JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques, binaires et positives

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 379-393.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__379_0>

Formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques, binaires et positives;

PAR M. G. HUMBERT.

1. Dans un Mémoire publié au Tome III (6^e série, année 1907) de ce journal, j'ai rencontré des formules où figurent les minima des classes de même déterminant : le présent travail a pour but de compléter ces résultats; on se bornera à six relations, qui expriment certaines sommes algébriques simples de minima à l'aide de fonctions numériques liées aux diviseurs d'un nombre.

2. On sait qu'on appelle *minima* d'une classe de formes quadratiques binaires et positives les trois plus petits entiers représentables *proprement* par les formes de la classe. La réduite de cette classe étant (a, b, c), les trois minima sont a, c, $a+c-2|b|$.

Dans tout ce qui suit, nous ne considérons que des classes *de l'ordre propre* (primitives ou non), c'est-à-dire dont les formes n'ont pas leurs deux coefficients extrêmes pairs à la fois; dès lors, parmi les trois minima, deux sont impairs, un est pair.

Nous désignerons toujours par m_1 et m_2 $(m_1 \leqq m_2)$ les deux minima impairs, par m le minimum pair d'une même classe; m_1 sera dit le *premier* minimum impair, m_2 le *second*.

Soit Δ le discriminant de la réduite (a, b, c); on a

$$\Delta = ac - b^2,$$

et, si l'on pose $a + c - 2|b| = d$, cette relation s'écrit

$$\begin{aligned} 4\Delta &= 4ac - (a+c-d)^2 \\ &= -a^2 - c^2 - d^2 + 2ac + 2ad + 2cd; \end{aligned}$$

par suite on a, entre le discriminant et les trois minima d'une même classe, la relation

$$(1) \qquad 4\Delta = -m_1^2 - m_2^2 - m^2 + 2m_1m_2 + 2mm_1 + 2mm_2.$$

Les inégalités classiques de la réduction donnent $a \leqq c \leqq d$, et comme, en vertu de la définition de d, on a

$$d \leqq a + c,$$

on en conclut qu'un quelconque des minima est au plus égal à la somme des deux autres.

Réciproquement, on établit de suite que, étant donnés trois entiers positifs, m_1, m_2, m, les deux premiers impairs, le troisième pair, les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces trois nombres soient les minima d'une classe de discriminant donné Δ sont : 1° que la relation (1) ait lieu; 2° que chacun des trois nombres soit au plus égal à la somme des deux autres.

Il y a, en général, *deux* classes ayant pour minima trois nombres donnés; ce sont deux classes *opposées*, c'est-à-dire dont les réduites sont (a, b, c) et $(a, -b, +c)$. Toutefois, ces deux classes coïncident si elles sont ambiguës; pour qu'il en soit ainsi, en vertu des conditions classiques auxquelles satisfait une réduite ambiguë, il faut et il suffit que deux des minima soient égaux, *ou* que l'un soit égal à la somme des deux autres.

Par suite, la classe de minima m_1, m_2, m sera ambiguë si *l'une ou l'autre* des égalités suivantes est vérifiée :

$$(2) \qquad m_1 = m_2, \qquad m_2 = m + m_1, \qquad m = m_1 + m_2,$$

et réciproquement; en ces cas, il n'y a qu'une classe admettant m_1, m_2, m pour minima.

3. La relation (1) conduit aisément aux conséquences qui suivent :

Si $\Delta \equiv 1$	(mod 4),	on a	$m \equiv 2$,	$m_2 - m_1 \equiv 0$ (mod 4).
» $\Delta \equiv 2$		»	$m \equiv 2$,	$m_2 - m_1 \equiv 2$
» $\Delta \equiv 3$		»	$m \equiv 0$,	$m_2 - m_1 \equiv 2$
» $\Delta \equiv 0$		»	$m \equiv 0$,	$m_2 - m_1 \equiv 0$

Pour $\Delta = 4N + 1$, on reconnaît de même que

$$m - 2m_1 \equiv 4N \pmod 8.$$

4. Cela posé, soit $\Delta \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$; m_1, m_2, m étant les minima d'une classe de discriminant Δ, je dis qu'il en est de même des nombres (positifs) m'_1, m'_2, m' définis par

$$(3) \qquad m'_1 = \frac{1}{2} m, \qquad m'_2 = m_1 + m_2 - \frac{1}{2} m, \qquad m' = 2m_1.$$

En effet : 1° on vérifie de suite que la relation (1) est satisfaite pour m'_1, m'_2, m' si elle l'est pour m_1, m_2, m; 2° par ce qui précède, m'_1 et m'_2 sont impairs, et $m'_1 \leqq m'_2$; m' est pair, et, en vertu des inégalités entre m_1, m_2, m, chacun des m'_1, m'_2, m' est au plus égal à la somme des deux autres.

Observons enfin que, si la classe de minima m_1, m_2, m est ambiguë, il en est de même de la classe m'_1, m'_2, m'. Les relations (3) sont d'ailleurs symétriques entre m_1, m_2, m et m'_1, m'_2, m', car on en tire

$$m_1 = \frac{1}{2} m', \qquad m_2 = m'_1 + m'_2 - \frac{1}{2} m', \qquad m = 2m'_1.$$

De là la conséquence suivante :

Formons un Tableau (T) dont chaque ligne comprenne les minima m_1, m_2, m, écrits dans cet ordre, d'une classe de l'ordre propre de discriminant Δ, et qui aura dès lors autant de lignes qu'il y a de classes, primitives ou non, de ce discriminant. Formons ensuite un Tableau (T′), dont chaque ligne comprenne les nombres m'_1, m'_2, m' écrits dans cet ordre, et déduits par (3) des nombres de chaque ligne du Tableau (T) : les deux Tableaux (T) et (T′) seront les mêmes, *à l'ordre près des lignes* (1).

On en déduit, par exemple, que la somme des minima pairs des classes (de l'ordre propre), de discriminant $4N + 1$ ou $4N + 2$, est égale au double de celle de leurs premiers minima impairs, etc.

(1) Il serait inexact d'énoncer ce résultat en disant que les classes de discriminant Δ se répartissent en couples de deux, les minima des classes d'un couple étant m_1, m_2, m et m'_1, m'_2, m', car les deux systèmes de minima peuvent coïncider. (Il suffit pour cela que $m = 2m_1$.)

5. Si $\Delta \equiv 3 \pmod 4$, les nombres m'_1, m'_2, m' définis par (3) sont tous pairs, et seraient les minima d'une classe de l'ordre *impropre* de discriminant Δ. On en déduirait aisément des conséquences indiquées déjà dans le Mémoire cité [1].

6. Soient enfin $\Delta \equiv 0 \pmod 4$, $\Delta = 4N$. Désignons par m_1, m_2, m les minima d'une classe quelconque de discriminant N; considérons les deux systèmes de nombres définis par

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} m'_1 = m_1, & m''_1 = m_2, \\ m'_2 = 2m + 2m_2 - m_1, & m''_2 = 2m + 2m_1 - m_2, \\ m' = 2m + 2m_2 - 2|m_2 - m|, & m'' = 2m + 2m_1 - 2|m_1 - m|. \end{array}\right.$$

Les nombres m'_1, m'_2, m''_1, m''_2 sont impairs, et $m'_1 \leqq m'_2$, $m''_1 \leqq m''_2$; enfin m' et m'' sont pairs. On vérifie comme plus haut que m'_1, m'_2, m' et m''_1, m''_2, m'' sont respectivement les minima d'une classe de discriminant $4N$.

De cette manière, à une classe de discriminant N [plus simplement à une classe (N)] correspondent deux classes $(4N)$; mais il faut préciser ceci.

En premier lieu, si la classe (N) n'est pas ambiguë, on reconnaît de suite que les deux classes $(4N)$ sont distinctes et qu'aucune n'est ambiguë.

Si la classe (N) est ambiguë, divers cas sont à examiner :

1° On a $m_2 = m_1 + m$ ou $m = m_1 + m_2$; alors les deux classes $(4N)$ sont distinctes et ambiguës toutes deux.

2° On a $m_1 = m_2$; alors les deux classes $(4N)$ ont les mêmes minima, mais ne sont ambiguës que si $m = 2m_1$.

Enfin, on vérifie facilement que deux systèmes distincts m_1, m_2, m conduisent, pour les m'_1, m'_2, m' et m''_1, m''_2, m'', à des systèmes distincts, c'est-à-dire qu'une même classe $(4N)$ ne peut correspondre à deux classes distinctes (N).

Il résulte de là, si l'on tient compte de ce que deux classes (opposées) répondent aux mêmes minima, sauf le cas des ambiguës, qu'à une

[1] Ce journal, 6e série, t. III, nos 52-53.

classe (N) répondent toujours deux classes (4N) et que toutes les classes (4N) ainsi obtenues sont distinctes : il n'y a qu'un cas d'exception, c'est celui où l'on a à la fois $m_1 = m_2$ et $m = 2m_1$; la classe (N) a alors pour réduite la forme $m_1(x^2+y^2)$, et il ne lui correspond *qu'une seule* classe (4N), à savoir $m_1(x^2+4y^2)$.

D'autre part, on sait *a priori* que le nombre des classes (4N) est double [1] de celui des classes (N), en ne comptant que pour $\frac{1}{2}$ la classe $m_1(x^2+y^2)$, si elle existe, c'est-à-dire si N est un carré impair.

Par suite, les formules (4) donnent, d'une manière générale, les minima des classes (4N) en fonction de ceux des classes (N).

On en déduit des conséquences faciles; par exemple, la somme des minima impairs des classes (4N) est égale à deux fois celle des minima impairs des classes (N), plus quatre fois celle des minima pairs de celles-ci; mais il faut compter pour $\frac{1}{2}$, si N est un carré impair, la classe $\sqrt{N}(x^2+y^2)$, c'est-à-dire prendre pour ses minima $\frac{1}{2}\sqrt{N}$, $\frac{1}{2}\sqrt{N}$, $\sqrt{N}$ au lieu de $\sqrt{N}$, $\sqrt{N}$, $2\sqrt{N}$.

7. Je reviens maintenant aux résultats de mon dernier Mémoire (cité plus haut).

En appelant F(N) le nombre des classes (primitives ou non) de l'ordre propre et de discriminant N, et $F_1(N)$ le nombre analogue pour l'ordre impropre, et en posant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu+\frac{3}{4}} F(4\nu+3),\\ B &= 2\sum_{1}^{\infty} q^{\nu} F(\nu) = \sum_{1}^{\infty} q^{\nu} F(4\nu),\\ C &= \sum_{0}^{\infty} q^{\nu}[F(\nu) - 3F_1(\nu)], \end{aligned}\right.$$

[1] Cela résulterait d'ailleurs de ce qui précède; il suffirait d'observer que, par (4), à une classe (4N) donnée répond *une et une seule* classe (N).

avec ([1]) $F(0) = 0$, $F_1(0) = -\frac{1}{12}$, j'ai obtenu (n^{os} **57** à **62**) les expressions des quantités

$$A\theta^2, \quad A\eta_1\theta, \quad B\theta^2, \quad B\theta\theta_1, \quad C\eta_1^2, \quad C\eta_1\theta_1,$$

sous les formes suivantes :

$$(6) \qquad A\theta^2 = \frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty}(-1)^N q^{N+\frac{3}{4}} \sum (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)};$$

la seconde somme s'étend aux minima des classes (de l'ordre propre) de discriminant $4N + 3$;

$$(7) \qquad A\eta_1\theta = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{4N} m(-1)^{\frac{m_1+m_2+2}{4}},$$

la somme $\sum_{4N}$ portant sur les minima des classes (de l'ordre propre) de discriminant $4N$. De même

$$(8) \qquad B\theta^2 = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty}(-1)^N q^N \sum_{4N}(m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2-m+2)};$$

$$(9) \qquad B\theta\theta_1 = \sum_{N=1}^{\infty} q^N \sum_{4N} m_1(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2+2)};$$

$$(10) \qquad C\eta_1^2 = -\frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{1}{2}} \sum_{4N+2}(m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{m-2}{4}};$$

$$(11) \qquad C\eta_1\theta_1 = \sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{1}{4}} \sum_{4N+1} m_1(-1)^{\frac{m-2}{4}}.$$

8. A ces formules j'en ajouterai deux autres.

En partant du développement de $\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 H^2 H_1 : \Theta^2$ (*loc. cit.*, n° **8**), en le multipliant par celui de $\eta_1\theta_1\Theta : H_1$, et égalant dans les deux membres, développés en séries de Fourier, les termes indépendants, on obtient l'expression de $A\eta_1^2 - B\eta_1\theta_1$; on trouve de même celle de

([1]) La classe $m_1(x^2 + y^2)$, où m_1 est entier impair, compte seulement pour $\frac{1}{2}$ dans $F(m_1^2)$.

$A\eta_1\theta_1 - B\theta_1^2$, et l'on a ainsi :

$$(12)\quad \eta_1(A\eta_1 - B\theta_1) = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} q^{N+\frac{1}{4}} \sum_{4N+1} (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{m+1}{4}};$$

$$(13)\quad \theta_1(A\eta_1 - B\theta_1) = \frac{1}{2}\sum_{N=1}^{\infty} q^{N} \sum_{4N} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{m_1-1}{2}}.$$

Dans les seconds membres des formules (11) et (12), si $4N+1$ est un carré m_1^2, les termes qui correspondent à la classe $m_1(x^2+y^2)$ doivent être divisés par 2.

9. D'autre part, on connaît (*loc. cit.*, n° **59**) les expressions de $A\theta$, $B\theta$ et $C\eta_1$:

$$(14)\quad \begin{cases} A\theta = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu+\frac{3}{4}}(-1)^{\nu}\psi(4\nu+3), \\ B\theta = 2\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu}\omega(\nu), \\ C\eta_1 = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu+\frac{1}{4}}\psi(4\nu+1). \end{cases}$$

Dans ces formules, $\psi(n)$ est la somme des diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$; toutefois, si n est carré, on ajoutera le terme $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

De même, $\omega(n)$ est la somme $\sum d(-1)^{\frac{d+d_1}{2}+1}$ étendue à toutes les décompositions en facteurs $n = dd_1$, où d et d_1 sont de *même parité* et $d < d_1$. Toutefois, si n est carré, $\omega(n)$ comprendra en outre le terme $\frac{1}{2}\sqrt{n}(-1)^{\sqrt{n}+1}$.

Enfin, désignons par $\chi(n)$ la somme $\sum \delta(-1)^{\delta+\delta_1}$ étendue aux décompositions $n = \delta\delta_1$, avec $\delta < \delta_1$ $\left(\text{en ajoutant en outre, si } n \text{ est carré, le terme } \frac{1}{2}\sqrt{n}\right)$; on aura de même

$$(15)\quad A\eta_1 - B\theta_1 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu}\chi(\nu).$$

On peut observer que $\chi(n) = \psi(n)$, pour n impair, et

$\chi(n) = -\psi(n)$ pour $n \equiv 2 \pmod 4$. De même on a :

$$
\begin{array}{lll}
\text{pour} & n \equiv 2 \pmod 4, & \omega(n) = 0; \\
\quad » & n \equiv 3 \pmod 4, & \omega(n) = -\psi(n); \\
\quad » & n \equiv 1 \pmod 4, & \omega(n) = \psi(n); \\
\quad » & n \equiv 4 \pmod 8, & \omega(n) = -2\psi\left(\frac{n}{4}\right); \\
\quad » & n \equiv 0 \pmod 8, & \omega(n) = -2\chi(n),
\end{array}
$$

de sorte que $\omega(n)$ se ramène *toujours* aux fonctions ψ et χ.

10. En portant les valeurs de $A\theta$, $B\theta$, $C\eta_1$, $A\eta_1 - B\theta_1$ dans les formules (6) à (13), et égalant dans les deux membres nouveaux les coefficients des mêmes puissances de q, on obtient les huit formules suivantes, dont les deux premières se trouvent dans mon précédent Mémoire (n^{os} **59** et **60**) :

$$(16) \quad \sum_{4N+3} (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)} = 2 \sum_{x \gtrless 0} \psi(4N + 3 - 4x^2);$$

$$(17) \quad \sum_{4N} m(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2+2)} = 2(-1)^{N+1} \sum_{x \gtrless 0} \psi[4N - (2x+1)^2];$$

$$(18) \quad \sum_{4N} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2-m+2)} = 4(-1)^N \sum_{x \gtrless 0} (-1)^x \omega(N - x^2);$$

$$(19) \quad \sum_{4N} m_1(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2+2)} = 2 \sum_{x \gtrless 0} \omega(N - x^2);$$

$$(20) \quad \sum_{4N+2} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{m-2}{4}} = 2 \sum_{x \gtrless 0} \psi[4N + 2 - (2x+1)^2];$$

$$(21) \quad \sum_{4N+1} m_1(-1)^{\frac{m-2}{4}} = \sum_{x \gtrless 0} \psi(4N + 1 - 4x^2);$$

$$(22) \quad \sum_{4N+1} (m_2 - m_1)(-1)^{\frac{m-2}{4}} = -4 \sum_{x \gtrless 0} \chi\left[\frac{4N + 1 - (2x+1)^2}{4}\right];$$

$$(23) \quad \sum_{4N} (m_1 + m_2 - m)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)} = 4 \sum_{x \gtrless 0} \chi(N - x^2).$$

Aux premiers membres, l'indice de chaque $\sum$ indique à quelles classes s'étend la somme correspondante; ainsi $\sum\limits_{4N}$ est une somme étendue aux minima des classes (de l'ordre propre) de discriminant $4N$.

Aux seconds membres, les sommes portent sur les valeurs entières de x, *telles que la quantité sous les signes* ψ, χ, ω *soit positive*.

Simplifions maintenant ces formules, qui vont se réduire à *six*.

11. Partons de la formule (19). Au premier membre figure la somme

$$\sum_{4N} m_1(-1)^{\frac{1}{4}(m_1+m_2+2)};$$

en tenant compte des formules (4), on la ramène à porter sur les classes (N), et l'on trouve ainsi pour sa valeur

$$\sum_{N}\left[m_1(-1)^{\frac{1}{2}(m+m_2+1)}+m_2(-1)^{\frac{1}{2}(m+m_1+1)}\right].$$

Je dis que cette somme est égale à

$$-(-1)^{N}\sum_{N}\left[m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right)+m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right)\right].$$

Il suffit de prouver pour cela que $m+m_2-m_1\equiv 2 \pmod 4$ si N est impair, et $\equiv 0 \pmod 4$ si N est pair; or c'est ce qui résulte immédiatement du n° **3** du présent Mémoire.

On peut donc écrire, *en désignant par* m' *un quelconque des deux nombres* m_1 *et* m_2, la formule très simple

$$(24)\qquad \sum_{N} m'\left(\frac{-1}{m'}\right)=2(-1)^{N+1}\sum_{x\gtrless 0}\omega(N-x^2).$$

Cette formule, équivalente à (19), comprend (16) comme on le reconnaît de suite, en s'appuyant sur les propriétés (n° **9**) de $\omega(n)$. Elle comprend également (20), car, en vertu du n° **4**, on a

$$\sum_{4N+2}(m_1+m_2-m)(-1)^{\frac{m-2}{4}}=\sum_{4N+2}(m_2-m_1)(-1)^{\frac{m_1-1}{2}},$$

ce qui, par le n° **3**, est

$$-\sum_{4N+2} m'\left(\frac{-1}{m'}\right);$$

d'autre part (n° **9**), $\omega(4N+2-4x^2)$ est nul, et

$$\psi[4N+2-(2x+1)^2] = \omega[4N+2-(2x+1)^2].$$

12. De même, en partant de (23), et passant des classes (4N) aux classes (N), on trouve

$$\sum_{N} |m_2 - m|\left(\frac{-1}{m_1}\right) + |m_1 - m|\left(\frac{-1}{m_2}\right) = 2\sum_{x>0}\chi(N-x^2).$$

D'après le n° **3**, les symboles $\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ et $\left(\frac{-1}{m_2}\right)$ sont égaux pour $N \equiv 1$ ou $0 \pmod 4$; ils sont de signes contraires pour $N \equiv 2$ ou $3 \pmod 4$.

Donc on a, d'une manière générale,

$$\sum_{N} |m_1 - m|\left(\frac{-1}{m_1}\right) + |m_2 - m|\left(\frac{-1}{m_2}\right) = 2(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\sum_{x>0}\chi(N-x^2),$$

ou, plus simplement, *m′ ayant le même sens qu'au n°* **11**,

$$(25)\qquad \sum_{N} |m' - m|\left(\frac{-1}{m'}\right) = 2(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\sum_{x>0}\chi(N-x^2).$$

La formule (18) donne de même sans difficulté

$$(26)\qquad \sum_{N} |m' - m|\left(\frac{-1}{m'-m}\right) = 2(-1)^{N+1}\sum_{x>0}(-1)^{x}\,\omega(N-x^2).$$

Et enfin la formule (17) conduit à

$$(27)\qquad \sum_{N} [(m'+m) - |m'-m|]\left(\frac{-1}{m'}\right) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\sum_{x>0}\psi[4N-(2x+1)^2].$$

13. *Conclusions.* — Les quatre formules (24), (25), (26) et (27) donnent ainsi les expressions des quatre sommes

$$\sum_{\mathrm{N}} m'\left(\frac{-1}{m'}\right);\quad \sum_{\mathrm{N}} |m'-m|\left(\frac{-1}{m'}\right);$$
$$\sum_{\mathrm{N}} |m'-m|\left(\frac{-1}{m'-m}\right);\quad \sum_{\mathrm{N}} m\left(\frac{-1}{m'}\right).$$

Cette dernière a pour expression

$$\sum_{\mathrm{N}} m\left(\frac{-1}{m'}\right) = (-1)^{\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}}\left[\sum_{x \gtrless 0} \psi[4\mathrm{N}-(2x+1)^2] + 2\sum_{x \gtreqless 0} \chi(\mathrm{N}-x^2)\right]$$
$$+ 2(-1)^{\mathrm{N}} \sum_{x \gtrless 0} \omega(\mathrm{N}-x^2).$$

Ainsi, les quatre sommes algébriques de minima désignées, étendues à toutes les classes (de l'ordre propre) de discriminant N, *s'expriment à l'aide des* deux *seules fonctions numériques* $\omega(n)$ *et* $\chi(n)$, puisque $\psi(2n+1)$ est égal à $\chi(2n+1)$.

D'après le n° **6**, et en vertu du passage des classes (4 N) aux classes (N), si N est un carré impair, les termes qui, dans les premiers membres de (24) à (27), répondent à la classe $\sqrt{\mathrm{N}}(x^2+y^2)$ doivent être divisés par 2.

14. *Il reste en outre les deux formules* (21) *et* (22), qui ne rentrent pas dans les quatre précédentes et qui s'écrivent (n$^{\text{os}}$ **4** et **5**)

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{4\mathrm{N}+1} m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right) = \sum \frac{1}{2} m\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}m}\right) = (-1)^{\mathrm{N}} \sum_{x \gtrless 0} \psi(4\mathrm{N}+1-4x^2), \\ \displaystyle\sum_{4\mathrm{N}+1} m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right) - \sum m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right) = -4(-1)^{\mathrm{N}} \sum_{x \gtrless 0} \chi\left[\frac{4\mathrm{N}+1-(2x+1)^2}{4}\right]. \end{cases}$$

Par suite, on a l'expression de chacune des trois sommes

$$\sum m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right);\quad \sum m_2\left(\frac{-1}{m_2}\right);\quad \sum \frac{1}{2} m\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}m}\right),$$

pour les classes de discriminant $4\mathrm{N}+1$.

D'après le n° **8**, si $4N+1=m_1^2$, les termes qui, dans les premiers membres de (28), répondent à la classe $m_1(x^2+y^2)$ doivent être divisés par 2.

15. On peut déduire de là quelques propriétés des fonctions numériques ψ, χ, ω.

Par exemple, soit $N=4M+2$; alors les symboles $\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ et $\left(\frac{-1}{m_2}\right)$ sont de signes contraires (n° **5**), de sorte que

$$\sum m\left(\frac{-1}{m'}\right)=0;$$

on a, dès lors, par la formule du n° **13**, et par les propriétés de $\omega(n)$ et $\chi(n)$ (n° **9**),

$$\sum_{x \gtrless 0} \psi[16M+8-(2x+1)^2] = 2\sum_{x \gtrless 0} \psi(4M+2-4x^2).$$

Si $N=4M+3$, $\sum m\left(\frac{-1}{m'}\right)$ est nul pour la même raison, et l'on trouve de même

$$\sum_{x \gtrless 0} \psi[16M+12-(2x+1)^2] = 2\sum_{x \gtrless 0} \psi[4M+3-(2x+1)^2].$$

Soit maintenant $N=8M+5$; je dis que $\sum m'\left(\frac{-1}{m'}\right)=0$. On a en effet, d'après les n^{os} **3** et **5**,

$$\begin{aligned}\sum_N m_1(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)} + m_2(-1)^{\frac{1}{2}(m_2-1)} &= \sum (m_2+m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)},\\ &= \sum\left(\frac{m}{2}+m_2+m_1-\frac{m}{2}\right)(-1)^{\frac{m-2}{4}}.\end{aligned}$$

Mais, par ce qui a été dit au n° **3**,

$$(-1)^{\frac{m-2}{4}} = -(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)},$$

d'où il résulte

$$\sum(m_2+m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_2-1)} = -\sum(m_2+m_1)(-1)^{\frac{1}{2}(m_1-1)} = 0.$$

La proposition est ainsi établie, et la formule (24) donne dès lors

$$\sum_{x \gtreqless 0} \omega(8\mathrm{M} + 5 - x^2) = 0,$$

ce qui s'écrit, en vertu des propriétés de $\omega(n)$ (n° 9),

$$\sum_{x \gtreqless 0} \psi(8\mathrm{M} + 5 - 4x^2) = 2\sum_{x \gtreqless 0} \psi\left[\frac{8\mathrm{M} + 5 - (2x+1)^2}{4}\right].$$

16. *Remarque.* — Les formules (24) à (28) rapprochent les sommes de minima qui y figurent, et qu'on peut regarder comme des fonctions numériques du discriminant, d'une autre fonction numérique classique, à savoir le nombre des décompositions d'un entier en sommes de cinq carrés. Seulement, cette dernière fonction s'exprime à l'aide de sommes de diviseurs *complètes,* tandis que nos $\psi(n)$, $\chi(n)$, $\omega(n)$ sont des sommes *incomplètes,* puisqu'elles ne portent que sur les diviseurs inférieurs à $\sqrt{n}$.

On a, par exemple, pour le nombre des décompositions de $4\mathrm{N} + 3$ en cinq carrés, en désignant par $\Phi(n)$ la somme *de tous les diviseurs* de n, l'expression

$$20\sum_{x \gtreqless 0} \Phi(4\mathrm{N} + 3 - 4x^2);$$

au contraire, $\psi(n)$ désignant la somme des diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$, l'expression $2\sum_{x \gtreqless 0} \psi(4\mathrm{N} + 3 - 4x^2)$ est, d'après (16), égale à la somme $-\sum m'\left(\frac{-1}{m'}\right)$, étendue à toutes les classes (ordre propre) de discriminant $4\mathrm{N} + 3$.

17. Terminons par des formules d'un type différent, déjà rencontré dans le précédent Mémoire (n° **64**).

Multiplions par η_1 les deux membres de (9); nous avons, au premier membre, $\mathrm{B}\eta_1\theta_1\theta$, c'est-à-dire $\mathrm{B}\eta'$, qu'on peut calculer en dérivant les deux membres de la troisième formule (5) du Mémoire précédent, et faisant ensuite $x = 0$. On trouve ainsi

$$B\eta' = \frac{1}{4}\eta_1^5\theta + 2\sum_1^\infty(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(2m+1)[q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+mq^{-m^2}].$$

Le coefficient de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans le second membre est

$$(29)\qquad \frac{1}{4}(-1)^{N+1}G_{5,1}(4N+1) + \frac{1}{4}\sum(\delta_1^2-\delta^2)(-1)^{\frac{\delta_1+\delta-2}{4}},$$

$G_{5,1}(4N+1)$ étant le nombre de décompositions de $4N+1$ en six carrés, dont cinq impairs écrits d'abord, et un pair, et la somme s'étendant aux décompositions $4N+1 = \delta\delta_1$, avec $\delta \leq \delta_1$.

Mais on connaît, par le nombre total de décompositions en six carrés, $G_{5,1}(4N+1) + G_{1,5}(4N+1)$; la formule (Mémoire cité, n° **2**)

$$\eta_1\theta_1\theta^4 = \eta_1\theta_1(\theta_1^4-\eta_1^4) = \eta_1\theta_1'' - \theta_1\eta_1''$$

donne, si l'on égale les coefficients de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans les deux membres, $G_{1,5}(4N+1) - G_{5,1}(4N+1)$, d'où l'on conclut

$$G_{1,5}(4N+1) = \sum d^2(-1)^{\frac{d-1}{2}} + \sum \Delta^2,$$

$$G_{5,1}(4N+1) = \sum d^2(-1)^{\frac{d-1}{2}} + \sum \Delta^2,$$

d étant un diviseur quelconque réel et positif de $4N+1$, et Δ un diviseur quelconque complexe $\alpha+\beta i$ de $4N+1$, où α est impair et positif et $\beta \gtreqless 0$.

On a ainsi, en (29), le coefficient de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans $B\eta'$; c'est également, par ce qui a été dit, celui de $q^{N+\frac{1}{4}}$ dans le second membre de (9) multiplié par η_1 : explicitant ce dernier coefficient, on obtient, toutes réductions faites, la relation suivante.

Posons, pour abréger, avec la convention du n° **13**,

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_N m_1\left(\frac{-1}{m_1}\right);$$

on a

$$(30)\qquad \sum_{x \gtreqless 0} \mathfrak{S}[4N + 1 - (2x + 1)^2] = \tfrac{1}{2} \sum \delta^2 \left(\frac{-1}{\delta}\right) - \tfrac{1}{4} \sum \Delta^2;$$

au premier membre, la somme porte sur les valeurs entières de x telles que la quantité sous $\mathfrak{S}$ soit positive; au second membre, δ désigne tout diviseur positif de $4N + 1$ *inférieur à* $\sqrt{4N+1}$, Δ tout diviseur complexe de $4N + 1$, soit $\alpha + \beta i$, tel que α soit impair et positif, β étant $\gtreqless 0$. En opérant de même sur (11), on trouverait, avec les mêmes notations,

$$(31)\qquad \sum_{x \gtreqless 0} \mathfrak{S}(4N + 1 - 4x^2) = \tfrac{1}{2} \sum \delta^2 \left(\frac{-1}{\delta}\right) + \tfrac{1}{4} \sum \Delta^2;$$

et, par addition membre à membre de (30) et (31),

$$(32)\qquad \sum_{y \gtreqless 0} \mathfrak{S}(4N + 1 - y^2) = \sum \delta^2 \left(\frac{-1}{\delta}\right).$$

Si $4N + 1$ est carré, et égal à m_1^2, parmi les diviseurs δ figurera m_1, et les termes $m_1^2\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ correspondants, dans les seconds membres de (30), (31), (32), devront être divisés par 2; parmi les Δ figure également m_1, mais le terme m_1^2 correspondant ne devra pas être divisé par 2.

Ainsi, par (32), la fonction numérique $\mathfrak{S}$ satisfait à une relation analogue à celles que, d'après Kronecker, vérifient les nombres de classes; seulement, au second membre, figurent non des diviseurs, mais des carrés de diviseurs.

Il est clair que la fonction qui donne le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés satisfait à une relation du type de (32) (mais où le second membre serait une somme *complète* de carrés de diviseurs), ce qui continue le parallélisme signalé au n° **16**.