JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE BOUTROUX

Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 6 (1910), p. 137-199.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__137_0>

Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré;

PAR M. PIERRE **BOUTROUX**.

1. — Introduction.

J'ai donné ailleurs (¹) (*Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, 1908; *Équations différentielles et fonctions multiformes*, ap. *Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. XXIX, 1910) les premiers résultats auxquels m'ont conduit les recherches que j'ai entreprises sur les singularités transcendantes des équations différentielles. Jusqu'ici, toutefois, je n'ai analysé, avec quelques détails, qu'un seul type d'équations (du premier ordre et du premier degré), savoir le type

$$\frac{dy}{dx} = \text{polynome en } x \text{ et } y. \tag{1}$$

Il est donc assez opportun de rechercher, avant même de poursuivre l'étude de l'équation (1), quelle est la généralité et la portée des résultats auxquels conduit cette équation. C'est pourquoi je vais examiner, dans ce travail, l'équation rationnelle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (\text{P et Q polynomes}). \tag{2}$$

Je voudrais montrer que les singularités de l'équation (2) se laissent

[1] Ayant à faire de fréquents renvois à ces deux travaux, je désignerai, pour abréger, le premier par la lettre L, le second par la lettre P.

ramener à un petit nombre de types dont l'équation (1) fournit les spécimens les plus simples, en sorte que l'analyse de cette équation polynomale *conduit bien à une classification générale des singularités transcendantes présentées par les équations rationnelles du premier ordre*. Dès maintenant, nous pouvons prévoir qu'il n'y aurait rien d'essentiel à changer aux méthodes que nous allons employer pour les rendre applicables à des équations plus complexes. D'ailleurs, la plupart des résultats que nous obtiendrons se trouveront démontrés pour des équations plus générales que (2), ainsi que nous le constaterons chemin faisant.

Je rappelle en quelques mots ce que j'entends par *étude d'une singularité transcendante*. Il ne s'agit pas seulement de former certaines familles d'intégrales représentées, sur des chemins déterminés, par des développements convergents. Je veux obtenir l'ensemble total des déterminations d'une même intégrale qui se permutent au voisinage du point transcendant, et je veux déterminer le mécanisme suivant lequel s'échangent ces déterminations. Ainsi, par exemple, quoique j'aie fréquemment à me servir des formes d'équations données par Briot et Bouquet, je ne me place pas, pour les étudier, au point de vue généralement adopté. En effet, l'effort des analystes qui ont poursuivi les recherches de Briot et Bouquet a presque exclusivement porté sur les équations réduites de la forme

$$(e) \qquad x^k \frac{dy}{dx} = \text{développement en } x \text{ et } y \text{ nul pour } x = y = 0.$$

Il s'agissait de savoir si l'équation (e) a des intégrales qui s'annulent au point origine lorsqu'on tend vers ce point sur certains chemins. Or, le problème ainsi posé me paraît être à la fois trop particulier et trop général. Il est trop particulier parce qu'il n'épuise pas l'étude des intégrales $y(x)$ dans un domaine entourant l'origine où x se mouvrait librement. Il est trop général parce que l'étude d'une singularité transcendante conduit, le plus souvent, à plusieurs équations (e), et qu'en isolant l'une de ces équations des équations associées, on est exposé à confondre, dans une même analyse, des cas très différents.

Tout en passant en revue les singularités transcendantes de l'équation (2), je mettrai en lumière certaine propriété qui leur est commune.

Considérons une aire γ *contenant un seul point transcendant*, ξ, *de l'équation* (2), *et un chemin du plan* x *qui traverse* γ (*pénétrant dans* γ *en un point* $\bar{x}$ *et en ressortant en un point* $\bar{x}_1$). *Soient, d'autre part*, $\bar{y}$, $\bar{y}_1$ *les valeurs prises en* $\bar{x}$ *et* $\bar{x}_1$ *par une intégrale* y *de* (2) *suivie le long de* $\bar{x}\,\bar{x}_1$. Nous ne modifions pas l'intégrale y si nous déformons le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ sans lui faire traverser aucun point singulier de ladite intégrale; en particulier, si l'intégrale définie par la valeur initiale $\bar{y}$ n'était point singulière dans γ, nous pourrions déformer le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ de manière à le faire entièrement sortir de γ; mais supposons que, lorsque $\bar{y}$ varie, l'intégrale y devienne singulière dans γ pour une certaine valeur de $\bar{y}$; il en sera alors de même pour un ensemble de valeurs $\bar{y}$ contiguës, appartenant à une aire Δ. On peut dès lors se demander *pour quelles valeurs particulières* $\bar{y}$, *appartenant à l'aire* Δ, *l'intégrale suivie sur* $\bar{x}\,\bar{x}_1$ *présentera des points critiques confondus avec le point transcendant* ξ (circonstance qui *oblige* le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ à traverser ξ). Je me propose de montrer que, QUELLE QUE SOIT LA NATURE DU POINT ξ, LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DE $\bar{y}$ AINSI DÉFINIES SONT DES VALEURS ISOLÉES.

Ce théorème (théorème $\mathcal{A}$) se présentera, suivant les cas, sous diverses formes. Pour les classes de points transcendants que nous étudierons tout d'abord [classes A et B (voir *infra*, n° 2)] il pourra être déduit d'un théorème connexe (théorème $\mathcal{B}$) que nous énoncerons comme il suit :

Considérons une intégrale, singulière au voisinage du point transcendant ξ, et appelons x', x'' deux points critiques quelconques présentés par cette intégrale lorsqu'on la suit, au voisinage de ξ, le long d'un *chemin direct* (¹) (par exemple : sur un rayon ou un arc de cercle). Le point x'' est fonction continue de x' et voisin de ξ pour x' voisin de ξ. Envisageons alors, *au voisinage de* ξ, la fonction $x''(x')$; j'établirai que *cette fonction ne peut prendre la valeur* ξ *que pour* x' *égal à* ξ.

(¹) *Cf.* mon Mémoire des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III, 1909, p. 322. Je suppose que le chemin qu'il faut suivre de x à x'', pour passer en ces deux points avec la valeur critique, est un chemin direct.

Lorsque le théorème $\mathfrak{A}$ se trouvera en défaut (pour les points de la classe C, *voir* n° 2), nous y suppléerons par une proposition voisine en particularisant la nature du chemin direct qui relie les deux points critiques x', x''; ces deux points critiques seront, par exemple, supposés se rapprocher arbitrairement du point transcendant dans une direction déterminée.

Le théorème $\mathfrak{A}$ donne lieu à diverses conséquences. Faisons, par exemple, varier $\bar{y}$ dans Δ, et considérons $\bar{y}_1$ comme fonction de $\bar{y}$. On voit de suite (*cf.* les travaux de M. Painlevé) que la fonction $y_1(\bar{y})$ ne peut présenter, dans Δ, que des singularités algébriques en dehors des valeurs $\bar{y}$ exceptionnelles définies ci-dessus. Notre proposition établit donc que les singularités transcendantes présentées dans Δ par la fonction $\bar{y}_1(\bar{y})$ sont des singularités isolées.

Plus généralement, considérons dans le plan x, deux points x_0, x_1, et soient y_0, y_1 les valeurs prises en ces points par une intégrale de (2) suivie le long d'un chemin qui les joint. Lorsque y_0 varie, y_1 est une certaine fonction de y_0 (c'est l'intégrale *fonction de la constante arbitraire* dont l'étude a été faite par M. Painlevé); d'ailleurs le chemin $x_0\,x_1$ (sur lequel on doit suivre l'intégrale pour arriver en z_1 avec $y = y_1$) doit varier avec continuité en même temps que y_0; il faut le déformer de manière à éviter les points critiques de l'intégrale suivie. Quelles seront, dans ces conditions, les singularités transcendantes de la fonction $y_1(y_0)$? De telles singularités ne peuvent se présenter que *si certains points critiques contournés par le chemin $x_0 x_1$ viennent coïncider avec des points transcendants ξ de l'équation différentielle ou bien deviennent indéterminés.*

Écartons d'abord cette seconde hypothèse et appelons η une valeur de y_0 pour laquelle le chemin $x_0 x_1$ passe *entre* deux points critiques infiniment rapprochés, c'est-à-dire traverse un point transcendant ξ de l'équation. Je dis que *la valeur η est nécessairement isolée.*

En effet, supposons d'abord que, pour $y_0 = \eta$, le chemin $x_0 x_1$ ne traverse pas d'autre point transcendant que ξ, et entourons ξ d'une aire γ contenant ce seul point transcendant; nous pouvons faire en sorte que, pour y_0 voisin de y_1, le chemin $x_0 x_1$ entre toujours dans γ en un même point $\bar{x}$ et en ressorte en un même point $\bar{x}_1$ (les points $\bar{x}$, $\bar{x}_1$ étant choisis parmi les points ordinaires de l'intégrale définie par la valeur initiale η); dans ces conditions la valeur $\bar{y}$, prise en $\bar{x}$ par l'intégrale qui est égale à y_0 en x_0 est (d'après un théorème bien connu) fonction algébrique de y_0; pareillement, y_1 est fonction algébrique de la valeur $\bar{y}_1$ prise en $\bar{x}_1$ par notre intégrale. J'en conclus que *les deux fonctions* $y_1(y_0)$ *et* $\bar{y}_1(\bar{y})$ *sont, au voisinage de* $y_0 = \eta$, *singulières (transcendantes)* en même temps; elles présentent ce caractère pour des valeurs isolées de $\bar{y}$ et y_0 et, par conséquent, la valeur η est isolée.

La démonstration serait encore valable, si le chemin $x_0 x_1$ traversait, pour $y_0 = \eta$, plusieurs points transcendants ξ, ξ'_1, ... Entourons, en effet, les points ξ, ξ'_1, ... de petites aires γ, γ'_1, ...; pour $\bar{y}$ voisin de η, notre chemin $x_0 x_1$ traversera toutes ces aires, savoir la première de $\bar{x}$ en $\bar{x}_1$ (valeurs correspondantes de y : $\bar{y}$ et $\bar{y}_1$), la seconde de $\bar{x}$ en $\bar{x}'_1$ (valeurs correspondantes de y : $\bar{y}'$ et $\bar{y}'_1$), etc. Nous constatons alors que la fonction $y_1(y_0)$ ne peut présenter une singularité transcendante que lorsqu'il en est de même d'une des fonctions $\bar{y}_1(\bar{y})$, $\bar{y}'_1(\bar{y}')$, etc. Or, le nombre des singularités transcendantes de l'équation (2) est *fini;* donc les singularités transcendantes de $y_1(y_0)$ sont sûrement isolées.

Ainsi, il est démontré [dans le cas de l'équation rationnelle (2)] que *les singularités transcendantes* η *de la fonction* $y_1(y_0)$ *pour lesquelles le chemin* $x_0\, x_1$ *traverse un ou plusieurs points transcendants* ξ *de l'équation différentielle sont des singularités isolées*. Cet énoncé peut-il être généralisé et étendu [1] à *toutes* les singularités trans-

---

[1] L'énoncé ainsi généralisé entraîne cette conséquence que les singularités transcendantes de la fonction $y_1(y_0)$ ne peuvent former un ensemble parfait discontinu. C'est là un théorème que M. Painlevé a admis dans ses travaux sur les équations (2) dont l'intégrale ne possède qu'un nombre fini de branches, mais qui n'a point encore été rigoureusement établi. On était tenté, en effet, de le déduire du théorème suivant : Une fonction uniforme, continue dans une aire Δ, ne peut pas cesser d'être holomorphe en un ensemble parfait discontinu de points de Δ. Or, sous cette forme, le théorème est inexact. Au lieu de chercher à le rectifier, on a peut-être avantage, en ce qui concerne les équations différentielles, à déduire le résultat requis de l'analyse directe des singularités transcendantes. C'est ce que je fais ici pour l'équation (2) et ce qu'on pourrait faire, par une méthode semblable, pour des équations plus compliquées.

cendantes de la fonction $y_1(y_0)$? Pour répondre à la question ainsi posée, il faut que nous examinions si, et dans quelles conditions, la fonction $y_1(y_0)$ peut présenter une singularité transcendante sans que le chemin $x_0 x_1$ traverse un point ξ.

Supposons que η soit une telle singularité et faisons approcher y_0 de η. Pour une valeur $\overline{y_0}$ voisine de η nous pouvons toujours donner au chemin $x_0 x_1$ la forme suivante : ligne brisée composée de segments rectilignes joignant successivement x_0 à un point critique x'_1, puis x'_1 à un point critique x'_2, ... et enfin un point critique x'_m à x_1. D'ailleurs, les points critiques $x'_1, \ldots, x'_m$ sont, ou des points critiques algébriques, ou des points critiques transcendants autour desquels se permutent *directement* une infinité de déterminations (points transcendants directement critiques). Si x'_i est un tel point transcendant, nous remplacerons le sommet x'_i de notre ligne brisée par un point x''_i arbitrairement voisin de x'_i et tracerons le petit cercle γ_i de centre x'_i passant par x''_i ; alors, au voisinage de x'_i, le chemin $x_0 x_1$ aura la forme suivante : segment rectiligne aboutissant à x''_i, circonférence γ_i (décrite une ou plusieurs fois), segment rectiligne partant de x''_i.

Ces préliminaires posés, faisons tendre $\overline{y_0}$ vers y. Nous supposons qu'aucun des points critiques $x'_i \ldots x'_m$ ne tend vers un point ξ. Supposons de plus, pour un moment, que (lorsque $\overline{y_0}$ tend vers y) le chemin $x_0 x_1$ (construit comme il vient d'être dit) ne tourne qu'un nombre fini de fois autour de chacun des points transcendants qui figurent parmi les points x'_i.

Dans ces conditions, la ligne $x_0 x_1$ comprend, lorsque $\overline{y_0}$ tend vers η, un nombre fini de côtés, plus des arcs de circonférences γ_i de longueur finie; donc, sur ce chemin, l'intégrale suivie ne cesse pas d'être algébroïde; par conséquent, il n'est pas possible que η soit une singularité transcendante de $y_1(y_0)$.

Ainsi (dans l'hypothèse où le chemin $x_0 x_1$ ne traverse, pour $y_0 = \eta$, aucun point transcendant de l'équation), la valeur $y_0 = \eta$ ne peut être singularité transcendante de $y_1(y_0)$ que si (lorsque $\overline{y_0}$ tend vers η), le le chemin brisé $x_0 x_1$ défini plus haut contourne une infinité de fois un ou plusieurs points transcendants directement critiques x'_i. Dans cette hypothèse, le chemin $x_0 x_1$ aura la forme suivante au voisinage de x'_i : segment rectiligne aboutissant en x''_i (*voir* plus haut), circonférence γ_i

de centre x'_i *décrite un nombre n de fois qui augmente indéfiniment lorsque* $\overline{y}_0$ tend vers η, et enfin segment rectiligne partant de x''_i.

Nous concluons de là que, pour obtenir les valeurs singulières de η et pour voir, en particulier, si ces valeurs singulières sont isolées, nous avons à résoudre la question suivante : *Appelant ξ un point transcendant directement critique de l'équation différentielle et $\overline{x}$ un point voisin de ξ, suivons une intégrale (singulière en ξ) sur un lacet élémentaire issu de $\overline{x}$ et entourant ξ; vers quelles limites tend l'intégrale lorsque x décrit une infinité de fois (de suite)* le lacet considéré ?

Ce problème est très voisin de ceux qui font l'objet des théorèmes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et il se trouvera résolu par la suite de ce Mémoire dans un grand nombre de cas; dans tous ces cas, les limites sont isolées et il en est, par conséquent, de même des singularités transcendantes correspondantes de la fonction $y_1(y_0)$. L'élucidation complète du problème posé pourrait sans doute être achevée par des méthodes analogues.

Je ne chercherai pas à faire, dans ce travail, une analyse complète des caractères propres aux divers types de singularités offerts par l'équation (2). Je veux seulement montrer, je le répète, comment l'étude de ces types peut être ramenée à l'étude des singularités présentées par les équations les plus simples.

2. — Classification des singularités transcendantes.

Je répartirai les singularités transcendantes de l'équation (2) entre trois classes principales que j'étudierai successivement :

A. *Points ξ qui sont, pour des valeurs isolées de y, racines du système des deux équations algébriques*

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0.$$

B. *Points ξ qui sont, quel que soit y, des pôles du premier ordre du coefficient différentiel* $\frac{P}{Q}$.

C. *Points ξ qui sont, quel que soit y, des pôles d'ordre supérieur à 1 du coefficient différentiel* $\frac{P}{Q}$.

On sait que tout point transcendant de l'équation (2) (le point $x = \infty$ étant, s'il est transcendant, ramené à distance finie par un changement de variable) appartient à l'une des trois classes : A, B, C. A l'étude de ces trois classes se réduira donc notre tâche.

Les classes A, B, C seront subdivisées ainsi qu'il suit :

Classe A. — (La singularité transcendante est supposée avoir lieu pour $x = \xi = 0$, $y = 0$) :

I. Le coefficient de y dans Q, soit $\frac{\partial Q(0,0)}{\partial y}$ est non-nul (point transcendant simple, n^{os} **3**, **4**; point transcendant multiple, n^{o} **5**).

II. $\frac{\partial Q(0,0)}{\partial y}$ est nul (point transcendant simple, n^{os} **7**, **8**, **9**; point transcendant multiple, n^{o} **10**).

Classe B. — (La singularité transcendante est supposée avoir lieu pour $x = \xi = 0$), n^{o} **12**.

Cas du point transcendant simple, n^{os} **13**, **14**.

Cas du point transcendant multiple, n^{o} **12**.

Classe C. — N^{o} **16**.

Cas du point transcendant simple, n^{os} **17**, **18**.

Cas du point transcendant multiple, n^{o} **19**.

J'indiquerai, chemin faisant, quelles sont les équations *non-rationnelles* auxquelles il est permis d'étendre les résultats obtenus.

3. — Classe A. I. — 1° $a_{10} \neq 0$.

Nous supposons que

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial Q(0, 0)}{\partial y} \neq 0.$$

Dans ces conditions, la relation implicite $Q(x, y) = 0$ donne

$$y = q(x),$$

la fonction y étant holomorphe au vosinage de $x = 0$. Posons

$$[y = v + q(x)].$$

L'équation (2) se transforme en

$$(3)\qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{dq}{dx} + \frac{P[x, v+q(x)]}{Q[x, v+q(x)]} = \frac{P_1(x, v)}{vQ_1(x, v)},$$

où P_1 et Π_1 sont polynomes en v et fonctions holomorphes de x au voisinage de $x = 0$ (Q_1 *est non-nul pour* $x = v = 0$). Nous pouvons aussi écrire en développant $\frac{P}{Q}$,

$$(4)\qquad v\frac{dv}{dx} = a_{10}x + a_{01}v + a_{20}x^2 + \ldots,$$

le second membre ne contenant pas v en facteur (s'il contenait v en facteur, l'intégrale v, nulle en $x = 0$, y serait holomorphe).

Nous avons à étudier *les intégrales de* (4) *qui sont voisines de zéro au voisinage de* $x = 0$. C'est là une étude que j'ai faite ailleurs [L. Chap. III et IV, P. Chap. III; j'ai appelé le point transcendant $x = 0$ de l'équation (4) : *point de Briot et Bouquet*]. Je me bornerai donc à reprendre, parmi les résultats de cette étude, ceux qui conduisent aux théorèmes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ énoncés au n° **1**.

Nous distinguerons deux cas suivant que a_{10} *est différent de zéro ou égal à zéro*, et nous traiterons dans ce numéro le cas $a_{10} \neq 0$.

D'ailleurs, tout ce que nous dirons est applicable non seulement à l'équation rationnelle (4), mais A TOUTE ÉQUATION (4) DONT LE SECOND MEMBRE EST UN DÉVELOPPEMENT HOLOMORPHE EN x ET v.

1° $a_{10} \neq 0$. — Appelons w_1, w_2 les racines du polynome

$$w^2 - a_{01}w - a_{10},$$

puis posons

$$\lambda_1 = -\left(2 + \frac{a_{01}}{2w_1}\right), \qquad \lambda_2 = -\left(2 + \frac{a_{01}}{2w_2}\right) \qquad (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} = -1).$$

Si l'on fait successivement les changements de variable

$$v = x\sqrt{w_1^2 + t}, \qquad v = x\sqrt{w_2^2 + u},$$

on décomposera l'équation (4) au voisinage de $x = 0$ en les deux équations

$$\begin{cases} xt' = \lambda_1 t + \text{termes en } x,\ t^2,\ xt,\ \ldots \\ xu' = \lambda_2 u + \text{termes en } x,\ u^2,\ xu, \end{cases}$$

et les branches v, critiques au voisinage de $x = 0$, seront représentées en général (*voir* la note ci-dessous) par un développement en x et $C_1 x^{\lambda_1}$, et un développement en x et $C_2 x^{\lambda_2}$. *Pour avoir toutes les branches qui se permutent au voisinage de $x = 0$, il suffit (sauf peut-être lorsque les λ sont réels) de considérer les deux développements pour l'ensemble des valeurs de C_1 et C_2 liées par la relation*

$$C_1^{\lambda_1^{-1}} = kC_2^{\lambda_2^{-1}} \qquad (k \text{ constante}).$$

Le mécanisme, suivant lequel se permutent ces branches, peut être analysé en détail, ainsi que je l'ai montré ailleurs (*loc. cit.*). Il présentera des caractères différents suivant qu'on se trouvera dans l'un ou dans l'autre des cas suivants :

a. λ_1 et λ_2 sont complexes, la partie réelle de λ_1 (ou λ_2) étant positive;
b. λ_1 et λ_2 sont réels irrationnels, λ_1 étant positif;
c. λ_1 et λ_2 sont réels fractionnaires, dans les mêmes conditions;
d. Mêmes hypothèses, λ_1 étant entier;
e. λ_1 et λ_2 sont complexes, leurs parties réelles étant négatives;
f. λ_1 et λ_2 sont réels irrationnels négatifs;
g. λ_1 et λ_2 sont réels rationnels négatifs;
h. λ_1 et λ_2 sont complexes, λ_1 étant purement imaginaire;
i. λ_1 et λ_2 sont nuls.

Dans les cas (1) *a, b et c*, l'origine est, pour l'équation (4), un point

(1) Rappelons brièvement les principaux caractères qui distinguent les cas *a*, ..., *i* les uns des autres (*L.*, Chap. IV, *P.*, III, et mon Mémoire des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1908).

J'appelle *caractéristique* une branche d'intégrale suivie, à partir d'une valeur initiale donnée, le long d'un chemin rectiligne, et *branche d'intégrale* (au sens restreint) l'ensemble des caractéristiques issues d'un point donné avec une valeur donnée. Au voisinage d'un point singulier transcendant, une infinité de branches d'intégrales (au sens restreint) se permutent; il s'agit de mettre en évidence le mécanisme suivant lequel se font les permutations.

Dans le cas *a*, les branches d'intégrales qui admettent $x = 0$ comme point transcendant ont une infinité de déterminations z nulles confondues à l'origine; ces déterminations, d'autre part, peuvent s'échanger, autour de points cri-

directement critique, et les points critiques algébriques voisins de l'origine opèrent des *permutations-impasses* (*loc. cit.*). Considérons, d'autre part, l'aire γ (définie au n° **1**) qui entoure l'origine et le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ qui la traverse; appelons $\bar{v}$, $\overline{v_1}$ les valeurs prises en $\bar{x}$ et $\overline{x_1}$ par une intégrale de (4) suivie le long de $\bar{x}\,\overline{x_1}$; j'ai démontré (*loc. cit.*) que l'intégrale suivie sur $\bar{x}\,\overline{x_1}$ ne peut présenter des points

tiques x_i voisins de l'origine, avec des déterminations non-nulles (et holomorphes) à l'origine; mais soit c l'une de ces déterminations non-nulles, les caractéristiques issues de o avec la valeur c ne sauraient être permutées (au voisinage de $x=0$) par un point critique de x_i. Ainsi, on ne peut opérer une infinité de permutations au voisinage de $x=0$ qu'à condition de tourner une infinité de fois autour de l'origine directement. On opérera les permutations en décrivant indéfiniment (à partir d'une valeur initiale voisine de o) le contour d'un petit cercle γ, entourant $x=0$. S'il arrive qu'on tourne autour d'un point x_i, on effectuera une permutation qui se défera d'elle-même à l'un des tours suivants; cette permutation est une *permutation-impasse*.

Dans le cas e $[\mathcal{R}(\lambda_1)<0,\ \mathcal{R}(\lambda_2)<0]$, les branches d'intégrales qui admettent l'origine comme point transcendant présentent un ensemble infini de points critiques algébriques (dont chacun permute deux déterminations) convergeant vers $x=0$; d'ailleurs les caractéristiques singulières en ces points critiques ne sont pas singulières à l'origine. Les points critiques algébriques forment une suite unilinéaire; on peut les affecter des indices 1, 2, ..., en les rangeant dans l'ordre où il faut les contourner pour engendrer la suite des déterminations d'une même branche qui se permutent au voisinage de $x=0$; d'ailleurs pour opérer, dans l'ordre des indices croissants ou décroissants, la suite des permutations $x_{i-1}, \ldots, x_i, x_{i+1}$, il suffit de décrire indéfiniment le contour d'un même petit cercle, γ, entourant $x=0$.

Les mécanismes ci-dessus décrits subsistent, le premier dans les cas b, c et d, le second dans les cas e et f. Les seules circonstances spéciales qui puissent se présenter dans ces nouveaux cas sont : 1° non-existence de branches-limites vers lesquelles tend l'ensemble des branches d'une même intégrale qui se permutent au voisinage du point transcendant; 2° non-existence des développements en x^{λ_1}, x^{λ_2}, lesquels sont remplacés par des développements où entrent des termes logarithmiques; 3° dégénérescence de la singularité transcendante en une singularité algébrique.

L'agencement des points critiques montre, dans tous les cas, que si l'on considère deux points critiques x', x'' présentés, au voisinage de l'origine, par une même intégrale suivie sur un chemin direct, *la fonction* x'' (x') *ne peut s'annuler que pour* $x'=0$. C'est le théorème $\mathfrak{B}$ énoncé au n° **1**.

critiques confondus à l'origine que si elle coïncide avec *l'intégrale particulière* V_2 (nulle et homolorphe à l'origine) *qui est donnée par le développement en* x_1 $C_2 x^{\lambda_2}$, lorsqu'on y fait $C_2 = 0$. Cette intégrale existe toujours et elle est unique.

Maintenant, la valeur $V_2(\bar{x})$ peut-elle être singularité transcendante de la fonction $\overline{v_1}(\bar{v})$? Pour définir $\overline{v_1}(\bar{v})$, nous imaginons que nous partions d'un chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ qui ne traverse ni ne contourne γ. Supposons que $\bar{v}$ se rapproche de $V_2(\bar{x})$ et que le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ pénètre dans γ. Nous pouvons remplacer le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$, à l'intérieur de γ, par un chemin ainsi composé : 1° chemin fermé $(\overline{x_1}\,\bar{x})$ intérieur à γ; 2° arc $\bar{x}\,\overline{x_1}$ du contour γ. Appelons alors $\bar{v}$, $\bar{v}'$, les valeurs prises par l'intégrale V au début et à la fin du chemin fermé $(\overline{x_1}\,\bar{x})$. D'après les propriétés rappelées en note, ces valeurs sont toutes deux représentées par le développement de Briot-Bouquet en x, $C_2 x^{\lambda_2}$. Soit $\overline{C_2}$ la valeur de C_2 correspondant à $\bar{v}$; alors (puisque $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ appartiennent à la même intégrale) la valeur de C_2 correspondant à $\bar{v}'$ sera $e^{2ik\pi}\,\overline{C_2}$ (k entier). Lorsque $\bar{v}$ prendra la valeur $V_2(\bar{x})$, $e^{2ik\pi}\,\overline{C_2}$ restera fonction holomorphe de $\overline{C_2}$. Donc $\bar{v}'$ (et par suite $\overline{v_1}$) est *fonction holomorphe* de $\bar{v}$. Ainsi (*dans le cas a*), *la singularité transcendante* o *de l'équation* (4) *ne définit aucune singularité transcendante de la fonction* $\overline{v_1}(\bar{v})$.

Dans le cas d, les développements en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ et x, $C_2 x^{\lambda_2}$ peuvent cesser d'exister. En ce cas, l'intégrale suivie le long de $\bar{x}\,\overline{x_1}$ cesse d'être fonction continue de λ_1 (ou fonction continue des coefficients a_{01}, a_{10} que nous faisons varier pour parcourir la série des cas a à i). Mais, donnons-nous des valeurs fixes de a_{01}, a_{10} pour lesquelles λ_1 soit entier positif; nous pouvons remplacer les développements en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ et x, $C_2 x^{\lambda_2}$ par des développements en x et $(C_1 + \gamma \log x) x^{\lambda_1}$ et en x, $C_2 x^{\lambda_2}$, $C_2 x^{\lambda_1} \log x$ (γ étant une fonction rationnelle des coefficients de l'équation). Nous constatons alors que la singularité transcendante $x = 0$ est du même type que tout à l'heure (point directement critique auquel sont associées des permutations-impasses). Le chemin $\bar{x}\,\overline{x_1}$ ne pourra, en ce cas encore, traverser l'origine que si l'intégrale suivie sur ce chemin coïncide avec l'intégrale particulière V_2 nulle et holomorphe au voisinage de l'origine. De là on déduit le théorème A.

Dans le cas e, l'origine est un point indirectement critique de première espèce (*loc. cit.*). Considérons, d'autre part, le chemin $\overline{x\,x_1}$ et les valeurs $\bar{v}$, $\overline{v_1}$. Ces valeurs sont représentées par l'un ou par l'autre des deux développements en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ et x, $C_2 x^{\lambda_2}$. Si elles sont représentées par le même développement, il résulte des propriétés du point transcendant que *le chemin $\overline{x\,x_1}$ peut toujours être déformé de manière à rester extérieur à l'aire γ entre les points $\bar{x}$* et $\overline{x_1}$; nous ne rencontrons alors, pour $\bar{v}$ voisin de o, aucune singularité transcendante de la fonction $\overline{v_1}\,(\bar{v})$. Mais supposons que les déterminations $\bar{v}$ et $\overline{v_1}$ soient représentées, l'une (par exemple $\bar{v}$) par le développement en x, $C_1 x^{\lambda_1}$, la seconde $(\overline{v_1})$ par le développement en x, $C_2 x^{\lambda_2}$; alors la fonction $\overline{v_1}\,(\bar{v})$ présente une singularité transcendante lorsque $\overline{x\,x_1}$ traverse l'origine. Or, dans l'hypothèse actuelle, il résulte de l'analyse que j'ai faite que le chemin $\overline{x\,x_1}$ n'est amené *à travers l'origine que si l'intégrale définie par la valeur $\bar{v}$ coïncide avec l'intégrale particulière* V_1 (*nulle et holomorphe à l'origine*) *qui est donnée par le développement* en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ *lorsqu'on y fait* $C_1 = 0$. L'intégrale égale à $\overline{v_1}$ au point $\overline{x_1}$ coïncide alors avec l'intégrale holomorphe V_2. Les deux intégrales V_1, V_2 existent sûrement (puisque, actuellement, λ_1, λ_2 sont des nombres finis à parties réelles négatives); elles se croisent en $x = 0$.

Les développements en C_1 et C_2 cessent en général d'exister dans le cas *g*. Il en résulte que lorsque λ_1 et λ_2 deviennent réels (négatifs), l'intégrale suivie sur $\overline{x\,x_1}$ cesse d'être fonction continue de λ_1 (ou des coefficients $a_{0,1}$, $a_{1,0}$). Mais donnons-nous des valeurs *fixes* de a_{01}, a_{10} pour lesquelles λ_1 et λ_2 soient réels négatifs. Si ces exposants sont irrationnels, les développements en C_1, C_2 sont encore convergents (dans une couronne entourant $x = 0$) pour les petites valeurs de ces paramètres. Si λ_1 et λ_2 sont rationnels, les développements peuvent être remplacés par des développements procédant suivant les puissances de x, $C_1 x^{\lambda_1}$, $C_1 x^{\lambda_1} \log x$ et de x, $C_2 x^{\lambda_2}$, $C_2 x^{\lambda_2} \log x$. Dans un cas comme dans l'autre, le chemin $\overline{x\,x_1}$ ne traverse l'origine que si l'intégrale suivie sur ce chemin coïncide avec V_1 ou avec V_2.

Pour arriver directement à ce dernier résultat, on peut écrire l'équation (4) sous la forme

$$v\frac{dv}{dx} = a_{10}x + a_{01}v + \mu(a'_{20}x^2 + \ldots) \tag{4 bis}$$

et faire varier μ avec continuité depuis o jusqu'à 1. Quel que soit μ entre o et 1, l'intégrale v suivie sur $\overline{x x_1}$ est, tout le long de ce chemin, fonction continue de μ; il s'ensuit qu'elle ne peut présenter plusieurs points identiques confondus à l'origine que si $v = V_1$ ou $v = V_2$.

Le *cas h* est le cas-limite [1] qui sépare le cas *a* du cas *e*. L'origine est, dans ce cas, point indirectement critique; les deux développements en x, $C_1 x^{\lambda_1}$ et x, $C_2 x^{\lambda_2}$ sont convergents dans des couronnes circulaires, et $\overline{x x_1}$ ne peut traverser l'origine que si l'intégrale coïncide avec V_1 ou V_2.

4. — Classe A. I. — 1° $a_{10} \not\preceq 0$ (suite).

Ne m'étant point, dans mes précédents travaux, arrêté sur le *cas i*, je donne ici quelques indications sur le mécanisme des permutations qui caractérise ce cas.

Considérons d'abord l'intégrale générale (5) de l'*équation* (4 *bis*),

---

[1] Voyons comment s'opérera, lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$, le passage du cas *a* au cas *e* ou le passage inverse. Considérons un petit cercle γ de centre $x = 0$, et une petite couronne circulaire Σ, de même centre, ayant la circonférence γ pour bord intérieur. A supposer que le module de λ_1 soit constant, nous pouvons prendre $|C_1|$ assez petit pour que le développement en x et $C_1 x^{\lambda_1}$ converge à l'intérieur de Σ aussi bien pour $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$ que pour $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$. Ainsi, lorsque λ_1 traverse une valeur imaginaire, le développement ne cesse pas de converger sur le contour γ pour les petites valeurs de $|C_1 x^{\lambda_1}|$; nous pouvons suivre ce développement sans discontinuité. En revanche, l'allure de la branche d'intégrale définie par le développement en x, $C_1 x^{\lambda_1}$, va se trouver modifiée à l'intérieur du cercle γ. Voyons, par exemple, ce qui se passera lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1)$ passera du signe — au signe +. Considérons [pour $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$] une caractéristique voisine de l'intégrale holomorphe V_1. Cette caractéristique s'annule, nous le savons, en un point critique x_1 voisin de o. La branche d'intégrale à laquelle elle appartient présente d'ailleurs une infinité de points critiques convergeant vers l'origine, et, si l'on veut passer successivement par tous ces points critiques avec la valeur

où $\mu = 0$. Cette intégrale s'écrit

$$(5)\quad v + xw, \qquad Cx = \frac{e^{\frac{b}{w-b}}}{w-b} \qquad \left(b = \frac{a_{01}}{2} = \sqrt{-a_{10}},\ \text{C const. d'intégration}\right).$$

Nous voyons que, pour $x = 0$, l'égalité (5) donne

$$\text{soit } w = \infty \qquad \text{avec} \qquad \lim Cxw = 1; \qquad \text{soit } w = b.$$

D'autre part, l'intégrale (5) ne présente qu'un seul point critique algébrique, savoir, le point $x_0 = \frac{-1}{Cbe}$ où $w = 0$. Ainsi donc, au voisinage de l'origine, toute intégrale, v, de (4 *bis*) se décomposera en :

1° Une caractéristique holomorphe, égale à C^{-1} pour $x = 0$;

2° Une infinité de caractéristiques nulles et singulières en $x = 0$.

Pour distinguer ces dernières caractéristiques, considérons leurs valeurs en un point $\bar{x}$ arbitrairement rapproché de o; nous avons, en ce point, une infinité de déterminations différentes..., $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ... (voisines de o), qui se permutent entre elles lorsque la variable x tourne une infinité de fois autour de l'origine. D'ailleurs, parmi les caractéristiques issues de $\bar{x}$ avec les valeurs $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., une seule présentera un point critique autre que l'origine (le point x_0) : ce sera, par exemple, la caractéristique correspondant à $\bar{v}_0$.

---

critique o, il faut faire décrire à x une spirale s'enroulant une infinité de fois autour de $x = 0$. Cela posé, lorsque $\mathcal{R}(\lambda_1)$ diminue en valeur absolue, le nombre des spires de la spirale diminue ; et, à la limite $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$, le chemin qui passe par la suite des points critiques devient un chemin simple direct (*Cf.* mon Mémoire des *Annales de l'École Normale*, n° **3**). J'en conclus que, pour $\mathcal{R}(\lambda_1) = 0$, *il ne peut exister aucune couronne circulaire où la branche d'intégrale, qui s'annule au point critique x, voisin de o, soit représentable par un développement en x et $C_1 x^{\lambda_1}$.*

De là résulte que les caractéristiques définies sur le contour γ par le développement de Briot et Bouquet ne s'annulent en aucun point intérieur à γ; elles ne présentent dans γ d'autre point critique que l'origine (point transcendant directement critique) ; d'ailleurs elles ne s'y annulent pas; elles ne tendent vers aucune limite lorsque x tend vers o le long d'un rayon. Pour obtenir des caractéristiques qui présentent des points critiques algébriques à l'intérieur de γ, il faudrait (dans le développement de Briot et Bouquet) faire tendre $|C_1|$ vers une valeur pour laquelle le développement est divergent.

Ces résultats subsisteront, à l'intérieur d'un petit cercle γ de centre $x = 0$ et de rayon non-nul, pour l'équation (4 *bis*) où μ croît de 0 à 1. Toute intégrale de (4 *bis*) possède une infinité de caractéristiques nulles à l'origine et se permutant autour de l'origine; parmi ces caractéristiques, une seule (celle qui est définie en $\overline{x}$ par la valeur initiale $\overline{v_0}$) présente un point critique algébrique, x_0, à l'intérieur de γ; ce point critique la permute avec une caractéristique holomorphe dans γ et égale à C^{-1} pour $x = 0$.

Ainsi, *l'origine est pour l'équation* (4) *un point transcendant directement critique*. Le point critique x_0 opère une permutation-impasse.

Représentation des caractéristiques qui s'annulent à l'origine. — Soit γ_1 un cercle arbitrairement petit de centre $x = 0$; d'après ce qui précède, nous pourrons toujours représenter les caractéristiques singulières à l'origine par *un développement qui reste convergent dans la couronne circulaire comprise entre les cercles* γ_1 *et* γ.

Développons, en effet, ces caractéristiques par rapport aux puissances de μ

$$v = v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots;$$

le développement converge bien pour ($|\mu| < 1$) entre γ_1 et γ; cherchons comment les coefficients dépendent de x. Le premier coefficient, v_0, n'est autre que le produit par x de la fonction w liée à x par la relation (5). Or, par inversion de cette relation, on obtient [1] w sous forme d'un développement qui procède suivant les puissances négatives

---

[1] Posons $\omega = \dfrac{\log(w - b)}{\log Cx}$. L'intégrale générale (5) s'écrira

$$\frac{b}{w - b} = (1 + \omega) \log Cx,$$

ou en prenant les logarithmes

$$\omega = \frac{\log b}{\log Cx} - \frac{\log(1 + \omega)}{\log Cx} - \frac{\log \log Cx}{\log Cx}.$$

Or, cette dernière égalité est de la forme $F\left(\omega, \dfrac{1}{\log Cx}, \dfrac{\log \log Cx}{\log Cx}\right) = 0$. F étant un développement holomorphe par rapport aux trois quantités de $\log Cx$ et les puissances positives de $\log\log Cx$. Les coefficients suivants, $v_1, v_2, \ldots$, sont alors donnés par des équations différentielles linéaires dépendant de x, de $(\log Cx)^{-1}$ et de $\log\log Cx$; ils sont développables par rapport à ces mêmes quantités.

Ayant ainsi brièvement caractérisé le cas i, demandons-nous maintenant pour quelles valeurs de $\bar{v}$ l'intégrale de (4), suivie sur le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ du n° **3**, peut présenter des points critiques confondus en $x = 0$ (il est clair que cette intégrale cesse d'être fonction continue de λ, lorsque λ_1 traverse la valeur o).

Considérons, d'abord, l'équation (4 *bis*) où $\mu = 0$. Nous voyons que, pour cette équation, notre chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ ne peut être amené à traverser l'origine que si v coïncide avec l'intégrale particulière $w = b (v = bx)$, pour laquelle $C = \infty$.

Faisons maintenant varier μ à partir de o. Dans le cas présent, l'équation (4 *bis*) possède une et une seule intégrale nulle et holomorphe à l'origine que nous désignerons par V_1. En effet, les deux équations en t et u du n° **3** se trouvent coïncider; elles s'écrivent

$$V = x\sqrt{b^2 + t}; \qquad xt' = \text{termes en } x,\ t^2,\ xt,\ \ldots,$$

équation vérifiée par un et un seul développement nul et holomorphe en $x = 0$.

Nous savons, d'autre part, que, le long du chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$, et sur tout autre chemin issu de x, l'intégrale v est fonction continue de μ. En particulier, si cette intégrale s'annule en un point critique x_0 voisin de l'origine, elle ne présente (pour μ voisin de o) aucun autre point critique (voisin de o) sur l'ensemble des rayons issus de x_0. On en conclut que, lorsque x_0 tend vers o, l'intégrale tend vers une intégrale particulière qui ne possède, au voisinage de l'origine, d'autre point singulier que l'origine elle-même; *cette intégrale est nécessairement* V_1.

ω, $\dfrac{1}{\log Cx}$, $\dfrac{\log\log Cx}{\log Cx}$ (quantités voisines de o pour la branche d'intégrale considérée). D'ailleurs $\dfrac{\partial F}{\partial \omega} \neq 0$. Donc ω est développable par rapport aux puissances croissantes de $\dfrac{1}{\log Cx}$ et $\dfrac{\log\log Cx}{\log Cx}$.

De proche en proche, la conclusion s'étend au cas où $\mu = 1$, c'est-à-dire à l'équation (4).

5. — Classe A. I. — 2° $a_{10} = 0$.

Nous venons d'examiner successivement les diverses équations (4) pour lesquelles λ_1 et λ_2 ont des valeurs finies. Il nous reste à examiner le cas où l'un de ces exposants est infini. Ce cas se présente lorsque PLUSIEURS POINTS TRANSCENDANTS DU TYPE ÉTUDIÉ CI-DESSUS *viennent à se confondre* (en d'autres termes, lorsque $a_{10} = 0$).

Nous remarquerons d'abord qu'un point transcendant multiple de la classe A, I peut toujours être regardé comme un *point de la classe* C. Il suffit, en effet (si $a_{01} \neq 0$), de faire le changement de variable $v = x^k w$ (k étant l'indice du premier des coefficients $a_{10}, a_{20} \ldots$, qui n'est pas nul) pour ramener l'équation (4) à l'un des types [1] que nous étudierons aux n^{os} **16** et suivants.

---

[1] Montrons, sur un exemple simple, comment l'équation transformée se ramènera aux types de la classe C que nous étudierons plus bas (n^{os} **16** et suiv.). Soit l'équation

$$vv' = av + bx^2$$

que le changement de variable $v = x^2\omega$ transforme en

$$x^2\omega' = \frac{b + a\omega - 2x\omega^2}{\omega}.$$

Pour ramener cette équation à la forme normale [polynomes p d'une part, polynomes q d'autre part, tous de même degré (*voir* n° **16**), le degré des p surpassant de deux unités le degré des q], je poserai $\omega = \frac{u}{u-1}$. J'obtiendrai alors

$$x^2 u' = \frac{-a(u-1)^2 - (u+b)(u+1)^3 + 2xu^2(u-1)}{u}.$$

Le polynome en u qui joue le rôle de p_0 (*voir* n° **16**) est ici

$$-(u+b)(u-1)^3 - a(u-1)^2.$$

Ce polynome admet $u = 1$ comme racine double. Il résulte alors de la théorie développée au n° **16** que les caractéristiques u ne prennent pas la valeur 1 au voisinage de l'origine mais tendent vers 1 à la façon d'une fonction rationnelle lorsque $|x|$ tend vers 0; *le rapport* $\frac{x^2}{u-1}$ *tend vers une limite finie.*

Si a_{01} était nul, on effectuerait d'une manière générale, un double changement de variables de la forme

$$x = \xi^p, \qquad v = \xi^q \omega.$$

Ainsi les propriétés (¹) des singularités de la classe C que nous énoncerons plus bas appartiennent également aux points multiples de la classe A, I. Mais ces derniers points jouissent aussi de propriétés qui leur sont spéciales. Pour les étudier complètement, il faudra donc raisonner directement sur l'équation (4) à point transcendant multiple en considérant cette équation comme limite d'une équation (4) présentant des points transcendants très rapprochés.

Donnons-nous une équation (4) dont le second membre s'annule (pour $v = 0$) en k points du plan x très rapprochés de l'origine, mais distincts. Dans un domaine γ contenant ces k points, nous connaissons le mécanisme des permutations que subit une intégrale V; car ce mécanisme est la *combinaison de k mécanismes indépendants appartenant à l'un des types étudiés ci-dessus* (à chacun des k points transcendants correspond un exposant λ_1 très grand en valeur absolue et un exposant λ_2 voisin de -1).

Mais bornons-nous à la question particulière que nous avons posée au n° **1**. Nous considérons le chemin $\overline{\bar{x}\,\bar{x}_1}$ qui traverse γ de $\bar{x}$ en $\bar{x}_1$, et, sur ce chemin, une intégrale v définie par la valeur $\bar{v}$ qu'elle prend en $\bar{x}$.

Nous supposons qu'on parte de valeurs de $\bar{v}$ pour lesquelles l'intégrale v ne présente pas de point critique dans γ_1, puis qu'on fasse varier $\bar{v}$.

Nous nous demandons alors pour quelles valeurs de $\bar{v}$ l'intégrale v pourra avoir des points critiques confondus en $x = 0$.

Le chemin $\overline{\bar{x}\,\bar{x}_1}$ pourra toujours être décomposé en : 1° lacets élémentaires contournant des points critiques x', lacets que nous supposerons issus du contour et du petit cercle γ (de centre $x = 0$) et *dirigés*

(¹) Les points de la classe A, qui sont, d'après la terminologie de M. Painlevé, des *points ordinaires* lorsqu'ils sont simples, sont en général des *points essentiels* lorsqu'ils sont multiples.

suivant les prolongements [1] *des rayons* Ox'; 2° arcs du contour γ reliant entre eux les lacets élémentaires. Considérons alors le lacet élémentaire relatif à un point critique x'. Soit $\overline{x'}$ l'origine de ce lacet, $\overline{v'}$ la valeur prise en $\overline{x'}$ par l'intégrale suivie sur le lacet. Je me demande *vers quelle limite tend* $\overline{v'}$ (ou, ce qui revient au même, *vers quelle limite tend la caractéristique suivie sur* $\overline{x'}x'$) *lorsque le point critique* x' *tend vers* o.

Soit d'abord une équation (4) qui possède, au voisinage de $x = 0$, k points transcendants distincts $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *ayant un même module très petit et des arguments différents.* Supposons que l'intégrale v définie au point $\overline{x}$ par la valeur initiale $\overline{v}$ possède un point critique x' arbitrairement rapproché de ξ_j; alors, sur le prolongement $x'x'$ du rayon $\xi_j x'$ compris entre x' et le contour γ, l'intégrale possède deux caractéristiques (nulles en x') qui tendent (lorsque x' tend vers ξ_j) vers l'une des deux intégrales holomorphes $V_{j,1}$, $V_{j,2}$.

Considérons en particulier la caractéristique $v_{j,2}$ qui tend vers $V_{j,2}$. Puis, faisons décroître indéfiniment le module commun des points $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sans toucher à leurs arguments. Il suffit, pour cela, d'introduire dans l'équation un certain paramètre ν qui tend vers o lorsque les points transcendants se rapprochent. Pour toute valeur de ν voisine de o, la caractéristique $v_{j,2}$ est au point $\overline{x'}$, fonction continue de x' au voisinage de $x' = 0$; elle devient égale à $V_{j,2}$ pour $x' = 0$.

Lorsque, d'autre part, ν tend vers o, la caractéristique $v_{j,2}$ ne cesse pas d'être holomorphe et fonction continue de ν sur tout rayon aboutissant à l'origine. D'ailleurs, $V_{j,2}$ tend vers une limite déterminée; savoir l'intégrale holomorphe V_2, donnée (pour $C_2 = 0$) par le développement en x, $C_2 x^{\lambda_2}$, $C_2 x^{\lambda_2} \log x$ relatif à l'équation (4) où $\nu = a_{10} = 0$. J'en conclus que l'intégrale $v_{j,2}$ est encore, pour $\nu = 0$, fonction continue de x' en $x' = 0$ et qu'elle prend, en $x = 0$, la valeur V_2. En d'autres termes, *lorsque* x' *tend vers* o, *l'une des deux caractéristiques issues de* x' *avec la valeur critique* o *tend* (*sur le rayon* Ox' *ou un*

[1] En évitant, par des crochets infiniment petits, les points critiques qui pourraient se trouver sur ces prolongements.

rayon voisin) vers la limite V_2. Réciproquement, si l'une des caractéristiques issues de x' tend vers V_2, x' tend nécessairement vers o.

Ayant démontré que l'une des deux caractéristiques issues du point critique x' tend vers la limite déterminée V_2, nous établirons facilement que l'autre caractéristique tend également vers une limite déterminée V_1 (la branche d'intégrale V_1 n'étant pas, dans le cas général, holomorphe à l'origine). D'ailleurs, l'existence de la limite V_1 sera établie directement au n° **17**.

En résumé ([1]), *lorsque* λ_1 *devient infini, les seules valeurs de* $\bar{v}$ *pour lesquelles l'intégrale* v (*suivie sur* $\overline{x\,x_1}$) *puisse présenter des points critiques confondus sont des valeurs isolées.*

La proposition ainsi énoncée se trouve établie maintenant pour une équation (4) quelconque [et, par conséquent, pour toutes les équations (2) de la classe A, I, puisque le résultat obtenu pour la variable v s'étend immédiatement à la variable y (*voir* la définition de v au début du n° **5**)]. De cette proposition nous déduirons le théorème $\mathcal{A}$, puisque (dans les conditions prévues au n° **1**) la fonction $v_1(\bar{v})$ ne peut être singulière que lorsque l'intégrale v, suivie sur $\overline{x\,x_1}$, présente des points critiques confondus.

6. — Classe A. II. — Cas particulier.

Nous allons maintenant supposer (*voir* n° **2**) que

$$P(o, o) = Q(o, o) = o, \qquad \frac{\partial Q(o, o)}{\partial y} = o.$$

([1]) Nous pourrions pousser plus à fond cette analyse en nous servant de l'équation auxiliaire

$$(e) \qquad \frac{dx}{dv} = P(P' - a_{01}) + a_{01}\,v + \mu[P\,\varphi_1(x) + v\,\varphi_2(x, v)],$$

équation où P est un polynome de degré K s'annulant aux k points transcendants, et où φ_1, φ_2 sont des développements holomorphes en x et en x et v. Faisons, tout d'abord, dans cette équation $\mu = o$. Nous obtenons une équation que j'ai étudiée en détail (*loc. cit.*) dans l'hypothèse où P est du second degré. Le mécanisme des permutations opérées au voisinage des k points transcendants peut être ainsi déterminé et il subsiste lorsque μ varie de o à 1. Faisant ensuite tendre P vers bx^k (b constante), nous passerons de l'équation (e) à l'équation (4).

Dans ces conditions, la relation implicite $Q(x, y) = 0$ ne donne plus y sous forme d'un développement holomorphe en x. Nous ne pouvons donc plus tirer parti du changement de variable effectué au n° **3** (changement de variable qui nous a conduits à une équation dont tous les points critiques se présentent pour une même valeur v de l'intégrale). Nous chercherons donc une autre méthode.

Supposons d'abord que P contienne un terme du premier degré en x. Nous pouvons alors regarder y comme variable indépendante. *Les intégrales $x(y)$ qui sont singulières et voisines de* o *au voisinage de $y = 0$ présentent en ce point une singularité transcendante de l'un des types déjà étudiés.* Nous connaissons donc l'allure, sinon des intégrales $y(x)$ proprement dites, du moins de leurs inverses. En particulier, considérons une intégrale suivie, au voisinage de $x = 0$, $y = 0$ sur un chemin déterminé; puis faisons varier cette intégrale avec continuité et déformons en même temps les chemins correspondants du plan x et du plan y, de manière que ces chemins ne traversent jamais aucun point critique; nous ne sommes arrêtés que si notre intégrale traverse un point transcendant; or, d'après ce qui précède, cette circonstance ne peut se produire que si $x(y)$ coïncide avec une ou deux intégrales particulières, nulles et holomorphes en $y = 0$; $y(x)$ coïncide alors avec les inverses de ces intégrales, inverses qui sont elles-mêmes nulles et holomorphes en $x = 0$. Le théorème $\mathcal{A}$, énoncé dans l'Introduction, est donc encore vrai dans le cas actuel.

Plus généralement, supposons maintenant que *les polynomes* P *et* Q *contiennent au moins un terme du premier degré en x ou y.* Nous constatons que nous pouvons toujours *ramener la singularité $x = 0$ à une singularité connue en effectuant une double transformation linéaire*

$$x = \alpha_0 u + \alpha_1 v, \qquad y = \beta_0 u + \beta_1 v,$$

Supposant le déterminant $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0$ non nul, nous voyons que, pour $x = y = 0$, on a nécessairement $u = v = 0$; aux intégrales de (2), singulières au voisinage de $x = 0$, correspondent donc des intégrales $v(u)$ voisines de o au voisinage de $u = 0$. Ces intégrales sont données par l'équation

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha_0 P - \beta_0 Q}{\beta_1 Q - \alpha_1 P},$$

où le dénominateur contient un terme en v ayant pour coefficient

$$[\alpha_1\beta_1(b_{10}-a_{01})-\alpha_1^2 a_{10}].$$

On peut toujours choisir les α et β de manière à rendre ce coefficient non nul, à moins qu'on n'ait à la fois : $b_{10}=a_{01}$, $a_{10}=0$. Dès lors, le théorème A, s'appliquant à l'équation transformée, s'applique également à l'équation proposée.

Dans le cas où $b_{10}=a_{01}$, $a_{10}=0$, les conclusions précédentes sont en défaut. Mais effectuons, en ce cas, le changement de variable $y=xw$: nous obtenons l'équation

$$x\frac{dw}{dx}=\frac{x^{-1}P_2-wx^{-1}Q_2}{b_{10}+x^{-1}Q_2}; \tag{6}$$

or, les polynomes P_2 et Q_2, supposés exprimés en fonction de x et w, contiennent x^2 en facteur; donc, si b_{10} est non nul, *l'origine n'est pas point singulier transcendant.*

Remarque. — Pour étudier directement, au voisinage de l'origine, l'allure des branches d'intégrales $y(x)$, on effectuerait la double transformation

$$x=\xi^2, \qquad y=\xi\theta,$$

qui conduit à l'équation

$$\xi\frac{d\theta}{d\xi}+\theta=\frac{2a_{10}\xi+2a_{01}\theta+\text{termes en }\xi\theta^2,\ \xi^2\theta,\ \ldots}{b_{10}+c\theta^2+\text{termes en }\xi\theta,\ \xi^2,\ \ldots}. \tag{7}$$

Les intégrales θ, finies au voisinage de l'origine, ont même allure que les intégrales de l'équation réduite

$$\xi\frac{d\theta}{d\xi}=\frac{-c\theta^3+(a_{01}-b_{10})\theta}{c\theta^2+b_{10}}.$$

On les étudie par la méthode que nous exposerons au numéro suivant.

7. — Classe A. II. — Cas général.

Soient les termes de plus bas degré, dans P et Q, de degré k. Nous écrirons

$$P=a_{k0}x^k+\ldots+a_{0k}y^k+P_{k+1},$$
$$Q=b_{k0}x^k+\ldots+b_{0k}y^k+Q_{k+1},$$

et nous supposerons d'abord que b_{0k} soit non nul.

Posant $y = xw$, nous transformons l'équation (2) en l'équation

$$(8)\qquad y = xw, \qquad x\frac{dw}{dx} + w = \frac{a_{k0} + \ldots + a_{0k}w^k + x^{-k}P_{k+1}}{b_{k0} + \ldots + b_{0k}w^k + x^{-k}Q_{k+1}} = F(x, w).$$

Étant donné que x et y sont supposés voisins de o, les fonctions $x^{-k}P_{k+1}$, $x^{-k}Q_{k+1}$, $wx^{-k}Q_{k+1}$ restent très petites au voisinage de $x = 0$. Écrivons alors l'équation auxiliaire

$$(8\,bis)\qquad x\frac{dw}{dx} = -w + \frac{a_{k0} + \ldots + a_{0k}w^k}{b_{k0} + \ldots + b_{0k}w^k} + \mu\left[F(x, w) - \frac{a_{k0} + \ldots + a_{0k}w^k}{b_{k0} + \ldots + b_{0k}w^k}\right]$$

qui coïncide avec (8) pour $\mu = 1$ et se réduit, pour $\mu = 0$, à

$$(9)\qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{-b_{0k}w^{k+1} + \ldots + a_{k0}}{b_{0k}w^k + \ldots + b_{k0}};$$

w sera pour $0 < \mu < 1$, fonction continue de μ, et *nous pourrons passer, avec continuité, de l'équation* (9), *qui est intégrable, à l'équation* (8).

Nous avons supposé que le coefficient $b_{0,k}$ n'était pas nul. En quoi l'étude qui va suivre serait-elle changée si ce coefficient devenait nul ?

Je dis qu'on peut (¹) *toujours effectuer sur x et y une double transformation linéaire*

$$(10)\qquad x = \alpha_0 u + \alpha_1 v, \qquad y = \beta_0 u + \beta_1 v$$

(*le déterminant $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0$ étant non nul, cf.* n° 6) *qui ramène le cas $b_{0,k} = 0$ au cas $b_{0,k} \neq 0$. Si la transformation est impossible, c'est que l'origine n'est pas point transcendant.*

En effet, supposons effectuée la transformation (10) et posons $v = \omega u$. L'équation (8) devient

$$(11)\qquad u\frac{d\omega}{du} = \frac{\omega(\alpha_1 P - \beta_1 Q) + \alpha_0 P - \beta_0 Q}{\beta_1 Q - \alpha_1 P}.$$

(¹) Pour étudier directement l'allure des branches d'intégrales $y(x)$, on effectuerait un changement de variables semblable à celui que nous avons indiqué dans la Remarque qui termine le n° **6**.

Calculons le coefficient de $u^k\omega^k$ dans $(\beta_1 Q - \alpha_1 P)$; nous obtenons

$$\beta_1(b_{k0}\alpha_1^k + \ldots + b_{0k}\beta_1^k) - \alpha_1(a_{k0}\alpha_1^k + \ldots + a_{0k}\beta_1^k),$$

ou, en posant $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = t$,

$$\alpha_1^{k+1}[b_{0k}t^{k+1} + (b_{1,k-1} - a_{0k})t^k + (b_{2,k-2} - a_{1,k-1})t^{k-1} + \ldots - a_{k0}].$$

Ainsi, si nous n'avons pas simultanément les égalités

$$(12) \qquad b_{0k} = a_{k0} = 0, \qquad a_{1,k-1} = a_{0k}, \qquad b_{2,k-2} = a_{1,k-1}, \qquad \ldots,$$

nous pouvons toujours choisir α_1 et β_1 de manière à rendre non nul le coefficient considéré, et l'équation (11) est alors de la forme

$$u\frac{d\omega}{du} = \frac{-b'_{0,k}\omega^{k+1} + \ldots}{b'_{0,k}\omega^k + \ldots}.$$

c'est-à-dire de la forme (8).

Si, au contraire, les égalités (12) sont satisfaites en même temps, l'équation (11) s'écrit

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{xR}{b_{k0} + \ldots} \qquad (\text{R holomorphe en } x \text{ et } w)$$

et l'origine n'est plus un *point transcendant*.

Remarque I. — Dans le cas particulier où l'on aurait $a_{0k} = b_{0k} = 0$, $b_{1,k-1} \neq 0$, l'équation (8) s'écrirait

$$(13) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{-b_{1,k-1}w^k + \ldots}{b_{1,k-1}w^{k-1} + \ldots},$$

équation qui ne diffère de l'équation générale (8) que par le changement de $k+1$ en k, et qui peut, par conséquent, être étudiée de la même manière.

Remarque II. — Nous établirons aux nos **9** et **10** que le théorème $\mathcal{A}$, énoncé au no **1** (théorème relatif aux intégrales qui traversent un point transcendant), se trouve exact dans le cas de l'équation (8). Il en résulte (*cf.* no **6**) que *ce théorème reste exact lorsqu'on effectue la transformation linéaire* (10).

8. — Étude de l'équation (8) (cas général où les exposants sont finis).

L'équation (8) est comparable à l'équation (4) du n° **3**. Nous pourrons donc faire sur la singularité $x=0$ de l'équation (8) une étude semblable à celle que nous avons faite sur le *point de Briot-Bouquet* de l'équation (4) (*voir* début du n° **3**). Pour marquer cette analogie, nous appellerons la singularité $x=0$ de (8) *point de Briot-Bouquet d'espèce finie*.

Voyons comment se généralisent les propriétés de l'équation (4) lorsqu'on passe de cette équation à l'équation (8). Je n'entrerai pas ici dans le détail des démonstrations, et je me bornerai à énoncer les faits les plus saillants, comme je l'ai fait au n° **3**.

Considérons d'abord les premiers termes de l'équation (8), c'est-à-dire l'équation (9). Appelant $w_1, w_2, \ldots, w_{k+1}$, les $(k+1)$ racines du numérateur de (9), nous mettrons cette équation sous la forme

$$(14) \qquad y = xw, \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{-(w-w_1)(w-w_2)\ldots(w-w_{k-1})}{w^k + lw^{k-1} + \ldots},$$

l'intégrale générale de (14) s'écrit alors

$$(15) \qquad Cx = (w-w_1)^{\frac{1}{\lambda_1}}(w-w_2)^{\frac{1}{\lambda_2}}\ldots(w-w_{k+1})^{\frac{1}{\lambda_{k+1}}},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ étant donnés par les égalités

$$\lambda_1 = \frac{(w_3-w_1)(w_2-w_1)\ldots(w_{k+1}-w_1)}{w_1^k + lw_1^{k-1} + \ldots},$$

$$\lambda_2 = \frac{(w_1-w_2)(w_3-w_2)\ldots(w_{k+1}-w_2)}{w_2^k + lw_2^{k-1} + \ldots}$$

et *satisfaisant à la relation invariante*

$$(16) \qquad \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \ldots + \lambda_{k+1}^{-1} = -1.$$

Nous supposerons, dans ce numéro, que les nombres $w_1, w_2, \ldots,$ sont distincts des racines de $w^k + lw^{k-1} + \ldots$ [valeurs de w donnant des points critiques de l'équation (14)]. Cela revient manifestement à supposer qu'aucun des exposants λ n'est infini.

Caractéristiques de l'équation (8) *à l'origine*. — Pour étudier ces caractéristiques, nous partirons de l'équation (14) et nous passerons à l'équation (8) par l'intermédiaire de l'équation (8 *bis*) qui contient le paramètre variable μ. Soient d'abord *les parties réelles* $\mathcal{R}(\lambda_1)$, $\mathcal{R}(\lambda_2)$, $\mathcal{R}(\lambda_3)$, ..., *toutes négatives*. Alors l'équation (14) n'admet [en dehors des $(k+1)$ intégrales particulières $w = w_1$, ..., $w = w_{k+1}$] aucune caractéristique qui soit finie à l'origine. Il en est de même [1] de l'équation (8); à l'exception de $(k+1)$ caractéristiques holomorphes, toutes les caractéristiques w de (8) sont infinies à l'origine; les caractéristiques y correspondantes $(y = xw)$ sont finies et holomorphes. Pour obtenir les $(k+1)$ caractéristiques exceptionnelles, nous poserons successivement

$$y = xw = x(w_1 + s), \qquad y = x(w_2 + t), \qquad \ldots,$$

Nous obtiendrons ainsi $(k+1)$ équations de Briot-Bouquet

$$xs' = \lambda_1 s + \ldots; \qquad xt' = \lambda_2 t + \ldots; \qquad \ldots$$

ayant pour intégrales

$$s = \text{développement [2] en } x \text{ et } C_1 x^{\lambda_1},$$
$$t = \text{développement en } x \text{ et } C_2 x^{\lambda_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A ces développements correspondent des développements de y ordonnés par rapport aux mêmes quantités. Cela dit, faisons dans le premier développement $C_1 = 0$; nous obtenons une intégrale particulière Y_1 qui est nulle et holomorphe à l'origine $\left(\text{on a } \lim\limits_{x=0} \frac{Y_1}{x} = w_1\right)$; faisant de même dans le second, le troisième, etc., développement, $C_2 = C_3 = \ldots = 0$, nous obtenons des intégrales Y_2, ..., Y_{k+1} nulles et holomorphes à l'origine. Les caractéristiques w définies par les $(k+1)$ intégrales Y_1, ..., Y_{k+1} sont les seules qui soient finies à l'origine.

---

(1) Cf. *L*, Chap. IV, n° **1**. Pour établir ce point, nous remontons à la forme primitive (en y) de l'équation (8). En d'autres termes, nous nous appuyons sur ce fait que dans le numérateur et le dénominateur du second membre de (8), les termes du premier degré en x sont, par rapport à x et w, de degré $k+1$ au plus, et ainsi de suite.

(2) Nous définirons plus loin les régions où ces développements convergent.

Soit maintenant $\mathcal{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0, \ldots, \mathcal{R}(\lambda_{k+1}) < 0$. L'équation (8) admet alors à l'origine : 1° une infinité de caractéristiques w infinies (auxquelles correspondent des caractéristiques y finies holomorphes); 2° une caractéristique w holomorphe et égale à w_2 $\left(\text{c'est } w = \frac{Y_2}{x}\right)$, une caractéristique w holomorphe et égale à w_3 $\left(\text{c'est } w = \frac{Y_3}{x}\right)$, etc.; 3° une infinité de caractéristiques w égales à w_1; à ces dernières caractéristiques correspondent des caractéristiques y nulles et confondues en $x = 0$ (pour lesquelles, par conséquent, l'origine est point transcendant directement critique).

On fait des constatations analogues *lorsque deux, trois des* $(k+1)$ *parties réelles* $\mathcal{R}(\lambda_1)$, $\mathcal{R}(\lambda_2)$, $\mathcal{R}(\lambda_{k+1})$ *sont positives* [*il est impossible que les parties réelles soient toutes positives, puisqu'on a la relation* (16)]. Quant aux cas limites où certaines parties réelles sont nulles, nous les laisserons de côté pour le moment; ils ne présentent, d'ailleurs, aucune difficulté nouvelle (*cf.* la note de la fin du n° **3**).

Mécanisme des permutations dans le cas où les exposants λ *sont des nombres complexes à parties réelles négatives* (*exemple du cas où* $k = 3$). — On peut tracer, autour de l'origine, un cercle fini γ à l'intérieur duquel le mécanisme des permutations est le même, pour l'équation (8), que pour l'équation (14). Voilà ce que nous établirons, en passant, comme d'habitude, par l'intermédiaire de l'équation (8 *bis*).

Pour simplifier l'écriture, je me contenterai de considérer ici le cas où $k = 3$. Commençons par considérer l'équation (14) où $k = 3$, et supposons, pour fixer les idées, que $\mathcal{R}(\lambda_1^{-1}) < \mathcal{R}(\lambda_2^{-1}) < \mathcal{R}(\lambda_3^{-1})$. Les points critiques des intégrales de (14) se présentent lorsque w prend l'une des deux valeurs τ_1, τ_2 qui annulent le dénominateur $w^2 + lw + m$. D'ailleurs, si nous appelons x_0 un point quelconque où l'intégrale w prend la valeur τ_1 et x'_0 un point quelconque où w prend la valeur τ_2, l'ensemble total des points critiques de l'intégrale sera donné par les formules

$$(17) \qquad x_{j,k} = x_0\, e^{\frac{2ij\pi}{\lambda_1} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2}}; \qquad x'_{j,k} = x'_0\, e^{+\frac{2ij\pi}{\lambda_1}\frac{2ik\pi}{\lambda_2}},$$

où j et k sont des entiers quelconques. Chaque point critique permute deux déterminations.

Considérons, d'autre part, les valeurs prises à l'origine par les diverses caractéristiques $y(x)$ que permutent les points critiques (17). Ces valeurs sont

$$y_0 = C^{-1}, \qquad y_{j,k} = C^{-1} e^{\frac{2ij\pi}{\lambda_1} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2}}.$$

On peut toujours disposer des indices 1, 2, 0 de manière que le point critique x_0 permute (lorsqu'on suit le rayon $x_0 O$) les déterminations y_0, $y_{1,0}$, tandis que le point x'_0 permute les déterminations $y_{1,0}$, $y_{1,1}$. On parvient ([1]) alors aisément aux constatations suivantes : 1° *L'ensemble des caractéristiques issues de l'origine avec la valeur $y_{j,k}$ présente au voisinage de l'origine (si $|y_{j,k}|$ est suffisamment petit) quatre points critiques algébriques, savoir les points $x_{j,k}$, x_{j-1}, k, x'_{j-1}, k, $x'_{j-1,k-1}$*; 2° *les deux caractéristiques (suivies sur le rayon $x_{j,k} O$) que permute le point $x_{j,k}$ prennent à l'origine les valeurs $y_{j,k}$, $y_{j+1,k}$*; 3° *les deux caractéristiques que permute le point $x'_{j,k}$ prennent à l'origine les valeurs $y_{j+1,k}$, $y_{j+1,k+1}$*.

Le mécanisme ainsi défini subsiste lorsqu'on passe de l'équation (14) à l'équation (8).

En effet, le dénominateur du second membre de (8) (où $k = 3$) admet deux racines de la forme

$$w = \tau_1 + q_1(x), \qquad w = \tau_2 + q_2(x), \tag{18}$$

([1]) Soient $O\bar{x}$ un rayon quelconque issu de l'origine, $O\overline{x_1}$ le transformé de ce rayon par la transformation $\left(x, xe^{\frac{2i\pi}{x_1}}\right)$; il y a, dans l'angle $\bar{x}O\overline{x_1}$ un et un seul point critique de chacune des deux familles $x_{i,j}$, $x'_{i,j}$. Pour cette raison, il est commode de commencer par supposer que les deux racines τ_1, τ_2 de $w^2 + lw + m$ sont confondues. Supposons-les, par exemple, égales à 0. L'équation (14) coïncide avec l'équation

$$y = xw, \quad xw^2 \frac{dw}{dx} = -(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)$$

que j'ai étudiée ailleurs (*P.*, Chap. III, n° **18**); les points $x_{j,k}$, $x'_{j,k}$, sont confondus et $x_{j,k}$ permute les *trois* déterminations $y_{j,k}$, $y_{j+1,k}$, $y_{j+1,k+1}$. De ce cas particulier (où l'on a, si l'on peut dire, *autant* de déterminations $y_{j,k}$ que de points critiques) on passe par continuité au cas général, où il est nécessaire de distinguer deux familles de points critiques.

q_1 et q_2 étant des développements holomorphes. Lorsque l'intégrale w vérifie l'une ou l'autre de ces égalités (18), elle présente un point critique algébrique permutant deux déterminations.

Faisons alors varier μ de 0 à 1 dans l'équation (8 *bis*). Chaque point critique $x_{j,k}$ se déplace, mais jamais ne se dédouble ni ne vient se confondre avec un autre point critique; d'ailleurs, au point critique $x_{j,k}$, w satisfait toujours à la première égalité (18). On peut en dire autant des points $x'_{j,k}$ où w satisfait à la seconde inégalité (18). Partant de là, on constate que toute branche d'intégrale singulière w (ou y) présente, au voisinage de l'origine, un *double ensemble de points critiques* $x_{j,k}$, $x'_{j,k}$ *opérant exactement suivant le mécanisme décrit plus haut.*

Ces points critiques permutent à l'origine un ensemble de déterminations $y_{j,k}$.

Pour les points critiques comme pour les déterminations, LES INDICES j ET k SONT COMMUTABLES ([1]); si l'on opère la suite des permutations qui changent $y_{0,0}$ en $y_{j,0}$, puis $y_{j,0}$ en $y_{j,k}$, ou si l'on opère, au contraire, la suite des permutations qui changent $y_{0,0}$ en $y_{0,k}$, puis $y_{0,k}$ en $y_{j,k}$ on parvient à *la même détermination* $y_{j,k}$. Le point transcendant, qui est en apparence de deuxième espèce (*L.*, Chap. III, *P.*, Chap. II), est donc en réalité un *point de première espèce de la seconde sorte.* L'ensemble des déterminations peut être rangé (dans l'ordre où on les obtient) suivant une série unilinéaire; mais, originairement, cet ensemble se présente sous forme de série à double entrée [et non plus, comme il arrivait pour l'équation (4), sous forme de série simple].

Cas où l'un des exposants, λ_1, *a sa partie réelle positive.* — Le mécanisme des permutations pourra toujours être étudié par la même méthode. L'origine sera point transcendant à la fois *directement et indirectement* critique.

Cas où les deux exposants λ_1, λ_2 *ont leur partie réelle positive.* — En ce cas, l'origine est un *point transcendant directement critique du second type* (*L.*, Chap. III). Les points critiques $x_{i,j}$, $x'_{i,j}$ opèrent des permutations-impasses (*cf.* n° 5, cas *a*).

([1]) C'est en s'appuyant sur les relations (19), données plus bas, qu'on établira le plus simplement cette commutabilité.

Quel que soit d'ailleurs celui des cas ci-dessus énumérés qu'on considère, l'agencement des points critiques montre que, si l'on envisage deux points critiques x', x'' présentés, au voisinage de l'origine, par une intégrale suivie sur un chemin direct, la fonction $x''(x')$ ne peut s'annuler que pour $x' = 0$. C'est le théorème B du n° **1** (*cf.* n° **5**).

Représentation de l'ensemble des déterminations qui se permutent au voisinage de l'origine. — Faisant, pour fixer les idées, $k = 3$, plaçons-nous, par exemple, dans l'hypothèse où les parties réelles des trois exposants sont négatives. Les branches d'intégrales qui s'échangent au voisinage de l'origine seront représentées *dans les couronnes circulaires de centre* O par les développements de Briot-Bouquet en x et $C_1 x^{\lambda_1}$, x et $C_2 x^{\lambda_2}$, x et $C_3 x^{\lambda_3}$. Les couronnes où les développements convergent sont limitées par des cercles concentriques; dans les cercles intérieurs aux couronnes il y a des points critiques algébriques.

Appelons γ le bord extérieur d'une couronne où les trois développements soient convergents pour les petites valeurs de $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, et prenons sur γ un point fixe $\overline{x}$. Lorsqu'à partir d'une détermination représentée par l'un des trois développements, on tourne indéfiniment (dans un sens convenable) sur le contour γ, on obtient en $\overline{x}$ un ensemble infini de déterminations qui converge vers l'une des limites $Y_1(\overline{x})$, $Y_2(\overline{x})$, $Y_3(\overline{x})$; d'ailleurs les points critiques autour desquels on se trouve tourner se rapprochent de plus en plus de l'origine.

Considérons, d'autre part, un chemin du plan x qui traverse le cercle γ de $\overline{x}$ en $\overline{x_1}$ et une intégrale y (définie par la valeur $\overline{y}$ qu'elle prend en $\overline{x}$) suivie sur ce chemin. Je constate que *l'intégrale y ne peut présenter des points critiques confondus à l'origine que lorsqu'elle coïncide avec l'une des trois intégrales nulles et holomorphes à l'origine* Y_1, Y_2, Y_3.

Posons-nous enfin la question suivante : *Quelles valeurs faut-il donner à* C_1, C_2, C_3 *dans les trois développements pour obtenir (en un point tel que $\overline{x}$) l'ensemble des déterminations d'une même intégrale qui se permutent au voisinage de l'origine? L'ensemble* *des valeurs cherchées est donné par la double égalité*

$$C^{\lambda_1^{-1}} = h_2 C^{\lambda_2^{-1}} = h_3 C^{\lambda_3^{-1}} \tag{19}$$

où h_2 et h_3 sont des constantes (arbitraires, car les valeurs de C_1, C_2, C_3 ne sont déterminées qu'à un facteur constant près). Supposons maintenant qu'on ait $\mathfrak{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathfrak{R}(\lambda_2) < 0$, $\mathfrak{R}(\lambda_3) < 0$. Nous parviendrons à des conclusions analogues, le développement en $C_1 x^{\lambda_1}$ convergeant cette fois, non plus dans une couronne circulaire, mais dans un cercle de centre $x = 0$. Considérons, d'autre part, le chemin du plan x qui traverse γ de $\overline{x}$ en $\overline{x_1}$, et l'intégrale y suivie sur ce chemin : l'intégrale ne peut présenter des points critiques confondus à l'origine que si elle coïncide avec Y_2 ou Y_3 (*cf.* n° **3**, cas *a*).

Dans le cas où $\mathfrak{R}(\lambda_1) > 0$, $\mathfrak{R}(\lambda_2) > 0$, $\mathfrak{R}(\lambda_3) < 0$, l'intégrale ne peut présenter des points critiques algébriques confondus avec l'origine que si elle coïncide avec Y_3.

Cas où un ou plusieurs λ sont réels. — J'ai supposé tout à l'heure que les exposants λ étaient complexes. Lorsque certains de ces exposants deviennent réels, les résultats énoncés ci-dessus sont en défaut. Ainsi, pour étudier complètement la singularité $x = 0$ de l'équation (8), il faudrait, comme nous l'avons fait au n° **3**, distinguer et examiner successivement un grand nombre de cas différents. On ne rencontrerait d'ailleurs pas de difficulté nouvelle et l'on obtiendrait, *mutatis mutandis*, les mêmes résultats [1] qu'au n° **3**. Reprenons, en particulier, le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ traversant l'aire γ et l'intégrale y suivie sur ce chemin; nous pouvons affirmer que l'intégrale y ne saurait présenter des points critiques confondus à l'origine que lorsqu'elle coïncide avec l'une des intégrales *holomorphes Y_j correspondant à des exposants λ_j dont la partie réelle est négative*.

Ce résultat général se trouve ainsi établi pour tous les types de singularités que nous avons envisagés jusqu'ici. Nous en déduisons le théorème $\mathcal{A}$ de l'*Introduction*.

---

[1] Lorsqu'un développement en x, $C_j x^{\lambda_j}$ cesse d'exister, il est remplacé par un développement où entrent des termes logarithmiques. L'intégrale holomorphe Y_j subsiste si $\lambda_j < 0$, disparaît si λ_j est entier positif.

9. — Études de l'équation (8) (cas exceptionnels où certains λ sont nuls).

La relation (16) nous montre que le nombre des exposants λ qui s'annulent en même temps est au moins égal à 2. Supposons donc (en faisant de nouveau $k = 3$ pour fixer les idées) que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En ce cas $w_2 = w_3$, et l'intégrale générale de l'équation réduite (14) prend la forme

$$(20) \qquad Cx = \frac{e^{\frac{a}{w - w_1}}}{w - w_2}\left(\frac{w - w_1}{w - w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

Cette intégrale possède une double série de points critiques, savoir: les points

$$x_0,\ x_0 e^{\frac{2q\pi}{\lambda_1}}, \qquad x'_0 + x'_0 e^{\frac{2q\pi}{\lambda_1}}.$$

A l'origine, elle présente : 1° une infinité de caractéristiques nulles et confondues; 2° des caractéristiques infinies, dont les produits par x sont

$$y_0 = C^{-1}, \qquad y_1 = C^{-1} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_1}}, \qquad \ldots.$$

Les diverses déterminations y_j et les déterminations nulles à l'origine s'échangent suivant un certain mécanisme qui n'est pas altéré lorsqu'on passe de l'intégrale générale (20) à l'intégrale de l'équation (8). Dès lors, nous pouvons appliquer à l'équation (8) (pour laquelle $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$) les conclusions du n° **4**. L'équation (8) possède, à l'origine, *deux intégrales particulières nulles et holomorphes, savoir* Y_1 et Y_2. Demandons-nous, en particulier, pour quelles valeurs de $\overline{y}$ l'intégrale y suivie sur le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$ du n° **8** peut présenter des points critiques confondus en $x = 0$. Nous constatons que cette circonstance ne peut se présenter que lorsque $\overline{y}$ est égal à $Y_1(\overline{x})$ ou $Y_2(\overline{x})$.

10. — Études de l'équation (8) : points transcendants multiples.

Supposons maintenant que l'un des exposants λ, par exemple λ_1, soit *infini*. Cette circonstance se présente lorsque w_1 *coïncide avec l'une des racines* τ_1, τ_2 *de* $w^2 + lw + m$ (*voir* début du n° **8**).

Je dis que, *lorsque* λ_1 *devient infini*, PLUSIEURS POINTS TRANSCENDANTS DE L'ÉQUATION (8) VIENNENT A SE CONFONDRE (*cf.* début du n° 5).

En effet, récrivons l'équation générale (8) où k est quelconque

$$(8)\qquad y = xw, \qquad x\frac{dw}{dx} + w = \frac{a_{k0} + a_{k-1,1}w + \ldots + x^{-k}P_{k+1}}{b_{k0} + b_{k-1,1}w + \ldots + x^{-k}Q_{k+1}}.$$

Si je suppose, pour fixer les idées que le dénominateur s'annule pour $x = w = 0$, j'aurai $b_{k0} = 0$. Commençons par *supposer, d'autre part*, que $b_{k-1,1} \neq 0$. Dans ces conditions, le dénominateur de l'équation (8) admet (au voisinage de $x = 0$) une racine unique $w = q(x)$ qui s'annule avec x.

Effectuons le changement de variable

$$y = xw = x[q(x) + v],$$

l'éqnation (8) devient

$$(21)\qquad x\frac{dv}{dx} + xq'(x) + q(x) + v = \frac{a_{k0} + a_{k-1,1}v + \ldots}{v[b_{k-1,1} + \ldots]},$$

le crochet ne s'annulant pas au voisinage de $x = v = 0$. Les intégrales de (21) sont critiques toutes les fois que v s'annule. Supposons maintenant que a_{k0} approche de o; nous voyons que le numérateur de $\frac{dv}{dx}$ s'annulera avec v pour une valeur de x voisine de o (non-nulle); l'équation (21) admet donc, au voisinage de l'origine, un second point transcendant, ξ, lequel vient se confondre avec o lorsque a_{k0} tend vers o.

Supposons, plus généralement, que dans le numérateur de (21), le terme indépendant de v dont le degré en x est le plus bas, soit le terme de degré $n - 1$; alors *n points transcendants (appartenant aux catégories étudiées ci-dessus) sont venus se confondre à l'origine.*

Cette conclusion subsiste manifestement lorsque $b_{k-1,1}$ tend vers o en même temps que $a_{k,0}, a_{k+1,0}, \ldots$.

Les points transcendants multiples de la classe A peuvent, en général, être regardés comme des points transcendants de la classe C (*cf.* n° 5, et les notes au début de ce numéro). D'ailleurs, si l'on veut analyser en détail les propriétés d'un point multiple de la classe A, il sera nécessaire d'étudier directement l'équation (8), en considérant le mécanisme des permutations opérées au voisinage du point multiple comme une combinaison de mécanismes relatifs à des points transcendants simples.

Mais, proposons-nous simplement de démontrer le théorème $\mathcal{A}$. Nous pourrons suivre, à cet effet, la méthode du n° **5**.

Partons d'un point critique x' voisin de l'origine et considérons, sur le prolongement du rayon Ox', les caractéristiques qui se permutent au point x'. Nous démontrerons que, lorsque x' tend vers o, ces caractéristiques tendent vers des limites isolées. Il nous restera ensuite à déterminer ces limites.

1° *Soit d'abord* $a_{k-1,1} \neq 0$, $b_{k-1,1} \neq 0$. En ce cas, un seul exposant, λ_1, devient infini [si plusieurs λ devenaient infinis en même temps, $w_1 = 0$ serait racine multiple du numérateur de (14) et l'on aurait $a_{k-1,1} = 0$]. Il en résulte que les intégrales $Y_2, \ldots, Y_{k+1}$, nulles et holomorphes à l'origine, existent et peuvent être formées comme dans le cas général.

Cela posé, je démontrerai comme au n° **5** que, lorsque x' tend vers o, les caractéristiques suivies sur le prolongement de Ox' tendent vers $Y_2, \ldots, Y_{k+1}$, ou vers la limite (*pour* λ_1 *infini*) de l'intégrale Y_1.

L'existence de cette dernière limite, que l'étude de l'équation (21) permettrait de déceler, sera établie au n° **17**. Faisons en effet (dans l'hypothèse où le point transcendant est double) le changement de variable $v = x\theta$; nous obtenons une équation de la forme (32) (*cf. infra*, n^{os} **16** et suiv.). La limite de Y_1 est une caractéristique qui tend vers o (en même temps que x') le long du rayon aboutissant en x'.

S'il y a plus de deux points transcendants confondus à l'origine, on devra faire un changement de variable de la forme $v = x^{n-1}\theta$.

Les limites obtenues pour les intégrales $Y_2, \ldots, Y_{k+1}$ et Y_1 étant isolées, nous aurons comme toujours le théorème $\mathcal{A}$.

2° *Soit maintenant* $a_{k-1,1} \neq 0$, $b_{k-1,1} = 0$. — Supposons que dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{k-1,1}x^{k-1}y + \ldots + a_{0k}y^k + P_{k+1}}{b_{k-2,2}x^{k-2}y^2 + \ldots + b_{0k}y^k + Q_{k+1}} \tag{22}$$

nous fassions le changement de variables (*cf* n° **7**),

$$x = \alpha_0 t + \alpha_1 u, \qquad y = u. \tag{23}$$

L'équation transformée sera de même forme que l'équation (22), et nous pourrons toujours faire en sorte que, dans cette équation, les coefficients de $t^{k-1}u$ soient différents de zéro dans le numérateur et dans le dénominateur. Nous serons alors ramenés au cas précédent.

Le théorème $\mathcal{A}$, relatif à l'intégrale qui traverse un point transcendant, ne cesse pas d'être exact lorsqu'on effectue un changement de variable linéaire (*cf.* n° **6**). Il est donc encore vrai dans le cas actuel.

3° *Soit, en troisième lieu,* $a_{k-1,1} = 0$. Ce cas se présente lorsque plusieurs λ sont infinis en même temps. On pourra le ramener aux cas précédents en opérant une double transformation linéaire

$$x = \alpha_0 t + \alpha_1 u, \qquad y = \beta_0 t + \beta_1 u.$$

Pour étudier directement la limite, définie plus haut, de l'intégrale Y_1 (c'est-à-dire la limite vers laquelle tend sur le prolongement de Ox la caractéristique Y_1 lorsque deux ou plusieurs points transcendants viennent se confondre à l'origine) on devra faire sur l'équation en w le changement de variables : $x = \xi^2$, $w = \xi\omega$, ou plus généralement, un changement de variables de la forme

$$x = \xi^p, \qquad v = \xi^q \theta. \tag{24}$$

Mais, suivant que $b_{k-1} \neq 0$ ou $b_{k-1,1} = 0$, des circonstances différentes se présenteront.

Lorsqu'on a $b_{k-1,1} \neq 0$ (avec $a_{k-1,1} = 0$) la limite de l'intégrale Y_1 est en général une intégrale holomorphe. En d'autres termes, l'équation (8) possède alors, en général, des intégrales holomorphes prenant à l'origine la valeur w correspondant aux λ infinis.

Écrivons en effet l'équation (8) sous la forme (21) (*vide supra*)

$$xv\frac{dv}{dx} = \lambda v^2 + \text{termes en } v^3, \ldots, x, \ldots, xv, \ldots. \tag{21}$$

où le second membre est convergent pour les petites valeurs de x et de v. Supposant d'abord que le coefficient du terme en x ne soit pas nul, faisons le changement de variable indépendante $x = \xi^2$. L'équation (21) s'écrira

$$\xi v \frac{dv}{d\xi} = 2\lambda v^2 + c\xi^2 + \text{termes en } \xi^2 v,\ v^3,\ \ldots.$$

Posons alors $v = \xi\theta$; nous aurons l'équation en θ,

$$\xi\theta \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^2 = 2\lambda\theta^2 + c + \text{termes en } \xi\theta,\ \xi\theta^3,\ \ldots.$$

On voit que $\left(\text{sauf pour } \lambda = \frac{1}{2}\right)$ l'équation en θ est du type (27) étudié aux n^{os} **12-13**. Elle possède, en général, deux intégrales θ finies et holomorphes à l'origine.

Lorsque [1] le coefficient du terme en x est nul dans (21), le coefficient du terme en xv n'étant pas nul, nous conserverons la variable indépendante x et poserons $v = x\theta$. L'équation (21) s'écrira

$$x\theta \frac{d\theta}{dx} + \theta^2 = \lambda\theta^2 + c\theta + d + \text{termes en } x,\ x\theta,\ \ldots.$$

Cette équation est encore du type (27).

D'une manière générale, un changement de variables de la forme $x = \xi^p$, $v = \xi^q\theta$ permettra de mettre en évidence des intégrales v nulles et holomorphes à l'origine.

Lorsqu'on a, à la fois $a_{k-1,1} = 0$, $b_{k-1,1} = 0$, les résultats précédents ne s'appliquent plus. En ce cas, nous ne pouvons plus faire le changement de variable

$$y = xw = x[yq(x) + v].$$

Nous devons étudier directement l'équation en w en faisant la transformation $x = \xi^p$, $v = \xi^q\theta$. Ainsi, en effectuant sur l'équation

$$(24)\qquad xw' + w = \frac{a_{k-2,2}w^2 + \text{termes en } x,\ xw,\ w^3,\ \ldots}{b_{k-2,2}w^2 + \text{termes en } x,\ xw,\ w^3,\ \ldots},$$

[1] Une transformation linéaire permettra souvent de ramener ce cas au précédent.

la transformation $x = \xi^2$, $w = \xi\omega$, nous obtenons l'équation en ω,

$$\xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} + 3\xi\omega = \frac{2a_{k-2,2}\omega^2 + c\omega + d + \text{termes en } \xi,\ \xi\omega,\ \dots}{b_{k-2,2}\omega^2 + c'\omega + d' + \text{termes en } \xi,\ \xi\omega,\ \dots},$$

qui est une équation du type (32).

Nous avons supposé ci-dessus que le numérateur et le dénominateur de l'équation réduite (14) avaient une racine commune $w = 0$. Nos conclusions s'étendent facilement au cas *où ce numérateur et ce dénominateur ont plusieurs racines communes distinctes.*

Soit toujours x' un point critique voisin de l'origine. Les caractéristiques issues de ce point critique et suivies sur le prolongement de Ox', tendent vers des limites isolées lorsque x' tend vers o.

Le théorème A se trouve ainsi établi pour toutes les singularités de la classe A.

11. — Remarques. — Généralisations possibles.

Les résultats qui précèdent ne sont point particuliers au cas où l'équation (8) [ou l'équation (22)] est rationnelle. Imaginons, en effet, que dans (22) nous substituions à P_{k+1} et Q_{k+1} des développements convergents quelconques (en x et w) dont tous les termes soient de degré supérieur à k; tous les raisonnements que nous avons faits resteront valables.

Il est une autre généralisation que nous devons tenter. Considérons l'équation

$$(25) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{c_k w^k + \dots + c_0 + \text{termes en } x,\ xw,\ \dots}{d_{k-1} w^{k-1} + \dots + d_0 + \text{termes en } x,\ xw,\ \dots}.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (8) qu'en ce que le rapport $\frac{c_k}{d_{k-1}}$ est quelconque au lieu d'être égal à -1. En quoi les conclusions obtenues pour l'équation (8) seront-elles modifiées si l'on remplace cette équation par l'équation (25)?

Si nous supprimons, dans (25), les termes non explicitement écrits, nous obtenons une équation réduite dont l'intégrale générale est

$$(26) \qquad Cx = (w - w_1)^{\frac{1}{\lambda_1}} \ldots (w - w_{k+1})^{\frac{1}{\lambda_{k+1}}},$$

intégrale de même forme que l'intégrale (15) de l'équation (14) mais *où les* λ *ne sont plus liés par la relation* (16). A cette circonstance près le mécanisme des permutations de l'intégrale générale (26) est semblable aux mécanismes que nous avons décrits en étudiant l'intégrale (15).

Comment étendre, maintenant, à l'équation (25) les résultats obtenus pour l'équation réduite? C'est ici qu'apparaît une difficulté nouvelle. En effet, lorsque nous avions affaire à l'équation (8), nous savions *qu'au voisinage de la singularité transcendante* $x = 0$, x et $y (= xw)$ *restaient voisins de* o. C'est cette circonstance qui nous a permis d'affirmer que les intégrales de l'équation (8 *bis*) (où figure le paramètre μ) étaient fonctions continues de μ. Pour l'équation (25) les conditions sont différentes. Nous ne pouvons plus nous servir de y, et tout ce que nous savons *a priori* sur la singularité transcendante, c'est que, dans l'équation en w, l'origine est un pôle du coefficient différentiel, quel que soit w. Nous avons donc affaire ici à la *singularité la plus générale de la classe* B (*cf.* n° **12**).

Ceci n'empêche pas, bien entendu, qu'il existe des équations (25) immédiatement réductibles à l'équation (8). Remarquons, en effet, qu'il suffit de faire $b_{0k} = 0$, $a_{0k} \neq b_{1,k-1} \neq 0$ pour que l'équation (8) prenne la forme

$$(25\,bis) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{(a_{0k} - b_{1,k-1})w^k + \ldots}{b_{1,k-1}w^{k-1} + \ldots}.$$

Plus généralement, effectuons sur x et y la transformation linéaire définie à la fin du n° **7**. Nous pouvons toujours (*voir* ce numéro) déterminer les coefficients α_1 et β_1 de manière à annuler le coefficient de u^k dans le dénominateur du second membre de (11). L'équation (11) prend alors la forme (25 *bis*).

En d'autres termes, il suffit d'effectuer sur les variables x, w une transformation rationnelle pour passer de (8) à (25 *bis*) ou réciproquement. Mais puisqu'on a le choix, il est naturellement préférable de toujours ramener (par une transformation linéaire) l'équation (2) proposée à une équation pour laquelle les exposants λ sont liés par la relation (16). Faute de prendre cette précaution, on masque l'*espèce* du point transcendant (*voir les définitions* données au Chap. III de *L.*, Chap. II de *P.*).

12. — Points transcendants de la classe B.

Supposons que, quel que soit y, l'origine $x = 0$ soit un pôle du premier ordre du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$ de l'équation (2). L'origine est alors un point transcendant de la classe B.

Développant P et Q par rapport aux puissances de x, nous mettrons l'équation (2) sous la forme

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y) + xp_1(y) + \ldots}{q_0(y) + xq_1(y) + \ldots}, \tag{27}$$

où les p et q sont des polynomes en y.

J'ai le droit de supposer que *tous les polynomes p sont du même degré, ainsi que tous les polynomes q, le degré des p surpassant de deux unités celui des q.* Supposons, en effet, qu'il en soit autrement. Appelant g un nombre quelconque qui ne soit racine d'aucun des polynomes p et q, j'effectue le changement de variable $u = \frac{1}{y - g}$; j'obtiens une équation en u, de même forme que l'équation (18), qui satisfait à la condition énoncée. Il en est de même de l'équation (27) obtenue en faisant le changement de variable $\left(v = \frac{1}{u} = y - g\right)$.

Je supposerai donc que les polynomes p soient de *degré* en y et les q de degré $m - 2$.

Nous avons dit (n° **11**) que l'étude de l'équation réduite

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y)}{q_0(y)} \tag{28}$$

pouvait être faite par les méthodes que nous avons développées ailleurs.

Mais comment passer de l'équation (28) à l'équation (27)? Il faut, pour cela, connaître au préalable L'ALLURE DES CARACTÉRISTIQUES DE (27)

QUI PRÉSENTENT DES POINTS CRITIQUES ARBITRAIREMENT PRÈS DE L'ORIGINE.
Cherchons donc à nous faire une idée de cette allure.

Soit g' une valeur finie quelconque, distincte des zéros de $p_0(y)$. Il ne peut pas [1] arriver qu'une caractéristique $y(x)$ de (27) tende vers g' lorsque x tend vers o. Plus précisément, soit $\overline{x}$ un point voisin de l'origine où y prenne la valeur g' : je dis qu'*on peut décrire, autour de $\overline{x}$, un cercle de rayon $\alpha|\overline{x}|$, (α nombre positif arbitrairement petit), tel qu'on ait :*

Dans le cercle et sur son contour : $|y-g'|<2\beta$;
Sur le contour du cercle : $|y-g'|\geqq\beta$,

β *(fonction de α) restant supérieur à une limite fixe lorsque $\overline{x}$ tend vers* o.

En effet [2], appelons γ un petit cercle de centre $x=0$ duquel nous nous interdirons de faire sortir x, et soit H un grand nombre positif. Nous pouvons déterminer un nombre k tel que, pour x intérieur à γ et $|y|<\mathrm{H}$, l'équation (27) donne [3]

$$(29)\qquad \left|\frac{q_0(y)}{p_0(y)}dy-\frac{dx}{x}\right|<k\,|dx|.$$

Partons alors de $\overline{x}$ (où $y=g'$) et intégrons sur un rayon $\overline{x}\,\overline{x_1}$ issu de ce point. Appelant g_1 la valeur de y atteinte en $\overline{x_1}$, nous aurons, d'après (29),

$$(30)\qquad \left|\int_{g'}^{g_1}\frac{q_0}{p_0}dy-\log\frac{\overline{x_1}}{\overline{x}}\right|<k\,|\overline{x_1}-\overline{x}|.$$

---

[1] M. Painlevé a énoncé le théorème suivant que le nôtre précise : *Soit $y(x)$ une intégrale. Si pour une valeur de* A, *l'égalité $y(x)=\mathrm{A}$ a une infinité de racines, elle en a une infinité quel que soit* A, *exception faite pour un nombre fini de valeurs de* A *qui se calculent algébriquement sur l'équation* (*Notice sur les travaux scientifiques de M. Painlevé*, p. 44).

[2] Je n'insiste pas sur cette démonstration que j'ai déjà exposée plusieurs fois (cf. *L.*, Chap. II, passim).

[3] Cette démonstration pourrait être en défaut, si g' était racine de q_0. Mais, en ce cas (étant donné que g' n'annule pas p_0), y' tend vers l'infini quand y se rapproche de g' et il est aisé de vérifier directement la proposition énoncée.

Mais l'intégrale $\int \frac{q_0}{p_0} dy$ est (pour y voisin de g') une fonction continue de y, et l'on peut, par conséquent, déterminer β de manière que l'inégalité $|g_1 - g'| < \beta$ entraîne

$$\left| \int_{g'}^{g_1} \frac{q_0}{p_0} dy \right| < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ donné}).$$

Supposons alors que, lorsque $\overline{x}_1$ s'éloigne de $\overline{x}$ sur le rayon considéré, $g_1 - g'$ reste inférieur à β aussi longtemps que $|\overline{x}_1 - \overline{x}| \leqq \alpha |\overline{x}|$; l'inégalité (30) exige que α tende vers o en même temps que β, quel que soit $\overline{x}$ voisin de o. Si donc on se donne une valeur non-nulle de α, on peut déterminer un nombre β tel qu'on ait (lorsque $|\overline{x}|$ est petit),

$$\begin{aligned} &\text{pour } |\overline{x}_1 - \overline{x}| \leq \alpha \qquad |g_1 - g'| < 2\beta, \\ &\text{pour } |\overline{x}_1 - \overline{x}| = \alpha \qquad |g_1 - g'| \geqq \beta. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

La proposition précédente est encore vraie si la valeur g' devient infinie. En effet (grâce au changement de variable supposé effectué au début de ce numéro), la transformation $v = y - 1$ change l'équation (27) en une équation de même forme, pour laquelle aucun des polynomes p et q ne s'annule avec v. Soit alors H un nombre supérieur à toutes les racines de $p_0(y)$. On peut déterminer *un nombre* α (*tendant vers* o *avec* $\overline{x}$) *tel que, sur tout rayon issu de* $\overline{x}$, *une branche* y *surpassant (en module) la valeur* 2 H *au point* $\overline{x}$, *devienne inférieure à* H *(en module) dès que* $|x - \overline{x}| < |\overline{x}|(1 - \alpha)$.

Considérons alors une branche $y(x)$ quelconque sur un chemin l du plan x tendant vers le point transcendant $x = 0$. Ou bien $|y|$ reste inférieur à H sur ce chemin, ou bien le chemin l traverse certains cercles, c, de centre $\overline{x}$ et de rayon $\alpha|\overline{x}|$ où $|y| > \text{H}$. Ces cercles c sont sûrement, d'après ce qui précède, extérieurs les uns aux autres. Nous pouvons donc (¹) (sans altérer la branche suivie) déformer le chemin l de manière qu'il ne traverse jamais aucun cercle c où $|y| > \text{H}$

(¹) Cf. *L.*, Chap. II, § II, III, IV.

(du moins tant que x est intérieur à un cercle γ, de centre $x = 0$, suffisamment petit).

C'est grâce à cette circonstance que nous pourrons ramener l'étude de l'équation (27) à l'étude de l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0}{q_0} + \mu(\ldots) \tag{27 bis}$$

qui coïncide avec l'équation réduite (28) pour $\mu = 0$ et avec l'équation (27) pour $\mu = 1$. En dehors des cercles c où $|y|$ est très grand, le second membre de (27) sera, en effet, fonction continue de x, y et μ.

Considérons, en particulier, un chemin direct quelconque, tendant vers l'origine, sur lequel $|y|$ reste inférieur à H (il est toujours possible de tracer une infinité de tels chemins, puisque les cercles c sont extérieurs les uns aux autres). Nous constaterons que (sauf dans certains cas exceptionnels que nous signalerons au n° **15**), les branches d'intégrale de (27 *bis*), suivie sur le chemin considéré, tendent vers la même limite que la branche correspondante de (28), c'est-à-dire vers *une racine de* $p_0(y)$.

L'étude de la singularité transcendante $x = 0$ de (27) se décompose donc en deux problèmes [1] :

1° Problème restreint. — ***Étude d'une branche d'intégrale qui tend vers une racine y_j de $p_0(y)$ lorsque x tend vers 0.***

2° Problème général. — ***Étude de l'ensemble des branches d'une intégrale qui peuvent se permuter arbitrairement près de l'origine.***

Le problème restreint se ramènera, en général, immédiatement aux problèmes que nous avons traités aux n°s **5-9**. Mais, parmi les branches, que nous étudierons ainsi, il en est qui se permutent, arbitrairement près de l'origine, avec d'autres branches tendant (lorsque x tend vers 0) vers différentes racines de $p_0(y)$.

---

[1] Sur les généralisations possibles des résultats obtenus pour l'équation (27), *voir* n° **20**.

13. — Classe B (*suite*). **— Cas ou les racines de $p_0(y)$ sont simples et distinctes des racines de $q_0(y)$.**

En ce cas, l'équation réduite (28) a pour intégrale générale

$$Cx = (y - y_1)^{\frac{1}{\lambda_1}}(y - y_2)^{\frac{1}{\lambda_2}} \dots (y - y_m)^{\frac{1}{\lambda_m}},$$

$y_1, \dots, y_m$ étant les racines de p_0. C'est l'intégrale que nous avons déjà écrite au n° **1**, mais, ici, *les exposants* λ *satisfont à la relation* $\Sigma\lambda_j^{-1} = 0$ puisque $\frac{p_0}{q_0}$ est de degré 2 en y.

Les caractéristiques à l'origine. — Considérons une intégrale y de l'équation (27) qui présente des points critiques très voisins de l'origine. Sur tout rayon aboutissant à l'origine, la branche y tend vers une limite (¹) et cette limite est une racine y_j de $p_0(y)$ *à laquelle correspond un exposant* λ_j *dont la partie réelle est positive*. A chaque racine y_j, pour laquelle $\mathcal{R}(\lambda_j) > 0$, correspond, réciproquement, un ensemble de caractéristiques confondues à l'origine. Ces caractéristiques sont représentées (²) par un développement en x et $C_j x^{\lambda_j}$ (obtenu, comme d'habitude, en posant $y = y_j + t$).

Soit maintenant y_k une racine de p_0 pour laquelle $\mathcal{R}(\lambda_k) \leqq 0$. L'équation (27) admet *une et une seule intégrale égale à* y_k *à l'origine*. Pour obtenir cette intégrale, que j'appellerai Y_k, on forme le développement en x et $C_k x^{\lambda_k}$, et l'on y fait $C_k = 0$.

Il n'y a pas, à l'origine, d'autres caractéristiques que celles que nous venons d'énumérer.

Mécanisme des permutations et représentation de l'ensemble des déterminations qui se permutent au voisinage de l'origine (³). —

(¹) Exceptionnellement si un exposant λ_j est purement imaginaire, il y a des caractéristiques qui restent indéterminées (*finies*) lorsque x tend vers 0.

(²) Sauf peut-être lorsque λ_j est un entier.

(³) Je suppose, dans les énoncés qui suivent, que les λ ne sont pas des nombres rationnels. Les théorèmes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ seront facilement étendus au cas des λ rationnels, ainsi que nous l'avons vu.

Les intégrales de (27) présentent des points critiques lorsque y devient égal à l'une quelconque des racines de $q_0(y)$. Les points critiques ainsi obtenus permutent un ensemble infini de déterminations suivant un mécanisme que nous saurons déterminer (*cf.* nos **8** et **11**); ce mécanisme ne diffère pas, en effet, du mécanisme des permutations défini par l'équation réduite (28); nous l'étudierons au moyen de nos méthodes habituelles et le théorème $\mathcal{B}$ de l'*Introduction* se trouvera vérifié une fois de plus.

Nous avons dit que les caractéristiques qui se permutent *directement* autour de l'origine sont représentées par les développements de Briot-Bouquet en x, $C_j x^{\lambda_j}$. Pour obtenir les caractéristiques en un point $\bar{x}$ voisin, mais distinct de l'origine, considérons les développements de Briot-Bouquet correspondant aux *exposants* λ_j *dont la partie réelle est négative ou nulle. Ces développements sont convergents dans des couronnes circulaires de centre* o. Ils représentent la totalité des caractéristiques qui se permutent au voisinage de l'origine (*cf.* n° **8**).

Le théorème $\mathcal{A}$. — Revenons maintenant au chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ qui traverse le petit contour γ décrit autour de $x = 0$, et à l'intégrale y (définie par la valeur $\bar{y}$ qu'elle prend en $\bar{x}$) suivie sur ce chemin. Nous constatons que *l'intégrale* y *ne peut présenter des points critiques confondus avec le point transcendant* $x = 0$ *que si elle coïncide avec l'une des intégrales* Y_k *dont l'indice correspond à un exposant* λ *de partie réelle négative ou nulle.*

Nous déduisons de là le théorème $\mathcal{A}$ (*cf.* n° **8**).

14. — Cas où $p_0(y)$ a des racines multiples.

Ce cas se présente lorsque certains exposants λ deviennent nuls (en vertu de la relation $\Sigma\lambda_j^{-1} = 0$, le nombre des exposants λ qui s'annulent en même temps est au moins égal à 2). Supposons, par exemple, que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Alors $y_1 = y_2$, et l'intégrale générale de l'équation réduite (28) prend la forme

$$\text{(31)} \qquad Cx = e^{\frac{a}{y-y_1}}\left(\frac{y-y_3}{y-y_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_3}}\cdots\left(\frac{y-y_m}{y-y_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_m}}.$$

Le mécanisme des permutations est alors semblable au mécanisme décrit aux nos **4** et **9**. L'équation (27) possède à l'origine $m-1$ intégrales particulières nulles et holomorphes. Et, sur le chemin $\overline{x}\,\overline{x_1}$, ces intégrales sont les seules qui puissent présenter des points critiques confondus avec le point transcendant.

15. — Points transcendants multiples (cas où p_0 et q_0 ont des racines communes).

Supposons que l'un des exposants λ, par exemple λ_1, soit *infini*. Cette circonstance se présente lorsque y_1 coïncide avec l'une des racines de $q_0(y)$. *Plusieurs points transcendants de l'équation (27) viennent alors se confondre.*

Je ne ferai point ici l'étude détaillée des points transcendants multiples de (27). Je me contente de noter que tous les résultats énoncés au n° **10** sont applicables à l'équation (27). Ces résultats, en effet, ne dépendent d'aucune hypothèse relative à la valeur des coefficients de (8).

Ainsi, je puis encore, dans le cas du point transcendant multiple, énoncer le théorème 4. *Ce théorème se trouve donc établi pour toutes les singularités de la classe* B.

Remarque. — Nous savons que les intégrales y de notre équation (27) ne peuvent tendre vers l'infini sur un rayon aboutissant en $x=0$. J'en conclus que si j'effectue la double transformation linéaire

$$x=\alpha_0 u+\alpha_1 v, \qquad xy=\beta_0 u+\beta_1 v,$$

la variable u tend vers 0 en même temps que x. Ainsi, l'étude des intégrales $y(x)$ singulières au voisinage de $x=0$, et l'étude des intégrales $v(u)$ singulières au voisinage de $u=0$, sont deux problèmes équivalents. C'est pourquoi les conclusions du n° **10** sont encore valables dans le cas présent.

16. — Points transcendants de la classe C. Caractérisques à l'origine.

Nous allons aborder, maintenant, la troisième classe (*classe* C) de points transcendants signalés au n° **2**. Nous supposerons, en d'autres termes, que, quel que soit y_1 l'origine $x = 0$ soit un pôle d'ordre n du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$ de l'équation (2). Développant P et Q par rapport aux puissances de x, nous mettrons de nouveau l'équation (2) sous la forme

$$(32) \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y) + xp_1(y) + \ldots}{q_0(y) + xq_1(y) + \ldots} \qquad (p \text{ et } q \text{ polynomes en } y).$$

D'ailleurs, après avoir fait, au besoin, le changement de variable $\left(u, \frac{1}{y-g}\right)$, nous avons toujours le droit (*cf.* n° **12**) de supposer que *tous les p sont d'un même degré* (m) *en* y, *tous les q étant de degré* $m-2$.

Proposons-nous, en premier lieu, d'étudier *l'allure des caractéristiques de* (32) *qui présentent des points critiques arbitrairement rapprochés de l'origine*. Nous suivrons, à cette fin, la même marche qu'au n° **12**.

Soit g' une valeur finie quelconque, distincte des racines de $p_0(y)$ et $q_0(y)$, et soit $\bar{x}$ un point voisin de l'origine où y prenne la valeur g' : je dis *qu'on peut décrire, autour de* $\bar{x}$, *un cercle de rayon* $\alpha|\bar{x}^{n-1}|$ (α *nombre positif quelconque*) *tel qu'on ait :*

Dans le cercle et sur le contour : $|y - g'| < 2\beta$;
Sur le contour du cercle : $|y - g'| \geqq \beta$,

β (*fonction de* α) *restant supérieur à une limite fixe lorsque* $\bar{x}$ *tend vers* 0.

En effet, appelons γ un petit cercle de centre $x = 0$ duquel nous nous interdirons de faire sortir x, et soit H un grand nombre positif. Nous pouvons déterminer un nombre k tel que, pour x intérieur à γ et $|y| < H$, l'équation (32) donne

$$\left|\frac{q_0(y)}{p_0(y)}dy - \frac{dx}{x^n}\right| < k\left|\frac{dx}{x^{n-1}}\right|.$$

Partons alors de $\bar{x}$ (où $y = g'$) et intégrons sur un rayon $\bar{x}\bar{x}_1$ issu de ce point : nous aurons (en conservant les notations du n° **12**) :

$$\left|\int_{g_0}^{g_1}\frac{q_0}{p_0}dy - \frac{1}{n-1}(\bar{x}_1^{-n+1} - \bar{x}^{-n+1})\right| < \frac{k}{n-2}(\bar{x}_1^{-n+2} - \bar{x}^{-n+2}).$$

La démonstration de la proposition énoncée s'achève comme au n° **12**.

La proposition est encore vraie lorsque la valeur g' est y' égale à l'infini. En effet, la transformation $v = y^{-1}$ change l'équation (32) en une équation de même forme.

Considérons alors un chemin direct quelconque, l, aboutissant au point transcendant. Nous sommes assurés *qu'une intégrale* $y(x)$ *suivie sur ce chemin, ou bien ne tend vers aucune limite, ou bien tend vers une racine de* $p_0(y)$.

Supposons, d'autre part, que, sur le chemin l, $|y|$ dépasse H : alors le chemin l traverse certains cercles c_i qui ont pour centres des infinis $\bar{x}_i$ de $y(x)$, et dont les rayons sont de l'ordre de grandeur de $|\bar{x}_i^{n-1}|$. Ces cercles sont *extérieurs les uns aux autres* (*cf.* n° **12** et *L.*, Chap. II). Nous pouvons donc (sans altérer la branche suivie) déformer le chemin l de manière qu'il ne traverse jamais aucun cercle c_i où $|y| > H$.

C'est grâce à cette circonstance que nous pourrons (*cf.* n° **12**) ramener l'étude de l'équation (32) à l'étude de l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} + \frac{p_0}{q_0} + \mu(\ldots) \tag{32 bis}$$

qui coïncide avec l'équation réduite

$$x^n \frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y)}{q_0(y)} \tag{33}$$

pour $\mu = 0$, et avec l'équation (32) pour $\mu = 1$.

Caractéristiques à l'origine. — Nous examinerons aux numéros suivants les principaux types d'équations (32) et les circonstances qui caractérisent ces types. Mais nous allons tout d'abord faire quelques remarques générales sur l'allure possible des caractéristiques au voisinage de l'origine.

Prenons d'abord l'équation réduite (33) dans l'hypothèse où $p_0(y)$ *n'a que des racines simples qui n'annulent pas* $q_0(y)$. L'intégrale générale de (33) s'écrit en ce cas

$$\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{1}{\lambda_1}\log(y - y_1)\ldots + \frac{1}{\lambda_m}\log(y - y_m), \tag{34}$$

$y_1, \ldots, y_m$ étant les racines de p_0, et les λ étant liés (comme au n° **13**) par la relation $\Sigma\lambda_j^{-1} = 0$.

Considérons alors l'ensemble des caractéristiques issues avec une même valeur quelconque d'un point voisin de l'origine (cet ensemble de caractéristiques constitue une *branche d'intégrale au sens restreint; cf.* n° **5**, note). L'égalité (34) montre que cet ensemble de caractéristiques est *complètement indéterminé au voisinage de l'origine*. On en conclut aussitôt *qu'il en est de même des caractéristiques de* (32 *bis*) *et de* (32). La variation de y (à partir d'une valeur quelconque g, distincte des y_j) est réglée par le théorème démontré plus haut.

Mais les caractéristiques données par (34) jouissent d'une propriété remarquable. Elles ne prennent nulle part (en dehors de $x = 0, x = \infty$) les valeurs $y_1, \ldots, y_m$. En revanche, il existe des rayons aboutissant à l'origine sur lesquels y tend vers l'une quelconque des valeurs y_j. Et nous observons, de plus, que, sur ces rayons, $y - y_j$ tend vers 0 plus vite qu'une puissance négative quelconque de x $\left[(y - y_j)\right.$ est de l'ordre de grandeur de $\left.e^{\frac{-1}{|x|^{n+1}}}\right]$. Nous exprimons ce fait en disant que la fonction $(y - y_j)^{-1}$ de x^{-1} a, au voisinage de $x^{-1} = \infty$, une *croissance du type exponentiel*. Les valeurs $y_1, \ldots, y_m$ sont, pour les branches d'intégrales y, des *valeurs exceptionnelles* (¹) comparables aux valeurs exceptionnelles mises en évidence par le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières.

Ces propriétés particulières ne se conservent qu'exceptionnellement lorsque l'on passe de l'équation (33) aux équations (32 *bis*) et (32). Supposons, en effet, que p_0 admette $y = 0$ comme racine simple. [$q_0(0)$ étant non-nul] et faisons $y = xw$. Nous obtenons une équation de la forme (²)

$$(35) \qquad x^n \frac{dw}{dx} + x^{n-1} w = \frac{aw + p_1(0) + x(\ldots) + \ldots}{q_0 + xq_1 + \ldots}$$

Si l'équation (32) possédait des caractéristiques tendant vers 0 plus

(¹) *Voir* le théorème de M. Painlevé cité en note *supra* n° **12**.

(²) Une transformation homographique effectuée sur w ramènerait l'équation (35) à la forme normale (*voir* le début du présent paragraphe).

vite qu'une puissance négative quelconque de x, l'équation (35) posséderait nécessairement des caractéristiques w tendant vers o avec x. Or, cela est impossible si $p_1(0) \neq 0$.

Supposons, au contraire, que $p_1, p_2, \ldots$ contiennent en facteur des puissances convenables de y. Il est possible alors que les conditions voulues pour que $y=0$ soit *valeur exceptionnelle* se trouvent satisfaites.

Ainsi, *l'équation* (32) *peut avoir des caractéristiques tendant vers certaines racines de* $p_0(y)$ *aussi vite qu'une exponentielle, mais elle peut aussi n'en point avoir.*

Les caractéristiques qui tendent vers des valeurs exceptionnelles sont suivies sur certains rayons du plan x aboutissant en $x=0$, mais non pas sur un rayon quelconque. Ne peut-il arriver, cependant, qu'un ensemble de caractéristiques (issues avec une même valeur d'un point voisin de l'origine) tende vers une même limite sur tout rayon aboutissant en $x=0$? S'il en était ainsi, l'équation différentielle posséderait nécessairement une famille de branches d'intégrales (au sens restreint) non-indéterminées à l'origine. Or, nous venons de voir que cette circonstance ne peut pas se présenter dans le cas où p_0 n'a que des racines simples distinctes des racines de q_0. Je dis qu'elle peut, au contraire, se présenter si p_0 *a des racines multiples.*

Revenons, en effet, à l'équation réduite (33), et supposons que $y=0$ *soit racine double de* p_0 *et n'annule pas* q_0. L'intégrale générale de (33) s'écrit alors

$$(36)\qquad \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}}+C=\frac{a}{y}+\frac{1}{\lambda_1}\log y+\ldots+\frac{1}{\lambda_m}\log(y-y_m).$$

Considérons, comme plus haut, les branches d'intégrales y au sens restreint (ensembles de caractéristiques). Nous voyons que l'intégrale générale (36) possède des familles [1] de branches indéterminées au voisinage de l'origine et, en outre, *une famille de branches non-indéterminées et nulles pour* $x=0$.

L'étude de cette famille de branches se ramène d'ailleurs, immédia-

---

[1] Par *famille de branches* j'entends l'ensemble des branches issues d'un même point avec des valeurs initiales recouvrant une certaine aire du plan y.

tement, à une étude déjà faite. Faisant, en effet, le changement de variable, $y = x^{n-1}w$, nous obtiendrons l'équation

$$x^{2n-1}\frac{dw}{d\xi} + (n-1)x^{2n-2}w = \frac{x^{2n-2}w^2\pi_0(wx^{n-1})}{q_0(wx^{n-1})}, \qquad \text{où} \qquad \pi_0(0) \neq 0;$$

et, en divisant les deux membres par x^{2n-2}, nous retomberons sur une équation de Briot-Bouquet pour laquelle l'origine est un point transcendant de la classe B.

Ces propriétés de l'équation (33), où $y = 0$ est supposé racine double de p_0, ne se conservent pas, en général, lorsqu'on passe aux équations (32 *bis*) et (32). Supposons, en effet, pour fixer les idées, que $p_1(0)$ soit non-nul, et faisons les changements de variables

$$x = \xi^2, \qquad y = \xi w;$$

l'équation (32) prendra alors la forme (¹)

$$\xi^{2n-2}\frac{dw}{d\xi} + \xi^{2n-3}w = \frac{2aw^2 + 2p_1(0) + \xi(\ldots)}{q_0(0) + \xi(\ldots)},$$

et l'on voit aisément que, dans le cas général, cette équation du type (32) n'a pas de caractéristique qui reste finie au voisinage de l'origine.

Si, au contraire, $p_1, p_2, \ldots,$ contiennent en facteur des puissances convenables de y, on pourra effectuer sur l'équation (32) (où $y = 0$ est racine double de p_0), comme sur l'équation (33), le changement de variable $y = x^{n-1}w$ et l'on sera ainsi ramené à l'équation de Briot-Bouquet

$$x\frac{dw}{dx} + (n-1)w = \frac{aw^2 + \ldots}{q_0 + \ldots}$$

pour laquelle l'origine est un point transcendant de la classe B.

Ainsi, *l'équation* (32) *peut, exceptionnellement, avoir des branches d'intégrales qui restent déterminées au voisinage de l'origine.* L'allure de ces branches est comparable à celle d'une fonction rationnelle.

(¹) Les deux membres étant divisés par ξ.

Les branches d'intégrales étudiées du point de vue de la théorie de la croissance. — Pour caractériser la croissance des intégrales, nous prendrons pour variable $\xi = \frac{1}{x}$. Nous retrouverons alors (en étudiant les intégrales y pour ξ croissant indéfiniment) les divers types de croissance que j'ai signalés ailleurs (*L.*, Chap. II; *P.*, n° 9) :

1° *Branches d'intégrales à croissance rationnelle (au sens restreint).* — Ce sont les branches d'intégrales que nous venons de considérer en dernier lieu. Leur valeur approchée est une fonction rationnelle (*L.*, Chap. II, n^{os} 3-4). Chacune d'elles ne présente dans tout le plan qu'un nombre fini de points critiques (cf. *P.*, n° 9).

2° *Branches d'intégrales à croissance exponentielle.* — Ce sont des intégrales, finies *au voisinage* de l'infini, dont le module croît indéfiniment sur certains rayons aussi vite que $e^{|\xi^n|}$ (je suppose, pour avoir des intégrales croissantes, qu'on ait au besoin effectué une transformation homographique sur y). Ces branches d'intégrales (que je suppose toujours suivies sur l'ensemble des rayons issus d'un même point) prennent une infinité de fois toutes les valeurs au voisinage de l'origine (exception faite, au plus, pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles). Chacune d'elles présente une infinité de points critiques.

3° *Branches d'intégrales à croissance méromorphe (ou rationnelle au sens large).* — En dehors de cercles c entourant leurs infinis, ces branches restent inférieures à une puissance finie de $|x|$ sur tout chemin direct tendant vers l'infini. Elles sont complètement indéterminées et présentent une infinité de points critiques.

Branches d'intégrales exceptionnelles. — Nous avons vu tout à l'heure que l'équation (32) ne pouvait qu'exceptionnellement posséder une *famille* de branches d'intégrales tendant vers une racine de p_0. Mais ne peut-il exister des branches d'intégrales (ensembles de caractéristiques issues d'un point) isolées jouissant de cette propriété? C'est

(1) On parviendrait à des conclusions analogues si $y = 0$ était, pour P_0, une racine d'ordre 3 ou d'ordre supérieur.

ainsi que l'équation (4) du n° **3** possède, pour $\mathcal{R}(\lambda_1) < 0$, $\mathcal{R}(\lambda_2) < 0$, deux intégrales isolées nulles et holomorphes à l'origine. Ces intégrales exceptionnelles sont les limites de familles de branches dont les points critiques sont venus se confondre à l'origine. De même l'équation réduite (33) admet les intégrales particulières $y = y_1, \ldots, y = y_n$.

Existe-t-il, pour l'équation (32), des intégrales-limites analogues? Cette circonstance ne peut se présenter qu'exceptionnellement.

Mécanisme des permutations. — Les mécanismes de permutations que peut définir la singularité $x = 0$ de l'équation (32) sont extrêmement variés, et je ne chercherai point à les analyser dans ce Mémoire. La méthode à suivre pour étudier ces mécanismes consisterait, comme toujours, à passer de l'équation (33) à l'équation (32) par l'intermédiaire de (32 *bis*), et c'est ainsi que je vais procéder pour étendre aux points transcendants de la classe C le théorème 4 du n° **1**. Cependant, les premiers cas que cette méthode nous conduit à examiner ne sont point ceux qui donnent les résultats les plus simples. Ainsi, les singularités présentées à l'infini par les équations polynomales très simples que j'ai étudiées ailleurs (*L.*, Chap. II, n$^{\text{os}}$ **3-4**; *P.*, Chap. III à V) appartiennent à des catégories très particulières de la classification que j'adopte ici.

17. — Cas où p_0 n'a que des racines simples distinctes des racines de q_0.

Considérons d'abord l'équation réduite (33) dont l'intégrale générale est représentée par l'égalité (34). Les points critiques d'une même intégrale seront donnés (pour une même valeur de C) par l'égalité

$$(37) \qquad \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{1}{\lambda_1}\log(\tau_k - y_1)\ldots + \frac{1}{\lambda_m}\log(\tau_k - y_m)$$

où l'on égalera successivement τ_k à toutes les racines de $q_0(y)$. Nous pouvons représenter l'ensemble de ces points critiques par le symbole $x_{\nu, k, j_1, j_2, \ldots, j_m}$, où les indices ont les significations suivantes :

ν varie de 1 à $n-1$, et l'on a

$$(38) \qquad x_{2,k,\dots,j_m} = e^{\frac{2i\pi}{n-1}} x_{1,k,\dots,j_m}, \qquad \dots,$$

k varie de 1 à $m-2$; cet indice spécifie la racine τ_k de y_0 qui a fourni le point critique;

j_1 prend toutes les valeurs entières positives et négatives; cet indice spécifie la détermination de $\log(\tau_k - y)$ qu'on a considérée dans l'égalité (37);

$j_2, \dots, j_m$ varient de même de $-\infty$ à $+\infty$.

Il résulte de l'égalité (37) que les points critiques d'une même intégrale tendent vers 0 lorsque leurs indices croissent indéfiniment.

Considérons, en particulier, une branche d'intégrale au sens restreint, c'est-à-dire l'ensemble des caractéristiques issues d'un même point avec une même valeur. Lorsque nous nous rapprocherons de l'origine dans des directions convenables, nous rencontrerons une infinité de points critiques appartenant à la même branche. Les directions à suivre sont d'ailleurs données par l'égalité (37) : ce sont *les directions suivant lesquelles la branche d'intégrale suivie est indéterminée;* nous les appellerons *directions d'indétermination* relatives (¹) à la branche d'intégrale suivie.

Cela dit, appelons x', x'' deux points critiques quelconques présentés par une même branche d'intégrale suivie, vers l'origine, dans une direction d'indétermination. Les différences des indices relatifs aux points x' et x'' seront des entiers finis. Lors donc que x va de x' en x'', y décrit un chemin composé de lacets élémentaires en nombre fini entourant les zéros de p_0. La fonction $x''(x')$ ne s'annule, au voisinage de $x' = 0$, que pour $x' = 0$.

Cela dit, revenons à l'équation (32 *bis*) et considérons, sur un chemin direct (²) voisin de l'origine, une branche d'intégrale de cette équation. Cette branche est fonction continue de μ au voisinage de $\mu = 0$, et elle présente par conséquent le même système de points

(¹) Lorsqu'on tend vers l'origine suivant ces directions, la branche d'intégrale y de (32) est indéterminée. Suivant les autres directions la branche y *peut* rester déterminée, si l'équation (32) satisfait à certaines conditions (cf. *supra*, n° **16**).

(²) *Cf.* n° **3**, en note.

critiques que les branches d'intégrales de (33) définies par des valeurs initiales voisines.

Considérons, en particulier, une branche d'intégrale suivie, vers l'origine, suivant une direction d'indétermination de l'intégrale (37). Il résulte des propositions du n° **16** qu'on rencontre, dans cette direction, une infinité de points critiques de la branche suivie. Appelons x' et x'' deux quelconques de ces points critiques, et examinons, lorsque μ varie à partir de o, la fonction $x''(x')$.

Quand la variable x se rend de x' en x'', y va d'une valeur critique τ' à une valeur critique τ''. Ces valeurs τ', τ'' sont respectivement racines des polynomes

$$q_0(y) + \mu[x' q_1(y) + \ldots]; \qquad q_0(y) + \mu[x'' q_1(y) + \ldots]$$

et sont, par conséquent, fonctions continues de μ.

Quant au chemin τ', τ'' décrit par y de τ' en τ'', c'est, avons-nous dit, pour $\mu = 0$, une combinaison de lacets entourant les points y_j. Lorsque μ varie, ce chemin n'est pas altéré, tant qu'il ne se trouve pas traverser un point critique de la fonction $x(y)$. Mais les points critiques de $x(y)$ sont fonctions continues de μ et restent voisins des y_j pour μ voisin de o. J'en conclus que, quel que soit x' voisin de o, mais non-nul, la fonction $x(y)$ suivie sur le chemin (τ', τ'') à partir de la valeur y est fonction holomorphe de y le long de ce chemin. En conséquence, *la valeur finale x'' est fonction holomorphe de x' et n'est pas nulle.*

En d'autres termes ([1]), *la fonction $x''(x')$ ne s'annule, au voisinage de $x' = 0$, que pour $x' = 0$.* C'est le *théorème* ℬ du n° **1** qui se trouve maintenant établi pour l'équation (32 *bis*) où μ est voisin de o (*dans l'hypothèse où les points critiques x', x'', appartiennent à une même branche d'intégrale suivie, vers l'origine, dans une direction d'indétermination*). De proche en proche, nous établirons le théorème ℬ dans les mêmes conditions que pour l'équation (32), pourvu que nous restions suffisamment près de l'origine.

Considérons, d'autre part, un point quelconque $\overline{y'}$ du chemin

---

([1]) Ajoutons que le chemin (x', x'') qui joint les deux points critiques reste *direct* lorsque x' varie au voisinage de o.

(τ', τ'') relatif à la variable y; c'est-à-dire, considérons la valeur prise par la branche y en un point $\bar{x}'$ du chemin (x', x''). Tant que x' et x'' ne sont pas confondus avec l'origine, le point $\bar{y}'$ est une fonction holomorphe du paramètre μ. D'ailleurs, pour $\mu = 0$, la valeur $\bar{y}'$ tend vers une racine de p_0 lorsque les points critiques x', x'' tendent vers o. J'en conclus que, pour μ voisin de o, la branche d'intégrale définie par la valeur $\bar{y}'$ tend vers une intégrale qui est arbitrairement voisine d'une racine de p_0. Suivons, en particulier, la branche d'intégrale le long d'un chemin qui se rapproche indéfiniment de l'origine, suivant une *direction d'indétermination*. Nous voyons sans peine que, pour x' et x'' nuls, *notre branche d'intégrale tendra, sur le chemin considéré, vers une racine de* p_0. S'il en était autrement, en effet, la branche présenterait, dans la direction d'indétermination suivie, une infinité de points critiques : or, cela ne saurait être lorsque $x' = x'' = 0$, puisque tous les points critiques rencontrés doivent s'annuler en même temps que x'.

Cette conclusion s'étend, de proche à proche, à l'équation (32 *bis*) où $|\mu| \leqq 1$, c'est-à-dire à l'équation (32).

Le théorème $\mathcal{A}$. — Proposons-nous maintenant de démontrer le théorème $\mathcal{A}$. Sur un chemin direct $\bar{x}\,\bar{x}_1$, voisin de l'origine, nous suivons, à partir de la valeur $\bar{y}$, une branche d'intégrale qui présente des points critiques voisins de l'origine, et nous nous demandons vers quelles limites doit tendre y pour que les points critiques de la branche tendent vers le point transcendant $x = 0$.

Raisonnons d'abord sur l'équation (32 *bis*) où μ est supposé voisin de o. Nous partons d'une valeur de $\bar{y}$ pour laquelle le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ ne traverse pas l'origine; il en est alors de même du chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ relatif à l'équation (33) où $\mu = 0$. Il est d'ailleurs loisible de composer ainsi le chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$: 1° lacets élémentaires rectilignes, issus du contour d'un petit cercle γ de centre $x = 0$, et entourant certains points critiques x'; 2° chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ situé tout entier à une distance de l'origine supérieure à $|\bar{x}|$ et $|\bar{x}_1|$.

Supposons qu'à partir d'un point quelconque du chemin $\bar{x}\,\bar{x}_1$ nous tendions vers l'origine suivant une *direction d'indétermination :*

nous rencontrons (ainsi qu'il a été dit plus haut) une infinité de points critiques de l'équation (32 *bis*) ou (33). Tous ces points critiques, x'', tendront (nous le savons) simultanément vers o. Nous savons de plus que, pour l'équation (33), les points x'' tendent vers o en même temps que les points x'. Cherchons sous quelles conditions il en sera encore ainsi pour l'équation (32 *bis*).

Supposons que l'un des points x' tende vers o. Alors l'intégrale suivie sur $\overline{x}\,\overline{x}_1$ tend, pour l'équation (33), vers une racine de p_0; pour l'équation (32 *bis*), vers une branche voisine de la même racine de p_0. Considérons dans ces conditions (j'entends, pour $\overline{y}$ tendant vers une racine de p_0) l'équation (33); nous voyons que les points critiques x'' d'indices suffisamment grands tendent vers o suivant des directions d'indétermination. On peut dès lors déterminer des indices ν, k, j, ..., j_m, tels que le point $x_{\nu,k,j,\ldots,j_m}$ se rapproche de o dans une direction d'indétermination et s'annule en même temps que x', et il y a, par conséquent, une infinité de points x'' qui tendent vers o (suivant une direction d'indétermination déterminée) lorsque x' tend lui-même vers o.

Cette propriété s'étend immédiatement à l'équation (32 *bis*) et, de proche en proche, à l'équation (32). En effet, x' et les points x'' considérés sont des points appartenant à l'ensemble de points critiques défini au début du présent numéro, et les différences de leurs indices sont finies. Le raisonnement qui établit le théorème $\mathcal{B}$, dans les conditions énoncées plus haut, prouvera donc, ici encore, que la fonction $x''(x')$ ne s'annule que pour $x' = 0$.

Nous tirons de là la conclusion suivante : *Lorsque, à partir d'un point quelconque du chemin* $\overline{x}\,\overline{x}_1$, *nous tendons vers l'origine suivant une direction d'indétermination de l'intégrale* (37), *notre branche d'intégrale admet une limite (cesse d'être indéterminée), dès que* x' *devient nul, et cette limite est une racine de* p_0.

Dès lors, pour achever la démonstration du théorème $\mathcal{A}$, nous n'aurons plus qu'à répondre à la question suivante : *Vers quelle ou quelles limites doit tendre, en un point donné, la valeur initiale d'une caractéristique pour que cette caractéristique, supposée suivie dans une direction d'indétermination, tende vers une racine de* p_0 *(lorsque les points critiques* x' *se confondent avec l'origine)*?

Recherche des caractéristiques qui tendent vers une racine de p_0. — Soit $y = 0$ une racine simple de p_0 qui n'annule pas q_0. Nous pouvons écrire l'équation (32 *bis*) sous la forme

$$(39)\qquad x^n \frac{dy}{dx} = l_1 y + l_2 y^2 + \ldots + \mu\,[\text{termes en } x,\ x^2,\ xy,\ \ldots].$$

Pour $\mu = 0$, nous avons l'intégrale $y = 0$. Nous allons chercher à obtenir, pour μ voisin de 0, une caractéristique de la forme

$$y = \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots,$$

issue de $\bar{x}'$ avec une valeur voisine de 0 et tendant vers 0 sur un rayon $\bar{x}'\mathrm{O}$, dont la direction est supposée être une *direction d'indétermination* (pour la caractéristique considérée).

La fonction y_1 est définie par l'équation

$$x^n y_1' = l_1 y_1 + \text{termes en } x,\ x^2,\ \ldots;$$

elle s'écrit donc

$$y_1 = e^{\frac{-l_1}{(n-1)x^{n-1}}}\left[\mathrm{C} + \int^x e^{\frac{l_1}{(n-1)x^{n-1}}}(\text{termes en } x^{1-n},\ x^{2-n},\ \ldots)\,dx\right],$$

expression qu'il est facile d'étudier directement ([1]).

Supposons fixée une fois pour toutes la valeur initiale de l'intégrale $\int$ au point $\bar{x}'$ et suivons le rayon $\bar{x}'\mathrm{O}$. Je dis que *si, sur ce rayon, la caractéristique y_1, correspondant à une certaine valeur de* C, *tend vers* 0, *la valeur de* C *pour laquelle il en est ainsi est isolée.*

Pour établir ce fait, nous ferons le changement de variable

$$\xi = e^{\frac{l_1}{(n-1)x^{n-1}}};$$

la fonction y_1 s'écrit alors

$$(40)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\xi}\left\{\mathrm{C} - \int d\xi\,[\text{termes en } x,\ x^2,\ \ldots]\right\} \\ &= \frac{1}{\xi}\left\{\mathrm{C} - \int d\xi\left[\text{termes en } (\log\xi)^{\frac{1}{n-1}},\ (\log\xi)^{\frac{-2}{n-1}},\ \ldots\right]\right\}. \end{aligned}$$

([1]) Pour $n = z$, l'intégrale $\int$ est une somme d'intégrales dont l'étude se ramène à celle du logarithme intégral.

Nous partons d'un point $\bar{\xi}'$ (correspondant à $\bar{x}'$) avec une détermination fixée de $(\log\xi)^{\frac{1}{n-1}}$, et nous décrivons le rayon $\bar{x}'O$; à ce rayon correspond, dans le plan ξ, un chemin indéterminé qui est tout entier situé à distance finie et tourne une infinité de fois autour du point $\xi = 0$ [les seules singularités de la fonction $y_1(\xi)$ sont $\xi = 0$ et $\xi = \infty$]. Je dis que, dans ces conditions, l'intégrale qui figure dans l'expression de y_1 tend vers une limite déterminée. En effet, nous pouvons remplacer le chemin décrit par ξ par le chemin suivant : 1° rayon joignant $\bar{\xi}'$ à un point $\bar{\xi}''$ arbitrairement rapproché de $\xi = 0$; 2° nombre arbitrairement grand de tours le long du cercle de centre $\xi = 0$ et de rayon $|\bar{\xi}''|$; 3° rayon $\bar{\xi}''\xi''$ aboutissant en un point situé à distance finie. Or, le long d'un tel chemin, les intégrales

$$\int d\xi\,(\log\xi)^{\frac{-1}{n-1}}, \qquad \int d\xi\,(\log\xi)^{\frac{-1}{n-1}},$$

suivies à partir de $\xi = \bar{\xi}'$ et de valeurs initiales déterminées, tendent manifestement vers des limites finies lorsque n est un entier supérieur ou égal à 2.

Donnons, alors, à la constante C une valeur égale à la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int$ sur le rayon $\bar{x}'O$. La caractéristique y_1 correspondante tendra vers 0 sur $\bar{x}'O$. Au contraire, cette caractéristique sera indéterminée sur $\bar{x}'O$ pour toute autre valeur de C.

Ainsi se trouve démontrée la proposition énoncée relativement à la caractéristique y_1.

La fonction y_2 est définie par l'équation différentielle

$$x^n y_2' = l_1 y_2 + l_2 y_1^2 + \text{termes en } x y_1,\ x^2 y_1 \ldots .$$

Elle est de la forme

$$y_2 = e^{\frac{-l_1}{(n-1)x^{n-1}}}\left[C' + \int e^{\frac{l_1}{(n-1)x^{n-1}}}\left(\text{termes en } x^{-n} y_1^2,\ x^{1-n} y_1,\ \ldots\right) dx\right].$$

Supposons fixées une fois pour toutes la détermination de y_1 (ce sera celle qui tend vers 0 sur $\bar{x}'O$) et la valeur initiale de l'intégrale $\int$ au point $\overline{x}'$. Nous démontrerons encore que si, sur le rayon $\overline{x}'O$, la caractéristique y_2 correspondant à une certaine valeur de C′ tend vers o, la valeur de C′ pour laquelle il en est ainsi est isolée.

Donnant à C′ cette valeur isolée, nous pourrons raisonner sur y_3 comme sur y_2, et ainsi de suite.

Nous parvenons ainsi, finalement, à la conclusion suivante : *Les caractéristiques de l'équation* (39) (issues de $\overline{x}'$ avec une valeur voisine de o) *qui tendent vers zéro sur le rayon $\overline{x}'O$ sont des caractéristiques isolées;* en d'autres termes, les valeurs initiales qui, au point $\overline{x}'$, définissent ces caractéristiques sont des valeurs isolées.

Nous déduisons de là le théorème 4 pour l'équation (32 *bis*) où μ est voisin de o, et, de proche en proche, pour l'équation (32 *bis*) où $\mu = 1$.

18. — Cas où p_0 a des racines multiples distinctes des racines de q_0.

Les cas particuliers qu'il nous reste à examiner seront étudiés par la même méthode que le cas général traité ci-dessus. Nous nous dispenserons donc d'entrer dans les détails, et nous dirons seulement en quoi les résultats qui précèdent se trouvent modifiés lorsque p_0 et q_0 ont des racines multiples ou des racines communes.

Supposons d'abord que y_1 soit racine multiple, par exemple *racine double de p_0* (les racines de ce polynome étant d'ailleurs distinctes de celles de q_0).

Nous pourrons écrire l'intégrale générale de l'équation réduite (33) sous la forme (*comparer* n° **14**) :

$$\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C = \frac{a}{(y-y_1)^2} + \frac{1}{\lambda_3}\log\frac{y-y_3}{y-y_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_m}\frac{y-y_m}{y-y_1}.$$

On voit que tout ensemble de caractéristiques appartenant à cette intégrale générale présente une infinité de points critiques, lesquels tendent vers o suivant certaines directions qui sont les *directions d'indétermination*. Il en est encore ainsi pour l'équation (32 *bis*) où μ varie de o à 1.

Considérons, d'autre part, le chemin $\overline{x}\overline{x}_1$ sur lequel nous suivons la branche d'intégrale définie par la valeur initiale $\overline{y}$. Traçons un rayon $\overline{x}'O$ issu d'un point de $\overline{x}\,\overline{x}_1$ et dirigé suivant une *direction d'indétermination* de notre branche d'intégrale, puis voyons comment la branche se comporte sur ce rayon. Je constate, comme au numéro précédent, que, lorsque le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ vient à traverser l'origine, la branche d'intégrale ou caractéristique suivie sur le rayon $\overline{x}'O$ tend vers une racine de p_0 le long de ce rayon. Reste à montrer que les caractéristiques pour lesquelles cette circonstance se présente sont isolées, c'est-à-dire que les valeurs initiales par lesquelles elles sont définies (soit au point $\overline{x}$, soit au point $\overline{x}'$) sont des valeurs isolées. La démonstration se fera comme au numéro précédent pour les racines simples de p_0. Quant à la caractéristique qui tend, sur le rayon d'indétermination $\overline{x}'O$, vers la racine multiple $\overline{y}_1$, nous l'étudierons comme il suit.

Supposant par exemple la racine double et égale à o, nous pouvons écrire l'équation (32) sous la forme

$$x^n y' = ly^2 + ax + \text{termes en } y^3,\ x^2,\ \ldots; \tag{41}$$

effectuons alors le changement de variables

$$x = \xi^2, \qquad y = \xi w; \tag{42}$$

nous obtenons (en divisant les deux membres par ξ^2) l'équation

$$\xi^{2n-2} w' + \xi^{2n-3} w = 2lw^2 + 2a + \ldots.$$

Cette équation peut être étudiée comme l'équation (39) du n° **17**. Aux caractéristiques w qui tendent vers une valeur finie sur un rayon aboutissant à l'origine, correspondent des caractéristiques y de (41) qui tendent vers o. Ces caractéristiques sont isolées de même que les caractéristiques w. *Elles satisfont donc au théorème A.*

Lorsque $a = 0$, le changement de variables (41) ne nous donne plus une équation du type (39). On aura recours alors à un changement de variables de la forme générale (*cf.* n° **10**)

$$x = \xi^p, \qquad y = \xi^q w \qquad (p \text{ et } q \text{ entiers}). \tag{43}$$

Exceptionnellement (*cf.* n° **16**), l'équation (41) peut posséder une branche d'intégrale nulle à l'origine (c'est-à-dire une branche d'intégrale qui tend vers o sur tout rayon aboutissant en $x = 0$, et non point seulement sur un rayon dirigé suivant une *direction d'indétermination*). Cette intégrale nulle sera mise en évidence par le changement de variables (42).

19. — Points transcendants multiples (cas où p_0 et q_0 ont des racines communes).

Lorsque p_0 et q_0 ont des racines communes, l'équation (32) présente, à l'origine, plusieurs points transcendants confondus. A un point transcendant multiple, comme à un point transcendant simple correspondent, pour une branche d'intégrale donnée, certaines *directions d'indétermination*, directions suivant lesquelles la branche d'intégrale présente une infinité de points critiques convergeant vers le point transcendant $x = 0$.

Considérons, d'autre part, le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ (*voir* n° **18**) et le rayon $\overline{x}'O$, issu de ce chemin et dirigé suivant une *direction d'indétermination* de la branche d'intégrale suivie sur $\overline{x}\,\overline{x}_1$. Lorsque le chemin $\overline{x}\,\overline{x}_1$ vient à traverser l'origine, la branche d'intégrale (ou caractéristique) suivie sur $\overline{x}'O$ tend vers une racine y_j de p_0. Il s'agit d'étudier cette caractéristique dans l'hypothèse où y_j est une racine de q_0, et de montrer qu'en ce cas encore la caractéristique est isolée.

Or, on voit aisément qu'on pourra toujours faire cette étude en effectuant un changement de variables de la forme (42). On parviendra ainsi au théorème A.

Soit, par exemple, $y = 0$ *racine simple commune de* p_0 *et* q_0. Alors, au voisinage de $x = 0$, $y = 0$, nous pourrons écrire l'équation (32) sous la forme

$$x^n yy' = ly + ax + \text{termes en } y^2,\ xy,\ \ldots.$$

Posant $y = xw$, nous aurons l'équation en w

$$x^{n+1} ww' + x^n w^2 = lw + a + \ldots.$$

A une caractéristique w qui tend sur $\overline{x}'O$ vers une valeur finie, correspond une caractéristique y qui tend vers o.

Lorsque $a = 0$, le changement de variables $y = xw$ doit être remplacé par une transformation (42) où $p > 0$ et $q \geqq 1$.

On traitera de même, en posant $y = xw$, l'équation

$$x^n y^2 y' = ly + ax + \ldots,$$

relative au cas où $y = 0$ est *racine double* de q_0 et *racine simple* de p_0.

Soit encore l'équation

$$x^n yy' = ly^2 + ax + \ldots$$

relative au cas où $y = 0$ est *racine double* de p_0 et *racine simple* de q_0. Il suffira, pour étudier la caractéristique y qui tend vers 0, de poser

$$x = \zeta^2, \qquad y = \zeta w;$$

on obtiendra ainsi l'équation en w,

$$\frac{1}{2}\zeta^{2n-1} ww' + \frac{1}{2}\zeta^{2n-2} w^2 = lw^2 + a + \ldots.$$

Et ainsi de suite.

Le théorème A est donc vérifié, en définitive, pour toutes les équations du type (32).

20. — Généralisations.

L'analyse que nous avons faite de l'équation (27) (n° **12** et suiv.) et de l'équation (32) ne nous oblige pas à supposer que ces équations soient rationnelles. Considérons l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} = \frac{p_0(y) + xp_1(y) + \ldots}{q_0(y) + xq_1(y) + \ldots},$$

où les deux termes de la fraction du second membre sont rationnels en y et sont, par rapport à x, des développements convergents pour les petites valeurs de x. Toutes les conclusions obtenues dans l'hypothèse où l'équation est rationnelle en x subsisteront, au voisinage de l'origine, pour la nouvelle équation. On pourra pousser plus loin encore la généralisation de ces conclusions en se bornant à supposer que les fonctions de y, p_1, q_1, $\ldots$, p_2, q_2 sont des fonctions uniformes dont aucun point singulier ne coïncide avec les zéros (supposés distincts) des polynomes p_0 et q_0.