JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. DE SÉGUIER

Sur les formes bilinéaires et quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 5 (1909), p. 1-63.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les formes bilinéaires et quadratiques;

Par M. J.-A. de SÉGUIER.

1. M. Jordan a déterminé les formes quadratiques invariantes par une substitution donnée dans le champ des nombres complexes ordinaires ou dans le champ de Galois défini par une équation à coefficients entiers, irréductible mod p, et formé les types réduits distincts auxquels on peut les ramener par des changements de variables qui n'altèrent pas la substitution donnée (*J. M.*, 1888, 1905). M. Dickson s'est ensuite occupé du même problème lorsque le champ est quelconque et l'a complètement résolu pour les champs finis (*Transactions of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 275). M. Lœwy avait auparavant appliqué la même méthode que M. Jordan aux formes hermitiennes, mais sans chercher à les réduire à un type canonique (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898).

Ce sont ces recherches que je voudrais poursuivre ici. Je partirai de l'équation

$$\beta a \bar{\alpha} = a \quad ([1]),$$

où α, β, a sont trois matrices n-aires invertibles, appartenant à un champ $\mathfrak{C}$, dont on peut assimiler la troisième à une forme bilinéaire $\Sigma a_{ik} x_i y_k$, α à une substitution des x et β à une substitution des y. α et β étant données, il s'agira de construire a (si en particulier $\beta = \bar{\alpha}^{-1}$, $\bar{a}$ est assimilable à une substitution quelconque permutable à α).

J'assujettirai ensuite a aux conditions

$$\bar{a} = \pm a, \qquad \bar{a} = \pm \dot{a}$$

[$\dot{v}$ désignant en général la conjuguée d'une matrice v relativement à un champ C et aux racines υ, $\dot{\upsilon}$ d'une équation quadratique, irréductible dans C, telle que $\mathfrak{C} = C(\upsilon)$ résulte de l'adjonction de υ à C],

$$\bar{a} = \beta a \qquad \text{ou} \qquad \bar{a} = \beta \dot{a}.$$

Mais alors je supposerai que α et β peuvent être canonisées par des changements de variables identiques (ou conjugués relativement à C, υ, $\dot{\upsilon}$) et, dans le cas où $\bar{a} = \dot{a}$ et où C n'est pas le champ des nombres réels, que $\beta = \alpha$: ces restrictions se trouvent suggérées par la nature même de la question. Le cas $\bar{a} = \beta a$ conduira notamment à l'extension d'un théorème de Kronecker et à celle des résultats obtenus par M. Voss sur les solutions de l'équation $\bar{a} = \alpha a$.

Lorsque $\mathfrak{C}$ a le module 2, la recherche des formes quadratiques invariantes par une substitution donnée échappe à l'analyse précédente. Mais, en substituant à la forme quadratique une forme bilinéaire convenable, on peut encore employer une analyse analogue. C'est ce que j'indiquerai pour terminer, principalement dans le but d'arriver à une démonstration nouvelle du théorème de M. Jordan sur les substitutions

([1]) La terminologie et les notations employées seront les mêmes que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904), auxquels je renverrai par la lettre *E*.

paires qui conservent une forme quadratique donnée (*J. M.*, 1905, p. 278).

Malgré certaines différences qu'il serait trop compliqué d'indiquer ici, la méthode employée ne pouvait évidemment pas être autre dans le fond que celle de M. Jordan. J'ai cru utile néanmoins de reproduire certains résultats déjà obtenus qui se présentaient conjointement avec d'autres.

2. L'équation $\beta a \bar{\alpha} = a$ équivaut à

$$a(\bar{\alpha} - s\varepsilon) = (\beta^{-1} - s\varepsilon)a$$

($\varepsilon = \varepsilon_n$, ε_N étant la matrice unité d'ordre N). *Pour qu'il existe une forme a telle que*

$$\beta a \bar{\alpha} = a \qquad \text{et} \qquad |a| \neq 0,$$

il faut donc et il suffit (*E.*, 201) *que* $\beta^{-1} - s\varepsilon$ *ait les mêmes diviseurs élémentaires que* $\bar{\alpha} - s\varepsilon$, *c'est-à-dire que* $\alpha - s\varepsilon$. *Les multiplicateurs de* β *sont donc les inverses de ceux de* α.

Si $\beta a \bar{\alpha} = a$ *et si le rang* $r(> 0)$ *de a est* $\leqq n$, $|\alpha - s\varepsilon|$ *et* $|\beta^{-1} - s\varepsilon|$ *ont un facteur commun de degré r, c'est-à-dire que r racines, distinctes ou non, de* $|\beta - s\varepsilon|$ *sont les inverses de r racines de* $|\alpha - s\varepsilon|$. Car on sait trouver dans $\mathfrak{S}$ deux matrices x et y telles que

$$xay = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si donc on pose

$$xay = b, \qquad y^{-1}(\bar{\alpha} - s\varepsilon)y = c, \qquad x(\beta^{-1} - s\varepsilon)x^{-1} = d$$

et

$$c = \begin{pmatrix} c_{rr} & c_{rs} \\ c_{sr} & c_{ss} \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} d_{rr} & d_{rs} \\ d_{sr} & d_{ss} \end{pmatrix},$$

$c_{\rho\sigma}$ et $d_{\rho\sigma}$ désignant des matrices de type (ρ, σ) $(r + s = n)$, on aura

$$bc = db$$

ou

$$\begin{pmatrix} d_{rr} & 0 \\ d_{sr} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{rr} & c_{rs} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$d_{sr} = c_{rs} = 0, \qquad d_{rr} = c_{rr}.$$

Si α et β sont des sommes de substitutions composantes parmi lesquelles α' agissant sur $x_1, \ldots, x_p$ et β' sur $y_1, \ldots, y_q$, il est clair que

$$a' = \Sigma a_{ik} x_i y_k \qquad (i = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, q)$$

est égale à $\beta' a' \bar{\alpha}'$. *Si donc aucun multiplicateur de β' n'est l'inverse d'un multiplicateur de α', a' est nulle.*

3. *Supposons maintenant d'abord que ε soit le champ des nombres complexes ordinaires.*

Prenons α sous forme canonique, et faisons sur les y un changement de variables canonisant β (si $\xi\beta\xi^{-1} = \beta'$ et si $\xi a = a'$, l'équation $\beta a \bar{\alpha} = a$ équivaut à $\beta' a' \bar{\alpha} = a'$, et, si ξ est donnée, la connaissance de a' équivaut à celle de a). Soient $s_1, \ldots$ les multiplicateurs de α, $t_1, \ldots$ ceux de β. D'après ce qu'on vient de voir, a est une somme de formes dans chacune desquelles figurent les seules variables x relatives à un multiplicateur s_i de α et les seules variables y relatives à un multiplicateur t_k de β tel que

$$t_k = s_i^{-1}.$$

Soit

$$t_1 = s_2^{-1}, \qquad t_2 = s_3^{-1}, \qquad \ldots, \qquad t_\varkappa = s_1^{-1},$$

$\varkappa$ étant minimum (par hypothèse, α admet tous ces multiplicateurs si elle en admet un, et l'on peut toujours ranger les variables de manière à vérifier ces relations, même s'il y a une correspondance entre les variables des deux séries). Il suffit de considérer le cas où α agit sur les seules variables canoniques relatives à

$$s_1 (= s), \qquad \ldots, \qquad s_\varkappa$$

et β sur les seules variables canoniques relatives à

$$t_1 (= t), \qquad \ldots. \qquad t_\varkappa.$$

Soit m_j le nombre des variables de la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_1, et supposons d'abord les variables rangées de manière que

$$m_j \geqq m_{j+1}$$

et

$$m_1 = \ldots = m_{q_1} > m_{q_1+1} = \ldots = m_{q_1+q_2} > \ldots = m_{q_1+\ldots+q_\omega}$$

(j'écrirai m pour m_1, q pour q_1, Q_h pour $\Sigma_1^h q_i$). Les q premières suites seront dites former la *première sous-série*, les q_2 suivantes la *deuxième sous-série*, et ainsi de suite. On sait que les substitutions qui agissent de la même manière sur les variables de même rang des diverses suites d'une même sous-série sont permutables à α : elles forment évidemment un groupe que j'appellerai *groupe des sous-séries*.

D'après les hypothèses, à la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_1 répond une suite également nombreuse (que je supposerai être la $j^{\text{ième}}$) relative à $s_i (i = 1, \ldots, \varkappa)$ et une suite également nombreuse (que je supposerai être la $j^{\text{ième}}$) de variables de β relative à t_i. Après la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_1 je placerai maintenant la $j^{\text{ième}}$ relative à s_2, puis la $j^{\text{ième}}$ relative à s_3, ..., puis la $j^{\text{ième}}$ relative à $s_\varkappa$, puis la $(j+1)^{\text{ième}}$ relative à s_1, ..., et je désignerai par x_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ième}}$ des suites ainsi placées et par σ_i le multiplicateur relatif à x_k^i. De même, après la $j^{\text{ième}}$ suite relative à $t_1 (= s_2^{-1})$, je placerai la $j^{\text{ième}}$ relative à $t_2 (= s_3^{-1})$, ..., puis la $j^{\text{ième}}$ relative à $t_\varkappa (= s_1^{-1})$, puis la $(j+1)^{\text{ième}}$ relative à t_1, ..., et je désignerai par y_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ième}}$ des suites ainsi placées et par τ_i le multiplicateur relatif à y_k^i.

Soient alors

$$a = \Sigma_{ijkl} a_{kl}^{ij} x_k^i y_l^j$$

la forme considérée (je supposerai les lignes de la matrice a rangées dans l'ordre des x_k^i et les colonnes dans l'ordre des y_k^i); A^{ij} la partie de a où, i et j restant fixes,

$$k = 1, \ldots, m_i, \qquad l = 1, \ldots, m_j$$

(k indiquant la ligne et l la colonne); $\hat{A}^{gh}$ la matrice des A^{ij} où

$$i = (g-1)\varkappa + 1, \ldots, g\varkappa, \qquad j = (h-1)\varkappa + 1, \ldots, h\varkappa$$

(i indiquant la ligne et j la colonne); $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ la matrice des $\hat{A}^{gh}$ où

$$g = Q_{\rho-1} + 1, \ldots, Q_\rho, \qquad h = Q_{\sigma-1} + 1, \ldots, Q_\sigma$$

(g indiquant la ligne et h la colonne); $a^{\lambda\mu}$ la matrice des matrices

$A^{(i-1)\varkappa+\lambda,(j-1)\varkappa+\mu}$ où

$$i, j = 1, \ldots, Q_\omega$$

(i indiquant la ligne et j la colonne) (¹). A^{ij}, devant être transformée en elle-même quand on applique α aux x et β aux y, est évidemment nulle si $\sigma_i \tau_j \neq 1$. Donc *les seules* $A^{ij} \neq 0$ *sont celles où*

$$i \equiv j+1 \quad \operatorname{mod} \varkappa \qquad (i, j = 1, \ldots, Q_\omega \varkappa).$$

Soit donc

$$i \equiv j+1 \quad \operatorname{mod} \varkappa.$$

Alors $a^{ij}_{kl} x^i_k y^j_l$ est remplacé par

$$a^{ij}_{kl}(x^i_k + x^i_{k-1})(y^j_l + y^j_{l-1}) \qquad (x^i_0 = y^j_0 = 0),$$

et, pour que le coefficient de $x^i_k y^j_l$ dans $\beta\alpha\bar{\alpha}$ soit encore a^{ij}_{kl}, il faut et suffit que l'on ait, en regardant a^{ij}_{kl} comme nul pour $k > m_i$ ou $l > m_j$,

$$(1) \quad a^{ij}_{kl} + a^{ij}_{k,l-1} + a^{ij}_{k-1,l} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, m_i + 1;\ l = 2, \ldots, m_j + 1).$$

Cette équation donne en particulier

$$a^{ij}_{km_j} = 0 \quad \text{pour} \quad k \geq 2,$$
$$a^{ij}_{m_i l} = 0 \quad \text{pour} \quad l \geq 2,$$

et montre de proche en proche que *tout élément de* A^{ij} *situé* au-dessous de la transversale principale de A^{ij} [j'appellerai *transversale* d'une matrice $\xi = (\xi_{ik})$ de type (ρ, σ) toute file d'éléments perpendiculaire à la diagonale principale, $k^{\text{ième}}$ *transversale* celle qui contient ξ_{1k} et *transversale principale* la $\rho^{\text{ième}}$ si $\rho \leq \sigma$, la $\sigma^{\text{ième}}$ si $\rho \geq \sigma$; le $k^{\text{ième}}$ élément d'une transversale sera celui appartenant à la $k^{\text{ième}}$ ligne] *est nul:* on le voit clairement *sur la figure*. Quand on se donne un élément de chacune des m_j transversales passant par $a^{ij}_{11}, \ldots, a^{ij}_{1m_j}$, par exemple les a^{ij}_{1l}, on voit encore de suite sur la figure que (1) détermine complètement les a^{ij}_{kl}. En particulier, *si* $a^{ij}_{1r} \neq 0$, a^{ij}_{1l} *étant nul pour* $l > r$ (*ou* r *étant égal à* m_j), *tout élément situé au-dessous de la transversale*

(¹) Pour la seule analyse des nos 2-6, il serait plus simple de déterminer séparément $a^{1\varkappa}$ par exemple.

passant par a_{1r}^{ij} (que j'appellerai alors *transversale caractéristique de rang* r) *est nul, ceux de cette transversale étant égaux alternativement à* a_{1r}^{ij} *et à* $-a_{1r}^{ij}$, *en sorte que le rang de* A^{ij} *est* r.

On remarquera que, si $A^{ij}(a_{1\lambda}^{ij})$ est la détermination de A^{ij} quand on fait nuls tous les a_{1l}^{ij} où $l \neq \lambda$,

$$A^{ij} = \Sigma_\lambda A^{ij}(a_{1\lambda}^{ij}),$$

car les m_j égalités analogues à (1) relatives aux m_j matrices $A^{ij}(a_{1\lambda}^{ij})$ ont évidemment pour somme l'égalité correspondante relative à A^{ij}.

4. Achevons maintenant d'introduire la condition $|a| \neq 0$. Soient $A_{\rho\sigma}^{kl}$ la matrice des a_{kl}^{ij} où k et l restent fixes ($k \leq m_{Q_\rho}$, $l \leq m_{Q_\sigma}$) tandis que i parcourt les nombres

$$\varkappa Q_{\rho-1}+1, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_\rho,$$

et j les nombres

$$\varkappa Q_{\sigma-1}+1, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_\sigma;$$

$A_{\rho\sigma,tu}^{kl}$ la matrice qui se déduit de $A_{\rho\sigma}^{kl}$ quand i parcourt seulement les nombres

$$\varkappa Q_{\rho-1}+t, \quad \varkappa Q_{\rho-1}+t+\varkappa, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_{\rho-1}+t+(q_\rho-1)\varkappa$$

et j les nombres

$$\varkappa Q_{\sigma-1}+u, \quad \varkappa Q_{\sigma-1}+u+\varkappa, \quad \ldots, \quad \varkappa Q_{\sigma-1}+u+(q_\sigma-1)\varkappa$$

(i indiquant la ligne et j la colonne); $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ la matrice des $A_{\rho\sigma,tu}^{kl}$ où t, $u = 1, \ldots, \varkappa$ (t indiquant la ligne et u la colonne; il est clair que $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ se déduit de $A_{\rho\sigma}^{kl}$ par une permutation de lignes et de colonnes); $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$ la matrice des $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ où

$$k = Q_{\rho-1}+1, \ldots, Q_\rho, \qquad l = Q_{\sigma-1}+1, \ldots, Q_\sigma$$

[k indiquant la ligne et l la colonne; les $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$ situées au-dessous de la transversale principale de $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$ sont nulles, et, dans chacune des autres, les seules $A_{\rho\sigma,tu}^{kl} \neq 0$ sont celles où (t, u) est l'un des couples $(1, \varkappa)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, ..., $(\varkappa, \varkappa-1)$]. Par une permutation des lignes et des colonnes on peut faire en sorte que chaque $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ soit remplacé par $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$ (¹). Or les matrices

$$\hat{A}_{11}^{1m},\quad \hat{A}_{11}^{2,m-1},\quad \hat{A}^{3,m-2},\quad \ldots$$

qui forment la transversale principale de $\mathcal{A}'_{11}$ sont égales à $\pm\hat{A}_{11}^{1m}$, et les $\hat{A}_{11}^{kl}$ situées, dans $\mathcal{A}'_{11}$, au-dessous de celles-là sont nulles. Donc

$$|\mathcal{A}'_{11}| = \pm |A_{11}^{1m}|^m,$$

et de même

$$|\mathcal{A}'_{\rho\rho}| = \pm |A_{\rho\rho}^{1m_{u_\rho}}|^{m_{u_\rho}}.$$

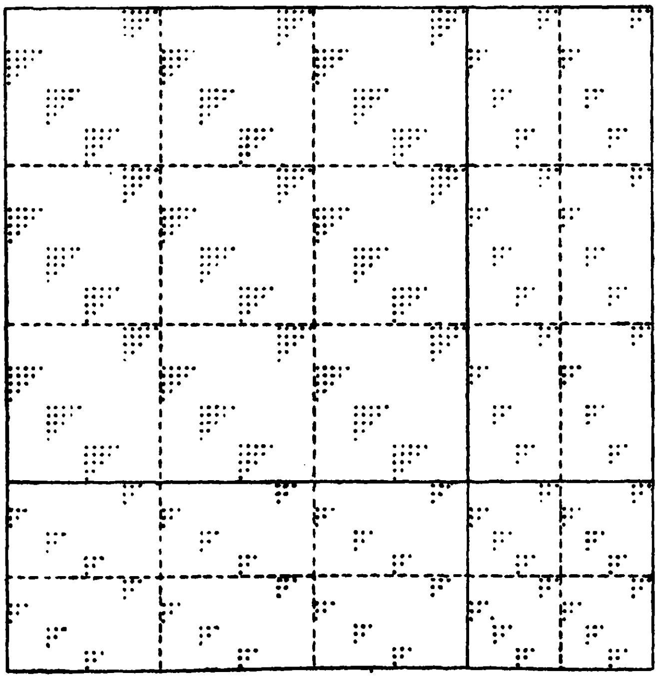
Je vais montrer que

$$|a| = \Pi_1^{(n)} |\mathcal{A}'_{\rho\rho}|.$$

Pour cela remarquons d'abord que, *si* $|a|$ *est* $\neq 0$, *une au moins des* A^{ij}

(¹) Les deux figures suivantes, où les points indiquent des éléments de a (les

Fig. 1.



éléments non indiqués étant nuls), représentent la matrice a avant et après cette *de chaque ligne (colonne) de* $\mathcal{A}_{11}$ *considérée comme matrice des* A^{ij} *est de rang* m, sans quoi, la transversale principale d'un A^{ij} de rang $< m$ étant formée d'éléments nuls, a aurait une ligne (colonne) nulle. Soit, par exemple, $A^{1\varkappa}$ de rang m. Si A^{1i} (i pouvant être $> q\varkappa$) est de rang k et si $\varpi_{\lambda,f}^{hi} = \varpi$ est la substitution qui remplace

$$y_k^h \quad \text{par} \quad y_k^h + \lambda y_{k-f}^i \qquad (k = f+1, \ldots, m;\ f \geqq 1 \text{ si } i = h)$$

sans altérer les autres variables, on pourra déterminer λ de manière qu'en prenant

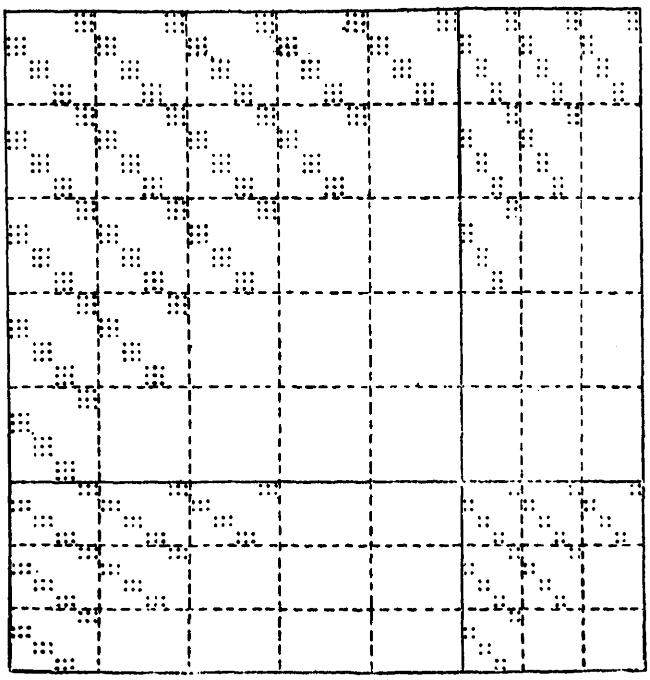
$$\varpi a = a' \qquad \text{pour} \qquad a \qquad (|a'| = |a|)$$

le rang de A^{1i} soit $< k$ [la matrice ϖa se déduit de a par addition des

---

permutation. On a supposé $m_1 = 5$, $q_1 = 3$, $m_2 = 3$, $q_2 = 2$, $\omega = 2$, $\varkappa = 4$. Les

Fig. 2.



traits pleins séparent, dans la figure 1, les $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ et, dans la figure 2, les $\mathcal{A}'_{\rho\sigma}$; les traits pointillés séparent, dans la figure 1, les $\hat{A}_{gh}$ et, dans la figure 2, les $\hat{A}_{\rho\sigma}^{kl}$.

colonnes de rangs

$$mh+m,\quad mh+m-1,\quad \ldots,\quad mh+f+1$$

multipliées par λ, à celles de rangs,

$$mi+m-f,\quad mi+m-f-1,\quad \ldots,\quad mi+1$$

respectivement; je dirai que cette série d'additions est une *addition de multiplicateur* λ

de la $(mh+m)^{\text{ième}}$ *transversale de* a *à la* $(mi+m-f)^{\text{ième}}$,

et que le groupe *engendré* par les substitutions de la forme $\varpi^{hi}_{\lambda,f}$ est le *groupe des additions* relatif à β; $a\overline{\varpi}$ se déduit de a par des additions symétriques de lignes constituant l'*addition symétrique de transversales*]. D'ailleurs, ϖ *étant permutable à* α *et à* β, *on a*

$$\beta a'\overline{\alpha} = a'.$$

Donc a' a les mêmes propriétés que a, et l'on pourra, en répétant l'opération et en faisant, au besoin, des permutations de lignes et de colonnes, ramener d'abord $\mathcal{A}_{11}$, considérée comme matrice de $\hat{A}^{gh}$, à ne contenir qu'une $\hat{A}^{gh} \neq 0$ par ligne et par colonne, puis les $\mathcal{A}_{i1}$ et les $\mathcal{A}_{1i}$ où $i > 1$ à zéro. Ces opérations n'ont pas altéré $|\mathcal{A}_{11}|$. En opérant de même sur les $\mathcal{A}_{2i}$ et les $\mathcal{A}_{i2}$, etc., on ramènera a à la matrice diagonale des $\mathcal{A}_{\rho\rho}$.

Pour que $|a|$ *soit* $\neq 0$, *il faut donc et il suffit que chaque* $|A^{1^{m_{Q_\rho}}}_{\rho\rho}|$ *soit* $\neq 0$, *c'est-à-dire que*

$$|A^{1^{m_{Q_\rho}}}_{\rho\rho,1\varkappa}|,\quad |A^{1^{m_{Q_\rho}}}_{\rho\rho,21}|,\quad \ldots,\quad |A^{1^{m_{Q_\rho}}}_{\rho\rho,\varkappa,\varkappa-1}|,$$

dont il est le produit, soient $\neq 0$.

5. Le nombre d'arbitraires entrant dans a se détermine aisément. On prendra d'abord, pour chaque valeur de ρ, les q_ρ^2 éléments de $A^{1^{m_{Q_\rho}}}_{\rho\rho}$ de manière que $|A^{1^{m_{Q_\rho}}}_{\rho\rho}|$ soit $\neq 0$. Soit

$$N(Q_1, m_{Q_1};\ Q_2, m_{Q_2};\ \ldots)$$

le nombre des autres éléments de a. Il y a, dans $\mathcal{A}_{11}$, $\varkappa q^2$ matrices A^{ij}

dans chacune desquelles il reste $m-1$ éléments arbitraires. Dans chaque $\mathrm{A}^{ij} \neq 0$ où l'un des indices est $\leq \varkappa q$ et l'autre $> \varkappa \mathrm{Q}_{h-1}$ et $\leq \varkappa \mathrm{Q}_h$, il y a m_{Q_h} arbitraires. Donc

$$(2) \quad \mathrm{N}(\mathrm{Q}_1, m_{\mathrm{Q}_1}; \ldots) = \varkappa q_1^2(m_1 - 1) + 2\varkappa q_1(m_2 q_2 + m_3 q_3 + \ldots) + \mathrm{N}(\mathrm{Q}_2, m_{\mathrm{Q}_2}; \ldots).$$

6. *On peut par des changements de variables conservant la forme canonique de α et de β ramener a à une forme simple complètement déterminée.* — En répétant, au besoin, l'opération qui consiste à remplacer a par $\varpi^{hi}_{\lambda,f} a$ (¹), on ramène d'abord comme tout à l'heure les $\mathcal{A}_{\rho\rho}$ (considérées comme matrices de $\hat{\mathrm{A}}^{gh}$) à ne contenir qu'une $\hat{\mathrm{A}}^{gh}$ par ligne et par colonne, puis les $\mathcal{A}_{\rho\sigma}$ où $\rho \neq \sigma$ à 0. En remplaçant alors a par ξa, ξ étant une substitution du groupe des sous-séries relatif aux y^i_k, on ramène chaque $\mathcal{A}_{\rho\rho}$, considérée comme matrice des $\hat{\mathrm{A}}^{gh}$, à la forme diagonale et le premier élément de la transversale principale de chaque $\mathrm{A}^{ij} \neq 0$ à 1. En remplaçant enfin a par $\varpi^{\varkappa\varkappa}_{\lambda,f} a$, on pourra donner à $a^{1\varkappa}_{1,m-f}$ une valeur arbitraire. Supposons, par exemple, que $a^{1\varkappa}_{11} = 0$ et que $a^{1\varkappa}_{12}, \ldots, a^{1\varkappa}_{1m}$ sont les coefficients de $(-1)^{m-1}(1+x)^{m-2}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x. Alors, d'après (1), $a^{1\varkappa}_{k1}$ est nul pour $k < m$ ($a^{1\varkappa}_{1m} = 1$), et $a^{1\varkappa}_{k2}, \ldots, a^{1\varkappa}_{k,m-k+1}$ sont les coefficients de $(-1)^{m-k}(1+x)^{m-k-1}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x.

On opérera de même pour réduire à cette forme, que j'appellerai *forme bilinéaire type* ou *du premier type*, les autres $\mathrm{A}^{ij} \neq 0$. En supposant que $a^{1\varkappa}_{11}, \ldots, a^{1\varkappa}_{1m}$ sont les coefficients de $(-1-x)^{m-1}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x, $a^{1\varkappa}_{k1}, \ldots, a^{1\varkappa}_{k,m-k+1}$ seraient ceux de $(-1-x)^{m-k}$ ordonné de même; j'appellerai cette forme *bilinéaire du second type* (²).

(¹) Lorsqu'on fera plus loin des réductions analogues en s'astreignant à traiter, dans les changements de variables, les x et les y comme cogrédients ou conjugués, il faudra supposer qu'on remplace ici a par $\varpi^{hi}_{\lambda,f} a \overline{\varpi}^{hi}_{\lambda,f}$ ou par $\varpi^{hi}_{\lambda,f} a \dot{\overline{\varpi}}^{hi}_{\lambda,f}$. La même remarque est à faire au sujet du remplacement de a par ξa ou par $\varpi^{\varkappa\varkappa}_{\lambda,f}$ dans un instant.

(²) On remarquera que les transformations de lignes et de colonnes qui conduisent à la forme réduite obtenue s'opèrent en réalité sur chacune des ma-

7. a n'étant pas entièrement déterminée par $\beta a \bar{\alpha} = a$ et $|a| = 0$, on peut lui imposer d'autres conditions. *Adjoignons, par exemple, la condition* $\bar{a} = \pm a$ *ou* $\bar{a} = \dot{a}$ (on peut omettre le cas $\bar{a} = -\dot{a}$ qui se ramène au cas $\bar{a} = \dot{a}$ en posant $a = ia'$). Tout en ne regardant pas β comme nécessairement égal à α ou à $\dot{\alpha}$, je traiterai les x et les y, *dans les changements de variables*, comme cogrédients si $\bar{a} = \pm a$, comme conjugués si $\bar{a} = \dot{a}$, de manière à conserver ces propriétés. Je *supposerai* donc qu'on peut canoniser simultanément α et β par de tels changements de variables. La correspondance établie entre x_i et y_i par la condition $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$ quand on assimile a à $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ se traduit par la correspondance entre les variables canoniques x_k^i, y_k^i (l'ordre étant celui du n° **3**). Il est clair que $t_i = s_i$ si $\beta = \alpha$, et que $t_i = \dot{s}_i$ si $\beta = \dot{\alpha}$. On a ici

$$(3) \quad a_{lk}^{ji} = a_{kl}^{ij} \text{ si } \bar{a} = a; \qquad a_{lk}^{ji} = -a_{kl}^{ij} \text{ si } \bar{a} = -a; \qquad a_{lk}^{ji} = \dot{a}_{kl}^{ij} \text{ si } \bar{a} = \dot{a}.$$

Ces relations exigent, on le voit sur la figure, que $\varkappa$ soit ≤ 2. Si $j \neq i$, elles déterminent les a_{lk}^{ji} situés au-dessous de la diagonale de a par ceux qui sont au-dessus. *Si* $j = i$ *et si* $A^{ii} \neq 0$ (*alors* $\varkappa = 1$ *et* $t_1 = s_1^{-1}$), *elles exigent que le rang* r *de* A^{ii} *soit impair pour* $\bar{a} = a$, *pair pour* $\bar{a} = -a$. *Si* $\bar{a} = a$, *r étant impair*, on a, d'après (1),

$$a_{k-1,k}^{ii} = a_{k,k-1}^{ii} = -\tfrac{1}{2} a_{kk}^{ii} \qquad (k \geq 2).$$

On peut donc prendre, dans A^{ii}, pour seules indéterminées $a_{11}^{ii}, \ldots, a_{\mu\mu}^{ii}$, $2\mu - 1$ étant le plus grand nombre impair $\leq m_i$ $\left[\mu = \mathrm{E}\left(\frac{m_i + 1}{2}\right),\right.$ $\mathrm{E}(x)$ désignant le plus grand entier $\left.\leq x\right]$. *Si* $\bar{a} = -a$, *r étant pair*, on a $a_{kk}^{ii} = 0$: on peut donc prendre, dans A^{ii}, pour seules indéterminées

$$a_{12}^{ii}, \quad a_{23}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu,\mu+1}^{ii},$$

---

trices $a^{1\varkappa}$, a^{21}, a^{32}, ..., $a^{\varkappa,\varkappa-1}$ (3) prises séparément. Pour la réduction précédente, *cf.* JORDAN, *J. M.*, 1905, p. 231-238; DICKSON, *Transact. of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 283-284.

2μ étant le plus grand nombre pair $\leq m_i \left[\mu = E\left(\frac{m_i}{2}\right)\right]$. *Si* $\bar{a} = a$, le rang r de A^{ii} peut être pair ou impair; mais la transversale caractéristique se compose d'éléments réels pour r impair, d'éléments purement imaginaires pour r pair. De plus (3) exige que les a^{ii}_{kk} soient réels, en sorte que, d'après (1), la partie réelle des $a^{ii}_{k,k-1}$ $(k \geq 2)$ est déterminée par les a^{ii}_{kk}. On peut donc prendre, dans A^{ii}, pour indéterminées, si m_i est pair $= 2\mu$, les nombres réels

$$a^{ii}_{11}, \quad \ldots, \quad a^{ii}_{\mu\mu}$$

et les parties imaginaires de

$$a^{ii}_{12}, \quad a^{ii}_{23}, \quad \ldots, \quad a^{ii}_{\mu,\mu+1},$$

si m_i est impair $= 2\mu - 1$, les nombres réels

$$a^{ii}_{11}, \quad \ldots, \quad a^{ii}_{\mu\mu}$$

et les parties imaginaires de

$$a^{ii}_{12}, \quad a^{ii}_{23}, \quad \ldots, \quad a^{ii}_{\mu-1,\mu}.$$

8. Au lieu de la condition $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$, *adjoignons la condition* $\bar{a} = \beta a$ *ou* $\bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}$ (en traitant, dans les changements de variables, les x et les y comme cogrédients si $\bar{a} = \beta a$, comme conjugués si $\bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}$, de manière à laisser inaltérée la forme de cette condition), x^i_k *et* y^i_k *étant toujours les variables correspondantes*. On aura

$$(4) \quad a^{ji}_{lk} = \tau_j(a^{ij}_{kl} + a^{ij}_{k,l+1}) \quad \text{si} \quad \bar{a} = \beta a, \qquad a^{ji}_{lk} = \dot{\tau}_j(\dot{a}^{ij}_{kl} + \dot{a}^{ij}_{k,l+1}) \quad \text{si} \quad \bar{a} = \dot{\beta}\dot{a}.$$

En remplaçant donc, si $\bar{a} = \beta a$, a^{ij}_{kl} par

$$\tau_i(a^{ji}_{lk} + a^{ji}_{l,k+1})$$

et $a^{ij}_{k,l+1}$ par

$$\tau_i(a^{ji}_{l+1,k} + a^{ji}_{l+1,k+1}),$$

on obtient, d'après (1), les A^{ij} n'étant pas tous nuls,

$$\tau_i \tau_j = 1;$$

or

$$\sigma_i\tau_j = 1 ;$$

donc, $|\alpha\beta|$ étant $\neq 0$, $\sigma_i = \tau_i$ ou

$$\beta = \alpha$$

(on remarquera que $\alpha\bar{a}\bar{\alpha} = a$ résulte de $\bar{a} = \alpha a$ par l'élimination de $\bar{a}$ entre $\bar{a} = \alpha a$ et sa transposée). Si $a = \beta\dot{a}$, on obtient de même

$$\beta = \dot{\alpha}$$

($\dot{\alpha}\bar{a}\bar{\alpha} = a$ *résulte encore de* $\bar{a} = \alpha\dot{a}$). Dans ces deux cas $\varkappa$ est ≤ 2. *Si* $i \neq j$, (4) détermine les a_{lk}^{ji} situés au-dessous de la diagonale quand on connaît les autres.

Soit $i = j$ (*donc* $\varkappa = 1$). Si $\bar{a} = \alpha a$, on a

$$s = \pm 1,$$

et le rang r *de* A^{ii} *est impair ou nul pour* $s = 1$ |(4) donne, pour $k = l$, $a_{k,k+1}^{ii} = 0$; or, pour $r = 2\rho$, $a_{\rho,\rho+1}^{ii}$ est sur la transversale caractéristique|, *pair pour* $s = -1$ |(4) donne, pour $k = l$,

$$2a_{kk}^{ii} = -a_{k,k+1}^{ii},$$

d'où, pour $r = 2\rho - 1$,

$$a_{\rho\rho}^{ii} = 0;$$

or, $a_{\rho\rho}^{ii}$ est alors sur la transversale caractéristique|. On peut donc prendre, dans A^{ii}, pour seules indéterminées, si $s = 1$ ($a_{k-1,k}^{ii} = 0$),

$$a_{11}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu\mu}^{ii},$$

$2\mu - 1$ étant le plus grand nombre impair $\leq m_i \left[\mu = \mathrm{E}\left(\frac{m_i+1}{2}\right)\right]$, si $s = -1$ ($2a_{kk}^{ii} = -a_{k,k+1}^{ii}$),

$$a_{11}^{ii}, \quad \ldots, \quad a_{\mu\mu}^{ii} \qquad (\text{ou } a_{12}^{ii}, a_{23}^{ii}, \ldots, a_{\mu,\mu+1}^{ii}),$$

2μ étant le plus grand nombre pair $\leq m_i \left|\mu = \mathrm{E}\left(\frac{m_i}{2}\right)\right|$.

Si $\bar{a} = \alpha\dot{a}$, on a

$$s\dot{s} = 1.$$

et la condition

$$a_{1r}^{ii} = (-1)^{r-1} s \dot{a}_{1r}^{ii},$$

qui résulte de (4) (pour $\beta = \dot{\alpha}$, $k = r$, $l = 1$) et de (1), détermine le rapport des parties réelle et imaginaire de chaque élément de la transversale caractéristique. De plus (4), pour $l = k$, détermine $\dot{a}_{k,k+1}^{ii}$ par a_{kk}^{ii}. Or, si r est pair $= 2\rho$, $a_{\rho,\rho+1}^{ii} = u$ est sur la transversale caractéristique, et l'on a, en posant $a_{\rho\rho}^{ii} = v$,

$$u = -s\dot{u}, \qquad v = s(\dot{v} + \dot{u}).$$

Mais ces équations donnent seulement une relation linéaire entre les parties réelle et imaginaire de u et une autre entre celles de v. Donc r peut être pair ou impair, et l'on peut prendre dans A^{ii} pour seules indéterminées, si m_i est pair $= 2\mu$, $a_{11}^{ii}, \ldots, a_{\mu-1,\mu-1}^{ii}$ et une des parties (réelle ou imaginaire) de $a_{\mu\mu}^{ii}$ et de $a_{\mu,\mu+1}^{ii}$, si m_i est impair $= 2\mu - 1$, $a_{11}^{ii}, \ldots, a_{\mu-1,\mu-1}^{ii}$ et une des parties (réelle ou imaginaire) de $a_{\mu\mu}$.

9. *Pour que* $|a|$ *soit* $\neq 0$, *il faut que* q_ρ *soit pair dans les quatre cas suivants :*

m_{Q_ρ} *pair avec*	$\bar{a} = a$	et	$st = 1$;
m_{Q_ρ} *impair avec*	$\bar{a} = -a$	et	$st = 1$;
m_{Q_ρ} *pair avec*	$\bar{a} = \beta a (= \alpha a)$	et	$s = 1$;
m_{Q_ρ} *impair avec*	$\bar{a} = \beta a (= \alpha a)$	et	$s = -1$.

Car, dans ces quatre cas, $|A_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}|$ est gauche d'ordre q_ρ (ici $\varkappa = 1$). *La condition est d'ailleurs suffisante,* car, si elle est remplie, on pourra toujours choisir les éléments de $A_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}$ de manière que $|A_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}|$ soit $\neq 0$ (1).

Si $\beta = \alpha$, *l'équation caractéristique de* α *est réciproque, et l'équation* $\alpha\, a\, \bar{\alpha} = a$ *donne*

$$|\alpha| = \pm 1.$$

---

(1) *Comparer,* pour les deux premiers cas, avec $\beta = \alpha$, FROBENIUS, *Cr.*, t. 84, p. 41 (1878), et, pour le cas $\bar{a} = \alpha a$, KRONECKER, *Mo. A. B.*, 1874, p. 441 (*Werke*, t. I, p. 476).

Si $\bar{a} = \alpha a$, il est clair que $|\alpha| = 1$. *Si $\bar{a} = -a$, on a encore*

$$|\alpha| = 1,$$

sans quoi α aurait le multiplicateur -1, et un au moins des produits $m_h q_h$ relatifs à $s = -1$ devrait être impair contrairement au théorème précédent. *Si $\bar{a} = a$, $|\alpha|$ peut être égal à -1; mais si $|\alpha| = 1$ avec $s = -1$, Q_ω est > 1* (¹). *Si $\bar{a} = \alpha \dot{a}$, $|\alpha\alpha| = 1$.*

10. On remarquera enfin cette conséquence de la nullité des a_{kl}^{ii} situés au-dessous de la transversale principale de A^{ii} : *si a est hermitienne définie avec $\beta = \dot{\alpha}$, α a une forme canonique monome et des multiplicateurs de module* 1 (²), sans quoi certains coefficients diagonaux seraient nuls.

On en déduit immédiatement des conséquences connues analogues, relatives aux formes quadratiques définies.

La détermination d'une forme bilinéaire à variables conjuguées a telle que $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$ se ramène de suite au cas où a est hermitienne, car, a étant de la forme $a' + ia''$ où a' et a'' sont hermitiennes, on a

$$\dot{\alpha} a' \bar{\alpha} = a', \qquad \dot{\alpha} a'' \bar{\alpha} = a''.$$

Si a est définie, α a encore une forme canonique monome et des multiplicateurs de module 1. Je laisserai désormais de côté les formes bilinéaires à variables conjuguées non hermitiennes.

11. Calculons le nombre d'arbitraires entrant dans a. Nous prendrons d'abord, pour chaque valeur de ρ, les q_ρ^2 éléments de $A_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}$ de manière que $|A_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}|$ soit $\neq 0$ (les $a_{1m_{Q_\rho}}^{ii}$ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut). Soit

$$N(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots)$$

le nombre des éléments arbitraires restants de a. *Si $st \neq 1$*, il y a, dans $\mathcal{A}_{11}$, $2q^2$ matrices $A^{ij} \neq 0$ dont q^2 sont déterminées par les q^2 autres,

(¹) *Comparer* NETTO, *A. M.*, t. XIX, p. 105 (1895).

(²) LOEWY, *N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, p. 387.

lesquelles renferment encore chacune $m-1$ arbitraires, et, dans $\mathcal{A}_{1\rho}$ $(\rho \geqq 2)$, $2qq_\rho \mathrm{A}^{ij} \neq 0$ renfermant encore chacune m_ρ arbitraires; donc

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{N}(\mathrm{Q}_1, m_{\mathrm{Q}_1}; \mathrm{Q}_2, m_{\mathrm{Q}_2}; \ldots) = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}(\mathrm{Q}_2, m_{\mathrm{Q}_2}; \ldots), \\ \mathrm{N}_1 = q^2(m-1) + 2q(m_2 q_2 + m_3 q_3 + \ldots) = q^2(m-1) + q(n - mq). \end{cases}$$

Si $st = 1$, il y a, dans $\mathcal{A}_{11}$, $q^2 - q\mathrm{A}^{ij}$ $(i \neq j)$ dont $\frac{q^2-q}{2}$ sont déterminées par les $\frac{q^2-q}{2}$ autres, lesquelles renferment encore chacune $m-1$ arbitraires, plus $q^2 \mathrm{A}^{ii}$ contenant encore chacune un nombre $\psi(m)$ d'arbitraires égal à $\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right)$ si $\bar{a} = a$, à $\mathrm{E}\left(\frac{m-1}{2}\right)$ si $\bar{a} = -a$ ou si $\bar{a} = \alpha a$, à $\frac{m-1}{2}$ (en comptant pour $\frac{1}{2}$ une partie réelle ou imaginaire indéterminée) si $\bar{a} = \dot{a}$ ou si $\bar{a} = \alpha\dot{a}$; donc

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{N}(\mathrm{Q}_1, m_{\mathrm{Q}_1}; \ldots) = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}(\mathrm{Q}_2, m_{\mathrm{Q}_2}; \ldots), \\ \mathrm{N}_1 = \frac{q^2-q}{2}(m-1) + q\,\psi(m) + q(n-mq). \end{cases}$$

12. Il est aisé, d'après ce qui précède, de trouver toutes les matrices *a invertibles ou non* telles que

$$\bar{a} = \alpha a \qquad (\text{ou } \bar{a} = \alpha\dot{a})$$

[d'où, on l'a vu,

$$\alpha a \bar{\alpha} = a \qquad (\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a)].$$

Les racines de $|\alpha - s\varepsilon|$ se répartissent en quatre catégories possibles : 1° les racines égales à ± 1 (de module 1, si $\bar{a} = \alpha\dot{a}$); 2° les racines $s_i \neq \pm 1$ (de module $\neq 1$) telles que s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ soit aussi une racine et que les exposants des diviseurs élémentaires relatifs à s_i et à s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ soient les mêmes; 3° les racines s_i telles que s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ soit aussi racine, mais que les exposants des diviseurs élémentaires relatifs à s_i et à s_i^{-1} $(\dot{s}_i^{-1})$ ne soient pas les mêmes; 4° les racines restantes.

Soient encore x_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ième}}$ suite; y_k^i la $k^{\text{ième}}$ variable de la $i^{\text{ième}}$ suite d'une seconde série de variables cogrédientes aux x_k^i (aux $\dot{x}_k^i$ si $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$), y_k^i correspondant à x_k^i et l'ordre des suites étant provisoirement arbitraire; σ_i le multiplicateur et m_i le nombre des variables de la $i^{\text{ième}}$ suite;

$$A^{ij} = \Sigma a^{ij}_{kl} x^i_k y^j_l$$

la partie de a où figurent les x de la $i^{\text{ième}}$ suite et les y de la $j^{\text{ième}}$. Les seules $A^{ij} \neq 0$ sont celles où

$$\sigma_i \sigma_j = 1 \qquad (\sigma_i \dot{\sigma}_j = 1),$$

et les a^{ij}_{kl} sont liés par (1) et (4) seulement.

Admettons, pour fixer les idées, qu'il y ait des racines des quatre catégories, que

$$\sigma_1 = \ldots = \sigma_f = 1,$$

que

$$\sigma_{f+1} = \ldots = \sigma_{f_1} = -1$$

(que

$$|\sigma_1| = \ldots = |\sigma_{f_1}| = 1 \qquad \text{si} \qquad \bar{a} = \alpha \dot{a}),$$

que

$$\sigma_{f_1+1}, \quad \ldots, \quad \sigma_{f_2}$$

soient de la seconde catégorie, σ_{f_1+2i-1} étant égal à $\sigma^{-1}_{f_1+2i}$ (à $\dot{\sigma}^{-1}_{f_1+2i}$ si $\bar{a} = \alpha \dot{a}$), et donnent lieu à des diviseurs élémentaires de mêmes exposants rangés comme au n° **3**, que

$$\sigma_{f_2+1}, \quad \ldots, \quad \sigma_{f_3}$$

soient de la troisième catégorie et $\sigma_{f_3+1}, \ldots, \sigma_{f_4}$ de la quatrième. Soient a' la matrice des A^{ij} où i et j sont $\leqq f_2$, a'' la matrice des A^{ij} où i et j sont $> f_2$ et $\leqq f_3$, $a'''(=0)$ la matrice des A^{ij} où i et j sont $> f_3$. a aura la forme

$$\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a'' & 0 \\ 0 & 0 & a''' \end{pmatrix}.$$

a' se détermine comme on déterminait a quand $|a|$ était $\neq 0$, mais en omettant les conditions du n° **4**. a'' de même; les A^{ii} y sont nulles; chaque A^{ij} de a'' située au-dessous de la diagonale principale sera déterminée par A^{ji} d'après (4); chaque A^{ij} de a'' située au-dessus de cette diagonale sera déterminée, d'après (1), par les m_{ij} premiers éléments de sa première ligne, m_{ij} étant le plus petit des nombres m_i et m_j. Le nombre N des arbitraires figurant dans la solution générale a

de $\bar{a} = \alpha a$ et celui N′ des arbitraires entrant dans la solution générale de $\bar{a} = \alpha \dot{a}$ se calculent aisément, d'après ce qui précède, à l'aide de formules analogues à (5), (6) (on n'aura plus ici à choisir séparément les éléments de $A_{\rho\rho}^{1m_\rho}$ de manière que $|A_{\rho\rho}^{1m_\rho}|$ soit $\neq 0$) qu'il est inutile d'écrire.

On peut d'ailleurs ramener la détermination de a à un problème déjà traité. Soit c une solution *invertible* de

$$\bar{c} = -\alpha c \qquad (\bar{c} = -\alpha\dot{c}).$$

En posant

$$a = xc,$$

l'équation

$$\bar{a} = \alpha a \qquad (\bar{a} = \alpha\dot{a})$$

devient

$$xc = -c\bar{x} \qquad (xc = -c\dot{\bar{x}}),$$

d'où, en transposant et en éliminant $\bar{x}$ (en transposant, en passant aux conjuguées et en éliminant $\dot{\bar{x}}$),

$$x\alpha = \alpha x \qquad (x\dot{\alpha} = \dot{\alpha}x).$$

La condition que x soit permutable à α (à $\dot{\alpha}$) suffit d'ailleurs, comme on le voit immédiatement, pour que

$$a = \frac{1}{2}(xc - c\bar{x}) \qquad \left[a = \frac{1}{2}(xc - c\dot{\bar{x}})\right]$$

vérifie

$$\bar{a} = \alpha a \qquad (\bar{a} = \alpha\dot{a}) \quad (^1).$$

Donc, x parcourant les matrices permutables à α (à $\dot{\alpha}$),

$$\frac{1}{2}(xc - c\bar{x}) \qquad \left[\frac{1}{2}(xc - c\dot{\bar{x}})\right]$$

parcourt toutes les solutions de $\bar{a} = \alpha a$ (de $\bar{a} = \alpha\dot{a}$). Pour que deux matrices x et $x + y$ permutables à α (à $\dot{\alpha}$) fournissent la même solu-

(1) *Cf.* Voss, *A. A. M.*, t. XVII, p. 331 (1890).

tion a, il faut donc et suffit que

$$yc = c\bar{y} \qquad (yc = c\dot{\bar{y}}) \quad (^1).$$

Soient M le nombre d'arbitraires entrant dans la solution générale de

$$yc = c\bar{y},$$

M′ le nombre analogue relatif à

$$yc = c\dot{\bar{y}},$$

(P′) le nombre d'arbitraires entrant dans la matrice la plus générale permutable à α (à $\dot{\alpha}$). Les matrices permutables à α (à $\dot{\alpha}$) forment un groupe additif abélien dont les matrices y forment un diviseur, et l'on aura

$$P = M + N \qquad (P' = M' + N').$$

Donc

$$M = P - N \qquad (M' = P' - N') \quad (^2).$$

13. Revenons au cas où $|a| \neq 0$, et soit

$$\bar{a} = \pm a \qquad \text{ou} \qquad \bar{a} = \dot{a}.$$

On peut, par un changement de variables *conservant la forme canonique de α et de* β (les y étant regardés comme cogrédients aux x si $\bar{a} = \pm a$, aux $\dot{x}$ si $\bar{a} = \dot{a}$), ramener a à une forme simple complètement déterminée. On verra d'abord comme au n° **6** que, si A^{ij} ($i, j \leq q$) est de rang m, on peut supposer que toutes les $A^{\lambda\mu}$ où $\lambda = i$ avec $\mu \neq j$, ou $\lambda \neq i$ avec $\mu = j$, sont nulles et se borner par suite à déterminer A_{11}. *De plus, si $st = 1$ avec $\bar{a} = a$ et m pair, ou avec $\bar{a} = -a$ et m impair (q est ici pair)*, on peut supposer que les A^{ii}, dont le rang est alors $< m$, sont nulles et, en choisissant bien les notations, que A^{12} et A^{21} sont

(1) Cette équation exige que y soit permutable à α (à $\dot{\alpha}$) : on le voit comme tout à l'heure pour x.

(2) C'est la généralisation des résultats obtenus autrement par M. Voss [*S. A. M.*, t. XXVI, p. 211-272 (1896)].

de rang m, les autres A^{1i}, A^{i1}, A^{2i}, A^{i2} étant nulles; puis, si $q \geqq 4$, que A^{34} et A^{43} sont de rang m, les autres A^{3i}, A^{i3}, A^{4i}, A^{i4} étant nulles, etc. (on retrouve ainsi que q est pair). *Si $st \neq 1$, les A^{ii} sont nulles nécessairement, et l'on peut opérer la même réduction.*

On remarquera que, quel que soit st, A_{11}^{1m} est alternée pour $\bar{a} = a$ avec m pair et pour $\bar{a} = -a$ avec m impair, symétrique pour $\bar{a} = a$ avec m impair et pour $\bar{a} = -a$ avec m pair; la matrice $i^{m-1} A_{11}^{1m}$ est hermitienne pour $\bar{a} = \dot{a}$. *Si donc $st = 1$ avec $\bar{a} = a$ et m impair, ou avec $\bar{a} = -a$ et m pair, ou avec $\bar{a} = \dot{a}$,* on pourra ramener A_{11}^{1m} à la forme diagonale par une substitution du groupe des sous-séries relatif à α. Après un changement de variables produisant cet effet, les A^{ii} sont toutes de rang m ($|A_{11}^{1m}|$ est $\neq 0$), et, en opérant comme tout à l'heure, on annulera les A^{ij} où $i \neq j$.

14. On peut aller plus loin. Tout d'abord, *si $st \neq 1$, ou si $st = 1$ avec $\bar{a} = a$ et m pair, ou avec $\bar{a} = -a$ et m impair, on ramène* A^{12}, A^{34}, ... *à la forme bilinéaire type,* comme au nº 6.

Soit $st = 1$ et m impair $= 2\mu - 1$ avec $\bar{a} = a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$. Si $\bar{a} = \dot{a}$, on ne pourra pas toujours ramener les a_{1m}^{jj} à des valeurs arbitraires. En effet, soient $\Sigma\xi$ le groupe des sous-séries et $\Sigma\gamma$ le groupe des additions relatifs à α. Toute substitution permutable à α est de la forme $\xi\gamma$, et, si $\xi\gamma$ change la forme réduite

$$\Sigma_1^q a_{1m}^{jj} x_1^j y_m^j$$

de A_{11}^{1m} en

$$\Sigma_1^q b_{1m}^{jj} x_1^j y_m^j,$$

il est clair que ξ opère déjà à elle seule ce changement. Or ξ, qui transforme les a_{1m}^{jj} comme si on l'appliquait à la forme *hermitienne*

$$\Sigma_1^q a_{1m}^{jj} x_1^j \dot{x}_m^j$$

(**6**), permet seulement de les réduire à des valeurs absolues arbitraires, le nombre de ceux qui sont positifs restant inaltéré. *Il y a donc, pour A_{11}^{1m}, q types distincts. Si $\bar{a} = a$,* au contraire (A_{11}^{1m} est alors symétrique), comme on peut employer des substitutions ξ non réelles,

$\mathfrak{S}$ contenant les nombres complexes, *on pourra donner aux a^{jj}_{1m} des valeurs arbitraires.*

Soit e_0 une valeur réelle, positive, arbitraire. Je supposerai que, si $\bar{a} = a$, a^{jj}_{1m} est égal à e_0 pour $j = 1, \ldots, q$, et que, si $\bar{a} = \dot{a}$, l'indice d'inertie de A^{1m}_{11} (quand on remplace y^j_m par $\dot{x}^j_1$) étant η, a^{jj}_{1m} est égal à e_0 pour $j \leq \eta$, à $-e_0$ pour $j > \eta$. Je désignerai alors par $e^j = e$ la valeur de $a^{jj}_{\mu\mu} = (-1)^{\mu-1} a^{jj}_{1m}$.

Si $\bar{a} = a$, (1) exige que $a^{jj}_{\mu-1,\mu}$ soit égal à $-\frac{e}{2}$. *Si $\bar{a} = \dot{a}$*, (1) exige seulement que la partie réelle de $a^{jj}_{\mu-1,\mu}$ soit égale à $-\frac{e}{2}$. En déterminant convenablement λ dans

$$w = |x^j_\rho, x^j_\rho + \lambda x^j_{\rho-1}| \qquad (\rho = 2, \ldots, m;\ \alpha w = w\alpha),$$

et en prenant $\dot{w} a \bar{w}$ pour a, on aura encore $a^{jj}_{\mu-1,\mu} = -\frac{e}{2}$ (la transversale étant ici réelle, cela conduit à une équation de la forme $\lambda - \dot{\lambda} = ic$, c étant réel); mais je supposerai plus généralement (en vue du cas où $\mathfrak{S}$ aura le module 2) qu'on prend pour $a^{jj}_{\mu-1,\mu} = x$ une solution arbitraire de l'équation

$$x + \dot{x} = -e,$$

qui résulte de (1) et (3). Dans les deux cas $\bar{a} = a$, $\bar{a} = \dot{a}$, je désignerai par $f^j = f$ la valeur de $a^{jj}_{\mu-1,\mu}$.

Si $\bar{a} = a$, on peut ensuite annuler $a^{jj}_{11}, a^{jj}_{22}, \ldots, a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$; car, si $a^{jj}_{\mu-k,\mu-k}$ est le premier en commençant par la droite qui soit $\neq 0$, en déterminant convenablement λ dans

$$w = |x^j_\rho, x^j_\rho + \lambda x^j_{\rho-2k}| \qquad (\rho = 2k+1, \ldots, m;\ \alpha w = w\alpha),$$

et en prenant $\dot{w} a \bar{w}$ pour a, $a^{jj}_{\mu-k,\mu-k}$ sera nul. Alors, d'après (1) et (3), les a^{jj}_{kl} où k et l sont $< \mu$ sont nuls. *Si $\bar{a} = \dot{a}$*, on pourra annuler de même $a^{jj}_{\mu-k,\mu-k}$ (qui est réel) en prenant $\dot{w} a \bar{w}$ pour a, ce qui conduit pour λ à une équation de la forme $\lambda + \dot{\lambda} = c$, c étant réel. Mais de la nullité de $a^{jj}_{11}, \ldots, a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$ résulte seulement que $a^{jj}_{12}, a^{jj}_{23}, \ldots, a^{jj}_{\mu-2,\mu-1}$ sont purement imaginaires. On pourra cependant les annuler encore; car, si $a^{jj}_{\mu-k-1,\mu-k}$ est le premier en commençant par la droite qui soit $\neq 0$, en choisissant convenablement λ dans

$$w = |x_\rho^j, x_\rho^j + \lambda x_{\rho-2k-1}^j| \qquad (\rho = 2k+2, \ldots, m; \alpha w = w\alpha)$$

et en prenant $\dot{w} a \bar{w}$ pour a, $a_{\mu-k-1,\mu-k}^{jj}$ sera nul (l'équation que doit vérifier λ est de la forme $\lambda - \bar{\lambda} = ic$, c étant réel); *alors tous les a_{kl}^{jj} où k et l sont $< \mu$ sont nuls.* On voit d'ailleurs sur la figure que la matrice d'ordre μ formée des a_{kl}^{jj} où $k = 1, \ldots, \mu$ et $l = \mu, \ldots, m$ est complètement déterminée par $a_{\mu\mu}^{jj}$, $a_{\mu-1,\mu}^{jj}$ et (1). *Donc elle est la somme de deux matrices d'ordre μ, l'une du premier type* (6) *multipliée par $e - f$, l'autre du second type multipliée par f* (1).

Soient $st = 1$ et m pair $= 2\mu$ avec $\bar{a} = -a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$. Si $\bar{a} = -a$, A_{11}^{1m} est encore symétrique, et l'on peut donner aux a_{1m}^{jj} des valeurs arbitraires. Si $\bar{a} = \dot{a}$, la matrice iA_{11}^{1m} est hermitienne et a q types distincts.

e_0 étant toujours une valeur réelle, positive, arbitraire, je supposerai que, si $\bar{a} = -a$, $a_{1m}^{jj} = e_0$ pour $j = 1, \ldots, q$, et que, si $\bar{a} = \dot{a}$, l'indice d'inertie de iA_{11}^{1m} (quand on y remplace y_m^j par x_1^j) étant η, a_{1m}^{jj} est égal à ie_0 pour $j \leqq \eta$, à $-ie_0$ pour $j > \eta$, et je désignerai par

$$e^j = e$$

la valeur de

$$a_{\mu,\mu+1}^{jj} = (-1)^{\mu-1} a_{1m}^{jj}.$$

Si $\bar{a} = -a$, on peut supposer $a_{12}^{jj}, a_{23}^{jj}, \ldots, a_{\mu-1,\mu}^{jj}$ nuls; car, si $a_{\mu-k-1,\mu-k}^{jj}$ est le premier en commençant par la droite qui soit $\neq 0$, en choisissant convenablement λ dans

$$w = |x_\rho^j, x_\rho^j + \lambda x_{\rho-2k-2}^j| \qquad (\rho = 2k+3, \ldots, m)$$

et en prenant $\dot{w} a \bar{w}$ pour a, $a_{\mu-k-1,\mu-k}^{jj}$ sera nul. Alors, d'après (1) et (3), les a_{kl}^{jj} où k et l sont $\leqq \mu$ sont nuls. *Si $\bar{a} = \dot{a}$*, on annulera d'abord la diagonale (réelle) en prenant $\dot{w} a \bar{w}$ pour a, w ayant la forme

$$|x_\rho^j, x_\rho^j + \lambda x_{\rho-2k-1}^j| \qquad (\rho = 2k+2, \ldots, m),$$

---

(1) Pour le cas $\bar{a} = a$, *cf.* JORDAN, *J. M.*, 1888.

ce qui conduit pour λ à une équation du type $\lambda - \bar{\lambda} = ic$, c étant réel (la transversale principale est ici purement imaginaire); $a^{jj}_{\mu-k+1,\,\mu-k}$ est alors purement imaginaire, on l'annulera comme dans le cas $\bar{a} = -a$ (d'où pour λ une équation du type $\lambda + \bar{\lambda} = c$, c étant réel), et finalement *les a^{jj}_{kl} où k et l sont $> \mu$ pourront être supposés nuls.*

La matrice des $e^{-1} a^{jj}_{kl}$ où

$$k = 1, \ldots, \mu \qquad \text{et} \qquad l = \mu + 1, \ldots, m$$

est évidemment du second type (**6**).

15. *Soit maintenant*

$$\bar{a} = \alpha a.$$

Comme précédemment, il suffit de déterminer A_{11}.

Remarquons d'abord que, si $st = 1$, donc $\alpha = 1$, comme ici $\beta = \alpha$, on a

$$s = t = \pm 1,$$

et (4) donne

$$a^{jj}_{1m} = t a^{jj}_{m1}$$

ou

$$\bar{A}^{1m}_{11} = (-1)^{m-1} t A^{1m}_{11}.$$

Si $s = t = 1$ avec m pair, ou si $s = t = -1$ avec m impair, le rang des A^{jj} étant d'une parité différente de celle de m, on peut supposer les A^{jj} nulles et annuler toutes les A^{ij} sauf les $A^{2j-1,2j}$ et les $A^{2j,2j-1}$ [on a vu (**9**) que q était pair dans l'hypothèse actuelle, et on le retrouverait d'ailleurs ici]. *Si $st \neq 1$*, les A^{jj} sont nécessairement nulles, et l'on opérera de même. On donnera à A^{12}, A^{34}, ... la forme type, et A^{21}, A^{43}, ... seront déterminées par (4). *Si $s = t = 1$ avec m impair, ou si $s = t = -1$ avec m pair*, A^{1m}_{11} est symétrique et se ramène à la même forme diagonale qu'au n° **14** (dont je reprendrai les notations). *Si $s = t = 1$ avec m impair $= 2\mu - 1$*, les $a^{jj}_{k,k+1}$ sont nuls d'après (4). On annulera par des additions de transversales les $a^{jj}_{11}, \ldots,$ $a^{jj}_{\mu-1,\mu-1}$. Alors *tous les a^{jj}_{kl} où k et l sont $< \mu$ sont nuls, et la matrice des $e^{-1} a^{jj}_{kl}$ où $k = 1, \ldots, \mu$ et $l = \mu, \ldots, m$ est réduite au premier type. Si $s = t = -1$ avec m pair $= 2\mu$*, on annulera d'abord a^{jj}_{12}, $a^{jj}_{23}, \ldots, a^{jj}_{\mu-1,\mu}$ par des additions de transversales. Alors, d'après (1) et (4), *tous les* a_{kl}^{jj} *où* k *est* $< \mu$ *et* $l \leqq \mu$ *sont nuls, et la matrice des* $e^{-1} a_{kl}^{jj}$ *où* $k = 1, \ldots, \mu$ *et* $l = \mu + 1, \ldots, m$ *est la somme de deux matrices d'ordre* μ, *l'une du premier, l'autre du second type.*

16. *Soit enfin*

$$\bar{a} = \alpha \dot{a}.$$

Si $st \neq 1$, on procédera comme dans le cas précédent. *Si* $st = 1$ (*ici* $t = \dot{s}$), *en prenant* $a\rho$ *pour* a, ρ *étant une racine de* $\rho^2 = t$, *on peut supposer que, dans* (4), $t = 1$. On a alors

$$a_{1m}^{ji} = \dot{a}_{m1}^{ij} = (-1)^{m-1} \dot{a}_{1m}^{ij}.$$

Donc $i^{m-1} A_{11}^{1m}$ est hermitienne et peut se ramener à la même forme réduite qu'au n° **14** (dont je reprendrai les notations).

Si m *est impair* $= 2\mu - 1$, la transversale de A^{jj} est réelle. Comme, d'après (4),

$$\dot{a}_{k,k+1}^{jj} = a_{kk}^{jj} - \dot{a}_{kk}^{jj}$$

est purement imaginaire, on pourra, par des additions de transversales, annuler les $a_{12}^{jj}, a_{23}^{jj}, \ldots, a_{\mu-1,\mu}^{jj}$. Alors $a_{11}^{jj}, \ldots, a_{\mu-1,\mu-1}^{jj}$ sont réels, et par des additions de transversales on pourra les annuler, ce qui, d'après (1), *entraîne la nullité de tous les* a_{kl}^{jj} *où* k *et* l *sont* $< \mu$. *La matrice des* $e^{-1} a_{kl}^{jj}$ *où* $k = 1, \ldots, \mu$ *et* $l = \mu, \ldots, m$ *se trouve ainsi réduite au premier type* (**6**).

Si m *est pair* $= 2\mu$, la transversale de A^{jj} est purement imaginaire. Mais on pourra procéder de même pour *annuler les* a_{kl}^{jj} *où* k *est* $< \mu$ *et* $l \leqq \mu$ et la partie réelle de $a_{\mu\mu}^{jj}$; alors la partie imaginaire de $a_{\mu\mu}^{jj}$ est déterminée, et *la matrice des* $e^{-1} a_{kl}^{jj}$ *où* $k = 1, \ldots, \mu$ et $l = \mu + 1, \ldots, m$ *est la somme de deux matrices d'ordre* μ, *l'une du premier, l'autre du second type.*

17. De la forme réduite obtenue dans le cas $\bar{a} = \dot{a}$ on déduit très simplement une inégalité établie d'abord par M. Lœwy (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898). Opérons en effet sur cette forme réduite où je remplacerai y_j^k par x_j^k $\left(\text{en prenant } f \text{ égal à } -\frac{e}{2} \text{ pour } st = 1 \text{ et } m \text{ impair}\right)$ la substitution, non permutable à α en général, qui consiste à prendre, dans $A^{2j-1,2j}$ si $st \neq 1$, le coefficient de x_k^{2j-1} $(k = 1, \ldots, m_{2j})$ pour $\dot{x}^{2j}_{m_{2j}-k+1}$ (donc, dans $A^{2j,2j-1}$, celui de $\dot{x}_k^{2j-1}$ pour $x^{2j}_{m_{2j}-k+1}$), et, dans A^{jj} si $st = 1$, le coefficient de x_k^j $\left[k = 1, \ldots, E\left(\frac{m_j}{2}\right)\right]$ pour $\dot{x}_{m_j-k}$ [donc celui de $(-1)^{m_j-1}\dot{x}_k^j$ pour $x^j_{m_j-k}$]. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{2j-1,2j} \\ A^{2j,2j-1} & 0 \end{pmatrix}$$

si $st \neq 1$, et la matrice A^{jj} si $st = 1$, seront alors réduites à leurs transversales principales. En observant que les formes

$$x\dot{y} + y\dot{x} \quad \text{et} \quad i(x\dot{y} - y\dot{x})$$

se transforment, par les substitutions respectives

$$(x, y;\, x + y,\, x - y), \qquad (x, y;\, x + iy,\, ix + y),$$

en

$$2(x\dot{x} - y\dot{y}),$$

on voit directement que la caractéristique de

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{2j-1,2j} \\ A^{2j,2j-1} & 0 \end{pmatrix}$$

pour $st \neq 1$ est m_{2j}, et que celle de A^{jj} pour $st = 1$ est $E\left(\frac{m_j}{2}\right)$. Donc, la caractéristique [1] c de a étant au moins égale à la somme des caractéristiques de ses composantes, *on a*

$$(7) \qquad c \geqq \frac{1}{2}\Sigma m' + \Sigma E\left(\frac{m''}{2}\right),$$

m' parcourant les exposants des diviseurs élémentaires de $\varkappa - s$ relatifs aux racines s telles que st soit $\neq 1$ (pour chacun d'eux $\varkappa = 2$) et m'' les autres.

---

[1] Si une forme hermitienne a à n variables est réductible (par transformation linéaire) à la forme

$$\Sigma_1^h x_i\dot{x}_i - \Sigma_{h+1}^r x_i\dot{x}_i \qquad (r \leqq n),$$

M. Lœwy appelle *caractéristique* de a le plus petit des deux nombres h, $r - h$ (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898).

Si l'on se donne c et une substitution n-aire vérifiant (7) (outre les conditions déjà rencontrées), la méthode précédente fournit directement, conjointement à la forme canonique α de cette substitution et à la substitution corrélative β, une forme hermitienne réduite a de déterminant $\neq 0$ et de caractéristique c telle que

$$\beta a \bar{\alpha} = a;$$

car, en faisant varier le signe des composantes de caractéristiques $E\left(\frac{m''}{2}\right)$ de a, on fait prendre à la caractéristique de a toutes les valeurs possibles, depuis son minimum qui est le second membre de (7) jusqu'à son maximum $E\left(\frac{n}{2}\right)$ (*cf.* Lœwy, *loc. cit.*).

18. *Supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ soit un champ quelconque.* — Prenons toujours les variables canoniques de α et cherchons à construire a dans le champ $\mathfrak{S}_\alpha$ résultant de l'adjonction à $\mathfrak{S}$ des multiplicateurs de α. Une condition nouvelle *de réalité* intervient : c'est qu'en repassant aux variables primitives, a soit dans $\mathfrak{S}$. Soit

$$|\alpha - s\varepsilon| = (-1)^n \Pi_l f_l(s)^{\tau_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots),$$

$f_l(s) = \Pi_{\rho=1}^{\nu_l}(s - s_{l\rho})$ étant irréductible dans $\mathfrak{S}$ ($f_1 = f$; $\nu_1 = \nu$; $\tau_1 = \tau$; $s_{1\rho} = s_\rho$; $s_1 = s$). Supposons aussi β sous forme canonique, et qu'on puisse établir, entre les variables canoniques de α et de β une correspondance telle que les multiplicateurs

$$t_{l1}, \quad \ldots, \quad t_{l\nu_l} \qquad (t_{1\rho} = t_\rho,\ t_1 = t)$$

de β qui correspondent ainsi à $s_{l1}, \ldots, s_{l\nu_l}$ soient racines d'un facteur irréductible

$$\varphi_l(s) = \Pi_{\rho=1}^{\nu_l}(s - t_{l\rho})$$

de $|\beta - s\varepsilon|$. D'après le n° **2**, $|\beta - s\varepsilon|$ est de la forme

$$(-1)^n \Pi_l g_l(s)^{\tau_l}, \qquad \text{où} \qquad g_l(s) = \Pi_{\rho=1}^{\nu_l}(s - s_{l\rho}^{-1}) = c_l^{-1} s^{\nu_l} f_l(s^{-1}) \qquad [c_l = f_l(0)].$$

Soient α_l et β_l les parties de α, β dont les déterminants caractéristiques sont $f_l(s)^{\tau_l}$ et $\varphi_l(s)^{\tau_l}$ respectivement. Les τ_l variables

$$\xi_l^{\rho} \qquad (\xi_l^{1\rho} = \xi^{\rho})$$

du système qui répond, dans α, à $s_{l\rho}$ (je les supposerai rangées de manière que $z_{j+1}^{l\rho}$ soit la variable qui vient après $z_j^{l\rho}$ dans la même suite, ou la première variable d'une nouvelle suite, selon que $z_j^{l\rho}$ n'est pas ou est la dernière variable d'une suite) sont de la forme

$$z_i^{l\rho} = \Sigma_{k=0}^{\nu_l - 1} s_{l\rho}^{k} x_{ik}^{l},$$

les x_{ik}^{l} $(x_{ik}^{1} = x_{ik})$ étant des fonctions linéaires des x_i à coefficients dans $\mathfrak{S}$. Soient

$$u_i^{l\rho} = \Sigma_{k=0}^{\nu_l - 1} t_{l\rho}^{k} y_{ik}^{l},$$

les y_{ik}^{l} $(y_{ik}^{1} = y_{ik})$ étant des fonctions linéaires des y_i à coefficients dans $\mathfrak{S}$, les variables de β_l, $u_i^{l\rho}(u_i^{1\rho} = u_i^{\rho})$, étant la variable correspondant à $z_i^{l\rho}$. Soient α_l^{ρ} l'action de α sur $z_1^{l\rho}, \ldots, z_{\tau_l}^{l\rho}$; β_l^{ρ} celle de β sur $u_1^{l\rho}, \ldots, u_{\tau_l}^{l\rho}$; a_l^{ρ} $(a_1^{\rho} = a^{\rho})$ la partie de a où figurent seulement, avec $z_1^{l\rho}, \ldots, z_{\tau_l}^{l\rho}$, les $u_i^{l'\rho'}$ répondant à $t_{l'\rho'} = s_{l\rho}^{1}$ (à chaque suite de α relative à $s_{l\rho}$ répond, dans β, une suite également nombreuse relative à $t_{l'\rho'}$) : on voit que

$$\varphi_{l'} = g_l, \qquad \nu_{l'} = \nu_l, \qquad \tau_{l'} = \tau_l.$$

On peut évidemment numéroter les $t_{l'\rho}$ de manière que $t_{l'\rho} = s_{l\rho}^{1}$ si $\varphi_{l'} \neq f_l$ (*cf.* 3) et que $t_{l'\rho} = s_{l\rho}$ si $\varphi_{l'} = f_l$. Si $\varphi_{l'} = f_l$, comme f_l est irréductible, ν est pair ou égal à 1 : si ν est pair $= 2\nu'$, on peut en outre numéroter les $s_{l\rho}$ de manière que

$$s_{l,\nu'+\rho} = s_{l\rho}^{1} \qquad \text{et} \qquad s_{l\rho} = s_{l,\nu'+\rho}^{1} \qquad (\rho = 1, \ldots, \nu');$$

si $\nu = 1$,

$$t_{l1} = s_{l1} = \pm 1.$$

Si donc $\varphi_{l'} \neq f_l$, on aura

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_l^{\rho} = \Sigma_{jj'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) z_j^{l\rho} u_{j'}^{l'\rho} = \Sigma_{jj'kk'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) s_{l\rho}^{k-k'} x_{jk}^{l} y_{j'k'}^{l'} \\ \qquad (j, j' = 1, \ldots, \tau_l;\ k, k' = 0, \ldots, \nu_l - 1), \end{array} \right.$$

$a_{jj'}^{l\rho}(x)$ étant un polynome de degré $< \nu_l$ à coefficients dans $\mathfrak{S}$. Si $\varphi_{l'} = f_l$, on aura

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_l^{\rho} = \Sigma_{jj'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) z_j^{l\rho} u_{j'}^{l,\nu'+\rho} = \Sigma_{jj'kk'} a_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}) s_{l\rho}^{k-k'} x_{jk}^{l} y_{j'k'}^{l} \\ \qquad (j, j' = 1, \ldots, \tau_l;\ k, k' = 0, \ldots, \nu_l - 1). \end{array} \right.$$

J'écrirai $a_{jj'}^{\rho}$ pour $a_{jj'}^{1\rho}$ et h pour l' quand $l = 1$.

Soit a_l la somme des matrices composantes $a_l^1, \ldots, a_l^{\nu_l}$. Comme on peut exprimer dans $\mathfrak{S}\alpha_l$, β_l (*E.*, **204**) et par suite $a_l(\mathbf{2})$, on pourra, en faisant jouer à $\mathfrak{S}(s_\rho)$ [1] le rôle de $\mathfrak{S}$ et à a^ρ celui de a_l, exprimer a^ρ dans $\mathfrak{S}(s_\rho)$ par les x_{jk}^l et les y_{jk}^l. De plus, comme $a_1 = \Sigma a^\rho$, étant dans $\mathfrak{S}$, est fonction symétrique des s_ρ, a^ρ *se déduit de* a^1 *par le changement de* s *en* s_ρ [en considérant le coefficient de $x_{j0} y_{j'0}^h$ dans a_1, on voit que seul le terme constant de $a_{jj'}^\rho(x)$ pourrait dépendre de ρ; mais le terme en $x_{j1} y_{j'0}^h$ montre qu'il n'en dépend pas].

Si $\varphi_h \neq f_1$, comme $t_{h\rho} = s_\rho^{-1}$, a^1 vérifie $\beta_h^1 a^1 \bar{\alpha}_1^1 = a^1$, β_h^1 agissant sur les u_j^{h1} comme α_1^1 sur les z_j^1 sauf que s est remplacé par $t_{h1} = s^{-1}(\mathbf{2})$. On pourra donc déterminer a^1 dans $\mathfrak{S}(s)$ sans s'occuper de la condition de réalité qui revient à ce que a^ρ se déduit de a^1 par le changement de s en s_ρ, et qui sert par suite à déterminer les a^ρ où ρ est > 1. La détermination de a^1 dans $\mathfrak{S}(s)$ rentre dans le problème traité au n° **6** [2].

Si $\varphi_1 = f_1$ et $\nu = 2\nu'$, a^1 vérifie $\beta_1^{\nu'+1} a^1 \bar{\alpha}_1^1 = a^1$ où $\beta_1^{\nu'+1} = \alpha_1^{\nu'+1}$, et l'on opérera de même. Si $\varphi_1 = f_1$ et $\nu = 1$, il n'y a pas de condition de réalité.

19. *Ajoutons maintenant l'hypothèse* $\bar{a} = \theta a (\theta = \pm 1)$, x_i *et* y_i *étant les variables correspondantes,* et astreignons-nous (*cf.* **7**) à n'introduire, dans les changements de variables, que des variables cogrédientes, de manière à conserver la propriété $\bar{a} = \theta a$. Je supposerai donc les $u_i^{l\rho}$ et les $z_i^{l\rho}$ cogrédients, $u_i^{l\rho}$ répondant à $z_i^{l\rho}$ (pour que les x_{ik}^l et les y_{ik}^l fussent cogrédients, il faudrait que $\beta = \alpha$).

Si $h > 1$, $a^1 = \Sigma_{ij} a_{ij} z_i^1 u_j^{h1}$ se détermine comme au n° **6**, et, puisque les variables z_i^1, u_j^{h1} ne se correspondent pas, on pourra prendre, pour les $a_{lm}^{ij} \neq 0$ (avec les notations du n° **6**) de la forme réduite, des valeurs arbitraires. La condition $\bar{a} = \theta a$ détermine a_h par a_1.

Soit $h = 1$, $\nu = 2\nu'$.

---

(1) J'entends en général par $C(x, y, \ldots)$ le champ résultant de l'adjonction de $x, y, \ldots$ au champ C.

(2) Ici et dans ce qui va suivre, il est clair que les substitutions employées pour la réduction de a_1^1 doivent être accompagnées des substitutions conjuguées agissant sur $a_1^2, \ldots, a_1^\nu$, de manière que l'opération totale représente une substitution des variables primitives à coefficients dans $\mathfrak{S}$.

Ici

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad a^\rho = \Sigma_{ij} a^\rho_{ij} z^\rho_i u_j^{\nu'+\rho}$$

et

$$a^\rho_{ij} = \theta a^{\nu'+\rho}_{ji},$$

c'est-à-dire

$$a^1_{ji}(s_\rho) = \theta a^1_{ij}(s_\rho^{-1}).$$

On voit donc que, en posant

$$s^{-1} = \dot{s}, \qquad s + \dot{s} = b$$

(b est racine d'une équation de degré ν' irréductible dans $\mathfrak{S}$; si $\mathfrak{S}$ a le module 2, b est $\neq 0$, sans quoi s^2 serait égal à 1, d'où $\nu = 1$),

$$s - \dot{s} = i,$$

et, en désignant d'une manière générale par $\dot{v}$ la conjuguée d'une matrice v relativement à $\mathfrak{S}(b) = C$, s, $\dot{s}$ (si $\bar{v} = \dot{v}$, v sera dite *hermitienne* relativement à $C, s, \dot{s}$), a^1 *si* $\bar{a} = a$, *ou* ia^1 *si* $\bar{a} = -a$, *doit être hermitienne relativement à* $C, s, \dot{s}$, *les* $u_j^{\nu'+1}$ *étant cogrédientes aux* $\dot{z}_j$. Si $\mathfrak{S}$ n'a pas le module 2, on a

$$s = \frac{b+i}{2}, \qquad \dot{s} = \frac{b-i}{2},$$
$$C(s) = C(i),$$

et a^1 (ou ia^1) est aussi hermitienne relativement à $C, i, -i$.

Pour former a^1 ou ia^1 (que je prendrai maintenant pour a avec les notations du n° **14**) dans $C(s)$, on peut opérer comme précédemment (dans le cas $s\dot{s} = 1$), C jouant le rôle du champ des nombres réels, et s, $\dot{s}$ celui des racines de $x^2 + 1 = 0$, en ajoutant les observations suivantes :

1° Bien qu'on puisse toujours ramener A^{1m}_{11} à la forme diagonale [1], on ne pourra, bien entendu, pas toujours réduire les a^{jj}_{1m} à des valeurs respectives e^j_0 arbitraires [sous la réserve des conditions (3) qui exigent en particulier, si $\mathfrak{S}$ a le module 2, que a^{jj}_{1m} soit dans C quelle que soit la parité de m]. Soit, par exemple, $q = 1$. $\dot{a}^{11}_{1m}$, qui peut toujours

(1) DICKSON. *Transact. of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 280.

s'écrire $e_0^1 c^{-1}$, c étant quelconque dans C, ne peut être réduit qu'aux formes $e_0^1 c^{-1} u\dot{u}$, u étant dans C(s), et la condition

$$u\dot{u} = c$$

ou, en posant

$$u = u_0 + u_1 s$$

(u_0 et u_1 étant dans C),

$$u_0^2 + b u_0 u_1 + u_1^2 = c$$

ne peut pas toujours être vérifiée. Mais elle peut toujours l'être si $\mathfrak{S}$ est fini. De même, si $q > 1$ et si $\mathfrak{S}$ est fini, on pourra réduire a_{1m}^{jj} à e_0^j en remplaçant x_k^j par $u^j x_k^j$. Lorsqu'on sera maître de choisir les e_0^j, je les supposerai égaux à e_0^1.

2° *Si $\mathfrak{S}$ n'a pas le module* 2, en introduisant i au lieu de s, la réduction s'achève comme au n° **14**.

Si $\mathfrak{S}$ a le module 2, i est dans C, et l'on doit se servir de l'irrationnelle s. Les éléments de la transversale principale sont toujours dans C. On peut donner à f la forme $f_1 s$, f_1 étant arbitraire dans C. Lorsque la diagonale principale est réduite à zéro, a_{12}^{jj}, a_{23}^{jj}, ..., $a_{\mu-2,\mu-1}^{jj}$ sont dans C. Le reste de l'analyse se poursuit comme au n° **14**, avec des modifications obvies, et l'on arrive encore aux mêmes résultats.

Soit enfin $h = \nu = 1$, donc $f = s \pm 1$.

β_1 est encore égale à α_1; mais il n'y a plus de condition de réalité. Si $\overline{a_1} = -a_1$, a_1 n'a qu'un type comme au n° **14**. Si $\overline{a_1} = a_1$, le nombre des types dépend encore de $\mathfrak{S}$, et de plus, ici, on ne pourra pas toujours réduire A_{11}^{1m} à la forme diagonale (¹). Une fois la forme réduite de A_{11}^{1m} déterminée, on opérera d'ailleurs, pour $\overline{a_1} = \pm a_1$, comme au n° **14**.

(¹) On vérifie par exemple directement que $xy' + yx'$, x' et y' étant cogrédientes à x et y, n'est pas équivalente à $xx' + yy'$ dans un champ fini de module 2. Pour préciser, si $\mathfrak{S}$ n'a pas le module 2, on pourra toujours par des additions symétriques de lignes et de colonnes réduire A_{11}^{1m} à la forme diagonale. Si $\mathfrak{S}$ a le module 2, on peut le réduire, comme l'a fait M. Jordan pour le cas où $\mathfrak{S}$ est fini (*J. M.*, 1905, p. 268), à la somme de deux matrices composantes dont l'une est diagonale, l'autre ayant la forme type d'une matrice alternée. Si de plus tout élément de $\mathfrak{S}$ est carré, on pourra pousser la réduction jusqu'au point où l'a poussée M. Jordan, c'est-à-dire réduire la composante diagonale à être d'ordre $\leqq 2$ et tous les coefficients à 1.

20. *Faisons maintenant l'hypothèse* $\bar{a} = \varkappa a$, *donc* $\beta = \varkappa$ (**8**).

Si $h > 1$, la condition $\bar{a} = \varkappa a$ détermine, comme dans le cas précédent, a_h par a_1.

Soit $h = 1$, $\nu = 2\nu'$.

Désignons par $a'^{\rho}_{i,(j+1)}$ une quantité égale à o ou à $a'^{\rho}_{i,j+1}$ selon que u'^{ρ}_j est ou n'est pas la dernière variable d'une suite. On aura ici

$$a^{\nu'+\rho}_{ji} = s_{\nu'+\rho}(a^{\rho}_{ij} + a^{\rho}_{i,(j+1)}).$$

d'où, avec les notations de tout à l'heure,

$$(10) \qquad a^1_{ji}(s) = s\,[a^1_{ji}(\dot{s}) + a^1_{i,(j+1)}(\dot{s})] \qquad (\dot{s} = s^{-1}).$$

Désignons par ρ une racine de $\rho^2 = s$, et cherchons d'abord dans quel cas ρ est dans $C(s)$, c'est-à-dire dans quel cas ρ est de la forme $\rho_0 + \rho_1 s$, ρ_0 et ρ_1 étant dans C [alors $C(\rho) = C(s)$]. La condition

$$(\rho_0 + \rho_1 s)^2 = s$$

jointe à

$$s^2 = bs - 1$$

donne

$$\rho_1^2 = \rho_0^2, \qquad \rho_1(2\rho_0 + b\rho_1) = 1,$$

ou

$$(11) \qquad \rho_1 = \theta\rho_0 \qquad (\theta = \pm 1), \qquad \rho_0^2(b + 2\theta) = 1.$$

Donc, pour que ρ soit dans $C(s)$, il faut et suffit que $b + 2$ ou $b - 2$ soit carré dans C. Cela a toujours lieu si C est fini, car, ou bien C a le module 2 et la chose est évidente, ou bien $b^2 - 4$ est non carré ($s^2 = bs - 1$ est irréductible). De même si C est formé de tous les nombres réels, car, $b^2 - 4$ étant négatif, b est compris entre 2 et -2. Mais cela n'est pas nécessaire, car, si C est le champ des nombres rationnels, le produit de deux non-carrés peut être un non-carré.

Lorsque ρ est dans $C(s)$, la conjuguée $\dot{\rho}$ de $\rho = \rho_0(1 + \theta s)$ relativement à C, s, $\dot{s}$ est entièrement déterminée et l'on a, d'après (11),

$$(12) \qquad \rho\dot{\rho} = \rho_0^2(1 + \theta s)(1 + \theta\dot{s}) = \rho_0^2(b\theta + 2) = \theta.$$

Le polynome

$$\rho^4 - b\rho^2 + 1$$

qu'annule ρ est le produit de

$$\rho^2 - \frac{\theta}{\rho_0}\rho + 1$$

et de

$$\rho^2 + \frac{\theta}{\rho_0}\rho + 1.$$

Lorsque ρ n'est pas dans $C(s)$, on peut *convenir* que la conjuguée $\dot\rho$ de ρ est la racine carrée de $\dot s$ qui est égale à ρ^{-1}. Il est d'ailleurs facile de préciser. Le polynome

$$\rho^4 - b\rho^2 + 1$$

qu'annule ρ est le produit des deux facteurs

$$\rho^2 - \varphi\rho + 1 \qquad \text{et} \qquad \rho^2 + \varphi\rho + 1,$$

où $\varphi^2 = b + 2$. Or s n'est pas dans $C(\varphi)$: si en effet φ était de la forme $\varphi_0 + \varphi_1 s$ (φ_0 et φ_1 étant dans C et $\varphi_1 \neq 0$), l'équation $\varphi^2 = b + 2$ conduirait à

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 + s\varphi_1(b\varphi_1 + 2\varphi_0) = b + 2,$$

d'où $b\varphi_1 + 2\varphi_0 = 0$: cela exige d'abord que C n'ait pas le module 2, puis que $\frac{\varphi_0^2}{b^2}(b-2) = 1$ contre l'hypothèse que $b+2$ et $b-2$ sont non carrés. s n'étant pas dans $C(\varphi) = C_1$, on peut se servir de C_1 au lieu de C : alors

$$s = \rho^2 \qquad \text{et} \qquad \dot s = \dot\rho^2,$$

et de même

$$a_{ij}^1(\rho^2) \qquad \text{et} \qquad a_{ij}^1(\dot\rho^2)$$

sont conjugués relativement à C_1, ρ, $\dot\rho$.

Supposons d'abord que $b+2$ est carré ou que $b+2$ et $b-2$ sont non carrés. Alors $\rho\dot\rho = 1$, et (10) peut s'écrire

$$\rho^{-1}a_{ji}^1(\rho^2) = \dot\rho^{-1}a_{ij}^1(\dot\rho^2) + \dot\rho^{-1}a_{i,(j+1)}^1(\dot\rho^2). \tag{13}$$

Pour former $\rho^{-1}a^1$, que je prendrai pour a en revenant aux notations du n° **16**, on pourra alors opérer comme au même n° **16** (dans le cas $s\dot s = 1$) avec les modifications suivantes :

Désignons par x, y, z des éléments de la forme $\rho^{-1}\xi$, ξ étant dans

C(s) (tous les a_{kl}^{ij} ont cette forme), et convenons d'appeler encore hermitienne une forme

$$c = \Sigma_{ik} c_{ik} z_i z_k \qquad (i, k = 1, \dots, n)$$

telle que $\bar{c} = \dot{c}$, c'est-à-dire telle que $c_{ki} = \dot{c}_{ik}$, les c_{ik} ayant la forme x : les c_{ii} ont la forme plus particulière $x + \dot{x}$ [car, si C n'a pas le module 2, on a

$$c_{ii} = \dot{c}_{ii} = \frac{1}{2}(c_{ii} + \dot{c}_{ii}).$$

et, si C a le module 2,

$$c_{ii} = b^{-1}(sc_{ii} + \dot{s}\dot{c}_{ii})].$$

Une telle forme se réduit, par une substitution des z_i à coefficients dans C(s) jointe à la substitution conjuguée des $\dot{z}_i$, à la forme $(\rho + \dot{\rho})\Sigma_1^n z_i \dot{z}_i$. En effet, si les c_{ii} ne sont pas tous nuls, on peut supposer $c_{11} \neq 0$; si tous sont nuls, on peut, par une addition de colonnes à multiplicateur dans C(s) suivie d'une addition symétrique de lignes à multiplicateur conjugué, rendre $c_{11} \neq 0$. Par de nouvelles additions de lignes et de colonnes de même sorte on annulera c_{1i} et c_{i1} pour $i > 1$ [cela conduit, pour chaque multiplicateur λ, à une équation de la forme $\lambda(x + \dot{x}) = y$, dont la solution λ est bien dans C(s)]. On opérera de même sur la matrice des c_{ik} où $i, k = 2, \dots, n$. Etc.

Ici

$$i^{m-1} \mathrm{A}_{11}^{1m} \qquad (i = s - \dot{s})$$

est hermitienne et se ramène à

$$(\rho + \dot{\rho}) \Sigma_1^q x_1^j y_m^j.$$

Les $a_{k,k+1}^{jj}$ ont la forme particulière $x - \dot{x}$, et

$$\dot{a}_{1m}^{jj} = (-1)^{m-1} a_{1m}^{jj}.$$

Par des additions de transversales de multiplicateur λ [λ étant dans C(s)] accompagnées chacune de l'addition conjuguée par rapport à C, $s, \dot{s}$, on peut annuler d'abord les $a_{k,k+1}^{jj}$ situés hors de la transversale, puis les a_{kk}^{jl} également situés hors de la transversale : si $m = 2\mu - 1$, on est conduit à des équations de la forme $(\lambda - \dot{\lambda})y = x - \dot{x}$ avec $\dot{y} = y$ (vérifiée par $\lambda = y^{-1}x$) et $(\lambda + \dot{\lambda})y = z$ avec $\dot{y} = y$ et $\dot{z} = z$ $\left(\text{vérifiée par } \lambda = \frac{z}{2y} \text{ si C n'a pas le module 2 et par } \lambda = \frac{zs}{by} \text{ si C a le module 2}\right)$; si $m = 2\mu$, on aura des équations de la forme $(\lambda + \dot{\lambda})y = x - \dot{x}$ avec $\dot{y} = -y$ (vérifiée par $\lambda = y^{-1}x$) et $(\lambda - \dot{\lambda})y = z$ avec $\dot{y} = -y$ et $\dot{z} = z$ $\left(\text{vérifiée par } \lambda = \frac{z}{2y} \text{ si C n'a pas le module 2 et par } \lambda = \frac{zs}{by} \text{ si C a le module 2}\right)$. Les résultats sont les mêmes qu'au n° **16**, en donnant à e un sens convenable.

Supposons maintenant $b+2$ non carré et $b-2$ carré. Alors $\rho\dot{\rho} = -1$ et (10) s'écrit

$$(14) \qquad \rho^{-1}a^1_{ji}(\rho^2) = -\dot{\rho}^{-1}a^1_{ij}(\dot{\rho}^2) - \dot{\rho}^{-1}a^1_{ij}(\dot{\rho}^2).$$

En reprenant toujours $\rho^{-1}a'$ pour a avec les mêmes notations, les a^{ij}_{kl} gardent la même forme; $i^m A^{1m}_{11}$ est hermitienne et se ramène à la même forme que tout à l'heure; les $a^{ij}_{k,k+1}$ ont la forme $x + \dot{x}$, et $\dot{a}^{ij}_{1m} = (-1)^m a^{ij}_{1m}$. Les mêmes opérations peuvent encore s'effectuer et conduisent au même résultat.

Soit $h = \nu = 1$ et $\dot{f} = f = s \pm 1$.

Il n'y a plus alors de condition de réalité, et l'on rentre dans le cas du n° **15**, sauf que le nombre des types de A^{1m}_{11} dépend de $\mathfrak{S}$.

21. Supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ résulte de l'adjonction à un champ C des racines υ, $\dot{\upsilon}$ d'une équation $\upsilon^2 - \zeta\upsilon + \eta = 0$ irréductible dans C, et *ajoutons l'hypothèse $\bar{a} = \dot{a}$, $\dot{a}$ étant la conjuguée de a relativement à C, υ, $\dot{\upsilon}$* [on peut omettre l'hypothèse $\bar{a} = -\dot{a}$ qui se ramène à l'hypothèse $\bar{a} = \dot{a}$ en posant $a = (\upsilon - \dot{\upsilon})a'$].

Convenons encore de traiter les x_i et les y_i, dans les changements de variables, comme des variables conjuguées. On ne peut plus alors supposer qu'un même changement de variables permet de canoniser à la fois α et β, car, un changement de variables qui canonise α n'ayant pas, en général, ses coefficients dans $\mathfrak{S}$, on ne peut parler du changement conjugué. Supposons donc

$$\beta = \dot{\alpha}, \qquad \varphi_l(s) = \dot{f}_l(s),$$

et posons

$$t_{l\rho} = \dot{s}_{l\rho}, \qquad \dot{t}_{l\rho} = s_{l\rho}$$

(si donc $\dot{\varphi}_l = f_l$, $\dot{s}_{l\rho} = s_{l\rho}$). La relation $\varphi_{l'}(s) = g_l(s)$, qui montre ici que $\dot{c}_{l'} = c_l^{-1}$, donne, en changeant s en s^{-1} et en passant aux conjuguées,

$$g_{l'}(s) = \dot{\varphi}_l(s).$$

On a donc à la fois

$$t_{l'\rho} = s_{l\rho}^{-1} \qquad \text{et} \qquad t_{l\rho} = s_{l'\rho}^{-1}.$$

La condition $\bar{a} = \dot{a}$ donne alors, en observant que $x'_{j'k'}$ ne figure que dans $a_{l'}$,

$$\Sigma_\rho a_{j'j}^{l'\rho}(s_{l'\rho})\, s_{l'\rho}^{k'-k} = \Sigma_\rho \dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})\, s_{l\rho}^{k'-k} \qquad (k, k' = 0, \ldots, \nu_l - 1),$$

d'où

$$a_{j'j}^{l'\rho}(s_{l'\rho}) = \dot{a}_{jj'}^{l\rho}(s_{l\rho}^{-1}),$$

ce qui détermine $a_{l'}$ par a_l, si $l' \neq l$.

Supposons donc $l' = l = 1$, et d'abord $\dot{f} \neq f$. Remarquons d'abord que $F = f\dot{f}$ *n'est réductible dans* C *que si* $\dot{f} = f$ (tout facteur de F irréductible dans C devant être égal à f ou à $\dot{f}$). Donc ici, en posant $s + \dot{s} = b$, b sera racine d'une équation de degré ν à coefficients dans C *irréductible dans* $\mathfrak{S}$. De plus $s + s^{-1} = b$, qui définit s relativement à $C(b) = C'$, ne sera pas résoluble dans C', sans quoi s serait racine d'une équation de degré ν à coefficients dans C. Mais $s + s^{-1} = b$, qui a une seule racine commune avec $f = 0$, est résoluble dans $C'(\upsilon) = C'(s)$. Donc υ *est hors de* C' (on voit que, *si* C' *est fini, ce cas ne peut se présenter que pour ν impair*), $\dot{s}$ est conjuguée de s relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$, et de même $\dot{a}_{ji}^1(s)$ l'est de $a_{ij}^1(s)$. Donc *la matrice de a^1, exprimée par les variables $z_1^1, \ldots, z_\tau^1, u_1^1, \ldots, u_\tau^1$ sera hermitienne relativement à* C', υ, $\dot{\upsilon}$.

Soient maintenant $l' = l = 1$ et $\dot{f} = f$ avec $\nu = 2\nu'$ [si $\mathfrak{S}$ est fini, ce cas ne peut se présenter, car C(s) contiendrait alors C(υ), puisque $\nu = 2\nu'$, et s vérifierait une équation de degré ν' à coefficients dans C(υ) contre l'hypothèse].

υ ne peut être dans C(s), car C(s) serait imprimitif (*E*., 48), et

$f(s)$ serait par suite réductible dans $C(\upsilon)$. Soit toujours

$$s + s^{-1} = b$$

l'équation irréductible dans $C(b) = C'$ que vérifie s (si ε n'a pas le module 2, on peut supposer $\zeta = 0$; alors $-\eta$ est non carré dans C', sans quoi υ serait dans $C(s)$, et $b^2 - 4$ de même, $s + s^{-1} = b$ étant irréductible dans C'; si ε a le module 2 on peut supposer $\eta = 1$ (cf. *E.*, 32, 33). Soit

$$\omega = \omega(\upsilon, s)$$

une fonction rationnelle de υ, s telle que

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \dot{\omega} = \omega(\dot{\upsilon}, \dot{s}) = \omega_2(\upsilon, s),$$
$$\omega_3 = \omega(\upsilon, \dot{s}) = \omega_3(\upsilon, s), \qquad \omega_4 = \omega(\dot{\upsilon}, s) = \omega_4(\upsilon, s)$$

soient distincts. On aura

$$C'(\upsilon, s) = C'(\omega_i)$$

(*E.*, 47). D'ailleurs l'équation irréductible dans C' que vérifie ω est de degré 4, sans quoi elle serait de degré 2 [$C(\omega)$ contient s qui est de degré 2 relativement à C'] et, s étant alors primitif dans $C'(\omega)$ (*E.*, 48), υ serait dans $C(s)$.

Les quatre conjuguées d'une fonction

$$\varphi(\upsilon, s) = \Phi[\omega(\upsilon, s)]$$

sont évidemment

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega_1) &= \varphi(\upsilon, s) = \varphi_1,\\
\Phi(\omega_2) &= \varphi(\dot{\upsilon}, \dot{s}) = \varphi_2(\upsilon, s) = \varphi_2,\\
\Phi(\omega_3) &= \varphi(\upsilon, \dot{s}) = \varphi_3(\upsilon, s) = \varphi_3,\\
\Phi(\omega_4) &= \varphi(\dot{\upsilon}, s) = \varphi_4(\upsilon, s) = \varphi_4.
\end{aligned}$$

Si donc $\varphi(\upsilon, s) = \Phi(\omega)$ est une fonction symétrique de $\omega_1(\upsilon, s)$ et de $\omega_2(\upsilon, s) = \omega_1(\dot{\upsilon}, \dot{s})$, on a

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = \varphi_4.$$

En particulier, la fonction

$$u(\omega) = \omega + \dot{\omega}$$

est racine d'une équation de degré $\leqq 2$ dans C', et de même $v(\omega) = \omega\dot{\omega}$. Comme d'ailleurs ω n'est pas dans $C'(u, v)$ (tout élément de ce champ, étant une fonction symétrique de ω, $\dot{\omega}$, annule un polynome du second degré irréductible dans C') et vérifie

$$\omega^2 - u\omega + v = 0,$$

il faut que u ou v soit de degré 2 (cf. *E.*, 47). Si donc U est un élément de degré 2 de $C'(u, v) = C'(U)$, $a^1_{ij}(s)$ et $a^1_{ji}(s) = \dot{a}^1_{ij}(\dot{s})$ sont conjugués et a^1 *est hermitienne relativement à* $C'(U)$, ω, $\dot{\omega}$.

On peut toujours prendre pour ω une fonction linéaire de υ, s (*E.*, 47). Mais il est plus simple ici de prendre $\omega = \upsilon s$, car l'égalité de deux des quatre valeurs

$$\upsilon s, \qquad \dot{\upsilon}\dot{s} = (\zeta - \upsilon)(b - s), \qquad \upsilon\dot{s} = \upsilon(b - s), \qquad \dot{\upsilon}s = (\zeta - \upsilon)s$$

constituerait une relation bilinéaire entre υ et s, et υ serait dans $C(s)$. On peut prendre $U = u$, et l'on a

$$u^2 + b\zeta u + \zeta^2 + \eta(b^2 - 4) = 0, \qquad \omega^2 - u\omega + \eta = 0.$$

On remarquera que toute substitution des z^1_i à coefficients dans

$$C'(\upsilon, s) = C'(\omega),$$

accompagnée des substitutions conjuguées par rapport à s seul (c'est-à-dire en laissant υ invariable et en remplaçant seulement s par les racines de f) opérées sur les $z^{1\rho}_i$, équivaut à une substitution des x^1_{ik} à coefficients dans $C(\upsilon)$, dont on obtient la conjuguée relativement à C, υ, $\dot{\upsilon}$ en remplaçant simplement υ par $\dot{\upsilon}$ (on le voit de suite en substituant une indéterminée à υ).

Si $l = l' = \nu = 1$ et $\dot{f} = f$, il n'y a plus de condition de réalité.

Pour la construction effective de $a^1_1 + a^1_h$, si $h > 1$, ou de a^1, si $h = 1$, les mêmes remarques générales sont à faire qu'au n° **19**. Après avoir déterminé la forme réduite de A^{1m}_{11} (en prenant $a^1_1 + a^1_h$ ou a^1 pour a et en revenant aux notations du n° **14**) dans $C(s)$, $C'(\upsilon)$ ou $C'(U)$ selon les cas, on opérera comme au n° **14**.

22. *Supposons maintenant que $\bar{a} = \alpha\dot{a}$ au lieu de $\bar{a} = \dot{a}$, les autres hypothèses restant les mêmes qu'au numéro précédent.* Posons

$$y_i = \dot{x}_i, \qquad y'_{ik} = \dot{x}'_{ik}, \qquad u_i'^{\rho} = \dot{z}_i'^{\rho} = \Sigma_k \dot{s}_{l\rho}^{k} x'_{ik},$$

et convenons que $z_{(j-1)}'^{\rho}$ désignera o ou $z_{j-1}'^{\rho}$ selon que $z_j'^{\rho}$ est ou n'est pas la première variable d'une suite. Alors

$$\alpha_l \dot{a}_l = \Sigma_{\rho j j'} s_{l'\rho} \dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})\, \dot{z}_j^{l\rho}(z_{j'}^{l'\rho} + z_{(j'-1)}^{l'\rho}),$$

et l'identification des coefficients de $x_{jk}^{l} x_{j'k'}^{l'}$ dans $\bar{a}$ et $\alpha\dot{a}$ donne

$$\Sigma_\rho a_{jj'}^{l'\rho}(s_{l'\rho}) s_{l'\rho}^{k'-k} = \Sigma_\rho s_{l'\rho}[\dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho}) + \dot{a}_{j,(j'+1)}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})] s_{l'\rho}^{k'-k},$$

$a_{i,(j'+1)}^{l\rho}$ désignant, comme au n° **20**, o ou $a_{i,j'+1}^{l\rho}$ selon que $u_{j'}^{l'\rho} = \dot{z}_{j'}^{l'\rho}$ est ou n'est pas la dernière variable d'une suite, d'où

$$(15) \qquad a_{jj'}^{l'\rho}(s_{l'\rho}) = s_{l'\rho}[\dot{a}_{jj'}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho}) + \dot{a}_{j,(j'+1)}^{l\rho}(\dot{s}_{l\rho})].$$

Si $l' \neq l$, cela détermine encore $a_{l'}$ par a_l.

Soit $l' = l = 1$, et d'abord $\dot{f} \neq f$.

D'après le n° **21**, υ est hors de $C(b) = C'$; $C'(\upsilon) = C'(s)$, et $s^{-1} = \dot{s}$ est conjuguée de s relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$.

Si $b + 2$ est carré ou si $b + 2$ et $b - 2$ sont non carrés, on peut regarder $\rho^{-1} = \dot{\rho}$ comme conjuguée de ρ relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$, et (15) s'écrit

$$(16) \qquad \rho^{-1} a_{jl}^{1}(\rho^2) = \dot{\rho}^{-1} \dot{a}_{ij}^{1}(\dot{\rho}^2) + \dot{\rho}^{-1} \dot{a}_{i,(j+1)}^{1}(\dot{\rho}^2).$$

Pour former $\rho^{-1} a^1$, que je prendrai pour a avec les notations du n° **16**, on peut opérer comme au même n° **16** (dans le cas $s\dot{s} = 1$) avec les modifications suivantes. Désignons par x, y, z des éléments de la forme $\rho^{-1}\xi$, ξ étant dans $C'(s)$ (les a_{kl}^{ij} sont tous de cette forme), et étendons, comme au n° **20**, la définition d'une forme hermitienne (C étant seulement remplacé par C').

$$i^{m-1} A_{11}^{1m} \qquad (i = s - \dot{s})$$

est encore hermitienne et se réduit à

$$(\rho + \dot{\rho}) \Sigma_1^q x_1^j y'_m.$$

Les $a^{jj}_{k,k+1}$ ont la forme particulière $x - \dot{x}$, et

$$\dot{a}^{jj}_{1m} = (-1)^{m-1} a^{jj}_{1m}.$$

En opérant comme au n° **20** (C étant toujours remplacé par C′), on arrive encore aux résultats du n° **16**, en donnant à ρ un sens convenable.

Si $b+2$ est non carré et $b-2$ carré, $\rho\dot{\rho} = -1$, (15) s'écrit

$$(17) \qquad \rho^{-1} a^{1}_{jl}(\rho^2) = -\dot{\rho}^{-1} a^{1}_{lj}(\dot{\rho}^2) - \dot{\rho}^{-1} a^{1}_{lj}(\dot{\rho}^2),$$

et l'on opérera comme après (14).

Soit $l' = l = 1$ et $\dot{f} = f$ avec $\nu' = 2\nu$ (ce cas ne se présente pas si ε est fini). Pour que ρ soit dans C′(s) il faut et suffit, on l'a vu, que $b+2$ ou $b-2$ soit carré. Donc, pour qu'il soit dans C′(υ, s) hors de C′(s) *il faut que $b+2$ et $b-2$ soient non carrés.* Cherchons les conditions suffisantes. Soit

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \upsilon$$

($\rho_i = \rho'_i + \rho''_i s$, ρ'_i et ρ''_i étant dans C′ et $\rho_1 \neq 0$). On aura

$$\rho^2 = s = \rho_0^2 - \rho_1^2 \eta + \upsilon \rho_1 (\zeta \rho_1 + 2\rho_0), \qquad \text{donc} \qquad \zeta\rho_1 + 2\rho_0 = 0.$$

Si donc C a le module 2, on arrive à une impossibilité, puisque alors $\zeta \neq 0$. Supposons que C n'ait pas le module 2. On aura, en posant $\frac{\zeta^2}{4} - \eta = \delta$ (non carré),

$$\rho_0 = -\frac{\zeta\rho_1}{2}, \qquad s = \delta\rho_1^2 = \delta[\rho_1'^2 - \rho_1''^2 + s\rho''_1(b\rho''_1 + 2\rho'_1)],$$

donc

$$\rho''_1 = \theta\rho'_1 \quad (\theta = \pm 1), \qquad \rho_1 = \rho'_1(1 + \theta s), \qquad \delta\rho_1'^2(b + 2\theta) = 1.$$

Ainsi, ***la condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit dans C′(υ, s) hors de C′(s) est que $\delta(b+2)$ ou $\delta(b-2)$ soit carré, C n'ayant pas le module 2.***

Si

$$\delta\rho_1'^2(b + 2\theta) = 1,$$

C n'ayant pas le module 2, on a

$$\rho = \rho'_1(1+\theta s)\left(\upsilon - \frac{\zeta}{2}\right), \qquad \rho\dot{\rho} = -\theta.$$

Supposons que $b+2$ et $b-2$ soient non carrés (donc C n'a pas le module 2) et que $\delta(b+2)$ et $\delta(b-2)$ soient également non carrés. Alors ρ n'est pas dans $C'(\upsilon, s)$, et l'on peut convenir que la conjuguée $\dot{\rho}$ de ρ est la racine carrée de $\dot{s}$ qui est égale à ρ^{-1}.

Pour préciser, on peut d'ailleurs observer que ρ et $\dot{\rho} = \rho^{-1}$ sont les racines de

$$\rho^2 - \varphi\rho + 1 = 0 \qquad (\varphi^2 = b+2),$$

et que $u(=\upsilon s + \dot{\upsilon}\dot{s})$ n'est pas dans $C'(\varphi) = C'_1$. Si en effet une racine v d'une équation $v^2 = cv - d$, irréductible dans C', est dans C'_1, c'est-à-dire si φ est de la forme $\varphi_0 + \varphi_1 v$ (φ_0 et φ_1 étant dans C' et $\varphi_1 \neq 0$), l'équation $\varphi^2 = b+2$ donne

$$\varphi_1 = \frac{-2\varphi_0}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi_0^2}{c^2}(c^2 - 4d) = b+2,$$

et cela est impossible dans les trois cas $v = s$, $v = \upsilon$, $v = u$ [si $v = u$, $c^2 - 4d = \delta(b^2 - 4)$]. Partons alors de $C'_1(u) = C''$ [je supposerai toujours que $\omega = \upsilon s$ et que $u = \omega + \dot{\omega} = \upsilon s + (b-s)(\zeta - \upsilon)$] comme au numéro précédent de C', et, en faisant jouer à ρ, ω les rôles respectifs de s, υ, adjoignons $\omega' = \rho\omega$. On remarquera d'abord que ω' n'est pas dans $C''(\rho)$, car si υs était de la forme $\omega_0 + \omega_1\rho$, ω_0 et ω_1 étant dans C'', ρ serait dans $C'(\upsilon, s)$ contre l'hypothèse. Les quatre valeurs

$$\omega'_1 = \rho\omega, \qquad \omega'_2 = \dot{\rho}\omega = (\varphi - \rho)(u - \omega),$$
$$\omega'_3 = \dot{\rho}\omega = (\varphi - \rho)\omega, \qquad \omega'_4 = \rho\dot{\omega} = \rho(u - \omega)$$

sont distinctes, puisque ω est hors de $C''(\rho)$; donc

$$C''(\omega') = C''(\rho, \omega),$$

et l'équation irréductible dans C'' que vérifie ω' est de degré 4, sans quoi elle serait de degré 2 [$C''(\omega')$ contient ρ] et, ρ étant alors primitif dans $C''(\omega')$, ω serait dans $C''(\rho)$. En posant alors

$$u' = \rho\omega + \dot{\rho}\dot{\omega},$$

on aura

$$u'^2 + \varphi u u' + u^2 + \eta(\varphi^2 - 4) = 0, \qquad \omega'^2 - u'\omega + \eta = 0.$$

Relativement à $C''(u')$, la conjuguée d'une fonction rationnelle $\Phi(\rho, \omega)$ à coefficients dans $C''(u')$ est $\Phi(\dot{\rho}, \dot{\omega})$: si par exemple $\Phi(\rho, \omega)$ est une fonction rationnelle $\Psi(\rho, \upsilon)$ à coefficients dans C',

$$\Phi(\dot{\rho}, \dot{\omega}) = \Psi(\dot{\rho}, \dot{\upsilon}).$$

Si donc $b + 2$ est carré (ce qui a toujours lieu si C *a le module* 2) *ou si $\delta(b - 2)$ est carré, ou si $b + 2$, $b - 2$, $\delta(b + 2)$, $\delta(b - 2)$ sont non carrés,* on a

$$\rho\dot{\rho} = 1,$$

(15) s'écrit sous la forme (16), et l'on peut opérer comme tout à l'heure après l'équation (16) [$C'(s)$ étant remplacé par $C'(\upsilon, s)$].

Si $b + 2$ et $\delta(b - 2)$ sont non carrés (alors C *n'a pas le module* 2), *et si $\delta(b + 2)$ ou $\delta(b - 2)$ est carré,* on a

$$\rho\dot{\rho} = -1,$$

(15) s'écrit sous la forme (17), et l'on peut opérer comme tout à l'heure après l'équation (17) [$C'(s)$ étant toujours remplacé par $C'(\upsilon, s)$].

Si $l' = l = \nu = 1$ et $\dot{f} = f = s \pm 1$, il n'y a plus de condition de réalité, et, après avoir déterminé les formes réduites de $A_{11}^{1'''}$ (en prenant a' pour a et les notations du n° **16**) dans $\mathfrak{S}$, on opérera comme au n° **16**.

25. *Supposons que $\mathfrak{S}$ soit le champ des nombres réels et que $\bar{a} = a$.* Alors ν est $\leqq 2$.

Soit d'abord $h > 1$ et $\nu = 1$. s est réel $\neq \pm 1$, et $\mathfrak{S}(s) = \mathfrak{S}$. $a_1 + a_h$ est symétrique réelle. Prenons-la sous la forme réduite obtenue au n° **14** pour $s^2 \neq 1$, et opérons la substitution qui consiste à prendre, dans $A^{2i-1,2i}$, le coefficient de x_k^{2i-1} $(k = 1, \ldots, m_{2i})$ pour $y_{m_{2i}-k+1}^{2i}$ (donc, dans $A^{2i,2i-1}$, celui de y_k^{2i-1} pour $x_{m_{2i}-k+1}^{2i}$) (*cf.* **17**). La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{2i-1,2i} \\ A^{2i,2i-1} & 0 \end{pmatrix}$$

sera alors réduite à sa transversale principale, et, en observant que xy se transforme par la substitution

$$(x, y; x+y, x-y)$$

en x^2-y^2, on voit que sa *caractéristique* [en l'assimilant à une forme quadratique ([1])] est m_{2i}.

Soit $h>1$, $\nu=2$. s est imaginaire et $|s|>1$ (sans quoi h serait égal à 1). $\mathfrak{S}(s)$ est le champ des nombres réels et complexes.

$$a_1 = a_1^1 + a_1^2$$

est hermitienne dans les variables

$$z_i^1, \qquad u_j^{h1}, \qquad z_i^2 = \dot{z}_i^1, \qquad u_j^{h2} = \dot{u}_j^{h1},$$

et sa caractéristique (calculée au n° **15** pour $s\dot{s} \neq 1$) est doublée lorsqu'on passe aux variables réelles.

Soit $h=\nu=1$, *donc* $s=\pm 1$.

Réduisons a_1 comme au n° **14**, en observant seulement que, par des substitutions de $\mathfrak{S}$, on pourra ramener A_{11}^{1m} toujours et seulement à une forme de même caractéristique. e_0 étant une valeur positive arbitraire et η l'indice d'inertie de A_{11}^{1m}, je supposerai a_{1m}^{jj} égal à e_0 pour $j \leqq \eta$, à $-e_0$ pour $j>\eta$. Sur la forme réduite ainsi obtenue opérons la substitution qui consiste à prendre, dans A^{jj}, le coefficient de $x_k^j \left[k=1, \ldots, \mathrm{E}\left(\frac{m_j}{2}\right)\right]$ pour $y_{m_j-k+1}^j$ (donc celui de y_k^j pour $x_{m_j\,k+1}^j$). On voit alors comme tout à l'heure que la caractéristique de A^{jj} est $\mathrm{E}\left(\frac{m_j}{2}\right)$.

Des observations précédentes il résulte immédiatement que, *c étant la caractéristique de a, on a*

$$(18) \qquad c \geqq \frac{1}{2}\Sigma m' + 2\Sigma \mathrm{E}\left(\frac{m''}{2}\right) + \Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{m'''}{2}\right),$$

([1]) Si une forme quadratique a réelle, à n variables, est réductible (par transformations linéaires réelles) à la forme

$$\Sigma_1^h x_i^2 - \Sigma_{h+1}^r x_i^2 \qquad (r \leqq n),$$

M. Lœwy appelle *caractéristique* de a le plus petit des deux nombres h, $r-h$ (*N. A. H.*, t. LXXI, n° 8, 1898).

m', m'', m''' parcourant les exposants des diviseurs élémentaires de $\alpha - s\varepsilon$ relatifs aux racines de module $\neq 1$ (réelles ou non), aux racines imaginaires de module 1, aux racines ± 1 respectivement. [D'ailleurs (18) n'est que la formule (7) appliquée à la forme hermitienne de même matrice que a et à des substitutions α, β réelles.]

Si l'on se donne c et une substitution n-aire vérifiant (18) (*outre les conditions déjà rencontrées*), *la méthode précédente fournit directement, conjointement à la forme canonique α de cette substitution et à la substitution corrélative β, une forme quadratique réduite a, de déterminant $\neq 0$, réelle dans les variables données et de caractéristique c, telle que $\beta a \bar{\alpha} = a$. On le voit comme au* n° **17** ([1]).

24. *Supposons maintenant $\mathfrak{S}$ fini d'ordre p^κ* (p premier). On peut alors se proposer de compter toutes les formes réduites de a ainsi que toutes les formes équivalentes (par changement de variables) à chaque forme réduite de a.

Prenons les notations du n° **14** dont la forme a désignera la forme $a_1^1 + a_h^1$ si $h > 1$, la forme a_1 si $h = 1$, la forme nommée primitivement a vérifiant $\bar{a} = \pm a$ ou $\bar{a} = \dot{a}$, la forme $\rho^{-1} a_1$ si $h = 1$, la forme primitive a vérifiant $\bar{\bar{a}} = \alpha a$ ou $\bar{a} = \alpha \dot{a}$ (en supposant, ce qui est permis, que les z_j^1, z_j^{h1}, u_j^1, u_j^{h1} si $h > 1$, et les variables $z_j^1, \ldots, z_j^\nu$, $u_j^1, \ldots, u_j^\nu$ si $h = 1$, soient les variables x_j^k, y_j^k de la forme réduite). Il s'agira d'abord de déterminer dans chaque cas les types réduits distincts de A_{11}^{1m} (en partant de chacun d'eux on obtient un seul type réduit de a), puis le nombre M_{mq} des formes équivalentes à chacun de ces types réduits de A_{11}^{1m} : le nombre $\mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}, \ldots)$ des formes équivalentes à chaque type réduit de a est donné par la formule

$$(19) \qquad \mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots) = M_{mq} \pi^{N_1} \mathfrak{N}(Q_2, m_{Q_2}; \ldots),$$

où N_1 est donné par (5) si $h > 1$, et par (6) si $h = 1$.

Soit d'abord $h > 1$. A_{11}^{1m} peut toujours se réduire à la forme

$$\Sigma_1^q (x_1^{2j-1} y_m^{2j} + c x_1^{2j} y_m^{2j-1}),$$

([1]) *Cf.* Lœwy, *loc. cit.*

c étant égal à $(-1)^{m-1}$ si $\bar{a}=a$ et si $\bar{a}=\dot{a}$, à $(-1)^m$ si $\bar{a}=-a$, à $(-1)^{m-1}s^{-1}$ si $\bar{a}=\alpha a$, à $(-1)^{m-1}\dot{s}^{-1}$ si $\bar{a}=\alpha\dot{a}$. Les x_1^{2j-1} sont ici cogrédients aux y_m^{2j-1} et les x_1^{2j} aux y_m^{2j}. Donc la transformée de A_{11}^{1m} par une substitution linéaire est entièrement déterminée par celle de

$$\Sigma_1^q x_1^{2j-1} y_m^{2j}$$

dont toutes les transformées s'obtiennent en faisant subir aux x_1^{2j-1} seuls toutes les substitutions possibles, puisque les substitutions que subissent les x_1^{2j-1} et les y_m^{2j} sont indépendantes. En désignant par $L(n, p^\lambda)$ le groupe des substitutions n-aires à coefficients dans le champ d'ordre p^λ, on voit que M_{mq} est ici l'ordre de $L(q, \pi^\nu)$.

Soit $h=1$, $\nu=2\nu'$. A_{11}^{1m} se réduit alors, à un facteur près, à $\Sigma_1^q x_1^j y_m^j$, y_m^j étant cogrédient à $\dot{x}_1^j$: le sens du symbole $\dot{x}$ relativement à x variant ici suivant les cas, d'après ce qui a été dit précédemment. En appelant Γ le champ des quantités de la forme $x+\dot{x}$, il est clair que M_{mq} est l'indice dans $L(q, \pi^\nu)$ du groupe des substitutions à coefficients dans Γ qui laissent $\Sigma_1^q x_1^j \dot{x}_1^j$ inaltérée, ou, plus brièvement, du groupe de cette forme dans Γ. L'ordre de ce groupe est

$$\pi^{\frac{q(q-1)}{2}} \Pi_1^q [\pi^i - (-1)^i] \quad (^1).$$

Dans tous les cas suivants, M_{mq} étant de même l'indice dans $L(q, \pi^\nu)$ du groupe de chaque forme réduite de A_{11}^{1m} (dans un champ analogue à Γ), je me bornerai à indiquer ces formes réduites dont les groupes sont connus.

Soit $h=\nu=1$ *et d'abord* $\bar{a}=\pm a$ *avec* $p>2$. *Si m est pair avec* $\bar{a}=a$, *ou impair avec* $\bar{a}=-a$, A_{11}^{1m} se ramème à la forme

$$\mathfrak{F}=\Sigma_1^{q'}(x_1^{2j-1}y_m^{2j}-x_1^{2j}y_m^{2j-1}) \qquad (q=2q').$$

Si m est impair avec $\bar{a}=a$, *ou pair avec* $\bar{a}=-a$, A_{11}^{1m} se ramène à

$$F_c=\Sigma_1^{q-1}x_1^j y_m^j + c x_1^q y_m^q$$

($c=1$ ou N, N étant un non-carré quelconque).

---

(1) *Voir* DICKSON, *M. A.*, t. LII, p. 561-581 (1899); *Linear Groups*, p. 134 (1901); JORDAN, *J. M.*, 1905, p. 247.

Toute substitution permutable à α étant le produit $\xi\gamma$ d'une substitution ξ du groupe des sous-séries par une substitution γ du groupe des additions, et les substitutions ξ fournissant évidemment à elles seules les mêmes transformées de A_{11}^{1m} que les substitutions $\xi\gamma$, aucun changement de variables laissant α inaltérée (α étant donnée, on ne peut en employer d'autres) ne peut transformer l'un dans l'autre les types réduits obtenus pour a. *Donc, si* $h\nu > 1$, *il y a pour* a *un seul type réduit; si* $h = \nu = 1$ *il y en a* 2^ι *distincts,* ι *étant le nombre des* m_i *impairs.*

Lorsque $\bar{a} = a$ avec $p > 2$ et $h\nu \geqq 1$, on peut assimiler a à une forme quadratique et chercher quelle est sa classe. Cela revient au calcul du déterminant de a relativement à x_{ik}^l, y_{ik}^l (aux facteurs carrés près) : ce calcul sera fait au numéro suivant.

Soient toujours $h = \nu = 1$ *et* $\bar{a} = \pm a$, *mais avec* $p = 2$. A_{11}^{1m} se ramène (¹), si $q = 2q' + 1$, au type

$$\Phi_1 = x_1^1 y_m^1 + \Sigma_1^{q'}(x_1^{2i} y_m^{2i+1} + x_1^{2i+1} y_m^{2i}),$$

et, si $q = 2q'$, à l'un des deux types distincts

$$\Phi_0 = \Sigma_1^{q'}(x_i^{2i-1} y_m^{2i} + x_1^{2i} y_m^{2i-1}), \quad \Phi_2 = x_1^1 y_m^1 + x_1^2 y_m^2 + \Sigma_2^{q'}(x_1^{2i-1} y_m^{2i} + x_1^{2i} y_m^{2i-1}).$$

Si m est impair $= 2\mu - 1$ et > 1, $a_{\mu\mu}^{jj}$ est nul, d'après (1) et (2), en sorte que $q = 2q'$ ($|A_{11}^{1m}|$ est $\neq 0$) et que A_{11}^{1m} se ramène à Φ_0. *Si* $m = 1$ *ou si m est pair,* A_{11}^{1m} se ramène à Φ_1 pour $q = 2q' + 1$, à Φ_0 ou à Φ_2 pour $q = 2q'$.

Le nombre des types réduits auxquels on peut ramener a (*par des substitutions permutables à* α) *est donc* 1 *si* $h\nu > 1$, *et, si* $h = \nu = 1$, 2^ι, ι *étant le nombre des sous-séries contenant un nombre pair de suites formées elles-mêmes d'un nombre de variables pair ou égal à* 1.

En revenant aux variables x_{ik}^l, y_{ik}^l, on voit directement, d'après (8) et (9), que la diagonale de a_1 est toujours nulle sauf si $h = \nu = m = 1$; c'est donc seulement alors que, pour $q = 2q'$, a_1 peut être de la seconde classe (c'est-à-dire du type analogue à Φ_2).

(¹) *Voir* JORDAN, *J. M.*, 1905, p. 268-269.

Soit $h = \nu = 1$ avec $\bar{a} = \alpha a$ et d'abord $p > 2$. Si $s = t = 1$ avec m pair, ou si $s = t = -1$ avec m impair, A_{11}^{1m} se ramène à $\mathfrak{I}$. *Si $s = t = 1$ avec m impair, ou si $s = t = -1$ avec m pair,* A_{11}^{1m} se ramène à F_c.

Soit $p = 2$. Si $s = t = 1 (= \pm 1)$ avec m pair, A_{11}^{1m} se ramène à $\mathfrak{I}$. *Si $s = t = 1$ avec m impair,* A_{11}^{1m} se ramène à Φ_1 pour $q = 2q' + 1$, à Φ_0 ou à Φ_2 pour $q = 2q'$.

Donc, si $h\nu > 1$, il y a, pour $p \geqq 2$, un seul type réduit. Si $h = \nu = 1$ et $p > 2$, il y en a 2^ι, ι étant le nombre des m_i impairs pour $s = t = 1$, le nombre des m_i pairs pour $s = t = -1$. Si $h = \nu = 1$ et $p = 2$, il y en a 2^ι, ι étant le nombre des sous-séries contenant un nombre pair de suites formées elles-mêmes d'un nombre impair de variables.

Soit $h = \nu = 1$ avec $\bar{a} = \dot{a}$ ou $\bar{a} = \alpha\dot{a}$.

A_{11}^{1m} se ramène alors à

$$i^{1-m}\Sigma_1^q x_1^j y_m^j \qquad (i = \upsilon - \dot{\upsilon}),$$

les y_m^j étant cogrédients aux $\dot{x}_1^j$ ($\dot{x}$ désignant la conjuguée de x relativement à C', υ, $\dot{\upsilon}$).

25 (¹). Pour déterminer la classe de a lorsque $\bar{a} = a$ et $p > 2$, il reste à calculer, aux facteurs carrés près, le déterminant D (relativement aux x_{jk}^l, y_{jk}^l) de $a_1 + a_h$, si $h > 1$, ou de a_1, si $h = 1$.

Si $h > 1$, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

(avec les notations du numéro précédent) est $(-1)^m$, comme on le voit de suite en échangeant les lignes équidistantes des extrêmes. On a donc, relativement aux variables z_j^1, u_j^{h1},

$$|a_1^1 + a_1^h| = (-1)^\tau, \qquad |a_1 + a_h| = (-1)^{\tau\nu}.$$

Lorsqu'on prend les variables x_{jk}^l, y_{jk}^l, ce déterminant est multiplié

(¹) *Cf.* JORDAN, *J. M.*, 1905.

par $(\Delta\dot{\Delta})^{2\tau}$, Δ étant le déterminant d'ordre ν dont la $\rho^{\text{ième}}$ ligne est 1, s_ρ, $s_\rho^2, \ldots, s_\rho^{\nu-1}$, et $\dot{\Delta}$ étant formé avec les $s_{h\rho} = s_\rho^{-1}$ comme Δ avec les s_ρ. Δ^2, produit des $(s_\rho - s_{\rho'})^2$, est dans $\mathfrak{S}$ et est non carré (sa racine Δ, fonction non symétrique des s^{π^j}, est hors de $\mathfrak{S}$); de même $\dot{\Delta}^2$. Donc $(\Delta\dot{\Delta})^2$ est carré, et $D = (-1)^{\tau\nu}$ à un facteur carré près.

Si $h = 1$ avec $\nu = 2\nu'$, $|A^{11}|$ (avec les notations du numéro précédent) est égal à

$$(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} i^{m(1-m)} = (-i^2)^{\frac{m(1-m)}{2}} \qquad (i = s - s^{-1}).$$

On a donc, relativement aux z_j^1, u_j^{h1},

$$\Pi_1^\nu |a_\rho| = \Pi_1^\nu i_\rho^{2M} \qquad \left[i_\rho = s_\rho - s_\rho^{-1},\ M = \Sigma \frac{m_k(1-m_k)}{2}\right]$$

ou

$$\Pi_1^\nu |a_\rho| = \Pi_1^{\nu'} i_\rho^{4M}.$$

Donc

$$\Pi_1^\nu |a_\rho| = 1$$

à un facteur carré près. On voit d'ailleurs, en rangeant les z dans l'ordre $z_1^1, \ldots, z_\tau^1, z_1^2, \ldots, z_\tau^2, \ldots, z_1^\nu, \ldots, z_\tau^\nu$ et en faisant passer les $\tau\nu'$ dernières colonnes de a_1 avant les $\tau\nu'$ premières (a^ρ contient, avec $z_1^\rho, \ldots, z_\tau^\rho$, les variables $u_1^{\nu'+\rho}, \ldots, u_\tau^{\nu'+\rho}$ et non les variables correspondantes $u_1^\rho, \ldots, u_\tau^\rho$), que

$$|a_1| = (-1)^{\tau\nu'} \Pi_1^\nu |a^\rho|.$$

En passant aux x_{jk}^l, y_{jk}^l, Δ ayant le même sens que tout à l'heure, on a donc, à un facteur carré près,

$$D = \Delta^{2\tau}(-1)^{\tau\nu'},$$

Δ^2 étant non carré.

Soit $h = \nu = 1$.

On voit d'abord, avec les notations du numéro précédent, que, si m est pair, le déterminant de

$$\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{11} \end{pmatrix}$$

est égal à 1, et que, si m est impair,

$$|A^{jj}| = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \quad (j < q), \qquad |A^{qq}| = c^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Donc, en désignant par d_r l'unité si m_{Q_r} est pair, et la quantité analogue à $(-1)^{\frac{m(m-1)q}{2}} c^m$, relative à $\mathfrak{A}_{rr}$, si m_{Q_r} est impair, il est clair que

$$D = \Pi d_r.$$

26. Quand $\mathfrak{S}$ a le module 2, on peut se poser un problème voisin du précédent, celui de trouver toutes les formes quadratiques $a = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ telles que la substitution α conserve a. On ne peut plus ici assimiler a à une matrice (1). Mais on peut opérer comme au n° **19** jusqu'à la détermination de a' exclusivement, sauf que u'^{ρ}_j doit être remplacé par z'^{ρ}_j, et que, pour $h > 1$, a^{ρ}_h se confond par définition avec a^{ρ}_1, et, pour $h = 1$, $\nu = 2\nu'$, $a^{\nu'+\rho}_1$ avec a^{ρ}_1.

Si h est > 1 ou si $h = 1$ avec $\nu > 1$, il est clair que a', qui est encore bilinéaire, se détermine comme au n° **19**.

Soit donc $h = \nu = 1$.

Désignons ici par a, en revenant aux notations du n° **3**, la forme

$$\Sigma a^{ij}_{kl} x^i_k x^j_l,$$

hermitienne relativement à $\mathfrak{S}$ et aux racines υ, $\bar{\upsilon}$ d'une équation

$$\upsilon^2 = \zeta\upsilon + 1$$

irréductible dans $\mathfrak{S}$ (2) (donc $\zeta \neq 0$), dont on déduit a' en remplaçant

---

(1) *Cf.*, pour ce qui suit, JORDAN, *J. M.*, 1905; DICKSON, *Transactions of the Am. Math. Soc.*, 1906, p. 285-292.

(2) Si $\mathfrak{S}$ est fini, on peut prendre ζ dans $\mathfrak{S}$ (*E.*, 33). Si $\mathfrak{S}$ est infini il suffit de faire jouer le rôle de $\mathfrak{S}$ au champ $\mathfrak{S}(\zeta)$, ζ étant une indéterminée. En effet, si

$$x^2 + \zeta x + 1 = 0$$

avait une racine de la forme $\frac{u}{v}$ où

$$u = \Sigma u_i \zeta^i, \qquad v = \Sigma v_i \zeta^i \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

les u_i, v_i étant dans $\mathfrak{S}$ (cf. *E.*, 46) et α_0, β_0 n'étant pas tous deux nuls, l'annulation des coefficients de ζ^0 et de ζ^1 dans $u^2 + \zeta uv + v^2$ donnerait

$$u_0^2 + v_0^2 = 0 \qquad (\text{ou } u_0^2 = v_0^2, \text{ d'où } u_0 = v_0) \qquad \text{et} \qquad u_0^2 = 0.$$

On remarquera que, si $\mathfrak{S}$ est fini d'ordre 2, ζ est égal à 1 et qu'alors les deux

x^i_l par x^j_l. Je poserai

$$a^{ij}_{kl} = c^{ij}_{kl} + d^{ij}_{kl}\upsilon,$$

si a^{ij}_{kl} est au-dessus de la diagonale de a ou sur cette diagonale, et

$$a^{ij}_{kl} = c^{ij}_{kl} + d^{ij}_{kl}\dot{\upsilon} \qquad (c^{ij}_{kl} = c^{ji}_{lk},\ d^{ij}_{kl} = d^{ji}_{lk},\ d^{ii}_{kk} = 0)$$

s'il est au-dessous, les c et les d étant dans $\mathfrak{S}$ (j'appellerai désormais les éléments de $\mathfrak{S}$ *réels*). Il est clair que, si l'on ne considère comme ici que a', c^{ij}_{kl} peut être négligé sauf si $i = j$ avec $k = l$, et que l'échange de υ, $\dot{\upsilon}$ revient à augmenter c^{ij}_{kl} de $d^{ij}_{kl}\zeta$. Je poserai encore

$$a' = b = \Sigma b^{ij}_{kl} x^i_k x^j_l$$

$(b^{ij}_{kl} = a^{ij}_{kl} + a^{ji}_{lk}$ sauf si $i = j$ avec $k = l$; $b^{ii}_{kk} = a^{ii}_{kk})$;

$$B^{ij} = \Sigma_{kl} b^{ij}_{kl} x^i_k x^j_l \qquad (k = 1, \ldots, m_i;\ l = 1, \ldots, m_j);$$

$$B^{kl}_{\rho\sigma} = \Sigma_{ij} b^{ij}_{kl} x^i_k x^j_l,$$

i parcourant les nombres

$$Q_{\rho-1} + 1, \quad \ldots, \quad Q_\rho,$$

et j les nombres

$$Q_{\sigma-1} + 1, \quad \ldots, \quad Q_\sigma \qquad (k \leq m_{Q_\rho},\ l \leq m_{Q_\sigma});$$

$$\mathfrak{B}_{\rho\sigma} = \Sigma_{kl} B^{kl}_{\rho\sigma} \qquad (k = 1, \ldots, m_{Q_\rho};\ l = 1, \ldots, m_{Q_\sigma}).$$

J'entendrai enfin par *discriminant d'une forme hermitienne*

$$v = \Sigma v_{ik} x_i x_k$$

le déterminant $|v|'$ qui se déduit de $|v| = |v_{ik}|$ en y remplaçant v_{ii} par o et v_{ik} par $v_{ik} + v_{ki}$; si $w = \Sigma w_{ik} x_i x_k$ est une forme quadratique à coefficients dans $\mathfrak{S}$, $|w|$ désignera son discriminant, c'est-à-dire le déterminant de ses dérivées secondes : ainsi

$$|b| = |a|'.$$

---

types canoniques d'une forme quadratique $b = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ (*E.*, 45) se distinguent, lorsqu'on l'assimile à la forme hermitienne

$a = \Sigma a_{ik} x_i \dot{x}_k (a_{ii} = b_{ii},\ a_{ik} = c_{ik} + b_{ik}\upsilon,\ a_{ki} = \dot{a}_{ik}$, les c_{ik} restant indéterminés)

par ce fait que $|a|$ est nul pour l'un et non pour l'autre.

Il est clair que, si φ est dans $\mathfrak{S}$ et si $\varphi = (\varphi_{ik})$ est une substitution réelle des x_i, $\dot{\varphi}\varphi\bar{\varphi} = \varphi\varphi\ddot{\varphi}$ donne, en y remplaçant $\dot{x}_i$ par x_i, le même résultat que la substitution φ dans $\Sigma\varphi_{ik}x_i x_k$.

Formons la condition pour que l'accroissement de b, quand on opère sur les x_i la substitution α, soit nul. En général, le terme en $x^i_{k-1}x^j_{l-1}$ de cet accroissement figurera dans les seuls accroissements de $b^{ij}_{kl}x^i_k x^j_l$ de $b^{ij}_{k,l-1}x^i_k x^j_{l-1}$ et de $b^{ij}_{k-1,l}x^i_{k-1}x^j_l$, et l'on aura

$$(20)\qquad b^{ij}_{k,l-1}+b^{ij}_{k-1,l}+b^{ij}_{kl}=0\qquad (k=2,\ldots,m_i+1;\ l=2,\ldots,m_j+1),$$

d'où

$$(21)\qquad d^{ij}_{k,l-1}+d^{ij}_{k-1,l}+d^{ij}_{kl}=0\qquad (k=2,\ldots,m_i+1;\ l=2,\ldots,m_j+1),$$

en regardant b^{ij}_{kl} et d^{ij}_{kl} comme nuls pour $k>m_i$ ou $l>m_j$. Mais il y a trois exceptions exactement : pour $j=i$, $l=k$, les deux termes $b^{ij}_{k,l-1}x^i_k x^j_{l-1}$, $b^{ij}_{k-1,l}x^i_{k-1}x^j_l$ ne sont pas distincts; pour $j=i$, $l=k+1$, l'accroissement du premier n'a pas de terme en $x^i_{k-1}x^i_k$; pour $j=i$, $l=k-1$, l'accroissement du second n'a pas de terme en $x^i_{k-1}x^i_{k-2}$. Ces trois cas exceptionnels donnent respectivement

$$b^{ii}_{kk}=b^{ii}_{k,k-1}\quad (k\geqq 2),\qquad b^{ii}_{k,k+1}=b^{ii}_{k-1,k+1}\quad (k\geqq 2),\qquad b^{ii}_{k,k-1}=b^{ii}_{k,k-2}\quad (k\geqq 3),$$

équations qui se réduisent à

$$(22)\qquad b^{ii}_{kk}=b^{ii}_{k,k-1}\qquad (k\geqq 2),\qquad b^{ii}_{k,k-1}=b^{ii}_{k,k-2}\qquad (k\geqq 3),$$

d'où

$$(23)\qquad \begin{cases} a^{ii}_{kk}=a^{ii}_{k-1,k}+a^{ii}_{k,k-1}=d^{ii}_{k,k-1}\zeta & (k\geqq 1),\\ a^{ii}_{kk}=a^{ii}_{k-2,k}+a^{ii}_{k,k-2}=d^{ii}_{k-2,k}\zeta & (k\geqq 2).\end{cases}$$

Ainsi (20) *et* (21) *subsistent tant qu'un des trois termes des premiers membres n'est pas de la forme* b^{ii}_{kk} *ou* d^{ii}_{kk}. Donc, pour $j\neq i$, (21) donne les mêmes conséquences que précédemment. Pour $j=i$, elle montre de même, jointe à $d^{ii}_{kk}=0$, que les d^{ii}_{kl} situés au-dessous de la transversale principale de A^{ii} sont nuls. (23) montre ensuite que les a^{ii}_{kk} situés au-dessous de la transversale principale sont tous nuls si m_i est impair, tous nuls sauf le plus voisin de cette transversale si m_i est pair.

27. *Soit* m_i *impair* $=2\mu_i-1$. D'après la seconde équation (23) où l'on fait $k = \mu_i + 1$, $d^{ii}_{\mu_i-1,\mu_i+1}$ est nul. Donc, d'après (21), tous les éléments de la transversale principale, sauf $a^{ii}_{\mu_i\mu_i}$, sont nuls. De même, si a^{ii}_{kk} est $\neq 0$ pour $k = l$ et nul pour $k > l$, tous les éléments situés au-dessous de la transversale T_l passant par a^{ii}_{ll} sont nuls comme aussi ceux de T_l autres que a^{ii}_{ll} [on peut encore supposer les éléments de T_l réels et égaux à a^{ii}_{ll}; c'est T_l que j'appellerai ici *caractéristique* (*cf.* **3**)]. On voit *sur la figure,* d'après (21) et (23), que A^{ii} est complètement déterminée par $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu_i\mu_i}$.

Les A^{ij} d'une même ligne ou colonne de $\mathcal{A}_{11}$ (considérée comme matrice des A^{ij}) ne sont pas toutes de rang $< m$, sans quoi a aurait une ligne ou une colonne nulle, et $|a|'$ serait nul (on peut même affirmer ici, pour la même raison, qu'*une des* A^{ij} *où* i *est* $\neq j$ *est de rang* m). En raisonnant alors comme au nº **4**, on voit que

$$|a| = \Pi \mathcal{A}_{pp},$$

que

$$|\mathcal{A}_{11}| = |A^{1m}_{11}|^{m-1} |A^{\mu\mu}_{11}|,$$

que

$$|a|' = \Pi |\mathcal{A}_{pp}|'$$

et que

$$|\mathcal{A}_{11}|' = (|A^{1m}_{11}|')^m = |B^{1m}_{11}|^m.$$

Or $|A^{1m}_{11}|'$ est un déterminant gauche d'ordre q. *Donc q est pair* $= 2q'$.

Soit m_i pair $= 2\mu_i$.

Si a^{ii}_{kk} est $\neq 0$ pour $k = l$ et nul $k > l$, la transversale caractéristique (au même sens que dans le cas de m_i impair) est celle passant par a^{ii}_{ll}. Il est clair aussi que A^{ii} est complètement déterminée par $a^{ii}_{11}, \ldots, a^{ii}_{\mu_i+1,\mu_i+1}$ (ce dernier élément peut ici être $\neq 0$). Comme précédemment, on voit que

$$|a|' = \Pi |\mathcal{A}_{pp}|'$$

et que

$$|\mathcal{A}_{11}|' = |B^{1m}_{11}|^m.$$

Les réductions ultérieures dépendent des différents types canoniques de B^{1m}_{11} dans $\mathfrak{S}$.

28. *Supposons désormais $\mathfrak{S}$ d'ordre 2^κ.*

Soit d'abord $m_i = 2\mu_i - 1$ ($\mu_1 = \mu$), donc $q = 2q'$ (**27**).

Par une substitution réelle du groupe des sous-séries, on peut réduire $B_{11}^{\mu\mu}$ à l'un des deux types canoniques contenus dans la forme

$$F_\theta = \theta[(x_\mu^1)^2 + (x_\mu^2)^2] + \Sigma_1^{q'} x_\mu^{2k-1} x_\mu^{2k},$$

θ étant égal à o ou à un élément définissant (*E.*, 27) arbitraire λ de $\mathfrak{S}$, tel que

$$z^2 + z + \lambda$$

soit irréductible dans $\mathfrak{S}$ (*E.*, 45; j'appellerai *premier type* celui où $\theta = 0$, *second type* celui où $\theta = \lambda$, et je dirai qu'une forme quadratique est de la *première* ou de la *seconde classe* suivant qu'elle est réductible au premier ou au second type). A^{12} et A^{21}, A^{34} et A^{43}, ..., $A^{q-1,q}$ et $A^{q,q-1}$ étant donc seules de rang m parmi les A^{ij} où i et j sont différents et $\leqq q$, on pourra, par des additions de transversales à multiplicateurs réels jointes à des additions symétriques par rapport à la diagonale principale, annuler tous les autres A^{ij} des $\mathcal{A}_{1i}$ et des $\mathcal{A}_{i1}$, sauf, si $\theta = \lambda$, A^{11} et A^{22} (en observant qu'on peut supposer la transversale caractéristique de chaque A^{ii} formée d'éléments réels et égaux). Par des additions de même espèce, on réduira ensuite $A^{2i-1,2i}(i \leqq q')$ à la forme bilinéaire type (**6**) multipliée par $\upsilon\zeta^{-1} = \xi$.

Si $\theta = 0$, la réduction est achevée. Si $\theta = \lambda$, par des additions analogues de la transversale principale de A^{12} aux transversales de A^{11} (la transversale de A^{22} qui s'ajoutera en même temps aux transversales de A^{21} et de A^{12} pourra être négligée, puisqu'elle n'introduit que les éléments réels), on annulera a_{kk}^{11} pour $k < \mu$. Alors tous les d_{kl}^{11}, où k et l sont $< \mu$, sont nuls, et, d'après (21) et (23), la matrice des a_{kl}^{11} où $k = 1, \ldots, \mu$ et $l = \mu, \ldots, m$ est, à l'exception de $a_{\mu\mu} = 1$, le produit par ξ d'une matrice du second type (**6**) (en négligeant toujours les parties réelles des éléments non diagonaux). A^{22} se ramène à la même forme que A^{11}.

Soit

$$a_2^m = \Sigma A^{ij} \qquad (i, j = 1, 2), \qquad\qquad b_2^m = \Sigma B^{ij} \qquad (i, j = 1, 2).$$

Prenons dans b_2^m le coefficient de x_1^1 pour x_m^2, puis celui de x_1^2 pour x_1^m, et appliquons la même substitution à a_2^m. Soient b_2^{m-2} et a_2^{m-2} les formes qui se déduisent alors de b_2^m, a_2^m quand on annule x_1^1, x_1^2, x_m^1, x_m^2 : la matrice a_2^{m-2} se déduit de a_2^m en supprimant la première ligne et la première colonne de chaque A^{ij} où $i, j = 1, 2$, et

$$b_2^m = x_1^1 x_m^2 + x_1^2 x_m^1 + b_2^{m-2}$$

(a_2^{m-2} et b_2^{m-2} n'ont plus les formes réduites analogues à celles de a_2^m, b_2^m). En répétant l'opération, on ramène b_2^m à la forme

$$R + x_\mu^1 x_\mu^2 + \theta[(x_\mu^1)^2 + (x_\mu^2)^2],$$

R étant une somme de rectangles où chaque variable autre que x_μ^1 ou x_μ^2 figure une fois et une seule. Cette transformation se faisant quel que soit θ et pouvant par suite se faire sur

$$b_4^m = \Sigma B^{ij} \qquad (i, j = 3, 4), \qquad \ldots,$$

on voit que $\mathfrak{B}_{11}$ est de la même classe que F_θ (avec mq variables).

Remarque. — En écrivant x_{2k-1}, x_{2k}, y_{2k-1}, y_{2k} respectivement pour

$$x_{\mu-k}^2, \quad x_{\mu-k}^1, \quad x_{\mu+k}^1, \quad x_{\mu+k}^2 \qquad (k = 1, \ldots, \mu - 1),$$

x_0 pour x_μ^1, y_0 pour x_μ^2, l'action du changement de variables effectué sur les x_i^1, x_i^2 est de la forme

$$(24) \qquad X_i = x_i, \qquad Y_i = y_i + \varphi_i(y_0, \ldots, y_{i-1}, x_0, \ldots, x_{2\mu-2}),$$

le changement inverse ayant la même forme. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} X_i & X_i + X_{i+2} \quad (i = 0, \ldots, 2\mu - 4) \\ Y_0 & Y_0 + X_1 \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_0, \ldots, Y_{i-1}, X_0, \ldots, X_{2\mu-2}) \quad (i = 1, \ldots, 2\mu - 2) \end{vmatrix},$$

$X_{2\mu-3}$ et $X_{2\mu-2}$ étant conservés.

En écrivant de même x_k pour x_k^{2l+1} ($l \geq 1$) et y_{k+1} pour x_{m-k}^{2l+2}, l'action du changement de variables effectué sur les x_k^{2l+1} et les x_k^{2l+2} a la forme

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_i = x_i, \qquad Y_i = y_i + \varphi_i(y_{i+1}, \ldots, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m-2), \\ \qquad\qquad Y_{m-1} = y_{m-1}, \qquad Y_m = y_m, \end{array} \right.$$

le changemeut inverse ayant la même forme. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(27)\qquad \left| \begin{array}{lll} X_i & X_i + X_{i-1} & (i = 2, \ldots, m) \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_{i+1}, \ldots, Y_m) & (i = 1, \ldots, m-1) \end{array} \right|,$$

X_1 et Y_m étant conservés.

29. *Soit* $m_i = 2\mu_i\,(\mu_1 = \mu)$, *et d'abord* $q = 2q'$.

On peut alors ramener B_{11}^{1m} à la forme Φ_0 ou à la forme Φ_2 du nº **24** (où l'on remplace chaque y_m^k par x_m^k).

Si B_{11}^{1m} *se ramène à la forme* Φ_0, les d_{1m}^{ii} et, par suite, d'après (21) et (23), les $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii}$ sont tous nuls. On pourra donc opérer comme dans le cas de m impair pour annuler tous les A^{ij} autres que les $A^{2i-1,2i}(i \leqq q')$ qu'on ramènera à la forme type (**6**) multipliée par $\xi = \upsilon\zeta^{-1}$ et pour vérifier que B_{11} est, comme B_{11}^{1m} de la première classe. La forme du changement de variables effectué pour canoniser $\mathfrak{B}_{11}$ et l'action de α sur les nouvelles variables sont données par (26) et (27), t pouvant ici prendre la valeur o.

30. *Si* B_{11}^{1m} *se ramène à la forme* Φ_2, d_{1m}^{ii} et $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii}$ sont encore nuls pour $i > 2$; mais, pour $i \leqq 2$, $d_{1m}^{ii} = \xi$ et $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii} = 1$ [d'après (21) et (23)]. On pourra opérer comme précédemment pour annuler d'abord tous les A^{ij} autres que A^{11} et A^{22} où l'un des indices i, j est $\leqq 2$ (*en négligeant la partie réelle des éléments non diagonaux;* ainsi la présence de $a_{\mu+1,\mu+1}^{ii} \neq 0$ et le fait que $a_{kl}^{ii} = a_{lk}^{ii}$ n'altèrent pas les résultats), puis tous les A^{ij} où i ou j est $\geqq 3$, sauf les $A^{2k-1,2k}$ et les $A^{2k,2k-1}$ où $k = 1, \ldots, q'$ qu'on réduira à la forme type (**6**).

Par une addition de la $m^{\text{ième}}$ transversale de $A^{ij}(i = 1, 2)$ à la $(m-1)^{\text{ième}}$ jointe à l'addition symétrique, on peut ramener $a_{\mu\mu}^{ii}$ à $a_{\mu\mu}^{ii} + t + t^2$, t étant quelconque dans $\mathfrak{S}$. Si donc $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{ii}$ est réductible dans $\mathfrak{S}$, on pourra ainsi annuler $a_{\mu\mu}^{ii}$. Si $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{ii}$ est irréductible, on pourra réduire $a_{\mu\mu}^{ii}$ à une quelconque des $2^{\kappa-1}$ valeurs v telles que $z^2 + z + v$ soit irréductible dans $\mathfrak{S}$ (*E.*, 40, 45). En toute hypothèse, et sans altérer $a_{\mu\mu}^{ii}$, on pourra, par des additions analogues, annuler successivement $a_{\mu-1,\mu-1}^{ii}, \ldots, a_{11}^{ii}$, et alors, d'après (21) et (23), tous les d_{kl}^{ii}, où k et l sont $< \mu$ ($\leqq \mu$ si $a_{\mu\mu}^{ii} = 0$), seront nuls.

Si donc $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{11}$ *et* $z^2 + z + a_{\mu\mu}^{22}$ *sont réductibles dans* $\mathfrak{S}$, on peut annuler $a^{11}_{\mu\mu}$ et $a^{22}_{\mu\mu}$, et la matrice des a^{ij}_{kl} où $k = 1, \ldots, \mu + 1$ et $l = \mu + 1, \ldots, m$ est, à l'exception de $a^{ii}_{\mu+1,\mu+1}$ égal à 1, le produit par ξ d'une matrice du second type (**6**).

Si l'un des trinomes $z^2 + z + a^{ii}_{\mu\mu}$ $(i = 1, 2)$ *est irréductible dans* $\mathfrak{S}$, on peut toujours faire que ce soit

$$z^2 + z + a^{11}_{\mu\mu}.$$

Si $a^{22}_{\mu\mu}$ est $\neq 0$, on peut l'annuler par une addition de la $(m-1)^{\text{ième}}$ transversale de A^{11} à la $(m-1)^{\text{ième}}$ de A^{12}, puis de la $(m-1)^{\text{ième}}$ transversale de A^{12} à la $(m-1)^{\text{ième}}$ de A^{22} (chaque opération étant toujours suivie de l'opération symétrique). *Soit donc*

$$a^{11}_{\mu\mu} = \lambda, \qquad a^{22}_{\mu\mu} = 0.$$

A^{22} a la même forme que dans le cas précédent, où $a^{11}_{\mu\mu}$ et $a^{22}_{\mu\mu}$ étaient nuls. A^{11} se détermine aisément en utilisant la remarque finale du n° **3**. Soit, en effet, d'une manière générale et quel que soit m,

$$A^{11}(a^{11}_{\mu\mu}, a^{ii}_{\mu+1,\mu+1})_m$$

la détermination de A^{11} quand on fait nuls tous les a^{11}_{kk}, sauf $a^{11}_{\mu\mu}$ et $a^{11}_{\mu+1,\mu+1}$. On aura

$$A^{11}(1, 1)_m = A^{11}(0, 1)_m + \lambda A^{11}(1, 0)_m,$$

et il est clair que $A^{11}(1, 0)_m$ s'obtient en bordant $A^{11}(0, 1)_{m-1}$ (qui est la forme réduite trouvée pour la valeur $2\mu - 1$ de m) d'une $m^{\text{ième}}$ colonne et d'une $m^{\text{ième}}$ ligne de zéros.

Dans les deux formes de a qu'on vient d'obtenir, il y a, pour chaque $i \leqq q$, un seul $j \leqq q$ tel que A^{ij} soit $\neq 0$. Donnons à j cette valeur pour chaque $i \leqq q$, puis prenons, si $j = i \leqq 2$,

$$\begin{array}{lll}
\Sigma_{l=1}^{m} b^{ii}_{1l} x^i_l & \text{pour} & x^i_m, \\
\Sigma_{l=1}^{m-1} b^{ii}_{2l} x^i_l & \text{pour} & x^i_{m-1}, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\Sigma_{l=1}^{\mu+2} b^{ii}_{\mu-1,l} x^i_l & \text{pour} & x^i_{\mu+2},
\end{array}$$

$$x^i_{\mu+1} \quad \text{ou} \quad d^{-\frac{1}{2}} x^i_{\mu+1} \quad (d^2 = \lambda) \quad \text{pour} \quad x^i_{\mu+1} \quad \text{selon que} \quad a^{ii}_{\mu\mu} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda,$$

$$x^i + x^i_{\mu+1} \quad \text{ou} \quad d^{\frac{1}{2}} x^i_\mu \quad \text{pour} \quad x^i_\mu \quad \text{selon que} \quad a^{ii}_{\mu\mu} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda,$$

et, si $j \neq i$,

$$\Sigma_{l=1}^{m-k} b_{k+1,l}^{ij} x_l^i \quad \text{pour} \quad x_{m-k}^i \quad (k = 0, \ldots, m-1).$$

$\mathfrak{B}_{11}$ se trouve ainsi réduit, si $a_{\mu\mu}^{11} = 0$, à

$$R + x_\mu^1 x_{\mu+1}^1,$$

si $a_{\mu\mu}^{11} = \lambda$, à

$$R + x_\mu^1 x_{\mu+1}^1 + d[(x_\mu^1)^2 + (x_\mu^2)^2],$$

R désignant une somme de rectangles où chacune des variables autres que x_μ^1, $x_{\mu+1}^1$ figure dans un terme et dans un seul. Or ces deux formes ne sont pas équivalentes (*E.*, 45). Donc les formes correspondantes de b ne sont *a fortiori* pas transformables l'une dans l'autre par des substitutions permutables à α, lesquelles permutent exclusivement entre elles les variables de $\mathfrak{B}_{11}$. *Donc aucun changement de variables conservant la forme de α ne peut transformer l'une dans l'autre les deux formes considérées de b.* On voit en même temps que $\mathfrak{B}_{11}$ *est de la première ou de la seconde classe selon que, dans la forme réduite, $a_{\mu\mu}^{11}$ est égal à 0 ou à λ.*

Remarque. — Si $a_{\mu\mu}^{11} = 0$, le changement de variables effectué sur les x_k^1 est, en écrivant x_k pour $x_k^1 (k = 1, \ldots, \mu)$ et y_{k+1} pour $x_{m-k+1}^1 (k = 1, \ldots, \mu)$, de la forme

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_i = x_i \quad (i = 1, \ldots, \mu - 1), & X_\mu = x_\mu + y_\mu, \\ Y_i = y_i + \varphi_i(y_{i+1}, \ldots, y_\mu) \quad (i = 1, \ldots, \mu - 1), & Y_\mu = y_\mu, \end{array} \right.$$

et le changement de variables inverse a la même forme. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(29) \quad \left| \begin{array}{ll} X_1 & X_1 \\ X_i & X_i + X_{i-1} \quad (i = 2, \ldots, \mu - 1) \\ X_\mu & X_{\mu-1} + Y_\mu \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_{i+1}, \ldots, Y_\mu, X_\mu) \quad (i = 1, \ldots, \mu - 1) \\ Y_\mu & Y_\mu + X_\mu \end{array} \right|.$$

Si $a_{\mu\mu}^{11} = \lambda$, le changement de variables effectué sur les x_k^1 est, en écrivant x_k pour $x_k^1 (k = 1, \ldots, \mu - 1)$, y_{k+1} pour $x_{m-k+1}^1 (k = 1, \ldots, \mu - 1)$,

x_0 pour x_μ^1, y_0 pour $x_{\mu+1}^1$, de la forme

$$(30)\quad \begin{cases} X_i = x_i \quad (i=1,\ \ldots,\ \mu-1), \qquad X_0 = d^{\frac{1}{2}} x_0, \\ Y_i = y_i + \varphi_i(y_{i+1},\ \ldots,\ y_{\mu-1},\ y_0,\ x_0) \qquad (i=1,\ \ldots,\ \mu-2), \\ \qquad Y_{\mu-1} = y_{\mu-1} + \varphi_{\mu-1}(y_0,\ x_0), \qquad Y_0 = d^{-\frac{1}{2}} y_0, \end{cases}$$

et le changement de variables inverses a la même force, d y étant remplacé par d^{-1}. L'action de α sur ces variables a la forme

$$(31)\quad \left| \begin{array}{ll} X_1 & X_1 \\ X_i & X_i + X_{i-1} \qquad (i=2,\ \ldots,\ \mu-1) \\ X_0 & X_0 + d^{\frac{1}{2}} X_{\mu-1} \\ Y_i & Y_i + \Phi_i(Y_{i+1},\ \ldots,\ Y_{\mu-1},\ Y_0,\ X_0,\ X_{\mu-1}) \quad (i=1,\ \ldots,\ \mu-2) \\ Y_{\mu-1} & Y_{\mu-1} + \Phi_{\mu-1}(Y_0,\ X_0,\ X_{\mu-1}) \\ Y_0 & Y_0 + d^{-1} X_0 \end{array} \right|.$$

31. *Soit* $m_i = 2\mu_i$ $(\mu_1 = \mu)$ *avec* $q = 2q' + 1$.

Alors B_{11}^{1m} se ramène à la forme Φ_1, et l'on peut annuler tous les A^{ij}, sauf A^{11} et les $A^{2i,2i+1}$, $A^{2i+1,2i}$ $(i=1,\ \ldots,\ q')$, A^{11} se ramenant à l'une des deux formes précédentes et les $A^{2i,2i+1}$, $A^{2i+1,2i}$ à la forme bilinéaire type (**6**).

Sur la distinction et la classe des formes réduites, comme sur les variables à introduire pour ramener b au type normal correspondant, et sur la forme de α avec ces nouvelles variables, il n'y a qu'à répéter ce qui a été dit au numéro précédent.

32. Le nombre $N(Q_1,\ m_{Q_1};\ Q_2,\ m_{Q_2};\ \ldots)$ des éléments de a (ou de b) qui restent arbitraires, une fois choisis les éléments de $B_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}$ (de manière que $|B_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}|$ soit $\neq 0$) et les éléments $a_{\mu_{Q_\rho}\mu_{Q_\rho}}^{Q_\rho\ \iota+1,Q_\rho-\iota+1}$ qui répondent aux $B_{\rho\rho}^{1m_{Q_\rho}}$ équivalentes à des types normaux de la forme Φ_2 et Φ_1, est fourni, d'après ce qui précède, par

$$N(Q_1,\ m_{Q_1};\ Q_2,\ m_{Q_2};\ \ldots) = N_1 + N(Q_2,\ m_{Q_2};\ \ldots),$$

$$N_1 = \psi(\mu) + \frac{q(q-1)}{2}(m-1) + q(n-qm),$$

$\psi(\mu)$ étant égal à $q(\mu-1)$ si m est impair, à $q\mu$ si m est pair et $B_{11}^{|m}$ équivalente à Φ_0, à $q\mu-1$ si m est pair et $B_{11}^{|m}$ équivalente à Φ_2 ou à Φ_1.

Le nombre $\mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots)$ des formes b est donc donné par

$$\mathfrak{N}(Q_1, m_{Q_1}; Q_2, m_{Q_2}; \ldots) = M_{mq}\pi^{N_1}\varpi\,\mathfrak{N}(Q_2, m_{Q_2}, \ldots),$$

M_{mq} étant l'indice dans $L(q, \pi)$ du groupe de F_θ si m est impair, du groupe de Φ_0 si m est pair et $B_{11}^{|m}$ équivalente à Φ_0, du groupe de Φ_2 ou de Φ_1 si m est pair et $B_{11}^{|m}$ équivalente à Φ_2 ou à Φ_1 respectivement, enfin ϖ étant égal à 1 si m est impair, ou si m est pair et $B_{11}^{|m}$ équivalent à Φ_0, à $\frac{\pi}{2}$ dans tous les autres cas.

De l'analyse précédente résulte, comme au nº **24**, que *le nombre des types réduits distincts est $2^{\delta}3^{\delta'}$, δ' étant le nombre des sous-séries pour lesquelles m_i et q_i sont pairs, δ le nombre des autres.*

33. Le problème inverse de celui considéré jusqu'ici est celui qui consiste, étant donnés la forme bilinéaire a et le champ $\mathfrak{S}$, à trouver tous les couples de substitutions α, β telles que

$$\beta a \bar{\alpha} = a.$$

Sur ce problème, qui a donné lieu à de nombreux travaux, je me bornerai à deux observations.

Supposons que, $\mathfrak{S}$ étant le champ des nombres complexes ordinaires, a soit une forme bilinéaire à variables conjuguées *définie*, et soit $\mathfrak{A}$ le groupe des α telles que $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = a$. *L'ensemble* $\mathfrak{B} = \Sigma\beta$ *des substitutions de* $\mathfrak{A}$ *dont les coefficients sont des entiers algébriques du champ* $\mathfrak{K} = R(\xi)$ *résultant de l'adjonction au champ* R *des nombres rationnels d'une racine* ξ *d'une équation du second degré à coefficients dans* R *et à racines imaginaires est un groupe fini* (¹). En effet, le produit de deux entiers de $\mathfrak{K}$ est un entier de $\mathfrak{K}$. De plus, comme $|\dot{\beta}\beta| = 1$, $|\beta|$ divise 1 et par suite tout entier de $\mathfrak{K}$. Donc les coefficients de β^{-1} sont entiers et $\mathfrak{B}$ est un groupe (*E.*, 8). D'ailleurs

(¹) C'est l'extension d'une observation déjà faite par M. Picard [*A. M.*, t. I, p. 300 (1882)].

les multiplicateurs de α, ayant pour module 1 (**10**), sont ici des racines algébriques de 1 ([1]). Donc $\mathcal{M}$ est fini ([2]).

Le théorème analogue relatif au cas où a est une forme quadratique définie, $\mathcal{S}$ étant le champ des nombres réels, se démontrerait de même. Mais il se réduit à ceci que l'ensemble des substitutions linéaires à coefficients entiers (ordinaires) qui conservent la forme $\Sigma_1^n x_i^2$ est un groupe d'ordre $n!\,2^n$ formé de toutes les permutations des x_i accompagnées de la multiplication de chacun d'eux indépendamment les uns des autres par ± 1. Or on le voit de suite directement.

34. Soit $\mathcal{S}$ d'ordre $p^\kappa = \pi$ (p premier), $a = \psi + \Sigma_1^\nu x_i y_i$, ψ ayant, si $p > 2$, l'une des formes 0, cx^2 (c étant quelconque dans $\mathcal{S}$), $x^2 - hy^2$ (irréductible dans $\mathcal{S}$), et, si $p = 2$, l'une des formes 0, $xy + h(x^2 + y^2)$ (irréductible dans $\mathcal{S}$). Je désignerai par n le nombre des variables de a.

Le groupe $\mathcal{A}(n, \pi) = \mathcal{A}$ de a dans $\mathcal{S}$ dérive ([3]) :

1° Des substitutions

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix} = t_i, \qquad \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda y_i \end{vmatrix} = \mathrm{V}_{ik\lambda} \qquad (i \neq k),$$

$$\begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix} = m_{i\lambda} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu);$$

2° Des substitutions $\mathrm{V}_{0k\lambda}$, $\mathrm{V}_{i0\lambda}$ (i; $k = 1, \ldots, \nu$) égales respectivement, si $\psi = 0$, à $1, 1$;

si $\psi = cx^2$, à

$$\begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - 2c\lambda x - c\lambda^2 x_k \end{vmatrix}, \quad 1;$$

si $\psi = x' - hy^2$, à

$$\begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - 2\lambda x - \lambda^2 x_k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_i & x_i - 2h\lambda y + h\lambda^2 y_i \\ y & y - \lambda y_i \end{vmatrix};$$

---

(1) *Voir* Lœwy, *N. A. H.*, t. LXXI, 1898, p. 391; Kronecker, *Cr.*, t. LIII, 1857, p. 173.

(2) *Voir* Burnside, *P. L. M. S.*, 2e série, t. III, 1905, p. 438.

(3) Les générateurs indiqués ici ne sont pas tout à fait ceux employés par M. Jordan et M. Dickson; mais la démonstration du théorème sous la forme adoptée ici se fait d'une manière toute semblable.

si $\psi = xy + h(x^2 + y^2)$, à

$$\begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda y - 2h\lambda x - h\lambda^2 x_k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda x + 2h\lambda y - h\lambda^2 y_i \\ y & y - \lambda y_i \end{vmatrix};$$

3° Des générateurs du groupe Ψ de ψ dans $\mathfrak{S}$. Si $\psi = 0$, je supposerai que $\Psi = 1$. Si $\psi = cx^2$, Ψ est engendré par $|x, \ -x|$ d'ordre 2. Si $\psi = x^2 - hy^2$, Ψ dérive des substitutions de la forme

$$\begin{vmatrix} x & \lambda x + h\mu y \\ y & \mu x + \lambda y \end{vmatrix}$$

(λ, μ étant une solution quelconque de $\lambda^2 - h\mu^2 = 1$) qui forment un groupe cyclique Ψ' d'ordre $\pi + 1$, et de

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}.$$

Si

$$\psi = xy + h(x^2 + y^2) \qquad (\text{alors } p = 2),$$

Ψ dérive des substitutions

$$\begin{vmatrix} x & \lambda x - \mu y \\ y & \mu x + (\lambda + \mu h^{-1}) y \end{vmatrix}$$

[λ, μ étant une solution quelconque de

$$\lambda\mu + h(\lambda^2 + \mu^2) = h]$$

qui forment un groupe cyclique Ψ' d'ordre $\pi + 1$, et de

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}.$$

En posant encore $\Psi' = 1$ pour $\psi = 0$ et $\psi = cx^2$, on voit que Ψ' est, pour $p > 2$, le diviseur de Ψ formé de ses substitutions de déterminant 1.

Soit de même, pour $p > 2$, $\mathcal{A}'(n, \pi) = \mathcal{A}'$ le diviseur de $\mathcal{A}$ formé de ses substitutions de déterminant 1. On a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + t\mathcal{A}',$$

t étant l'une des substitutions t_0 ($t_0 = 1$ pour $\psi = 0$ et $\psi = cx^2$),

$t_1, \ldots, t_\nu$. *On peut donc définir $\mathcal{A}'$ comme le plus petit commun multiple* P *de* Ψ' *et des*

$$t_i t_j, \quad V_{ij\lambda},$$

$$U_{ij\lambda} = t_j V_{ij\lambda} t_j, \quad W_{ij\lambda} = t_j V_{ji,-\lambda} t_j, \quad m_{k\lambda} \quad (i, j = 0, \ldots, \nu;\ i \neq j;\ k = 1, \ldots, \nu);$$

car P est évidemment permutable à t, en sorte que $\mathcal{A} = \mathrm{P} + t\mathrm{P}$.

***Si** $p = 2$, **cette seconde définition de** $\mathcal{A}'$ **a un sens.** $\mathcal{A}'$ **est alors encore d'indice** 2 **dans** $\mathcal{A}$.* Pour $n = 2$, cela a déjà été indiqué tout à l'heure. Soit donc $n > 2$. Toute substitution α de $\mathcal{A}'$, prise sous la forme

$$(32) \quad \alpha = |\, x_i, y_i;\ \Sigma_k(\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k),\ \Sigma_k(\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) \,| \qquad (i, k = 0, \ldots, \nu)$$

vérifie l'égalité

$$(33) \quad I_\alpha = \Sigma_{ik} \alpha_{ik} \beta'_{ik} + h^2(\alpha_{00}^2 + \alpha'^2_{00} + \beta^2_{00} + \beta'^2_{00}) = \frac{n}{2} \qquad (i, k = 0, \ldots, \nu);$$

car la substitution unité vérifie (33), et, γ étant un générateur de $\mathcal{A}'$, $\gamma\alpha$ vérifie ou ne vérifie pas (33) en même temps que α, comme le montre un calcul direct (d'après les relations connues qui lient les coefficients de α). Donc t, ne vérifiant pas (33), est hors de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + t\mathcal{A}'$. Comme $t\alpha$ ne vérifie pas (33) si α la vérifie, on voit de plus que $\mathcal{A}'$ *est formé des substitutions de* $\mathcal{A}$ *qui vérifient* (33) (¹).

35. Pour $p = 2$ les substitutions de $\mathcal{A}'$ sont dites *paires*, les autres *impaires*. Tout changement de variables à coefficients dans $\mathcal{C}$ *qui conserve* a conserve *a priori* $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (la matrice du changement de variables est celle d'une substitution de $\mathcal{A}$), donc aussi la parité de chaque substitution α de $\mathcal{A}$ et celle de I_α.

La forme canonique d'une substitution α de $\mathcal{A}$ a un nombre pair ou impair de suites selon que α est paire ou impaire. — Si α n'a que des multiplicateurs égaux à 1, on le vérifie directement à l'aide des remarques des nos **28** et **30.** Dans le cas contraire, soient α' la partie de α (mise sous forme canonique) répondant aux multiplicateurs $\neq 1$, et a' la partie correspondante de a. Prenons α' pour α et a' pour a. α a un nombre pair de suites, et l'on peut introduire des variables réelles

(¹) *Voir* Dickson, *Linear Groups*, p. 206-208.

(c'est-à-dire des fonctions réelles des variables primitives x_i à coefficients dans $\mathcal{S}$) ξ_i, η_i telles que a ait la forme $\Sigma\xi_i\eta_i$ (**22**). D'après (33) (appliquée à la substitution primitivement donnée), *tout revient à montrer qu'avec ces variables α est paire*. Or on peut introduire d'abord, comme au n° **28**, des variables (en général non réelles) X_i, Y_i ramenant a à la forme $\Sigma X_i Y_i = a_0$ et α à une forme α_0 vérifiant (33). Le groupe de a_0 dans $\mathcal{S}$ est $\mathcal{A}$. Soient $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}'_\alpha$ les groupes analogues à $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ *dans le champ* $\mathcal{S}_\alpha$ résultant de l'adjonction à $\mathcal{S}$ des multiplicateurs de α. $\mathcal{A}'$ est évidemment le plus grand commun diviseur de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'_\alpha$. α_0 est dans $\mathcal{A}'_\alpha$, et l'introduction des variables ξ_i, η_i, qui conserve à a_0 sa forme, revient à transformer α_0 en une substitution de $\mathcal{A}'$ (α_0 vérifie la condition de réalité).