditions analogues.

Il est désormais évident que l'expression (98), formée de la sorte, est l'expression la plus générale d'une fonction $\Psi(x, y, z)$ capable de vérifier les conditions (83) à (89).

Cette expression est donc la somme :

1° D'une fonction linéaire et homogène de F, G, H, L, M, N, forme dont les coefficients sont des fonctions de x, y, z, bien déterminées lorsque l'état d'équilibre du système est connu;

2° D'une fonction linéaire et non homogène de F, G, H, L, M, N, fonction dont les coefficients sont des constantes arbitraires.

Chacune des trois quantités $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ est alors une forme linéaire et homogène bien déterminée des six quantités F, G, H, L, M, N.

Nous obtenons ainsi la conclusion suivante :

Si l'on se borne à considérer les déplacements (ε A) *où le déplacement du fluide est* ASSOCIÉ *au déplacement du solide, la quantité*

$$\tau = \int_2 \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi_2 \tag{40}$$

se réduit à une forme quadratique Θ *des quantités* F, G, H, L, M, N; *les coefficients de cette forme* Θ *sont déterminés lorsque l'état d'équilibre du système est connu; cette forme* Θ *est définie positive, hors le cas où la surface immergée du flotteur est de révolution autour d'un certain axe et où les quantités* F, G, H, L, M, N *cor-*

respondent à une rotation autour de ces axes; dans ce cas, la forme Θ *est nulle.*

Cette proposition, jointe à l'égalité (95), nous donne alors cette autre conclusion :

La quantité $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$ *est la valeur minimum du rapport*

$$\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{J}+\Theta}, \tag{107}$$

qui est le rapport de deux formes quadratiques définies positives des six quantités F, G, H, L, M, N.

On sait comment s'obtient ce minimum. On peut trouver six fonctions linéaires et homogènes X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 des six quantités F, G, H, L, M, N telles que

$$\mathfrak{J}+\Theta = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2, \tag{108}$$

$$\mathfrak{Q}+\mathfrak{T} = S_1X_1^2 + S_2X_2^2 + S_3X_3^2 + S_4X_4^2 + S_5X_5^2 + S_6X_6^2. \tag{109}$$

Les six coefficients S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, qui sont tous réels et positifs, sont les six racines d'une certaine équation du sixième degré

$$\Delta(S) = 0, \tag{110}$$

dont les coefficients se forment à l'aide des coefficients des deux formes $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})$ et $(\mathfrak{J}+\Theta)$, et dont les propriétés sont bien connues.

Si S_1 est la plus petite racine de l'équation (100), elle représente la valeur minimum du rapport (107) et l'on a

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = S_1 \tag{111}$$

ou bien encore

$$T_1 \geqq 2\pi\sqrt{\frac{1}{S_1}}. \tag{112}$$

Le signe d'égalité est réservé au cas où la surface mouillée du flotteur est de révolution autour d'un certain axe et où la plus lente oscillation du flotteur se réduit à une oscillation autour de cet axe.

L'étude du rapport (107) se relie à un problème fictif de Mécanique dont nous allons former l'énoncé.

Hors le cas où la surface du flotteur, mouillée en l'état d'équilibre, est de révolution autour d'un axe, et où le petit mouvement du flotteur se réduit à une oscillation autour de cet axe, le petit mouvement réel du fluide ne peut pas être *associé* au petit mouvement du solide; nous l'avons démontré au paragraphe 3. Mais nous pouvons, par la pensée, imposer au fluide un mouvement fictif tel qu'à chaque instant t, le déplacement éprouvé par le fluide soit *associé* au déplacement $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$ du solide au même instant; nous dirons alors que le fluide est animé d'un *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur.

Si nous voulons calculer la force vive qu'aurait le fluide, à l'instant t, en un tel *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur, il nous suffit évidemment de prendre la forme quadratique $\frac{1}{2}\Theta$ et d'y remplacer respectivement les quantités

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N$$

par les quantités

$$\frac{df(t)}{dt}, \quad \frac{dg(t)}{dt}, \quad \frac{dh(t)}{dt}, \quad \frac{dl(t)}{dt}, \quad \frac{dm(t)}{dt}, \quad \frac{dn(t)}{dt}.$$

Nous nommerons $\mathfrak{T}'(t)$ cette force vive qu'aurait le fluide à l'instant t s'il était animé d'un *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur.

En la quantité ϖ, substituons aux quantités

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N$$

les quantités

$$f(t), \quad g(t), \quad h(t), \quad l(t), \quad m(t), \quad n(t).$$

Selon les égalités (92) et (94), nous obtenons visiblement la valeur que Ω prendrait à l'instant t, si le fluide était animé du *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur. Nous désignerons par $\Omega'(t)$ cette quantité, qui est une forme quadratique de $f(t)$, ..., $n(t)$.

$\frac{1}{2}\Omega'(t)$ peut être regardé comme le potentiel de certaines actions. Cherchons à définir ces actions.

Dans ce but, désignons par $\Sigma'(t)$ ce que devient la quantité Σ lorsqu'on y substitue les quantités

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t)$$

aux quantités

$$\mathrm{F},\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M},\quad \mathrm{N}.$$

Si les quantités

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t)$$

éprouvent respectivement des accroissements infiniment petits arbitraires

$$\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n,$$

$\Sigma'(t)$ éprouve un accroissement $\delta\Sigma'$ dont la valeur, selon l'égalité (79), est donnée par l'égalité

$$\left(\int_2 \frac{1}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}}\,d\varpi_2 - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}\,d\sigma\right)\delta\Sigma' = \delta f\int_{s_{23}} \rho_0 \cos(\mathrm{N}_0, x)\,ds_{23} + \ldots,$$

tandis que l'égalité (91) donne

$$\delta\Omega' = 2\left(\int_2 \frac{1}{\dfrac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}} - \int_\sigma \frac{\rho_0}{\dfrac{\partial V}{\partial n}}\,d\sigma\right)\Sigma'\,\delta\Sigma'.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\delta\Omega' = \delta f\int_{s_{23}} 2\rho_0\Sigma'(t)\cos(\mathrm{N}_0, x)\,ds_{23} + \ldots.$$

En chaque point de la surface s_{23} du flotteur qui mouille le fluide en équilibre, imaginons une pression normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du solide, et qui ait pour valeur

$$\Pi(t) = \rho_0\Sigma'(t).$$

A cette pression, qui est une fonction linéaire et homogène de

$$f(t),\quad g(t),\quad h(t),\quad l(t),\quad m(t),\quad n(t),$$

donnons le nom de *pression fictive associée* au mouvement du flotteur.

En tout déplacement virtuel du flotteur, nous aurons

$$\frac{1}{2}\delta\Omega' = \delta f \int_{s_{23}} \Pi(t)\cos(N_0, x)\, ds_{23} + \ldots,$$

$\frac{1}{2}\delta\Omega'$ sera égal et de signe contraire au travail de la pression $\Pi(t)$; $\frac{1}{2}\Omega'(t)$ *peut* donc *être regardé comme le potentiel de la pression fictive* $\Pi(t)$ *associée au mouvement du flotteur.*

Ces remarques faites, imaginons que l'on veuille traiter le problème suivant :

On se propose d'étudier le mouvement d'un solide identique à celui qui constitue le flotteur, en supposant que ce solide soit soumis :

1° *Aux actions extérieures qui le sollicitent réellement;*

2° *Aux pressions du fluide qui l'environne; dans le calcul de ces pressions, on néglige les termes qui proviennent des forces d'inertie appliquées aux diverses masses élémentaires qui constituent le fluide;*

3° *Aux pressions fictives associées au mouvement du flotteur.*

La force vive du solide est supposée égale à la somme de sa force vive réelle et de la force vive du fluide dans un tel mouvement associé fictif.

En traitant le problème des oscillations pendulaires d'un tel corps comme nous avons traité le problème des oscillations véritables d'un flotteur, nous arriverons aux conclusions suivantes :

Les valeurs F, G, H, L, M, N qui conviennent à une telle oscillation pendulaire vérifient l'équation

$$\delta\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{J}+\Theta} = 0:$$

elles font prendre au rapport

$$\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{T}}{\mathfrak{J}+\Theta}$$

une valeur égale à $\frac{4\pi^2}{T^2}$, T étant la période du mouvement pendulaire considéré.

Les égalités (108) et (109) nous montrent sans peine que le système fictif dont nous venons de parler est susceptible de six mouvements pendulaires simples ; si S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 sont les six racines, rangées par ordre de grandeur croissante, de l'équation (110), les quantités

$$\frac{2\pi}{\sqrt{S_1}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_2}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_3}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_4}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_5}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{S_6}}$$

sont les périodes, rangées par ordre de grandeur décroissante, de ces six mouvements.

Le théorème exprimé par la condition (112) peut s'énoncer ainsi :

La période la plus longue que puisse présenter un mouvement pendulaire d'un flotteur est au moins égale, et elle est en général supérieure à la période du mouvement pendulaire le plus lent que puisse prendre le système fictif qui vient d'être défini.

Considérons, de nouveau, le rapport

$$\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}+\Theta}.$$

La quantité Θ est nulle si le déplacement du fluide *associé* au déplacement F, G, H, L, M, N du solide se réduit à l'immobilité ; hors ce cas, elle est positive. Pour un ensemble donné de valeurs de F, G, H, L, M, N, le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}+\Theta}$ est plus petit que le rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$, à moins que la surface mouillée du flotteur ne soit de révolution autour d'un axe et que les valeurs considérées de F, G, H, L, M, N ne définissent une simple rotation autour de cet axe.

La plus petite valeur du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}+\Theta}$ ne peut pas être inférieure à la plus petite valeur du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$; pour que ces deux valeurs puissent être égales entre elles, il faut, mais il ne suffit pas, que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un certain axe et que le système de valeurs de F, G, H, L, M, N qui rend $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}+\Theta}$ minimum détermine une simple rotation autour de cet axe; il faut et il suffit que le système de valeurs de F, G, H, L, M, N qui rend $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$ minimum détermine une simple rotation autour de cet axe.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

La plus longue période T_1 *des mouvements pendulaires que le flotteur peut prendre est au moins égale à la quantité* T'_0, *si l'on désigne par* $\frac{4\pi^2}{T'^2_0}$ *la plus petite valeur que puisse prendre le rapport* $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$. *Pour que* T_1 *soit égal à* T'_0, *il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un certain axe et que le système de valeurs de* F, G, H, L, M, N *qui rend* $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$ *minimum corresponde à une simple oscillation autour de cet axe.*

Mais il pourrait se faire que le mouvement pendulaire le plus long du flotteur fût une oscillation autour de cet axe sans que, cependant, T_1 fût égal à T'_0.

La considération du rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$ se relie à l'étude d'un nouveau problème fictif qui peut s'énoncer ainsi :

Déterminer les oscillations pendulaires du solide en calculant comme au problème fictif précédent les pressions qu'il éprouve de la part du fluide, mais en laissant à ce solide sa force vive réelle.

On montre, en effet, que tout système de valeurs de F, G, H, L, M, N qui fournit une solution de ce problème fictif vérifie l'équation

$$\delta\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}} = 0.$$

Au rapport $\frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{G}}{\mathfrak{J}}$, il fait prendre une certaine valeur positive $\frac{4\pi^2}{T'^2}$; T' est la période du mouvement pendulaire que définit cette solution.

Le solide dont nous venons de parler est susceptible de six mouvements pendulaires distincts dont les périodes se déterminent comme se déterminent celles du précédent système fictif.

La plus longue période T_1 *des mouvements pendulaires que le système peut prendre est au moins égale à la période* T'_0 *du mouvement pendulaire le plus lent du solide fictif qui vient d'être défini ; elle lui est, en général, supérieure.*

A ces propositions, nous pouvons adjoindre celle-ci :

Lorsqu'à la période T_1 *du mouvement pendulaire le plus lent que le flotteur puisse éprouver, on substitue la plus longue période* T'_0 *des mouvements pendulaires dont le second système fictif est susceptible, on atteint une approximation au plus égale à celle que l'on obtiendrait en substituant à* T_1 *la période* T_0 *du mouvement pendulaire le plus lent que puisse prendre le second système fictif; pour que ces deux approximations soient égales, il faut et il suffit, d'ailleurs, que la première se transforme en exactitude; hors ce cas, la première évaluation est moins approchée que la seconde.*

IX. — Formation successive des divers mouvements pendulaires dont le flotteur est susceptible.

La méthode indiquée aux paragraphes V et VII ramène à un problème de minimum les déterminations de la plus petite des quantités λ, partant de la plus longue période dont soit susceptible un mouvement pendulaire du système, et des quantités F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ qui caractérisent ce mouvement pendulaire.

On imagine aisément une généralisation de cette règle, généralisation qui permette de former les diverses quantités λ, successivement et dans l'ordre de la grandeur croissante, et d'associer à chacune d'elles des quantités F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ qui peuvent fournir un mouvement pendulaire de période $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

Voici, par exemple, comment se formerait le $n^{\text{ième}}$ mouvement pendulaire :

Considérons les quantités F, G, H, L, M, N, $\Psi(x, y, z)$ *qui sont assujetties aux conditions de liaisons* (36) *et* (38), *et, de plus, aux conditions suivantes :*

1° *On a*

$$\mathfrak{S} + \tau = 1. \tag{43}$$

2° *On a les* $(n-1)$ *égalités*

$$(113)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial F_1}F+\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial F_1}G+\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial H_1}H+\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial L_1}L+\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial M_1}M+\frac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial N_1}N\\
&\qquad+2\int_2\rho_0\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\varpi_2=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial\mathfrak{F}_{n-1}}{\partial F_{n-1}}F+\frac{\partial\mathfrak{F}_{n-1}}{\partial G_{n-1}}G+\frac{\partial\mathfrak{F}_{n-1}}{\partial H_{n-1}}H+\frac{\partial\mathfrak{F}_{n-1}}{\partial L_{n-1}}L+\frac{\partial\mathfrak{F}_{n-1}}{\partial M_{n-1}}M+\frac{\partial\mathfrak{F}_{n-1}}{\partial N_{n-1}}N\\
&\qquad+2\int_2\rho_0\left(\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\varpi_2=0.
\end{aligned}\right.$$

En ces égalités, $\mathfrak{F}_p$ *représente ce que devient* $\mathfrak{F}$ *lorsqu'on y remplace* F, G, H, L, M, N *par* $F_p, G_p, H_p, L_p, M_p, N_p$. *Par une substitution semblable,* $\mathfrak{Q}$ *deviendrait* $\mathfrak{Q}_p$.

Parmi les ensembles F, G, H, L, M, N, $\Psi(x,y,z)$ *qui vérifient ces diverses conditions, il en est un qui rend minimum la somme*

$$\mathfrak{Q}+\Omega.$$

Cet ensemble $F_n, G_n, H_n, L_n, M_n, N_n, \Psi_n(x,y,z)$ *correspond au* $n^{\text{ième}}$ *mouvement pendulaire. La période* T_n *de celui-ci est donnée par l'égalité*

$$(114)\qquad \frac{4\pi^2}{T_n^2}=\lambda_n=\mathfrak{Q}_n+\Omega_n,$$

où

$$(42\,bis)\quad \Omega_n=-\int_\sigma\rho_0\frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial n}\right)^2d\sigma +\int_2\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi_n}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi_n}{\partial z}\right)\right]^2d\varpi_2.$$

La règle que nous venons de formuler a été justifiée dans le cas où $n=1$; pour en démontrer la généralité, il suffit de la supposer exacte jusqu'à une certaine valeur $(n-1)$ du rang n, et de prouver qu'elle l'est encore pour la valeur suivante de ce rang. C'est ce que nous allons faire.

Considérons l'ensemble des déterminations de F, G, H, L, M, N, $\Psi(x,y,z)$ qui vérifient les conditions (36), (38), (43), (113) et l'en-

semble des valeurs de la somme $(\mathfrak{Q} + \Omega)$ qui lui correspond; cette somme étant toujours positive, l'ensemble des valeurs de $(\mathfrak{Q} + \Omega)$ admet une limite inférieure; *nous* SUPPOSERONS *qu'en l'ensemble considéré des déterminations de*

$$(115) \qquad F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N, \quad \Psi(x, y, z),$$

il en est une

$$(116) \qquad F_n, \quad G_n, \quad H_n, \quad L_n, \quad M_n, \quad N_n, \quad \Psi_n(x, y, z),$$

qui fait atteindre à $(\mathfrak{Q} + \Omega)$ *sa limite inférieure,* qui est alors un minimum $(\mathfrak{Q}_n + \Omega_n)$ de cette quantité. La légitimité de notre démonstration est subordonnée à la légitimité de cette hypothèse.

L'ensemble (116) ne peut être identique à aucun des ensembles analogues précédemment rencontrés. Supposons, en effet, qu'il soit identique à l'ensemble

$$(117) \qquad F_p, \quad G_p, \quad H_p, \quad L_p, \quad M_p, \quad N_p, \quad \Psi_p(x, y, z),$$

où p est inférieur à n [cette identité laissant, d'ailleurs, aux deux fonctions $\Psi_p(x, y, z)$, $\Psi_n(x, y, z)$ la faculté de différer par une quantité quelconque indépendante de x, y, z].

L'ensemble (116), substitué à l'ensemble (115) en la $p^{\text{ième}}$ égalité (113), doit transformer celle-ci en identité; si les deux ensembles (116) et (117) étaient identiques, la $p^{\text{ième}}$ égalité (113) deviendrait une identité lorsqu'on y substituerait l'ensemble (117) à l'ensemble (115); or, cette dernière substitution transforme le premier membre de l'égalité considérée en

$$2(\mathfrak{T}_p + \mathfrak{Q}_p),$$

et cette dernière quantité est égale à 2, puisque, par hypothèse, l'ensemble (117) vérifie l'égalité (43).

La quantité $(\mathfrak{Q}_n + \Omega_n)$ est un minimum parmi les valeurs que prend la somme $(\mathfrak{Q} + \Omega)$ lorsque les conditions (36), (30), (43) et (113) sont vérifiées. Il doit donc exister n constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ telles que l'égalité

$$
(118)\quad \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial F_n}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial G_n}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial H_n}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial L_n}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial M_n}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{Q}_n}{\partial N_n}\delta N
$$

$$
+ 2\int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_n}{\partial z}\right)\right]
$$

$$
\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2
$$

$$
- 2\int_\sigma \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi_n}{\partial n}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial n} d\sigma
$$

$$
- \mu_1\left[\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial F_1}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial G_1}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial H_1}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial L_1}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial M_1}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial N_1}\delta N\right.
$$

$$
\left. + 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2\right]
$$

$$
-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

$$
- \mu_n\left[\frac{\partial \mathfrak{S}_n}{\partial F_n}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{S}_n}{\partial G_n}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{S}_n}{\partial H_n}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{S}_n}{\partial L_n}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{S}_n}{\partial M_n}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial N_1}\delta N\right.
$$

$$
\left. + 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial x}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial y}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}\frac{\partial \delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2\right] = 0
$$

soit vérifiée par tout ensemble

$$
(119)\qquad \delta F,\ \delta G,\ \delta H,\ \delta L,\ \delta M,\ \delta N,\ \delta\Psi(x, y, z)
$$

qui vérifie les conditions (45) et (46).

Démontrons que tous les coefficients μ sont nuls, sauf le coefficient μ_n.

Soit, en effet, p un indice inférieur à n.

A l'ensemble (119), nous pouvons substituer l'ensemble

$$
(120)\qquad kF_p,\ kG_p,\ kH_p,\ kL_p,\ kM_p,\ kN_p,\ k\Psi_p(x, y, z),
$$

où k est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z. L'ensemble (117), en effet, a été assujetti à vérifier les conditions de liaisons (36) et (38), en sorte que l'ensemble (120) vérifie les conditions (45) et (46).

Il est facile de voir que les trois premiers termes, au premier membre de l'égalité (118), deviennent ce que devient la quantité

$$(121)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial F_p}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial G_p}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial H_p}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial L_p}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial M_p}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{Q}_p}{\partial N_q}\delta N \\ &+ 2\int_2 \frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi_q}{\partial z}\right)\right] \\ &\qquad\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right)\right] d\varpi_2 \\ &- 2\int_\sigma \rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi_p}{\partial n}\, d\sigma\end{aligned}$$

lorsqu'on y remplace l'ensemble (119) par l'ensemble

$$(122)\qquad kF_n,\quad kG_n,\quad kH_n,\quad kL_n,\quad kM_n,\quad kN_n,$$

ce qui est permis, car les conditions (36) et (38), vérifiées par l'ensemble (116), nous assurent que les conditions (45) et (46) sont vérifiées par l'ensemble (122).

Mais, par hypothèse, l'égalité

$$(49)\qquad \delta(\mathfrak{Q} + \Omega) - \lambda\,\delta(\mathfrak{T} + \tau) = 0$$

est vérifiée lorsqu'on y remplace :

λ par λ_p ;
l'ensemble (115) par l'ensemble (117) ;
l'ensemble (119) par des quantités quelconques vérifiant les conditions (45) et (46).

Quel que soit donc cet ensemble (119), la quantité (121) est égale à

$$\begin{aligned}\lambda_p\Big[&\frac{\partial \mathfrak{T}_p}{\partial F_p}\delta F + \frac{\partial \mathfrak{T}_p}{\partial G_p}\delta G + \frac{\partial \mathfrak{T}_p}{\partial H_p}\delta H + \frac{\partial \mathfrak{T}_p}{\partial L_p}\delta L + \frac{\partial \mathfrak{T}_p}{\partial M_p}\delta M + \frac{\partial \mathfrak{T}_p}{\partial N_p}\delta N \\ &+ 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial \Psi_p}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_p}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}\frac{\partial\,\delta\Psi}{\partial z}\right) d\varpi_2\Big].\end{aligned}$$

Si l'on y substitue l'ensemble (122) à l'ensemble (119), cette quantité se réduit au produit par $k\lambda_p$ du premier membre de la $p^{\text{ième}}$ égalité (113), après qu'en celle-ci, on a substitué l'ensemble (116) à l'ensemble (115); mais cette dernière substitution transforme les égalités (113) en identités. L'ensemble des trois premiers termes, au premier membre de l'égalité (118), se réduit donc à zéro par substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119).

Soit q un indice quelconque différent de p; la substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119) donne au coefficient de μ_q, dans le premier membre de l'égalité (118), la valeur

$$- k\left[\frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial F_q}F_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial G_q}G_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial H_q}H_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial L_q}L_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial M_q}M_p + \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial N_q}N_p \right.$$
$$\left. + 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial\Psi_q}{\partial x}\frac{\partial\Psi_p}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_q}{\partial y}\frac{\partial\Psi_p}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_q}{\partial z}\frac{\partial\Psi_p}{\partial z}\right)d\varpi_2\right].$$

Si q est inférieur à p, il est immédiatement évident que la quantité entre [ ] est nulle, car l'ensemble (117) a été assujetti à vérifier les $(p-1)$ premières conditions (113).

Si q est supérieur à p, on remarque que la quantité entre [ ] peut s'écrire

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial F_p}F_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial G_p}G_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial H_p}H_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial L_p}L_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial M_p}M_q + \frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial N_p}N_q$$
$$+ 2\int_2 \rho_0\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial x}\frac{\partial\Psi_q}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_p}{\partial y}\frac{\partial\Psi_q}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_p}{\partial z}\frac{\partial\Psi_q}{\partial z}\right)d\varpi_2.$$

Elle est encore nulle, car l'ensemble

$$(123)\qquad F_q,\quad G_q,\quad H_q,\quad L_q,\quad M_q,\quad N_q,\quad \Psi_q(x,y,z)$$

a été assujetti à vérifier les $(q-1)$ premières conditions (113).

Considérons enfin, au premier membre de l'égalité (118), ce que le coefficient de μ_p devient par la substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119). On voit immédiatement qu'il peut s'écrire

$$-2k(\mathfrak{F}_p + \tau_p),$$

et qu'il a pour valeur $-2k$, puisque l'ensemble (117) a été assujetti à vérifier la condition (43).

Par la substitution de l'ensemble (120) à l'ensemble (119), l'égalité (118) se réduit donc à

$$\mu_p = 0,$$

p étant un indice quelconque inférieur à n.

Effaçons, dans l'égalité (118), les $(n-1)$ termes affectés des coefficients $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, puisque ces coefficients sont nuls, et voyons ce que devient l'égalité (118).

Cette égalité, vérifiée par tout ensemble (119) qui est assujetti aux conditions (45) et (46), est visiblement ce que devient la condition

$$\delta(\mathfrak{Q}+\Omega)-\lambda\,\delta(\mathfrak{I}+\tau)=0, \tag{49}$$

lorsqu'on y remplace:

λ par μ_n,

et l'ensemble (115) par l'ensemble (116).

Nous savions déjà que l'ensemble (116) déterminait un des mouvements pendulaires du système; nous voyons maintenant que μ_n est la valeur de λ qui correspond à ce mouvement pendulaire; nous remplacerons désormais μ_n par λ_n.

Reprenons l'égalité (118), où nous devons faire

$$\mu_1=0, \quad \ldots, \quad \mu_{n-1}=0, \quad \mu_n=\lambda_n.$$

A l'ensemble (119), substituons-y, ce qui est permis, l'ensemble

$$k F_n, \quad k G_n, \quad k H_n, \quad k L_n, \quad k M_n, \quad k N_n, \quad k\Psi_n(x,y,z), \tag{124}$$

où k est une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z.

L'égalité (118) devient, après suppression du facteur $2k$,

$$(\mathfrak{Q}_n+\Omega_n)-\lambda_n(\mathfrak{I}_n+\tau_n)=0.$$

Mais l'ensemble (116) étant assujetti à vérifier l'égalité (43), cette dernière égalité se réduit à

$$\lambda_n=\mathfrak{Q}_n+\Omega_n. \tag{114}$$

La quantité λ_n est donc la plus petite valeur que puisse prendre la somme $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ lorsque les quantités (115) sont assujetties aux conditions (36), (38), (43) et (113).

Il est immédiatement évident par là que la quantité λ_n ne peut être inférieure à aucune quantité λ_p d'indice p inférieur à n. La quantité λ_p, en effet, est la plus petite valeur que puisse prendre la somme $(\mathfrak{Q}+\Omega)$ lorsque l'ensemble (115) est assujetti aux conditions (36), (38), (43), et seulement aux $(p-1)$ premières conditions (113).

La règle énoncée est ainsi complètement justifiée.

X. — Corps flottant sur un fluide illimité.

Certaines parties des théories précédentes se simplifient grandement lorsque le volume du fluide qui porte le flotteur croît au delà de toute limite, pourvu, toutefois, que l'on admette certaines suppositions que nous allons énumérer :

1° Lorsqu'au sein de la masse fluide en équilibre, on s'éloigne indéfiniment de la région où se trouve le flotteur, la quantité $\frac{d^2\varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}$ ne croît pas au delà de toute limite.

2° Si la surface libre σ qui borne le fluide en équilibre s'étend à l'infini, la quantité $\rho_0 \frac{\partial V}{\partial n}$ ne croît pas au delà de toute limite lorsque le point auquel elle rapporte s'écarte indéfiniment, sur la surface σ, de la région où se trouve le flotteur.

3° Soient Π un point marqué en la position d'équilibre du flotteur, (x, y, z) un point pris à l'intérieur de la masse fluide, r la distance du point (x, y, z) au point Π ; lorsque r croît au delà de toute limite, les produits par r^2 des composantes de l'élongation et des composantes de la vitesse des divers mouvements réels ou fictifs que nous avons à considérer ne croissent pas au delà de toute limite.

Il résulte, en premier lieu, de ces suppositions que la quantité τ, définie par l'égalité (40), et que la quantité Ω, définie par l'égalité (42), gardent des valeurs finies et déterminées.

En second lieu, considérons un mouvement $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ du fluide qui soit *associé* au mouvement εF, εG, εH, εL, εM, εN du solide. Le second membre de l'identité (79), que doit vérifier la quantité Σ, est assurément fini ; au contraire, en vertu des inégalités (80) et (81) et des hypothèses précédentes, le coefficient de Σ est infiniment grand et positif, et cela lors même que la surface libre σ serait limitée. Nous voyons donc qu'en tout déplacement du fluide *associé* au déplacement du solide, nous devons avoir

$$\Sigma = 0. \tag{125}$$

L'égalité (76) nous montre alors que l'on doit avoir, en tout point de la masse fluide,

$$\delta\rho = 0 \tag{126}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (73),

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0\zeta) = 0. \tag{127}$$

L'égalité (77) nous donne, en tout point de la surface libre,

$$\xi\cos(n, x) + \eta\cos(n, y) + \zeta\cos(n, z) = 0. \tag{128}$$

En un déplacement ASSOCIÉ *au déplacement du solide, le fluide se meut comme s'il était incompressible, et de telle sorte que la surface libre demeure invariable.*

Considérons, en particulier, un déplacement du fluide, *associé* au déplacement εF, εG, εH, εL, εM, εN du solide, et dépendant d'un potentiel $\varepsilon\Psi$ des élongations.

Les égalités (97) nous donneront ici

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = 0, \quad \Sigma_4 = 0, \quad \Sigma_5 = 0, \quad \Sigma_6 = 0. \tag{129}$$

On pourra encore écrire

$$\Psi = \Phi_1 F + \Phi_2 G + \Phi_3 H + \Phi_4 L + \Phi_5 M + \Phi_6 N. \tag{98}$$

En vertu des égalités (99) et (103), chacune des fonctions Φ vérifie l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0. \tag{130}$$

Chacune d'elles vérifie, en tous les points de la surface libre, et de la surface de la paroi immobile, s'il y en a une, l'égalité

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \tag{131}$$

en vertu des égalités (100) et (101), (104) et (105).

Enfin, en chaque point de la surface mouillée s_{23} du flotteur en équilibre, on a, en vertu des égalités (102) et (103),

$$
(132) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos(N_0, x) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial N_0} = 0, \qquad \dots,\\
y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y) + &\frac{\partial \Phi_4}{\partial N_0} = 0, \qquad \dots
\end{aligned}
\right.
$$

La détermination de chacune des fonctions Φ est ainsi ramenée à un problème du type suivant :

Un milieu conducteur, dont ρ_0 est le coefficient de conductibilité, occupe l'espace indéfini qu'occupait le fluide en l'état d'équilibre. Ce milieu ne renferme aucune source de chaleur. Le long de la surface σ et le long des surfaces des parois immobiles, s'il y en a, il est supposé contigu à des corps non-conducteurs. Des sources de chaleur données sont distribuées à la partie s_{23} de la surface du flotteur que mouille le fluide en équilibre. Déterminer l'état stationnaire de la température de ce corps.

La quantité τ se réduit encore, comme par le passé, à une certaine forme quadratique Θ, finie et bien déterminée, des quantités F, G, H, L, M, N. Si la surface mouillée s_{23} du flotteur est de révolution autour d'un certain axe, la forme Θ est nulle pour un ensemble de valeurs de F, G, H, L, M, N qui correspond à une rotation du flotteur autour de cet axe; elle est positive pour tout autre système de valeurs de F, G, H, L, M, N. Si la surface mouillée du flotteur n'est pas de révolution, la forme Θ est définie positive.

Les égalités (78) et (91) donnent l'égalité

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S} = \quad & \Sigma F \int_{s_{23}} \rho_0 \cos(N_0, x)\, ds_{23} + \dots \\
& + \Sigma L \int_{s_{23}} \rho_0 [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} + \dots
\end{aligned}
$$

que l'égalité (125) transforme en

$$
(133) \qquad \mathfrak{S} = 0.
$$

Ce dernier résultat apporte une simplification notable aux théorèmes qui ont été établis au paragraphe VIII, touchant la plus longue période que puisse présenter un mouvement pendulaire du système.

Lorsqu'un corps solide flotte à la surface d'un fluide compressible indéfini, la période la plus longue T_1 *que puisse affecter un mouvement pendulaire de ce flotteur est au plus égale, et est, en général, inférieure à la quantité* T_0 *telle que* $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$ *soit la valeur minimum du rapport* $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}+\Theta}$.

Pour que $T_1 = T_0$, *il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un axe et que le mouvement pendulaire de plus longue période soit une oscillation autour de cet axe.*

Examinons le premier problème fictif dont voici l'énoncé :

On suppose qu'à chaque instant, les pressions exercées par le fluide sur le solide soient calculées non par les règles de l'Hydrodynamique, mais par les règles de l'Hydrostatique.

A chaque instant, on ajoute à la force vive réelle du flotteur une force vive fictive égale à celle qu'aurait le fluide en un MOUVEMENT FICTIF ASSOCIÉ *au mouvement du solide.*

En ce problème fictif, le solide est susceptible de mouvements pendulaires qui correspondent à six périodes réelles, positives, distinctes ou non.

T_0 *est la plus longue de ces périodes.*

A l'évaluation approchée de T_1 que nous fournit le calcul de T_0, nous pouvons substituer une autre évaluation, plus aisée à obtenir, mais dont l'approximation est ordinairement moindre.

Soit $\frac{4\pi^2}{T_0'^2}$ *la valeur minimum du rapport* $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{S}}$; *la quantité* T_0' *est au moins égale et, en général, elle est supérieure à la quantité* T_0 *et, partant, à la quantité* T_1.

Cette proposition peut encore s'énoncer d'autre manière ; considérons, en effet, le second problème fictif dont voici l'énoncé :

Un corps solide flotte à la surface d'un fluide compressible de volume infini.

A chaque instant, on calcule selon les règles de l'Hydrostatique *les pressions exercées sur le solide, négligeant ainsi les forces d'inertie appliquées aux diverses masses élémentaires du fluide.*

On attribue au flotteur sa force vive réelle.

Les mouvements pendulaires d'un tel corps présentent six périodes réelles, positives, distinctes ou non.

La plus longue de ces périodes, T'_0, *est au moins égale à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires qu'en vérité le flotteur peut éprouver; en général, la première de ces périodes surpasse la seconde. Pour que les deux périodes* T'_0, T_1 *soient égales entre elles, il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un axe, et qu'au second problème fictif, le mouvement pendulaire de plus longue période corresponde à une simple rotation autour de cet axe.*

Le problème fictif que nous venons de considérer en dernier lieu est la généralisation naturelle du problème que Poisson et Duhamel ont traité, en se bornant à considérer un fluide homogène et pesant. Même dans le cas où le fluide a un volume infini, ce problème fictif diffère grandement, on le voit, du problème véritable, et Clebsch a eu raison de signaler l'erreur que l'on commet en substituant un de ces problèmes à l'autre. Mais, DANS LE CAS OU LE VOLUME DU FLUIDE EST INFINI, *l'étude du problème fictif de Poisson et de Duhamel conduit, cependant, à énoncer d'une manière correcte les conditions de stabilité du flotteur.*

La méthode fictive dont nous parlons conduit, en effet, moyennant l'emploi du critérium des petits mouvements, à la proposition suivante :

Pour qu'un corps solide, flottant sur un fluide de volume infini, y soit en équilibre stable, il faut et il suffit que la quantité $\mathfrak{Q}$ *soit une forme définie positive des six quantités* F, G, H, L, M, N.

Or, à cause de l'égalité (133), c'est à cette condition que se réduit la condition donnée aux paragraphes 6 et 7.

XI. — Corps pesant flottant sur un fluide pesant, incompressible et homogène.

Il est aisé de développer une théorie analogue à la précédente dans le cas où le fluide, au lieu d'être compressible, est un liquide incompressible et homogène ; sans rechercher une généralité désormais inutile, nous supposerons que la pesanteur soit la seule action extérieure qui s'exerce sur les diverses parties du flotteur et du liquide.

Nous mettrons l'origine des coordonnées au centre de gravité de l'aire de flottaison du flotteur en équilibre ; nous prendrons pour axe des z la verticale dirigée vers le zénith, pour axes des x et des y les deux axes principaux d'inertie de l'aire de flottaison.

Dans ce cas, les divers coefficients A_{ij} sont tous nuls, sauf trois d'entre eux, qui ont les valeurs suivantes (¹):

$$(134) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_{33} &= g\rho s, \\ A_{44} &= g\rho j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z'), \\ A_{55} &= g\rho j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z'). \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules,

g est l'intensité de la pesanteur ;
ρ la densité du liquide ;
s l'aire de la surface de flottaison ;
j_x, j_y, les moments d'inertie de cette aire par rapport aux axes des x et des y ;
$\mathfrak{M}$ la masse du flotteur ;
Z' la hauteur du centre de gravité de ce corps au-dessus de la surface libre du liquide en équilibre ;
Z la hauteur, au-dessus de la même surface, du centre de gravité du volume immergé.

Moyennant ces égalités (134), les formules (23), où nous devons, selon ce qui a été dit au paragraphe 3, effacer la constante C, fournis-

(¹) P. Duhem, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, égalité (33) (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. I, 1895, p. 176).

sent les équations du mouvement du flotteur, qui sont donc les suivantes:

$$
(135)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M} f''(t) + M_z g''(t) - M_y h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0, \\
&\mathfrak{M} g''(t) - M_z f''(t) + M_x h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, y)\, ds_{23} = 0, \\
&g\rho s\, h(t) + \mathfrak{M} h''(t) + M_y l''(t) - M_x m''(t) \\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, z)\, ds_{23} = 0, \\
&[g\rho j x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, l(t) \\
&\quad + J_x l''(t) - P_{xy} m''(t) - P_{xz} n''(t) + M_y h''(t) - M_z g''(t) \\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} = 0, \\
&[g\rho j y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, m(t) \\
&\quad + J_y m''(t) - P_{xy} l''(t) - P_{yz} n''(t) + M_z f''(t) - M_x h''(t) \\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [z_0 \cos(N_0, x) - x_0 \cos(N_0, z)]\, ds_{23} = 0, \\
&J_z n''(t) - P_{xz} l''(t) - P_{yz} m''(t) + M_x g''(t) - M_y f''(t) \\
&\qquad + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [x_0 \cos(N_0, y) - y_0 \cos(N_0, x)]\, ds_{23} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La détermination des mouvements du fluide dépend de la détermination de la fonction ψ.

En chaque point du volume qu'occupait le fluide en équilibre, celle-ci doit vérifier l'équation

$$(136)\qquad \Delta\psi = 0$$

que fournit la condition de continuité, et qui remplace ici l'équation (24 *bis*).

A la surface libre σ du fluide en équilibre, $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n} = \rho g$, en sorte que l'égalité (25 *bis*) devient maintenant l'égalité

$$(137)\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0,$$

qui doit être vérifiée en tout point du plan $z = 0$.

Quant à l'équation (5), vérifiée en tout point de la surface s_2, le long de laquelle le liquide mouille le flotteur en équilibre, et à l'équation (26), vérifiée en tout point de la paroi immobile, elles demeurent ici les mêmes que dans le cas général.

Si, dans les équations (135), on remplace partout $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ par zéro, comme l'ont fait Poisson et Duhamel, mais comme il est illégitime de le faire, selon la très juste remarque de Clebsch, on obtient ce que l'on nomme les *équations du mouvement infiniment petit d'un flotteur en milieu non résistant*. Ces équations s'intègrent sans difficulté; on en trouvera l'intégration détaillée en la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout (¹).

Nous ne savons même pas si le problème, simplifié de la sorte par une supposition incorrecte, fournit une approximation du problème véritable. Nous verrons tout à l'heure quel renseignement il est susceptible de nous fournir.

Lorsqu'aux équations (135), on remplace $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ par zéro, les quantités $f(t)$, $g(t)$ et $n(t)$ n'y figurent plus que par les dérivées secondes $f''(t)$, $g''(t)$ et $n''(t)$; on peut donc, à chacune de ces trois fonctions, ajouter une fonction linéaire arbitraire de t, en sorte qu'elle ne peut, en général, demeurer infiniment petite, quelque grand que soit t.

Qu'une circonstance analogue doive se présenter au problème véritable, cela est évident tout d'abord et sans aucun calcul. En effet, l'équilibre du flotteur n'est aucunement troublé si l'on imprime à ce corps une translation quelconque parallèle au plan horizontal ou une rotation quelconque autour d'un axe vertical; pour de tels déplacements, cet équilibre est indifférent. Si donc on veut étudier la stabilité de l'équilibre du flotteur ou les mouvements infiniment petits de ce corps, il faudra convenir que l'on regarde comme infiniment petit tout mouvement où $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$ demeurent infiniment petits, quel que soit t, lors même qu'en ce mouvement quelqu'une des quantités $f(t)$, $g(t)$, $n(t)$ ne demeurerait pas infiniment petite.

En vertu des égalités (134), la quantité $\mathfrak{Q}$, définie par l'égalité (41),

(¹) POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du navire*, t. II, pp. 212 et suiv. Paris, 1891.

se réduit à la forme

$$(138) \qquad \mathfrak{Q} = g\rho s H^2 + [g\rho j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')] L^2 + [g\rho j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')] M^2.$$

Étudions le déplacement $(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, \varepsilon\zeta)$ du fluide qui s'*associe* à un déplacement $(\varepsilon F, \varepsilon G, \varepsilon H, \varepsilon L, \varepsilon M, \varepsilon N)$ du flotteur.

Le fluide étant incompressible, on devra avoir, en tout point du volume qu'il occupe en l'état d'équilibre,

$$(139) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Le long de la paroi immobile et de la surface mouillée du flotteur, ξ, η, ζ continueront de vérifier les équations (74) et (75).

Enfin, comme à la surface libre du liquide,

$$\cos(n, x) = 0, \qquad \cos(n, y) = 0, \qquad \cos(n, z) = -1, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = -g,$$

l'équation (77), vérifiée en tout point de cette surface, deviendra

$$(140) \qquad \zeta = \frac{\Sigma}{g}.$$

Pour qu'un déplacement du fluide soit ASSOCIÉ *à un déplacement du flotteur, il faut et il suffit qu'en ce déplacement du liquide, la surface libre demeure horizontale.*

On peut demander à l'équation (79) la détermination de la constante Σ. Il est plus simple de l'obtenir par un raisonnement direct. Le liquide étant incompressible, le volume dont le flotteur s'enfonce doit être égal au volume soulevé du liquide; si donc nous désignons par σ l'aire de la surface libre du liquide, nous devons avoir

$$(141) \qquad sH + \sigma\zeta = 0.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (140), donne

$$(142) \qquad \Sigma = -\frac{gsH}{\sigma}.$$

La quantité $\mathfrak{T}$, donnée par l'égalité (91), devient

$$\mathfrak{T} = -\Sigma^2 \int_\sigma \frac{\rho}{\frac{\partial V}{\partial n}} d\sigma,$$

et comme, en tout point de la surface σ, $\frac{\partial V}{\partial n} = -g$, cette égalité, jointe à l'égalité (142), donne

$$(143) \qquad \mathfrak{T} = \rho g \frac{s^2}{\sigma} H^2.$$

Les égalités (138) et (143) nous donnent

$$(144) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{Q} + \mathfrak{T} = \rho g s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right) H^2 &+ [g\rho j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')] L^2 \\ &+ [g\rho j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')] M^2. \end{aligned}$$

Cette expression nous permet de discuter la stabilité de l'équilibre du flotteur, cette stabilité étant restreinte aux déplacements $h(t)$, $l(t)$, $m(t)$.

Le théorème de Lejeune-Dirichlet nous enseigne qu'il suffit, pour cette stabilité, que la somme $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{T})$ soit une forme définie positive des quantités H, L, M. La méthode des petits mouvements, *si l'on en admet la légitimité*, nous enseigne que cette condition est non seulement suffisante, mais encore nécessaire. Nous obtenons donc la proposition suivante :

Pour qu'un solide pesant, flottant sur un liquide limité, soit en équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités

$$(145) \qquad \begin{cases} \rho j_x + \mathfrak{M}(Z - Z') > 0, \\ \rho j_y + \mathfrak{M}(Z - Z') > 0. \end{cases}$$

Ces conditions, ne dépendant pas des dimensions du fluide, s'appliquent même à un corps pesant qui flotte sur un liquide illimité.

Ces conditions sont connues depuis Bouguer.

La quantité Θ se déterminera par la méthode générale qui a été indiquée au paragraphe 8.

La comparaison des égalités (96) et (142) nous montre que nous aurons ici

$$\Sigma_1 = 0, \qquad \Sigma_2 = 0, \qquad \Sigma_3 = -\frac{gs}{\sigma}, \qquad \Sigma_4 = 0, \qquad \Sigma_5 = 0, \qquad \Sigma_6 = 0.$$

Nous pourrons encore écrire l'égalité

$$(98) \qquad \Psi = \Phi_1 F + \Phi_2 G + \Phi_3 H + \Phi_4 L + \Phi_5 M + \Phi_6 N + \chi,$$

où χ est une constante.

Chacune des fonctions Φ sera, en tout l'espace 2 qu'occupait le fluide au moment de l'équilibre, une fonction harmonique de x, y, z :

$$\Delta\Phi = 0.$$

Le long de la paroi immobile et aux divers points de la surface mouillée du flotteur, les diverses fonctions Φ vérifieront encore les conditions (100), (102), (104) et (106).

Aux divers points de la surface libre σ du fluide en équilibre ou, en d'autres termes, du plan $z = 0$, on doit encore écrire les équations telles que (101) et (105), qui deviennent :

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_3}{\partial n} = -\frac{s}{\sigma}, \quad \frac{\partial\Phi_4}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_5}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_6}{\partial n} = 0.$$

Les diverses fonctions Φ et, partant, la grandeur Θ seront ainsi déterminées.

Si $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$ est la plus petite valeur de la quantité

$$(146) \qquad \frac{1}{\mathfrak{I} + \Theta}\Big\{\rho g s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)H^2 + [\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]L^2 + [\rho g j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]M^2\Big\},$$

nous savons que la plus longue période T_1 d'un mouvement pendulaire que le flotteur puisse prendre est égale à T_0 au cas où la surface mouillée du flotteur est de révolution autour d'un axe et où ce mouvement pendulaire se réduit à une oscillation autour de cet axe; hors ce cas, T_1 est supérieur à T_0.

Si, dans la quantité $\frac{\Theta}{2}$, nous remplaçons

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N$$

par

$$f'(t), \quad g'(t), \quad h'(t), \quad l'(t), \quad m'(n), \quad n'(t),$$

nous obtenons une forme quadratique $\mathfrak{T}'(t)$ de ces six dernières quantités; c'est la force vive du fluide en un *mouvement fictif associé* au mouvement du flotteur.

Lorsqu'on remplace les quantités

$$F, \quad G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N$$

par

$$f(t), \quad g(t), \quad h(t), \quad l(t), \quad m(t), \quad n(t),$$

Σ devient $\Sigma'(t)$. L'égalité (142) donne donc

$$\Sigma'(t) = -\frac{gs}{\sigma} h(t).$$

La *pression fictive associée* au mouvement du flotteur a été définie au paragraphe 8. C'est, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, une pression normale, dirigée vers l'intérieur du flotteur, et qui a pour valeur

$$\Pi(t) = \rho\Sigma'(t)$$

ou bien, dans le cas actuel,

$$\Pi(t) = -\frac{\rho gs}{\sigma} h(t). \tag{147}$$

On voit sans peine que ces diverses pressions se composent en une force unique, appliquée au centre de gravité de l'aire de flottaison, qui nous sert d'origine de coordonnées; cette force est verticale, dirigée vers le haut, et a pour valeur

$$\mathfrak{Z} = -\frac{\rho gs^2}{\sigma} h(t). \tag{148}$$

Il est aisé maintenant, en suivant les indications données au paragraphe 8, et par une méthode semblable à celle qui nous a permis de former les équations (135), d'écrire les équations de notre *premier* *problème fictif.* Ces équations seront les suivantes :

$$
(149)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{M} f'' + M_z g'' - M_y h'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial f'} = 0,\\
&\mathfrak{M} g'' - M_z f'' + M_x h'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial g'} = 0,\\
&g\rho s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)h + \mathfrak{M} h'' + M_y l'' - M_x m'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial h'} = 0,\\
&[g\rho j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\,l + J_x l'' - P_{xy} m'' - P_{xz} n''\\
&\qquad\qquad + M_y h'' - M_z g'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial l'} = 0,\\
&[g\rho j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\,m + J_y m'' - P_{xy} l'' - P_{yz} n''\\
&\qquad\qquad + M_z f'' - M_x h'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial m'} = 0,\\
&J_z n'' - P_{xz} l'' - P_{yz} m'' + M_x g'' - M_y f'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial n'} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

En ces équations, comme en celles qu'ont traitées Poisson et Duhamel, les quantités $f(t)$, $g(t)$, $n(t)$ n'interviennent que par les dérivées secondes

$$
f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \qquad g''(t) = \frac{d^2 g(t)}{dt^2}, \qquad n''(t) = \frac{d^2 n(t)}{dt^2}.
$$

On peut donc ajouter arbitrairement à chacune de ces trois quantités une fonction linéaire à coefficients constants de t. Abstraction faite de la translation uniforme et de la rotation uniforme que l'on obtient ainsi, le système dont le mouvement est figuré par les équations (149) est susceptible de mouvements pendulaires qui admettent trois périodes distinctes; T_0 est la plus longue de ces trois périodes.

Considérons maintenant le rapport

$$
(150)\quad
\frac{1}{\mathfrak{T}}\Big\{ \rho g s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)H^2 + [\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\,L^2
+ [\rho g j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\,M^2 \Big\}.
$$

Ce rapport admet une valeur minimum $\frac{4\pi^2}{T_0'^2}$. *La valeur* T_0' *est* *au moins égale et, en général, elle est supérieure à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires dont le système étudié est susceptible.*

La détermination de T'_0 se relie à un second problème fictif qui se déduit du précédent en biffant les termes qui dépendent de la force vive fictive $\mathfrak{T}'$. T'_0 *est la plus longue des périodes que puisse présenter un mouvement pendulaire capable d'intégrer les équations*

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{M}f'' + M_z g'' - M_y h'' = 0,\\
&\mathfrak{M}g'' - M_z f'' + M_x h'' = 0,\\
&g\rho s\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)h + \mathfrak{M}h'' + M_y l'' - M_z m'' = 0,\\
&[g\rho j_x + \mathfrak{M}g(Z - Z')]l + J_x l'' - P_{xy} m'' - P_{xz} n'' + M_y h'' - M_z g'' = 0,\\
&[g\rho j_y + \mathfrak{M}g(Z - Z')]m + J_y m'' - P_{xy} l'' - P_{yz} n'' + M_z f'' - M_x h'' = 0,\\
&J_x n'' - P_{xz} l'' - P_{yz} m'' + M_x g'' - M_y f'' = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations diffèrent en un seul point des équations auxquelles conduit la méthode de Poisson et de Duhamel, et dont la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout présente l'intégration complète : le coefficient de h y est multiplié par le facteur $\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)$.

Ce facteur devient extrêmement grand dans le cas où le flotteur est contenu en un bassin fort étroit; au contraire, il tend vers 1 lorsque la surface du bassin croît au delà de toute limite, ce qui justifie la proposition suivante :

Lorsqu'on étudie par la méthode de Poisson et de Duhamel les oscillations pendulaires d'un flotteur sur une nappe liquide infiniment étendue, la plus longue T'_0 *des périodes que l'on détermine est au plus égale à la plus longue période* T_1 *des mouvements pendulaires véritables du flotteur et, en général, elle est inférieure à* T_1.

Pour que T'_0 *soit égal à* T_1, *il faut et il suffit que la surface mouillée du flotteur soit de révolution autour d'un axe, et que le mouvement pendulaire le plus lent fourni par la méthode de Duhamel et de Poisson se réduise à une oscillation autour de cet axe.*

Dans ce cas, T'_0 *est aussi égal à la plus longue période* T_0 *que fournisse le premier problème fictif; hors ce cas,* T'_0 *est inférieur à* T_0.

XII. — Cas où le système étudié admet deux plans de symétrie.

Nous allons admettre maintenant que notre flotteur admette deux plans de symétrie; les navires ont un plan de symétrie, et beaucoup d'entre eux ne sont pas loin d'en admettre un second; l'hypothèse que nous faisons conduira donc à des résultats qui s'appliqueront sensiblement aux navires.

Les deux plans de symétrie seront nécessairement le plan zOx et le plan zOy. Nous supposerons que Ox soit l'axe qui correspond au plus petit moment d'inertie j_x de l'aire de la flottaison; nous nommerons cet axe l'*axe longitudinal;* la rotation $l(t)$ autour de cet axe sera le *roulis*. L'axe Oy prendra alors le nom d'*axe transversal;* la rotation $m(t)$ autour de cet axe se nommera *tangage*.

Ces hypothèses entraînent de grandes simplifications; elles donnent, en effet,

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0,$$
$$P_{yz} = 0, \qquad P_{zx} = 0, \qquad P_{xy} = 0.$$

Les équations (135) se réduisent alors aux suivantes :

$$\mathfrak{M} f''(t) + M_z g''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, x)\, ds_{23} = 0.$$

$$(152)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} g''(t) - M_z f''(t) + \displaystyle\int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, y)\, ds_{23} = 0, \\ \rho g s h(t) + \mathfrak{M} h''(t) + \displaystyle\int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, z)\, ds_{23} = 0, \\ [\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, l(t) + J_x l''(t) - M_z g''(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y)]\, ds_{23} = 0, \\ [\rho g j_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, m(t) + J_y m''(t) + M_z f''(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [z_0 \cos(N_0, x) - x_0 \cos(N_0, z)]\, ds_{23} = 0. \\ J_z n''(t) + \displaystyle\int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} [x_0 \cos(N_0, y) - y_0 \cos(N_0, x)]\, ds_{23} = 0. \end{cases}$$

La quantité $\mathfrak{Q}$ garde la forme donnée par l'égalité (138); l'égalité (8), qui fait connaître $\mathfrak{S}$, se réduit ici à

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{M}(F^2 + G^2 + H^2) + 2M_z(MF - GL) + J_x L^2 + J_y M^2 + J_z N^2. \tag{153}$$

Supposons maintenant que les parois du bassin où le flotteur se trouve primitivement en équilibre admettent également les deux plans de symétrie zOx, zOy; cette hypothèse n'exclura pas le cas où le flotteur est à la surface d'une nappe d'eau infiniment étendue suivant toute direction horizontale.

Le problème ainsi restreint admettra trois catégories particulières de solutions que nous désignerons respectivement par les noms de *vibration verticale pure*, de *roulis pur* et de *tangage pur*.

I. Vibration verticale pure. — Les équations (152) nous permettent de prendre constamment

$$l(t) = 0, \quad m(t) = 0, \quad n(t) = 0, \quad f(t) = 0, \quad g(t) = 0,$$

en prenant en même temps pour $\psi(x, y, z, t)$ une fonction qui ne change de valeur ni lorsqu'on change x en $-x$, ni lorsqu'on change y en $-y$; et c'est ce qui aura assurément lieu, puisque cette fonction est alors déterminée par les conditions suivantes :

1° Dans tout le volume que le fluide occupait au moment de l'équilibre, on a

$$\Delta\psi = 0; \tag{154}$$

2° En tout point de la surface σ par laquelle ce volume est contigu au plan $z = 0$, on a

$$g\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \tag{155}$$

3° En tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial N_0} + \cos(N_0, z)\, h(t) = 0; \tag{156}$$

4° En tout point de la paroi du bassin, on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{157}$$

Toutes les équations (152) sont identiquement vérifiées, sauf la troisième, qui garde la forme

$$\rho g s\, h(t) + \mathfrak{M}\, h''(t) + \int_{s_{23}} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cos(N_0, z)\, ds_{23} = 0. \tag{158}$$

Le problème particulier que définissent les équations (154) à (158) prête aux mêmes raisonnements, aux mêmes calculs que le problème général.

En ce problème, en vertu des égalités (138) et (153), nous aurons simplement

$$\mathfrak{Q} = \rho g s \mathrm{H}^2, \tag{159}$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\, \mathrm{H}^2. \tag{160}$$

En un mouvement du liquide *associé* au mouvement du flotteur, la surface du liquide dans le bassin demeurera horizontale et s'élèvera d'une quantité

$$\zeta(t) = -\frac{s}{\sigma} h(t).$$

La forme $\mathfrak{T}$ sera encore donnée par l'égalité

$$\mathfrak{T} = \rho g \frac{s^2}{\sigma} \mathrm{H}^2. \tag{143}$$

Considérons un déplacement du fluide qui admette un potentiel des élongations $\varepsilon\Psi$ et qui soit *associé* au déplacement $\varepsilon\mathrm{H}$ du flotteur.

Nous prendrons

$$\Psi = \Phi \mathrm{H}.$$

La fonction $\Phi(x, y, z)$ devra vérifier :

1° En tout point du volume 2, l'équation

$$\Delta\Phi = 0: \tag{161}$$

2° En tout point de la surface σ, la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{s}{\sigma}; \tag{162}$$

3° En tout point de la surface s_{23} par laquelle le flotteur est contigu au liquide, la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N_0} + \cos(N_0, z) = 0; \tag{163}$$

4° En tout point de la paroi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \tag{164}$$

La quantité essentiellement positive

$$\mathfrak{M}' = \rho \int_2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi_2 \tag{165}$$

a les dimensions d'une masse; nous la nommerons la *masse fictive associée* au flotteur vibrant verticalement.

Nous pourrons écrire, dans le problème actuel,

$$\Theta = \mathfrak{M}' H^2, \tag{166}$$

$$\mathfrak{T}'(t) = \frac{\mathfrak{M}'}{2} [h'(t)]^2. \tag{167}$$

En reprenant les raisonnements qui ont été développés dans le cas général, nous trouverons que *la plus longue période* T_1 *que puisse présenter une vibration pendulaire verticale du flotteur est assurément supérieure à la quantité*

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{\rho g s \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)}}. \tag{168}$$

Cette période est celle du mouvement pendulaire qui satisfait à la *première équation fictive*

$$\rho g s \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right) h(t) + (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') h''(t) = 0. \tag{169}$$

T_0 *et, a fortiori,* T_1 *sont inférieurs à la quantité*

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\rho g s \left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)}}. \tag{170}$$

qui est la période du mouvement pendulaire unique défini par la *seconde équation fictive*

(171) $$\rho g s\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)h(t)+\mathfrak{M}\,h''(t)=0.$$

Dans le cas où la surface du fluide est infiniment étendue, on a

(172) $$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'}{\rho g s}},$$

(173) $$T'_0=2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\rho g s}}.$$

Cette valeur (173) de T'_0 est celle que fournit la méthode de Poisson et de Duhamel.

II. Roulis pur. — Nous pouvons satisfaire aux équations (152) en prenant constamment

$$f(t)=0,\quad g(t)=0,\quad h(t)=0,\quad m(t)=0,\quad n(t)=0,$$

pourvu qu'en même temps la fonction $\psi(x, y, z, t)$ soit douée de ces deux propriétés :

1° Elle change de signe, sans changer de valeur absolue, lorsque l'on change x en $-x$;

2° Elle ne change pas lorsque l'on change y en $-y$.

Or, elle peut être choisie ainsi; elle est assujettie, en effet, aux conditions (154), (155) et (157); en outre, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, on doit avoir

(174) $$\frac{\partial\psi}{\partial N_0}+[y_0\cos(N_0, z)-z_0\cos(N_0, y)]\,l(t)=0.$$

Les équations (152) sont toutes identiquement vérifiées, sauf la quatrième qui se réduit à

(175) $$[\rho g j_x+\mathfrak{M}g(Z-Z')]\,l(t)+J_x\,l''(t)$$
$$+\int_{s_{23}}\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}[y_0\cos(N_0, z)-z_0\cos(N_0, y)]\,ds_{23}=0.$$

Ce problème particulier donne encore lieu à des raisonnements et à des calculs semblables à ceux qui ont été développés dans le cas général.

En ce problème particulier, les égalités (138) et (153) donnent

$$(176) \qquad \mathfrak{Q} = [\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')] L^2,$$

$$(177) \qquad \mathfrak{I} = J_x L^2.$$

En un déplacement du fluide *associé* au déplacement du flotteur, la surface libre du liquide demeure immobile, en sorte que l'on a

$$(178) \qquad \mathfrak{S} = 0.$$

Au déplacement εL du solide, nous pouvons *associer* un déplacement du liquide qui dépende d'un potentiel $\varepsilon\Psi$ des élongations. Posons

$$\Psi = \Phi l.$$

La fonction Φ devra vérifier l'équation de Laplace

$$(179) \qquad \Delta\Phi = 0$$

en tout point du volume qu'occupe le fluide en équilibre; en tout point de la paroi immobile ou de la surface libre, on aura

$$(180) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0;$$

enfin, en tout point de la surface mouillée s_{23} du flotteur, on aura

$$(181) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial N_0} + y_0 \cos(N_0, z) - z_0 \cos(N_0, y) = 0.$$

La quantité

$$(182) \qquad J'_x = \rho \int_2 \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi_2$$

a les mêmes dimensions qu'un moment d'inertie; elle est essentiellement positive, à moins que la surface mouillée du navire ne soit de révolution autour de l'axe longitudinal; dans ce dernier cas, elle est nulle. Nous donnerons à cette quantité le nom de *moment fictif d'inertie par rapport à l'axe longitudinal.*

Nous aurons, dans le cas qui nous occupe en ce moment,

$$\Theta = J'_x L^2, \tag{183}$$

$$\mathfrak{C}'(t) = \frac{J'_x}{2}[l'(t)]^2. \tag{184}$$

En appliquant alors à ce cas particulier les propositions démontrées dans le cas général, nous obtenons les théorèmes suivants :

Si la surface mouillée du navire est de révolution autour de l'axe de plus petite inertie de l'aire de la flottaison, la période T_1 *que présente un roulis pendulaire pur est unique et a pour valeur*

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')}}. \tag{185}$$

Si la surface mouillée du navire n'est pas de révolution autour de l'axe longitudinal, le roulis pendulaire pur peut présenter une infinité de périodes dont la plus longue, T_1, *est assurément supérieure à la quantité*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_x + J'_x}{\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')}}, \tag{186}$$

et, a fortiori, à la quantité

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')}}. \tag{187}$$

T_0 est la période du mouvement pendulaire qui intègre la *première équation fictive*

$$[\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, l(t) + (J_x + J'_x)\, l''(t) = 0. \tag{188}$$

T'_0 est la période du mouvement pendulaire qui intègre la *seconde équation fictive*

$$[\rho g j_x + \mathfrak{M} g(Z - Z')]\, l(t) + J_x\, l''(t) = 0. \tag{189}$$

Cette dernière est l'équation qu'ont étudiée Poisson et Duhamel.

A quel point la connaissance de la quantité T'_0 renseigne incomplètement au sujet de la plus longue période T_1 du roulis pur, nous allons le reconnaître par les considérations suivantes :

Imaginons, tout d'abord, que la surface mouillée du navire soit de révolution autour de l'axe longitudinal; la période véritable du roulis pur, donnée alors par l'égalité (185), est égale à la quantité T'_0 donnée par l'égalité (187).

A ce navire, ajoutons des *quilles* dont l'épaisseur et, partant, le volume et la masse soient négligeables; l'adjonction de ces quilles ne modifie en rien la valeur de la quantité T'_0 donnée par l'égalité (187).

En revanche, le moment fictif d'inertie J'_x, nul avant l'addition de ces quilles, est rendu positif par cette addition; T_0 a maintenant une valeur supérieure à T'_0; *a fortiori* en est-il de même de T_1, qui est désormais supérieur à T_0. L'addition des quilles a donc sûrement fait croître la période la plus longue du roulis pur du navire; l'emploi de la méthode de Poisson et de la formule (187) ne permet pas de prévoir cette influence exercée par des quilles sur le roulis; la formule (186) fait prévoir l'existence et le sens de cette influence, mais elle ne permet pas d'en évaluer la grandeur.

III. Tangage pur. — On pourra vérifier les équations (152) en faisant constamment

$$f(t) = 0, \qquad g(t) = 0, \qquad h(t) = 0, \qquad l(t) = 0, \qquad n(t) = 0,$$

et en prenant pour $\psi(x, y, z, t)$ une fonction paire de x et impaire de y. On aura alors un *tangage pur* qui se traitera exactement comme le roulis pur. *La période la plus longue* T_1 *que puisse présenter un tangage pendulaire pur, en un flotteur dont la surface mouillée n'est pas de révolution autour de l'axe transversal, est assurément plus grande que la valeur*

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_y}{\rho g I_y + \mathfrak{M} g(Z - Z')}} \tag{190}$$

attribuée à cette période par la théorie de Poisson et de Duhamel.

En résumé, les objections de principe que Clebsch a élevées contre la théorie des oscillations des corps flottants développée par Poisson et par Duhamel sont pleinement justifiées; les suppositions admises par cette théorie sont gravement erronées. Cependant, les conséquences auxquelles elle conduit ne sont pas toutes à rejeter. Les conditions de stabilité qu'elle a formulées sont exactes. Appliquée à un navire doublement symétrique qui flotte sur une mer illimitée, à chacune des trois sortes d'oscillations pendulaires simples, vibration verticale pure, roulis pur, tangage pur, elle attribue des périodes déterminées; ces périodes ne sont pas égales aux plus longues périodes des oscillations véritables; mais on peut toujours affirmer que celles-ci sont respectivement supérieures à celles-là.