JOURNAL
DE
# MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE HAMY

## Sur l'approximation des fonctions de grands nombres

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série*, tome 4 (1908), p. 203-281.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__203_0>

# *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres;*

**Par M. Maurice HAMY.**

Je me suis attaché, dans le présent travail, à généraliser la méthode de M. Darboux [1] concernant la recherche des expressions asymptotiques des fonctions d'un nombre $n$ très élevé, c'est-à-dire des expressions dont le rapport à ces fonctions tend vers l'unité, lorsque $n$ croît indéfiniment, et qui donnent leurs valeurs numériques, avec de faibles erreurs relatives, pour $n$ assez grand. J'ai été conduit à m'occuper de ce sujet à l'occasion de mes travaux sur le développement approché de la fonction perturbatrice, qui nécessitaient l'étude préalable de diverses questions demeurées en dehors du Mémoire de M. Darboux.

Partant d'un théorème d'Ossian Bonnet, sur les séries trigonométriques, M. Darboux a montré que la détermination des expressions asymptotiques des termes éloignés du développement d'une fonction $\Phi(z)$, par la série de Mac Laurin, est intimement liée à la connaissance des points singuliers de $\Phi(z)$ situés sur le cercle de convergence. Il a établi la marche à suivre pour obtenir ces expressions, lorsque le développement de $\Phi(z)$ est algébrique dans le voisinage des points singuliers dont il s'agit.

M. Flamme [2] a étendu la méthode de M. Darboux aux coefficients

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878 : Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres.*

(2) Flamme, *Thèse de doctorat*, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

de la série de Laurent et plus généralement aux intégrales de la forme

$$I = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

dans laquelle $n$ désigne un entier positif très grand [1], lorsque la fonction $\Phi(z)$ possède un ou plusieurs points singuliers séparés de l'origine par le contour d'intégration, les extrémités de ce contour étant, en outre, plus éloignées de l'origine des coordonnées que l'un au moins de ces points singuliers.

Prenant un point de départ différent du théorème d'Ossian Bonnet, dans mes recherches, je me suis d'abord occupé de déterminer l'expression asymptotique de l'intégrale I : 1° en m'affranchissant de la restriction que $n$ est entier; 2° en examinant toutes les positions que le contour peut présenter par rapport à l'origine des coordonnées. J'envisage notamment l'hypothèse où l'une des extrémités du contour d'intégration est plus rapprochée de l'origine que ses autres parties. J'obtiens, du reste, l'expression asymptotique de l'intégrale I, non seulement lorsque le développement de $\Phi(z)$ est algébrique dans le voisinage du point du plan dont la considération est nécessaire, pour l'évaluation approchée de cette intégrale, mais encore lorsque ce développement contient des termes de la forme $(z-a)^{\alpha}\log^{q}(z-a)$, $q$ étant un entier positif.

J'aborde ensuite un autre problème plus général, relatif à la détermination de l'expression asymptotique de l'intégrale

$$J = \int f(z)\varphi^{n}(z)\,dz,$$

$n$ étant un grand nombre quelconque.

On sait que Laplace a résolu ce problème [2], par une méthode d'ailleurs sujette à critiques, dans le cas où la variable $z$ est réelle, en admettant que le champ d'intégration renferme une racine $z = c$

---

(1) Le cas où $n$ est négatif se ramène à celui dont il est question en changeant $z$ en $\frac{1}{z}$.

(2) *Calcul des probabilités.*

de $\varphi'(z)$ correspondant à un maximum absolu de $\varphi(z)$ dans ce champ et ne coïncidant pas avec une des limites de l'intégrale. Il a, en outre, supposé $\varphi(z)$ holomorphe dans le voisinage de $z = c$.

M. Darboux a confirmé le résultat de Laplace et l'a étendu aux intégrales dont l'élément différentiel dépend d'une variable complexe, lorsqu'à la racine $z = c$ de $\varphi'(z)$ correspond un maximum de $|\varphi(z)|$ absolu le long du contour d'intégration.

Le problème ainsi posé rentre dans une question plus générale que j'ai étudiée dans mon Mémoire et dont l'examen comprend deux cas tout à fait distincts.

Admettons d'abord que la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$, le long du chemin d'intégration, corresponde à l'une des extrémités $z = c$ de ce contour, après l'avoir convenablement déformé, s'il est nécessaire.

Dans ces conditions, on peut toujours obtenir la valeur asymptotique de l'intégrale J, si les développements de $f(z)$ et de $\varphi(z)$, dans le voisinage de $z = c$, peuvent se mettre sous la forme

$$f(z) = B_1(z-c)^{\beta_1}\log^{q_1}(z-c) + B_2(z-c)^{\beta_2}\log^{q_2}(z-c) + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \varphi(c) + A_1(z-c)^{\alpha_1} + A_2(z-c)^{\alpha_2} + \ldots,$$

les $\alpha$ désignant des nombres positifs, les $q$ des entiers positifs ou nuls et les $\beta$ des quantités supérieures à $-1$.

Si $|\varphi(z)|$ ne prend pas sa plus grande valeur à une extrémité du contour d'intégration, imaginons qu'on puisse remplacer le contour C, le long duquel est prise l'intégrale J, par un autre chemin $C_1$, passant par un point d'affixe $z = c$, jouissant des propriétés suivantes : 1° si le chemin $C_1$ n'est pas équivalent au contour C, il le devient en le déformant infiniment peu dans le voisinage du point $z = c$; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$ le long du chemin $C_1$ est $|\varphi(c)|$. Il arrive alors, sauf quelques exceptions, que la considération du point $z = c$ conduit à la détermination de l'expression asymptotique de J. On suppose que le développement de $f(z)$ et de $\varphi(z)$, dans le voisinage du point $c$, rentre dans la même forme que précédemment, les $\beta$ n'étant plus assujettis à être supérieurs à $-1$.

Les exceptions comprennent le cas où $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont holomorphes dans le voisinage du point $z = c$, sans que $\varphi'(c)$ soit nul.

J'ai dit que le cas où $|\varphi(z)|$ prend sa plus grande valeur à une extrémité du contour d'intégration est à distinguer de celui où ce module prend sa plus grande valeur le long de ce contour. Par exemple, en faisant l'hypothèse que le point $z = c$ ne coïncide pas avec une extrémité du contour d'intégration, M. Darboux a obtenu la valeur asymptotique de J en supposant $\varphi(z)$ et $f(z)$ holomorphes dans le voisinage du point $z = c$, $|\varphi(z)|$ maximum absolu pour $z = c$, le long de ce contour, et $\varphi'(c) = 0$. Il a trouvé, dans ces conditions, que le développement de l'expression asymptotique de J, suivant les puissances descendantes de $n$, procède suivant une suite de termes tels que le rapport de l'un d'eux au précédent contient en facteur $\frac{1}{n}$. Or, j'établis dans mon travail que ce rapport contient en facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque le point $c$ coïncide avec une des limites de l'intégrale ([1]).

Dans le but de ne pas allonger outre mesure le présent Mémoire, je me suis contenté d'établir des formules générales sans les appliquer à des exemples particuliers. Les commentaires dont elles sont accompagnées comblent, je pense, suffisamment cette lacune pour qu'il ne puisse en résulter aucune difficulté dans leur emploi ([2]).

J'ai également laissé complètement de côté l'étude des intégrales doubles dont l'élément différentiel contient des facteurs élevés à de hautes puissances. On consultera avec fruit les recherches de M. Poincaré sur ce sujet ([3]).

---

([1]) Les résultats contenus dans le présent Mémoire ont déjà été énoncés partiellement dans quelques-unes de mes publications antérieures : *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Comptes rendus*, 1892, 1$^{er}$ semestre, et 1897, 2$^{e}$ semestre), *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1894, p. 393 à 405).

([2]) *Voir* au sujet de l'application de la méthode de M. Darboux : Darboux, *loc. cit.*; Flamme, *loc. cit.*; Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282; Hamy, *Bulletin astronomique*, 1893, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1894 et 1896; Hadamard, *Sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1893); Coculesco, *Thèse de doctorat*, Paris, Gauthier-Villars, 1895; Féraud, *Thèse de doctorat*, Paris, Gauthier-Villars, 1897.

([3]) *Loc. cit.*, p. 280.

Le présent Mémoire est divisé de la façon suivante :

## § I.

**1**. Définitions d'un contour de première, de deuxième et de troisième espèce par rapport à un point. — **2**. Propriétés des intégrales de la forme $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de deuxième espèce. Théorème I.

## § II.

**3**. Lemmes préliminaires relatifs à l'étude des intégrales de la forme $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$, prises le long d'un contour de troisième espèce. **4**. Propriétés de ces intégrales. Théorème II. — **5**. Évaluation approchée de ces intégrales pour $n$ très grand.

## § III.

**6**. Lemmes préliminaires relatifs à l'étude des intégrales de la forme $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$, prises le long d'un contour de première espèce. — **7**. Propriétés de ces intégrales. Théorème III. — **8**. Évaluation approchée de ces intégrales pour $n$ très grand. — **9**. Généralisation de la règle. — **10**. Cas particulier lorsque $n$ est entier. Évaluation de termes éloignés du développement d'une fonction par la série de Mac Laurin. Méthode de M. Darboux.

## § IV.

**11**. Variations du module d'une fonction autour d'un point. — **12**. Évaluation approchée de l'intégrale $I = \int f(u) \varphi^n(u)\, du$, pour $n$ très grand, lorsque, $u = c$ désignant l'affixe de l'une des extrémités du contour d'intégration, on a $|\varphi(c)| > |\varphi(u)|$ pour tous les points de ce contour : 1° cas où $f$ et $\varphi$ sont holomorphes dans le voisinage de $u = c$ en même temps que $\varphi'(c) = 0$; 2° cas où le point $u = c$ est un point singulier algébrique de $f$ et $\varphi$; 3° cas particulier. — **13.** Évaluation approchée de I, pour $n$ très grand, lorsque $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur en un point $u = c$ du contour d'intégration, ne coïncidant pas avec l'une des extrémités de ce contour. Examen de différents cas.

## § V.

**14.** Généralisation du théorème II concernant les intégrales de la forme $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de troisième espèce, et conséquences relatives à leur évaluation approchée pour $n$ très grand. — **15.** Généralisation du théorème III concernant les mêmes intégrales prises le long d'un contour de première espèce, et conséquences relatives à leur évaluation approchée pour $n$ très grand.

## § VI.

**16.** Généralisation des résultats obtenus, en ce qui concerne l'évaluation approchée de l'intégrale $\int f(u)\,\varphi^n(u)\,du$, lorsque $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, en un point coïncidant avec l'une de ses extrémités. — **17.** Même question lorsque $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur, le long du contour d'intégration, en un point qui ne coïncide pas avec l'une des extrémités.

## § I.

### Des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de deuxième espèce.

**1.** Définitions. — Étant donnés, dans le plan représentatif d'une variable complexe, un point dont l'affixe est $a$ et un contour BCD (*fig.* 1), admettons que les circonstances suivantes se présentent simultanément :

1° Les extrémités B, D du contour sont plus éloignées de l'origine

Fig. 1.

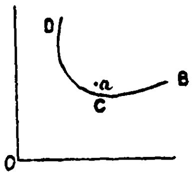
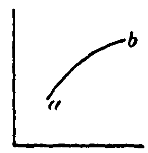



Fig. 2.




que le point $a$; 2° le contour BCD est rencontré par la droite O$a$ en un point unique, compris sur le segment O$a$, ou satisfait à cette condition après des déformations convenables.

Nous dirons alors, pour abréger le langage, que le contour BCD est de *première espèce* par rapport au point $a$.

Nous désignerons par contour de *deuxième espèce* par rapport à un point $a$ un contour dont toutes les parties sont plus éloignées de l'origine que ce point $a$.

Considérons enfin un contour $ab$ limité à un point $a$ (*fig.* 2). Admettons que toutes les parties de ce contour soient plus éloignées de l'origine que l'extrémité $a$. Nous dirons que ce contour est de *troisième espèce* par rapport au point $a$.

Nous ne considérerons, dans la suite de ce travail, que des contours décomposables en un nombre fini d'arcs convexes et d'arcs concaves, par rapport à l'origine, et ne tournant pas indéfiniment dans une région du plan.

Si une fonction $\Phi(z)$ est finie le long d'un pareil contour C, sauf dans le voisinage d'un certain nombre de points $z = c_1$, $z = c_2$, ..., et qu'il existe des nombres $\gamma_1$, $\gamma_2$, ..., inférieurs à 1, tels que les produits $(z - c_1)^{\gamma_1}\Phi(z), (z - c_2)^{\gamma_2}\Phi(z), \ldots$ ne dépassent pas un nombre fixe lorsque $z$ tend respectivement vers $c_1, c_2 \ldots$, nous dirons encore, pour abréger le langage, que $\Phi(z)$ est quasi finie le long de ce contour. Nous adopterons la même qualification pour $\Phi(z)$, si le contour s'étendant à l'infini et si $\Phi(z)$ devenant infini le long de ce contour, pour $z = \infty$, le module du quotient $\frac{\Phi(z)}{z^p}$ ne dépasse pas un nombre fixe pour les points à l'infini le long du contour, $p$ désignant un nombre fixe.

**2.** Théorème I. — *$q$ désignant un nombre fixe quelconque et $\eta$ l'intégrale*

$$\eta = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{1}$$

*prise le long d'un contour de deuxième espèce par rapport à un point d'affixe $a$, où $\Phi(z)$ désigne une fonction finie ou quasi finie le long de ce contour, le produit $n^q a^n \eta$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment par des valeurs positives.*

*Premier cas.* — L'intégrale (1) est prise le long d'un contour qui n'a pas de points à l'infini et le long duquel la fonction $\Phi(z)$ est finie. On a identiquement

$$n^q a^n \eta = \int \frac{1}{z} \Phi(z)\, n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n dz.$$

Appelons M le module maximum de $n^q\left(\frac{a}{z}\right)^n$ le long du contour C. Comme $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ par définition, M tend vers zéro lorsque $n$ croît indéfiniment. Or, on peut poser le long du contour C, en appelant $\lambda$ un facteur imaginaire de module au plus égal à l'unité,

$$n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n = \mathrm{M}\lambda; \tag{2}$$

il en résulte

$$n^q a^n \eta = \mathrm{M} \int \frac{\lambda}{z} \Phi(z)\, dz.$$

L'intégrale figurant dans le second membre de cette égalité est finie;

ce second membre tend donc vers zéro avec M, lorsque $n$ croît indéfiniment. C. Q. F. D.

*Deuxième cas.* — Le contour d'intégration n'a pas de points à l'infini, la fonction $\Phi(z)$ devient infinie en un point $z = c$ de ce contour, mais on peut trouver un nombre $\gamma < 1$ tel que le produit $(z-c)^\gamma \Phi(z)$ soit fini ou nul pour $z = c$. On a identiquement

$$n^q a^n \eta = \int \frac{(z-c)^\gamma \Phi(z)}{z} n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n \frac{dz}{(z-c)^\gamma}.$$

En appelant M le module maximum de $n^q \left(\frac{a}{z}\right)^n$ le long du contour, on peut écrire comme plus haut (2)

$$n^q a^n \eta = \mathrm{M} \int \frac{\lambda (z-c)^\gamma \Phi(z)}{z} \frac{dz}{(z-c)^\gamma}.$$

Le module de l'intégrale qui figure dans le second membre est inférieur à

$$\int \left| \frac{\lambda (z-c)^\gamma \Phi(z)}{z} \right| \left| \frac{dz}{(z-c)^\gamma} \right|,$$

et comme, par hypothèse, la première partie de l'élément différentiel est finie le long du contour, cette nouvelle intégrale est finie en même temps que l'intégrale

$$\int_{\mathrm{C}} \left| \frac{dz}{(z-c)^\gamma} \right|,$$

qui est finie puisque $\gamma < 1$.

Le produit $n^q a^n \eta$ tend donc vers zéro avec M, lorsque $n$ croît indéfiniment. C. Q. F. D.

*Troisième cas.* — Le contour d'intégration s'étend à l'infini, et l'on peut trouver un nombre positif $p$ tel que $\left| \frac{1}{z^p} \Phi(z) \right|$ ne dépasse pas un nombre fixe le long du contour. On a identiquement

$$n^q a^n \eta = a^{p+1} \int_{\mathrm{C}} \frac{\Phi(z)}{z^p} \frac{1}{z^2} n \left(\frac{a}{z}\right)^{n-p-1} dz.$$

Appelons M le module maximum de $n^q\left(\frac{a}{z}\right)^{n-p-1}$ le long du contour, module qui tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment puisque $p$ est fixe; on peut écrire comme plus haut

$$n^q\left(\frac{a}{z}\right)^{n-p-1} = \mathrm{M}\lambda,$$

$\lambda$ étant de module au plus égal à l'unité. Il en résulte

$$n^q a^n \eta = a^{p+1}\,\mathrm{M}\int_{\mathrm{C}} \lambda \frac{\Phi(z)}{z^p}\,\frac{dz}{z^2}.$$

Le module de l'intégrale qui figure dans le second membre est inférieur à

$$\int_{\mathrm{C}} \left|\lambda \frac{\Phi(z)}{z^p}\right| \left|\frac{dz}{z^2}\right|$$

et comme, par hypothèse, la première partie de l'élément différentiel est finie le long du contour, cette nouvelle intégrale est finie comme l'intégrale

$$\int_{\mathrm{C}} \left|\frac{dz}{z^2}\right|.$$

Le produit $n^q a^n \eta$ tend donc encore vers zéro avec M, lorsque $n$ croît indéfiniment. C. Q. F. D.

Le cas général où le contour passe par plusieurs infinis de $\Phi(z)$ et s'étend à l'infini se ramène aux trois cas qui viennent d'être examinés en fractionnant le contour.

## § II.

### Des intégrales de la forme $\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de troisième espèce.

3. Lemme I. — *Le rapport* $\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}$, *où* $\Gamma$ *représente la fonction eulérienne de deuxième espèce,* $h$ *un nombre fini quelconque et* $n$ *un nombre positif très grand, est de l'ordre de* $\frac{1}{n^{1+h}}$.

Cette proposition résulte de ce que le produit

$$u_n = n^{1+h}\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} \tag{3}$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsque $n$ augmente indéfiniment. On peut l'établir en prenant pour point de départ l'expression approchée de Stirling; en voici une démonstration directe ([1]) :

Appelons $\nu$ l'entier contenu dans $n$ et posons

$$n = \nu + \lambda,$$
$$u_\nu = (\nu+\lambda)^{1+h}\frac{\Gamma(\nu+\lambda-h)}{\Gamma(\nu+\lambda+1)}.$$

Si l'on donne à $\nu$ une valeur entière finie $p$ supérieure à $h$, $u_\nu$ est une quantité finie et non nulle. Cela étant, on a, d'après une propriété fondamentale de la fonction $\Gamma$,

$$\frac{u_\nu}{u_{\nu-1}} = \left(1 - \frac{1}{\nu+\lambda}\right)^{-1-h}\left(1 - \frac{h+1}{\nu+\lambda}\right).$$

Remplaçant dans cette identité $\nu$ successivement par $p, p+1, \ldots \nu$, et ajoutant membre à membre après avoir pris les logarithmes népériens, il vient

$$\operatorname{Log} u_\nu = \operatorname{Log} u_p + \sum_{\varpi=p}^{\varpi=\nu}\left[\operatorname{Log}\left(1 - \frac{h+1}{\varpi+\lambda}\right) - (h+1)\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{\varpi+\lambda}\right)\right].$$

Lorsque $\nu$ augmente indéfiniment, la somme écrite au second membre devient une série absolument convergente, car le terme général multiplié par $\varpi^2$ a une limite finie $-\frac{h(h+1)}{2}$.

$\operatorname{Log} u_p$ étant fini, $\operatorname{Log} u_\nu$ tend vers une limite finie et $u_\nu$, ou le second membre de la formule (3), vers une limite finie et différente de zéro. C. Q. F. D.

---

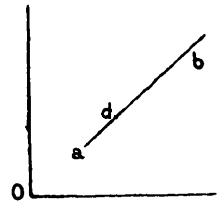
([1]) Je n'insiste sur cette proposition connue qu'à cause de son extrême importance pour ce qui va suivre. Au sujet de cette proposition, *voir* BAILLAUD, *Cours d'Astronomie à l'usage des étudiants de la Faculté des Sciences*, t. I, p. 5 et 6). — *Voir* aussi DE SAINT-GERMAIN, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890, 1re Partie, p. 212.

Lemme II. — *Considérons une droite indéfinie ab partant d'un point a et située sur le prolongement de Oa. L'intégrale*

$$(4) \qquad I = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long du chemin ab, dans laquelle h est un nombre supé-*

Fig. 3.




*rieur à* $-1$ *et n un nombre entier ou fractionnaire supérieur à h, a pour valeur*

$$(5) \qquad I = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

On suppose d'ailleurs que la détermination du binome $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h$ qui figure sous le signe $\int$ est celle qui est réelle et positive le long de $ab$.

En effet, le long de $ab$, $\frac{z}{a}$ est réel et compris entre 1 et $\infty$; on peut poser, en appelant $t$ une variable réelle comprise entre 1 et 0,

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{t},$$

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^h,$$

$\left(\frac{1}{t} - 1\right)^h$ étant réel et positif. Cela étant, l'intégrale proposée devient, en prenant $t$ comme variable,

$$I = \frac{1}{a^n} \int_0^1 (1-t)^h t^{n-h-1} \, dt.$$

Or, l'intégrale qui figure dans le second membre est une intégrale eulérienne de première espèce, qui a pour valeur

$$\int_0^1 (1-t)^h t^{n-h-1}\, dt = \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Notre proposition est donc démontrée.

Prenons sur $ab$ (*fig.* 3) un point $d$ à une distance de $a$ finie d'ailleurs aussi petite qu'on veut.

Le chemin $db$ prolongé à l'infini étant de seconde espèce par rapport au point $a$, on peut écrire, en vertu du théorème I,

$$(ad) = (ab) + \eta$$

ou

$$(ad) = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} + \eta,$$

le produit $n^q a^n \eta$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.

De là il résulte que le produit $a^n n^{1+h}(ad)$ a même limite que le produit $a^n n^{1+h}(ab)$ qui, d'après le lemme I, tend vers une limite finie et différente de zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

*Remarque.* — Appelons $\omega$ l'argument de $a$, R son module, $l$ la longueur $ad$. On peut poser, le long de $ad$,

$$z = (\mathrm{R} + x)\mathrm{E}^{i\omega},$$

$x$ étant une variable réelle comprise entre o et $l$. L'argument de $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h$ le long de $ad$ étant nul, l'intégrale $(ad)$ devient, en prenant $x$ pour variable d'intégration,

$$(ad) = \frac{1}{\mathrm{E}^{in\omega}} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h}{(\mathrm{R}+x)^{n+1}}\, dx.$$

On en tire

$$a^n n^{1+h}(ad) = \mathrm{R}^n n^{1+h} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h}{(\mathrm{R}+x)^{n+1}}\, dx.$$

Le premier membre tendant vers une limite lorsque $n$ augmente indéfiniment, il en est de même du produit

$$R^n n^{1+h} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^h}{(R+x)^{n+1}} dx.$$

L'intégrale qui y figure est donc, pour $n$ très grand, de l'ordre de $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+h}}$.

C'est là un point essentiel.

Lemme III. — *L'intégrale*

$$I = \int f(z)\, dz,$$

*prise le long d'un chemin* AA′, *peut s'écrire*

$$I = \lambda \operatorname{arc} AA' f(\xi),$$

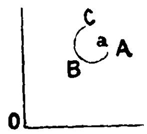
*$\lambda$ étant un facteur de module inférieur à* 1, arc AA′ *la longueur du chemin d'intégration et $\xi$ l'affixe d'un point de ce contour.*

De cette proposition bien connue, due à M. Darboux, il résulte que l'intégrale

$$I = \int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un arc de cercle ABC décrit d'un point $a$ comme

Fig. 4.




centre avec un rayon infiniment petit, est infiniment petite, si l'on peut trouver un nombre $k$ inférieur à 1, tel que le module du produit $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^k \Phi(z)$ ne dépasse pas un nombre fixe lorsque $z$ est infiniment voisin de $a$.

En effet, posons

$$\left(\frac{z}{a}-1\right)^k\Phi(z)=\Phi_1(z).$$

On peut écrire

$$I=\int\Phi_1(z)\left(\frac{z}{a}-1\right)^{-k}\frac{dz}{z^{n+1}}$$

ou

$$I=\lambda(\text{arc ABC})\Phi_1(\xi)\frac{\left(\frac{\xi}{a}-1\right)^{-k}}{\xi^{n+1}}.$$

En appelant $r$ le rayon de la circonférence et R le module de $a$, on a

$$|\lambda\,\text{arc}(\text{ABC})|<2\pi r,\qquad \left|\frac{\left(\frac{\xi}{a}-1\right)^{-k}}{\xi^{n+1}}\right|<\frac{\mathrm{R}^k r^{-k}}{(\mathrm{R}-r)^{n+1}}.$$

On peut donc écrire

$$|\mathrm{I}|<2\pi\frac{\mathrm{R}^k r^{1-k}}{(\mathrm{R}-r)^{n+1}}|\Phi_1(\xi)|;$$

$1-k$ étant positif, on peut toujours prendre $r$ assez petit pour que, quelle que soit la valeur donnée à $n$, $|\mathrm{I}|$ soit inférieur à toute quantité donnée. $|\mathrm{I}|$ tend donc vers zéro lorsque $r$ tend vers zéro. C. Q. F. D.

LEMME IV. — *Appelons $h$ une quantité plus grande que $-1$, $n$ un nombre supérieur à $h$, et considérons l'intégrale*

$$\mathrm{I}=\int\left(\frac{z}{a}-1\right)^h\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un chemin $ab$ (fig. 5) de troisième espèce par rapport au point $a$, dont l'extrémité $b$ est à l'infini. Admettons que la détermination de $\left(\frac{z}{a}-1\right)^h$ figurant sous le signe $\int$ soit celle qui est réelle et positive le long du prolongement, au delà de $a$, du segment de droite joignant l'origine au point $a$.*

*Dans ces conditions, si l'intégration part du point $a$, on a*

$$\mathrm{I}=\frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}. \tag{6}$$

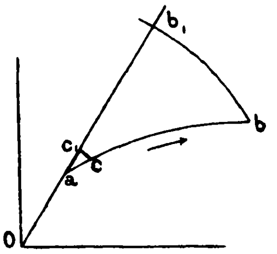
En effet, menons suivant le prolongement de $Oa$ une droite indéfinie $ab_1$ et décrivons : 1° de l'origine comme centre, un arc de cercle $bb_1$ de rayon infini ; 2° du point $a$ comme centre, avec un rayon infiniment petit, l'arc de cercle $cc_1$.

On peut écrire

$$(cb) = (cc_1) + (c_1 b_1) + (b_1 b), \tag{7}$$

en convenant, suivant l'usage, de représenter l'intégrale proposée prise

Fig. 5.




le long d'un certain chemin par ce chemin écrit entre parenthèses. D'après le lemme III, l'intégrale $(cc_1)$ est infiniment petite.

Ainsi, en faisant tendre vers zéro le rayon de l'arc $cc_1$, l'équation (7) devient

$$(ab) = (ab_1) + (b_1 b). \tag{8}$$

L'intégrale $(bb_1)$ est nulle, car en appelant, comme ci-dessus, $\lambda$ un facteur convenable, de module inférieur à 1, et $\xi$ l'affixe d'un point particulier du chemin d'intégration, on a

$$(b_1 b) = \lambda \operatorname{arc} bb_1 \frac{\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^h}{\xi^{n+1}}.$$

Or, en appelant $\rho$ le rayon avec lequel a été décrit l'arc $bb_1$, on a

$$\operatorname{arc} bb_1 < 2\pi\rho,$$

$$\left| \frac{\left(\frac{\xi}{a} - 1\right)^h}{\xi^{n+1}} \right| = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{\xi} \right|^h \frac{1}{\rho^{n-h+1}}.$$

On peut donc écrire

$$(b_1 b) < 2\pi \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{\xi} \right|^h \frac{1}{\rho^{n-h}}.$$

Lorsque $\rho$ augmente indéfiniment, $\frac{1}{\xi}$ tend vers zéro; le facteur $\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{\xi} \right|^h$ reste fini et le facteur $\frac{1}{\rho^{n-h}}$ tend vers zéro. L'intégrale $(b_1 b)$ tend donc vers zéro et l'égalité (8) se réduit à

$$(9) \qquad (ab) = (ab_1).$$

L'argument de $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h$ le long de $ab_1$ étant nul, l'égalité (9) donne, d'après le lemme II,

$$(ab) = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *Si l'extrémité $b$ du contour est à une distance de $a$ finie, on peut écrire*

$$(10) \qquad I = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} + \eta,$$

*le produit $n^q a^n \eta$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.*

C'est ce qui résulte du théorème I. On passe effectivement du cas actuel au cas où $b$ est à l'infini, en ajoutant au chemin d'intégration donné un contour de seconde espèce par rapport au point $a$.

Lemme V. — *Soient $f(x)$ une fonction imaginaire d'une variable réelle $x$, et $F(x)$ une fonction réelle de $x$ qui ne change pas de signe lorsque $x$ reste compris entre $\alpha$ et $\beta$; on a*

$$(11) \qquad \int_\alpha^\beta F(x) f(x)\, dx = \lambda f(\xi) \int_\alpha^\beta F(x)\, dx,$$

*$\lambda$ étant un facteur de module inférieur à 1, et $\xi$ une valeur de $x$ comprise entre $\alpha$ et $\beta$.*

Cette proposition, découverte par M. Darboux [1], est entièrement générale et s'applique du moment où les intégrales

$$\int_\alpha^\beta F(x) f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta F(x)\, dx$$

sont finies.

Lemme VI. — *Considérons l'intégrale*

$$(12) \qquad I = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un chemin ab (fig. 6) de troisième espèce par rapport au point a, h étant un nombre supérieur à* $-1$ *et* $\psi(z)$ *une fonction* finie *ou* quasi finie *de z le long du contour d'intégration* (n° **1**).

*Supposons : 1° que les singularités de cette fonction soient à une distance du point a supérieure à une longueur finie* $\rho$; *2° que* $\psi(a)$ *soit finie, le point a pouvant d'ailleurs être un point singulier de* $\psi(z)$. *Dans ces conditions, le produit* $R^n n^{1+h} |I|$, *où* $R = |a|$, *ne dépasse pas un nombre fixe lorsque n croît indéfiniment.*

En effet, prenons un point D, sur le contour $ab$, à la distance $\rho$ du point $a$.

Décrivons du point $a$ comme centre : 1° un arc de cercle DC, limité d'une part au point D et d'autre part en C, à la droite O$a$ prolongée; 2° un arc de cercle $a'a''$ avec un rayon infiniment petit.

D'après les hypothèses faites, les singularités de $\psi(z)$ sont extérieures à l'aire C$a'a''$D. Il en résulte que le chemin $a''$D peut être remplacé par le chemin $a''a'$CD.

Ainsi on peut écrire

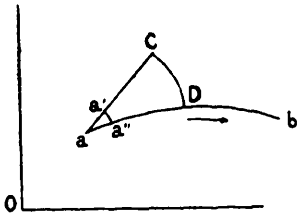
$$(a''b) = (a''a') + (a'C) + (CD) + (Db).$$

---

[1] Darboux, *Journal de Mathématiques*, 1876. — *Voir* aussi E. Picard, *Traité d'Analyse*, 1re édition, t. I, p. 36.

Les chemins CD, D$b$ sont de seconde espèce par rapport au point $a$, en sorte qu'en désignant par $\eta$ la somme $(\mathrm{CD}) + (\mathrm{D}b)$, le produit $n^q \mathrm{R}^n \eta$ tend vers zéro, en vertu du théorème I, lorsque $n$ augmente indéfiniment, $q$ désignant un nombre fixe quelconque.

Fig. 6.




Quant à l'intégrale $(a''a')$, elle est infiniment petite, comme on l'a établi au lemme III.

Ainsi on peut écrire, en faisant tendre vers zéro le rayon de l'axe $a''a'$,

$$(ab) = (a\mathrm{C}) + \eta.$$

Appelons $\omega$ et R l'argument et le module de $a$; on peut faire le long de $a$C

$$z = (x + \mathrm{R})\mathrm{E}^{i\omega},$$

$x$ étant une variable réelle comprise entre o et $l = a\mathrm{C}$. On a aussi le long de $a$C

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h = \left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h,$$

$\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^n$ étant positif et réel.

En prenant $x$ comme variable d'intégration, l'intégrale $(a\mathrm{C})$ devient

$$(ab) = \frac{1}{\mathrm{E}^{in\omega}} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h}{(\mathrm{R} + x)^{n+1}} \psi(a + x\mathrm{E}^{i\omega})\, dx + \eta.$$

La fonction $\dfrac{\left(\frac{x}{\mathrm{R}}\right)^h}{(\mathrm{R} + x)^{n+1}}$ est positive; on peut donc, d'après le lemme V, faire sortir la fonction $\psi$ du signe $\int$ et prendre comme valeur de l'intégrale (12)

$$(13)\qquad (ab) = \lambda\psi(a+\xi E^{i\omega})\frac{1}{E^{in\omega}}\int_0^l \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^h}{(R+x)^{n+1}}dx + \eta,$$

$\lambda$ étant un facteur de module inférieur à 1 et $\xi$ l'affixe d'un point de $aC$. Or l'intégrale qui figure dans le second membre de cette égalité (lemme II) est telle que son produit par $R^n n^{1+h}$ reste fini lorsque $n$ augmente indéfiniment.

La proposition à démontrer résulte immédiatement de cette propriété puisque la fonction $\psi$ est finie et que le produit $R^n n^{1+h}\eta$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Théorème II. — *Soient $n$ un nombre positif très grand, entier ou fractionnaire, et $F(z)$ une fonction indépendante de $n$. Considérons l'intégrale*

$$(14)\qquad M = \int_C F(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un contour C de troisième espèce par rapport à un point d'affixe $a$. Cette intégrale étant supposée finie, admettons que $a$ soit séparé des singularités de $F(z)$ et de l'origine par des espaces finis. Admettons, en outre, qu'on puisse écrire dans le domaine de $a$*

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} F(z) = {} & A_1\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha_1} + A_2\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha_2} + \ldots \\ & + A_p\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha_p} + \left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha}\psi(z), \end{aligned}\right.$$

*la fonction $\psi(z)$ étant finie dans le domaine de $a$; $A_1, A_2, \ldots, A_p$ désignant des constantes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$ des nombres entiers ou fractionnaires vérifiant les inégalités*

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_p < \alpha.$$

*Dans ces conditions, si l'on pose*

$$(16)\quad F_1(z) = A_1\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha_1} + A_2\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha_p}$$

*et*

$$N = \int_C F_1(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*l'intégrale étant prise le long du contour* C, *le produit*

$$R^n n^{1+\alpha}(M-N)$$

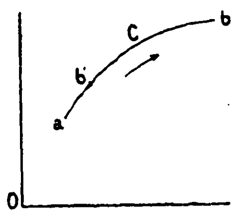
*n'augmente pas indéfiniment avec n.*

On a en effet, identiquement,

$$M - N = \int_C [F(z) - F_1(z)]\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Figurons le chemin C et prenons sur ce chemin un point $b'$ assez

Fig. 7.




près du point $a$ pour que l'expression (15) de $F(z)$ soit valable tout le long de l'arc $ab'$. On peut écrire

$$(17)\qquad M - N = (ab') + (b'b).$$

Le chemin $b'b$ est de seconde espèce par rapport au point $a$; désignons par $\eta'$ l'intégrale $(b'b)$. On sait, en vertu du théorème I, que le produit $a^n n^q \eta'$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.

Or, en remplaçant dans l'intégrale $(ab')$ la différence $F(z) - F_1(z)$

par sa valeur tirée des équations (15) et (16), on a

$$M - N = \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta,$$

d'où

$$a^n n^{1+\alpha}(M - N) = a^n n^{1+\alpha} \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + a^n n^{1+\alpha} \eta.$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $a^n n^{1+\alpha}\eta$ tend vers zéro, et $a^n n^{1+\alpha} \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z)$ reste fini d'après le lemme VI. C. Q. F. D.

5. Évaluation approchée de l'intégrale (14). — Nous supposerons essentiellement, pour l'application de ce théorème, que les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ont été choisies de façon que les déterminations des binomes $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1}$, $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2}$, ..., figurant dans le développement (15) de $F(z)$, soient celles qui sont réelles et positives pour les points $z$ situés sur le prolongement, au delà de $a$, du segment de droite allant de l'origine à ce point $a$. Posons

$$(18) \qquad V_h = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(\alpha_h + 1)\Gamma(n - \alpha_h)}{\Gamma(n+1)};$$

on a, d'après le lemme IV,

$$(19) \qquad \int_{(ab')} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_h} \frac{dz}{z^{n+1}} = V_h + \eta_h,$$

le produit $a^n n^{1+h}\eta_h$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Le théorème II donne

$$M = N + N',$$

le produit $a^n n^{1+\alpha} N'$ n'augmentant pas indéfiniment avec $n$, et

$$N = A_1 \int_{(ab)} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1} \frac{dz}{z^{n+1}} + A_2 \int_{(ab)} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2} \frac{dz}{z^{n+1}} + \ldots$$
$$+ A_p \int_{(ab)} \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_p} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

On peut écrire, d'après la formule (19),

$$N = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_p V_p + \eta,$$

en posant

$$\eta = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \ldots + A_p \eta_p;$$

et comme $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des constantes finies, le produit $a^n n^{1+\alpha} \eta$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Ainsi on peut écrire

$$(20) \qquad M = A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3 + \ldots + A_p V_p + N'_1,$$

le produit $a^n n^{1+\alpha} N'_1$ n'augmentant pas indéfiniment avec $n$. D'après le lemme II, $V_1$ est, pour $n$ très grand, de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_1}}$, $V_2$ de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$, .... M se trouve donc décomposé en un nombre fini de termes qui décroissent de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

On voit aussi qu'en prenant $A_1 V_1$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a_n} \frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$. On peut écrire

$$M = A_1 V_1 (1 + \varepsilon_2),$$

$\varepsilon_2$ étant infiniment petit, de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_2 - \alpha_1}}$.

Si l'on prend $A_1 V_1 + A_2 V_2$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_3}}$; on peut écrire

$$M = (A_1 V_1 + A_2 V_2)(1 + \varepsilon_3),$$

$\varepsilon_3$ étant infiniment petit, de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_3 - \alpha_1}}$.

Etc.

L'erreur commise en prenant pour M sa valeur approchée, lorsque $n$ est très grand, est d'autant plus petite que le nombre des termes pris dans le second nombre de l'équation (20) est plus considérable.

Si l'on veut avoir l'expression de M développée suivant les puissances descendantes de $n$, il restera à faire usage de la formule de Stirling. Nous établirons plus loin directement [formule (51)] l'expression très commode pour cet usage,

$$\Gamma(n+p) = \sqrt{2\pi}\,E^{-n} n^{n+p-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12n}[1 + 6p(p-1)](1+\varepsilon) \right\},$$

dans laquelle E désigne la base des logarithmes népériens, $p$ un nombre fini, $n$ un grand nombre et $\varepsilon$ une quantité de l'ordre de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire telle que $n\varepsilon$ tend vers une limite pour $n = \infty$.

## § III.

### Des intégrales de la forme $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$ prises le long d'un contour de première espèce.

6. Lemme VII. — *L'intégrale*

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int \left(1 - \frac{z}{a}\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un contour* ABC *de première espèce par rapport au point* $a$, *dont les extrémités* A, C *sont à l'infini, a pour valeur*

$$I = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)}, \tag{21}$$

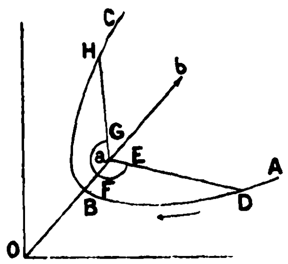
$n$ *désignant un nombre quelconque supérieur à* $h$.

On suppose : 1° que la variable en cheminant sur le contour d'intégration tourne autour du point $a$ dans le sens des arguments décroissants; 2° que la détermination du binome $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h$ qui figure dans l'élément différentiel de l'intégrale proposée est celle qui est réelle et positive le long du segment de droite joignant l'origine au point $a$.

1° *Supposons* $h > -1$.

Prenons sur la branche BC du contour un point quelconque H, plus éloigné de l'origine que le point $a$, et menons la droite H$a$. Prenons de même sur la branche BA un point D, plus éloigné de l'origine que le

Fig. 8.




point $a$, et menons la droite $a$D. Du point $a$ comme centre décrivons, avec un rayon infiniment petit, l'arc de cercle EFG limité aux droites $a$D, $a$H.

Le chemin DEFGH est équivalent, pour l'intégrale proposée, au chemin DBH. On peut donc écrire

$$(\mathrm{ABC}) = (\mathrm{ADE}) + (\mathrm{EFG}) + (\mathrm{GHC}).$$

L'intégrale (EFG) peut devenir plus petite que toute quantité donnée, en prenant le rayon de la circonférence assez petit, comme nous l'avons déjà établi à propos du lemme III. En faisant tendre $r$ vers zéro, il vient donc

$$(\mathrm{ABC}) = (a\mathrm{HC}) - (a\mathrm{DA}).$$

Or, étant donné que la détermination de $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h$, qui rentre sous le signe $\int$ de l'intégrale proposée, est celle dont l'argument est nul le long de O$a$, on peut écrire

$$(a\mathrm{HC}) = \frac{\mathrm{E}^{-ih\pi}}{2i\pi}\int_{a\mathrm{HC}}\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

$$(a\mathrm{DA}) = \frac{\mathrm{E}^{ih\pi}}{2i\pi}\int_{a\mathrm{DA}}\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

la détermination de $\left(\frac{z}{a}-1\right)^h$ qui figure sous les signes $\int$ étant celle dont l'argument est nul le long du chemin rectiligne $ab$ situé dans le prolongement de $Oa$. Il en résulte, en vertu du lemme IV,

$$(a\mathrm{HC})=\frac{\mathrm{E}^{-ih\pi}}{2i\pi}\frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)},$$

$$(a\mathrm{DA})=\frac{\mathrm{E}^{ih\pi}}{2i\pi}\frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)},$$

$$(\mathrm{ABC})=-\frac{\sin h\pi}{\pi}\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Tenant compte de la relation connue

$$\Gamma(-h)\Gamma(1+h)=-\frac{\pi}{\sin h\pi},$$

on tombe sur le résultat qu'il fallait établir.

2° *h est inférieur à* $-1$.

Il suffit d'établir que le théorème, supposé vrai pour $h$, a encore lieu lorsqu'on remplace $h$ par $h-1$.

De l'identité

$$\frac{d}{dz}\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+1}}=-(n+1)\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+2}}-\frac{h}{a}\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}$$

on tire

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}dz=-\frac{a}{2i\pi h}\left[\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+1}}\right]-a\frac{n+1}{2i\pi h}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+2}}dz.$$

Les limites du contour étant à l'infini, la partie (ABC) intégrée disparaît puisque $n>h$; il reste

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}dz=-a\frac{n+1}{h}\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h}{z^{n+2}}dz$$

ou, d'après la formule (21),

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{a^n}\frac{n+1}{-h}\frac{\Gamma(n+1-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+2)},$$

ce qui devient, d'après l'une des propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^{h-1}}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{a^n}\frac{\Gamma[n-(h-1)]}{\Gamma[-(h-1)]\Gamma(n+1)}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si les extrémités* A, C *du contour sont à distance finie de l'origine, on a*

$$I = \frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)} + \eta,$$

*le produit $n^q a^n \eta$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.*

C'est ce qui résulte du lemme II. On passe effectivement du cas actuel au cas où les extrémités du contour sont à l'infini en ajoutant, au chemin d'intégration donné, des contours de seconde espèce, par rapport au point $a$, joignant les points A et C à l'infini.

Lemme VIII. — *Considérons l'intégrale*

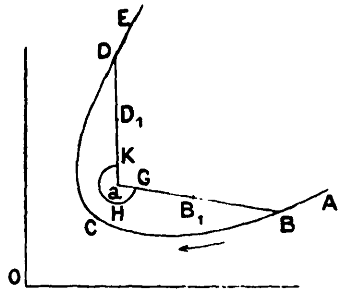
$$I = \int\Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un chemin* ABCDE (*fig.* 9) *de première espèce relativement à un certain nombre de points singuliers de $\Phi(z)$, $n$ désignant un nombre positif.*

*Cette intégrale étant supposée finie lorsque $n$ est fini, appelons $a$ l'affixe de celui des points singuliers de $\Phi(z)$ qui approche le plus de l'origine et posons* $R = |a|$.

*Admettons :* 1° *que $a$ soit séparé des autres points singuliers et de l'origine par des espaces finis;* 2° *que si la fonction $\Phi(z)$ est infinie* *pour $z = a$ cet infini est d'ordre inférieur à l'unité;* 3° *que si le contour rencontre une ou plusieurs singularités de $\Phi(z)$ ces singularités sont plus éloignées de l'origine que le point $a$. Dans ces*

Fig. 9.




*conditions, on peut remplacer le contour d'intégration donné par deux chemins de troisième espèce, par rapport au point $a$, à la condition d'ajouter au résultat obtenu une quantité $\eta$ dont le produit par $n^q R^n$ tend vers zéro, quel que soit le nombre fixe $q$, lorsque $n$ augmente indéfiniment. La longueur de ces chemins de troisième espèce doit être finie, mais peut être prise aussi petite que l'on veut.*

En effet, sur la branche CE du contour, prenons un point D plus éloigné de l'origine que $a$ et menons la droite D$a$; sur la branche CA du contour, prenons un point B plus éloigné de l'origine que $a$ et menons la droite B$a$. Du point $a$ comme centre, avec un rayon infiniment petit, décrivons un arc de cercle GHK limité aux droites $a$B, $a$D.

D'après l'hypothèse, on peut choisir les points D et B de telle sorte que les singularités de la fonction $\Phi(z)$ soient extérieures au contour BCDKHGB. On peut donc remplacer la partie BCD du contour donné par le chemin BGHKD.

Prenons sur $a$B un point $B_1$ quelconque, à distance finie de $a$, sur $a$D un point $D_1$ quelconque à distance finie de $a$. Ces points $B_1$ et $D_1$ sont plus éloignés de l'origine que le point $a$.

Cela étant, on peut écrire

$$(\mathrm{ABCDE}) = (\mathrm{ABB_1}) + (\mathrm{B_1G}) + (\mathrm{GHK}) + (\mathrm{KD_1}) + (\mathrm{D_1DE}).$$

Les chemins $ABB_1$, $D_1DE$ sont de deuxième espèce par rapport au point $a$. On peut donc, d'après le lemme II, représenter la somme

$$(ABB_1) + (D_1DE)$$

par $\eta$ le produit $n^q R^n \eta$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Quant à l'intégrale (GHK), elle est infiniment petite, comme on l'a établi à propos du lemme III.

Ainsi, en faisant tendre vers zéro le rayon de la circonférence GHK, il vient

$$(ABCDE) = (B_1 a) + (a D_1) + \eta.$$

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Les points $D_1$ et $B_1$ étant plus éloignés de l'origine que $a$, on peut relier ces deux points par un chemin S de seconde espèce par rapport au point $a$. Il en résulte, d'après le théorème I, qu'on peut écrire, si $\Phi(z)$ est une fonction holomorphe dans le voisinage du point $a$,

$$\int_{(B_1 a)} \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \int_{(a D_1)} \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} = \eta',$$

le produit $n^q R^n \eta'$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.

Le chemin S est effectivement équivalent au chemin $B_1 a D_1$ pour l'intégrale $\int \Phi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$.

7. Théorème III. — *Soit $n$ un nombre positif très grand, entier ou fractionnaire. Considérons l'intégrale*

$$M = \frac{1}{2i\pi} \int_C F(z) \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{22}$$

*prise le long d'un contour C de première espèce par rapport à un certain nombre de points singuliers de $F(z)$.*

*Appelons $a$ l'affixe de celui de ces points singuliers qui approche le plus de l'origine.*

*Supposons que ce point a soit séparé des autres singularités de* $F(z)$ *et de l'origine par des espaces finis et que le contour ne rencontre aucune singularité de* $F(z)$ *à une distance de l'origine inférieure ou égale à* $|a|$. *Admettons en outre qu'on puisse écrire, dans le voisinage de a,*

$$(23)\quad \begin{cases} F(z) = \varphi(z) + A_1\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} \\ \qquad + A_2\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} + \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha}\psi(z); \end{cases}$$

*la fonction* $\varphi$ *étant holomorphe et la fonction* $\psi$ *finie dans le domaine de* $a$; $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *désignant des constantes;* $\alpha$, *un nombre supérieur à* $-1$, *vérifiant les inégalités*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_p < \alpha.$$

*Dans ces conditions, si l'on pose*

$$(24)\quad F_1(z) = A_1\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} + A_2\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}$$

*et*

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_C F_1(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*l'intégrale étant prise le long du contour* C, *le produit*

$$R^n n^{1+\alpha}(M - N)$$

*n'augmente pas indéfiniment avec n, en faisant* $R = |a|$.

Les binomes affectés d'exposants positifs entiers rentrant dans la fonction $\varphi$, on peut faire l'hypothèse que la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ne contient pas d'entiers positifs.

Cela étant, considérons la différence

$$(25)\qquad M - N = \frac{1}{2i\pi}\int_C [F(z) - F_1(z)]\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Dans le voisinage du point $a$ on peut écrire, en vertu des formules (22) et (23),

$$F(z) - F_1(z) = \varphi(z) + \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z). \tag{26}$$

Si donc la fonction $F(z) - F_1(z)$ devient infinie pour $z = a$, cet infini est d'ordre inférieur à l'unité, puisque $\alpha > -1$. On peut dès lors, pour évaluer l'intégrale (25), remplacer le contour C par deux chemins de troisième espèce par rapport au point $a$, $B_1 a$, $a D_1$ (*fig.* 9), comme il a été dit au lemme VIII.

La longueur de ces chemins doit être finie, mais aussi petite qu'on veut; on doit d'ailleurs ajouter au résultat obtenu une quantité $\eta'$ dont le produit par $R^n n^q$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.

Ainsi on peut écrire

$$M - N = \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} [F(z) - F_1(z)] \frac{dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} [F(z) - F_1(z)] \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta'.$$

En choisissant les longueurs de $B_1 a$ et de $a D_1$ de façon que l'expression (26) soit valable le long de ces chemins, on aura

$$\begin{aligned} M - N = {} & \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} \varphi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} \varphi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta'. \end{aligned}$$

On peut remplacer la somme des intégrales dont l'élément différentiel dépend de $\varphi(z)$ par $\eta''$, comme on l'a fait observer à la fin du lemme VIII, le produit $n^q R^n \eta''$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$. Il vient donc, en faisant $\eta' + \eta'' = \eta$,

$$M - N = \frac{1}{2i\pi}\int_{(B_1 a)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi}\int_{(a D_1)} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \psi(z) \frac{dz}{z^{n+1}} + \eta.$$

Le théorème qu'il s'agit de démontrer résulte de cette égalité, car le produit $n^{1+\alpha}R^n\eta$ tend vers zéro et le produit par $n^{1+\alpha}R^n$ de chacune des intégrales qui figure au second membre n'augmente pas indéfiment avec $n$, d'après le lemme VI. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Si la fonction $\psi(z)$ est identiquement nulle, c'est-à-dire si l'expression (22) de $F(z)$ se termine au terme en $\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}$, la différence $M-N$ se réduit à $\eta$ d'après ce qui précède.

On voit que le produit $R^n n^q(M-N)$ tend alors vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, quel que soit le nombre fixe $q$.

Cette circonstance se présente notamment lorsque $a$ est un pôle de $F(z)$.

8. Évaluation approchée de l'intégrale (22). — Le théorème qui précède conduit à l'évaluation approchée de l'intégrale (22) lorsque $n$ est un grand nombre.

Posons

$$T_h=\frac{1}{a^n}\frac{\Gamma(n-\alpha_h)}{\Gamma(-\alpha_h)\Gamma(n+1)}.$$

On peut écrire, en vertu du théorème précédent,

$$M=N-N',$$

le produit $R^n n^{1+\alpha}N'$ n'augmentant pas indéfiniment avec $n$. Or on a

$$\begin{aligned}N=\;&\frac{A_1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\frac{dz}{z^{n+1}}\\&+\frac{A_2}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}\frac{dz}{z^{n+1}}+\ldots+\frac{A_p}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}\frac{dz}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

Supposons le sens de l'intégration choisi de façon que la variable, en cheminant sur le contour, tourne autour du point $a$, dans le sens des arguments décroissants. Admettons d'ailleurs que les déterminations des binomes qui figurent sous les signes $\int$ dans l'expression de N soient celles dont les arguments sont nuls le long du segment de droite joignant l'origine au point $a$. Dans ces conditions on a, d'après le corollaire du lemme VII,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\frac{dz}{z^{n+1}} = T_1+\eta_1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}\frac{dz}{z^{n+1}} = T_2+\eta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}\frac{dz}{z^{n+1}} = T_p+\eta_p,$$

le produit de chacune des quantités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ par $R^n n^{1+\alpha}$ tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$. Il en résulte

$$N = A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + \dots + A_pT_p + \eta,$$

le produit $R^n n^{1+\alpha}\eta$ tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

Ainsi on peut écrire

$$(27)\qquad M = A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + \dots + A_pT_p + N'_1,$$

le produit $R^n n^{1+\alpha} N'_1$ n'augmentant pas indéfiniment avec $n$.

En vertu du lemme I, $T_1$ est de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_1}}$, pour $n$ très grand, $T_2$ de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$, etc. M se trouve donc décomposé en un nombre fini de termes qui décroissent de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$.

On voit ainsi qu'en prenant $A_1T_1$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_2}}$. On peut écrire

$$M = A_1T_1(1+\varepsilon_2),$$

$\varepsilon_2$ étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_2-\alpha_1}}$.

Si l'on prend $A_1T_1 + A_2T_2$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_1}}$. On peut écrire

$$M = (A_1T_1 + A_2T_2)(1 + \varepsilon_3),$$

$\varepsilon_3$ étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_3-\alpha_1}}$, etc.

L'erreur relative commise en prenant pour M sa valeur approchée, lorsque $n$ est un grand nombre, est d'autant plus petite que le nombre de termes pris dans le second membre de l'équation (27) est plus considérable.

Si l'on veut développer M suivant les puissances descendantes de $n$, il convient de faire usage de l'expression de $\Gamma(n+p)$ donnée à la fin du nº **5**, formule qui sera établie plus loin.

*Remarque.* — En général, la fonction $\psi(z)$ est développable en série de termes composés de puissances positives de $\left(1 - \frac{z}{a}\right)$. On peut, dans cette hypothèse, accroître à volonté l'exposant $\alpha$ et diminuer autant qu'il est nécessaire l'erreur relative commise lorsqu'on prend à la place de M son expression approchée.

**9.** Généralisation. — Revenons à l'énoncé du théorème III. Il peut se faire que, parmi les points singuliers de $F(z)$ par rapport auxquels le contour est de première espèce, un certain nombre de ces points $a$, $b$, ... soient équidistants de l'origine et en même temps plus rapprochés de l'origine que tous les autres.

Chacun de ces points $a$, $b$, ... apporte alors un appoint à l'expression approchée de M.

Considérons, pour simplifier, le cas où les points singuliers particuliers dont il est question se réduisent à deux, $a$ et $b$. Prenons (*fig.* 10) un point D, plus éloigné de l'origine que $a$ et $b$, et joignons ce point à un point B du contour donné, de façon que le chemin DB sépare les points $a$ et $b$ et ne rencontre aucune singularité de $F(z)$, ce qui est évidemment possible d'après les hypothèses qui ont été faites.

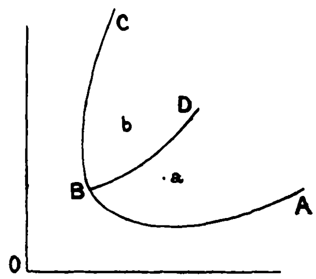
On a identiquement

$$(ABC) = (ABD) + (DBC).$$

Le chemin ABD est de première espèce par rapport au point $a$ et le chemin DBC de première espèce par rapport au point $b$. Les intégrales (ABD), (DBC) s'évaluent donc d'après la règle que nous avons déduite du théorème II.

Ainsi, pour obtenir l'évaluation approchée de M il faut appliquer la

Fig. 10.




règle donnée au n° **8** à chacun des points singuliers $a$, $b$, ... successivement et faire la somme des résultats partiels.

L'ordre de l'erreur commise, lorsqu'on remplace M par cette expression approchée, est égal à l'ordre de l'erreur qu'apporte avec lui le résultat partiel le moins approché.

Le théorème III comprend, en supposant $n$ entier, les résultats auxquels est arrivé M. Flamme, dans sa thèse de doctorat, par des considérations entièrement différentes.

**10.** De ce qui précède nous allons tirer quelques conséquences, en supposant $n$ entier.

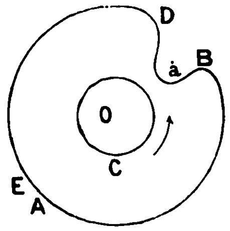
Supposons que l'intégrale (22) soit prise, dans le sens direct, le long d'un contour fermé C (*fig.* 11) entourant l'origine, et admettons que la fonction $F(z)$ reprenne sa valeur lorsque la variable, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ. Soit $a$ l'affixe du point singulier de $F(z)$ extérieur au contour C, le plus rapproché de l'origine.

L'évaluation approchée de M, pour $n$ très grand, s'obtient en appliquant au point $a$ la règle exposée au n° **8**.

En effet, $F(z)$ reprenant sa valeur lorsque la variable décrit le contour C en entier, ce contour peut être déformé arbitrairement à condition de ne faire traverser au contour ni l'origine ni aucun point singulier de $F(z)$. En particulier, on peut prendre comme nouveau contour d'intégration une circonférence DEAB, de rayon supérieur à $|a|$, déformée comme il est indiqué sur la figure de façon à laisser le point $a$ à l'extérieur du contour. Le rayon de la circonférence doit d'ailleurs être choisi de façon que les points singuliers de $F(z)$, plus éloignés de l'origine que $a$, soient à l'extérieur du nouveau contour.

En prenant comme extrémités du contour un point E, A sur la cir-

Fig. 11.




conférence, le contour ABDE est de première espèce, par rapport au point $a$. La règle donnée au n° **8** est donc applicable. C. Q. F. D.

On raisonnerait de la même façon s'il y avait à l'extérieur du contour C plusieurs points singuliers de $F(z)$ à égale distance de l'origine et plus rapprochés de ce point que les autres singularités de $F(z)$ extérieures au contour C. On doit, dans ce cas, appliquer la règle exposée au n° **9**.

Supposons en particulier que $F(z)$ soit développable par la série de Mac Laurin à l'intérieur d'un cercle de rayon R et admettons que la convergence du développement cesse au delà de ce cercle parce que la fonction possède sur la circonférence un ou plusieurs points singuliers de la nature de ceux qui ont été considérés jusqu'ici. M représente alors le coefficient de $z^n$ dans le développement de $F(z)$. La considération des singularités dont il s'agit permet d'obtenir la valeur approchée de ce coefficient.

C'est cette proposition très importante que M. Darboux a établie dans son Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres et qu'il a appliquée notamment à l'étude des polynomes de la série hypergéométrique.

Si la fonction $F(z)$ est développable, non par la série de Mac Laurin, mais par la série de Laurent à l'intérieur d'une couronne circulaire limitée extérieurement par une circonférence de rayon R, la considération des points singuliers situés sur cette circonférence permettra, comme l'a remarqué M. Flamme, d'obtenir la valeur approchée du coefficient de $z^n$.

Pour obtenir la valeur approchée du coefficient de $\frac{1}{z^n}$, on posera $z = \frac{1}{z'}$ et l'on cherchera la valeur approchée du coefficient de $z'^n$.

## § IV.

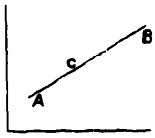
### Évaluation approchée des intégrales de la forme $I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du$.

11. Il convient, avant d'étudier l'intégrale I, de rappeler comment varie le module d'une fonction $\varphi(u)$ dans le voisinage d'un point $u = c$.

Supposons cette fonction holomorphe autour de ce point et non nulle pour $u = c$.

Lorsque $|\varphi'(c)| > 0$, il existe une droite AB (*fig.* 12) passant par $c$ et divisant le plan en deux régions telles que, pour les valeurs de $u$

Fig. 12.




suffisamment voisines de $c$, $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ dans une des régions, et $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ dans l'autre région.

Lorsque $\varphi'(c) = 0$, il existe deux droites rectangulaires AB, DE passant par $c$ (*fig.* 13) et divisant le plan en quatre régions jouissant des propriétés suivantes : 1° dans les régions comprises à l'intérieur de deux angles opposés par le sommet, DcA, BcE, par exemple, et pour des valeurs de $u$ suffisamment voisines de $c$, on a

$$|\varphi(u)| > |\varphi(c)|;$$

2° dans les régions comprises à l'intérieur des deux autres angles opposés par le sommet, on a

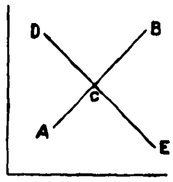
$$|\varphi(u)| < |\varphi(c)|.$$

Lorsque $\varphi(u)$ n'est pas holomorphe, mais peut se mettre, dans le voisinage de $c$, sous la forme

$$\varphi(u) = \varphi(c) + A_1(u-1)^{\alpha_1} + A_2(u-1)^{\alpha_2} + \ldots \qquad (0 < \alpha_1 < \alpha_2 \ldots),$$

il existe autour du point $c$ des régions dans lesquelles $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ et d'autres régions dans lesquelles $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$. Nous reviendrons

Fig. 13.




sur ce point un peu plus loin. Ce qu'il importe de retenir pour le moment, c'est que, dans le voisinage du point $u = c$, on peut tracer des chemins partant de $c$ et le long desquels $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$.

**12.** Étant données deux fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$, nous allons chercher l'expression asymptotique de l'intégrale

$$(28) \qquad I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du$$

dans les circonstances suivantes : 1° le chemin d'intégration $S = cA$ (*fig.* 14) est limité au point $c$; 2° le long de ce chemin $|\varphi(u)|$ est inférieur à $|\varphi(c)|$; 3° $n$ est un nombre positif très grand entier ou fractionnaire; 4° la variable d'intégration part du point $u = c$ sur le contour.

Posons

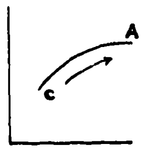
$$z = \frac{1}{\varphi(u)}, \qquad F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)}.$$

L'intégrale proposée ([1]) se change en

$$(29) \qquad I = \int F(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

et cette nouvelle intégrale est évidemment égale à la proposée si on la

Fig. 14.




prend le long d'un chemin d'intégration $S_1$ obtenu en faisant correspondre, dans le plan de la variable $z$, à chaque point $u$ du contour proposé S un point ayant pour affixe

$$z = \frac{1}{\varphi(u)}.$$

Le long du chemin S, on a $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$; on voit donc que le chemin $S_1$ part du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$ et que tous ses points sont plus éloignés de l'origine des $z$ que le point $\frac{1}{\varphi(c)}$. Le contour $S_1$ est donc de troisième espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$. Nous sommes ainsi ramenés, pour trouver l'expression asymptotique de l'intégrale (28), à appliquer le théorème I à l'intégrale (29), ce qui nécessite la connaissance du développement de la fonction $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$.

*Premier cas.* — Les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont holomorphes, dans le voisinage de la valeur $u = c$, et $c$ est racine de l'équation $\varphi'(u) = 0$.

Nous nous appuierons sur un résultat concernant la série de Lagrange ([2]), pour obtenir le développement de $F(z)$.

---

([1]) Ce changement de variable a été indiqué par M. Flamme (*loc. cit.*) à propos de l'intégrale dont il sera question au n° 13; il n'en a d'ailleurs fait aucune application.

([2]) M. Hamy, *Sur une extension de la série de Lagrange* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1^re Partie, 1896, p. 213).

Étant données l'équation

$$(30) \qquad u - c - \nu\chi(u) = 0,$$

où $\chi(u)$ est une fonction holomorphe dans le voisinage du point $c$, et une fonction $\Phi(u)$ uniforme autour du point $c$, admettant la valeur $u = c$ comme pôle simple, si l'on désigne par $\zeta$ la racine de l'équation (30) qui se réduit à $c$ pour $\nu = 0$, on a, pour des valeurs finies de $\nu$ dont le module est inférieur à une quantité finie convenablement choisie,

$$(31) \qquad \Phi(\zeta) = \frac{A}{\nu\chi(c)} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\nu^p}{(p+1)!} \frac{d^p}{du^p}\left[\chi^{p+1}(u) \frac{d}{du} \frac{(u-c)\Phi(u)}{\chi(u)}\right]_{u=c}.$$

A désigne le résidu de la fonction $\Phi(u)$ relatif au pôle $c$; on doit d'ailleurs faire $u = c$ après avoir effectué les dérivations indiquées.

Revenons à notre objet. Convenons de remplacer, pour simplifier l'écriture, $\varphi(c)$, $\varphi''(c)$, $\varphi'''(c)$, ... par $\varphi$, $\varphi''$, $\varphi'''$, ..., et de même $f(c)$, $f'(c)$, $f''(c)$ par $f$, $f'$, $f''$, ....

De l'équation

$$z = \frac{1}{\varphi(u)}$$

on tire

$$z\varphi - 1 = \frac{\varphi - \varphi(u)}{\varphi(u)} = -\frac{\varphi''}{2\varphi}(u-c)^2 \frac{1 + \frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{(u-c)}{3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \dots}{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}$$

et ensuite

$$(32) \qquad u - c = \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{z\varphi - 1}\left[\frac{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}{1 + \frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{u-c}{3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \dots}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{z\varphi - 1} = \nu,$$

$$\chi(u) = \left[\frac{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}{1 + \frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{u-c}{3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \dots}\right]^{\frac{1}{2}},$$

l'équation (32) devient

$$u - c - \nu\chi(u) = 0.$$

On peut convenir de prendre comme détermination de $\chi(u)$ celle qui se réduit à $1$ pour $u - c = 0$, en rejetant sur $\nu$ la double détermination du produit $\nu\chi(u)$ qui a été introduite en extrayant la racine carrée. On peut de même choisir, à volonté, l'argument de $(z\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$ dans l'expression de $\nu$, en rejetant sur le radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ le double déterminant de $\nu$.

Il suffit maintenant de remplacer, dans l'équation (31), $\chi(u)$ par sa valeur et le produit $(u - c)\Phi(u)$ par

$$(u - c)\Phi(u) = -\frac{f(u)}{\varphi'' + \frac{\varphi'''}{1.2}(u - c) + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{1.2.3}(u - c)^2 + \ldots}$$

pour obtenir le développement de $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$.

Le résidu A de $\Phi(u)$ relatif au pôle $c$ étant

$$A = -\frac{f}{\varphi''},$$

on a, puisque $\chi(c) = 1$,

$$(33)\quad F(z) = -\frac{f}{\varphi''}\nu^{-1} - \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\nu^p}{(p+1)!}\frac{d^p}{du^p}\left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}{1 + \frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{u-c}{3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \ldots}\right]^{\frac{p+1}{2}} \times \\ \times \dfrac{d}{du}\dfrac{\dfrac{f(u)}{\varphi'' + \frac{\varphi'''}{1.2}(u-c) + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{1.2.3}(u-c)^2 + \ldots}}{\left[\dfrac{\frac{1}{\varphi}\varphi(u)}{1 + \frac{\varphi'''}{\varphi''}\frac{u-c}{3} + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^2}{3.4} + \frac{\varphi^{\text{V}}}{\varphi''}\frac{(u-c)^3}{3.4.5} + \ldots}\right]^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right\}_{u=c}.$$

Il est à remarquer que le coefficient de $\nu^p$ est une fonction linéaire et homogène des dérivées $f, f', f'', \ldots, f^{p+1}$.

En calculant les premiers termes, on peut écrire la formule (33)

$$\begin{aligned}F(z) = & -\frac{f}{\varphi''}\nu^{-1} + \frac{f\varphi'''}{3\varphi''^2} - \frac{f'}{\varphi''}\\ & + \frac{1}{2\varphi''}\left(\frac{f\varphi^{\text{IV}}}{4\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} + \frac{f\varphi''}{2\varphi} - f''\right)\nu\\ & + \text{des termes contenant } \nu^2 \text{ en facteur,}\end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\nu$ par sa valeur,

$$\begin{aligned}F(z) = & -\frac{f}{\varphi''}\frac{1}{\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}}(z\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{f\varphi'''}{3\varphi''^2} - \frac{f'}{\varphi''}\right)(z\varphi - 1)^0\\ & + \frac{1}{2\varphi''}\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\left(\frac{f\varphi^{\text{IV}}}{4\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} + \frac{f\varphi''}{2\varphi} - f''\right)(z\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}\\ & + (z\varphi - 1)\psi(z),\end{aligned}$$

la fonction $\psi(z)$ étant finie dans le domaine de la valeur $z = \frac{1}{\varphi}$.

Nous pouvons maintenant appliquer à l'intégrale (29) la règle établie au n° 5, en partant de ce développement de $F(z)$.

Dans le cas actuel, $\frac{1}{\varphi}$ joue le rôle de la quantité $a$ du n° 5 et $n+1$ est mis à la place de $n$.

Puisque nous pouvons choisir la détermination de $(z\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$, nous prendrons celle dont l'argument est inférieur à $\frac{\pi}{4}$, en valeur absolue, pour les points situés sur le contour $S_1$ dans le voisinage de $z = \frac{1}{\varphi}$. Les arguments des autres puissances de $z\varphi - 1$, figurant dans le développement de $F(z)$, restent dans ces conditions inférieurs en valeur absolue au produit de $\frac{\pi}{2}$ par les exposants de ces puissances.

On trouve maintenant, en appliquant la règle exposée au n° 5,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int \mathrm{F}(z)\frac{dz}{z^{n+2}} \\ &= -\frac{f}{\varphi''}\frac{1}{\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}}\varphi^{n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} + \left(\frac{f\varphi'''}{3\varphi''^2}-\frac{f'}{\varphi''}\right)\varphi^{n+1}\frac{\Gamma(1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} \\ &\quad + \frac{1}{2\varphi''}\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\left(\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{4\varphi''}-\frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2}+\frac{f\varphi'''}{\varphi''}+\frac{f\varphi''}{2\varphi}-f''\right)\varphi^{n+1} \\ &\qquad\qquad \times\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}(1+\varepsilon), \end{aligned}\right.$$

$\varepsilon$ étant, pour $n$ très grand, de l'ordre de $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

En admettant la formule suivante, où $n$ désigne un grand nombre positif et $\varpi$ un nombre fini quelconque,

$$\Gamma(n+\varpi) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}^{-n} n^{n+\varpi-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{12n}[1+6\varpi(\varpi-1)]+\frac{1}{n^2}(\;)+\ldots\right\},$$

que nous établirons plus loin [formule (43)], on peut ordonner l'expression de I suivant les puissances descendantes de $n$; il vient

$$(34')\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I} = \varphi''\Bigg\{ & \sqrt{\frac{\pi}{n}}\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\,\frac{f}{2}+\frac{1}{n}\,\frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{f\varphi'''}{3\varphi''}-f'\right) \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{4n^{\frac{3}{2}}}\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\left[-\frac{3}{4}f+\frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{1}{4}\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{\varphi''}-\frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2}+\frac{f'\varphi'''}{\varphi''}-f''\right)\right](1+\varepsilon)\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Il reste à fixer la détermination du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$. Or, entre l'affixe $u$ d'un point infiniment voisin du point $c$ pris sur le contour donné S et l'affixe $z$ du correspondant de ce point sur le contour $S_1$, on a, d'après l'équation (32),

$$u - c = \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{z\varphi-1}.$$

On en déduit, à un multiple de $2\pi$ près,

$$\text{argument de } (u-c) = \text{argument de } \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}} + \text{argument de } \sqrt{z\varphi - 1}.$$

L'argument de $u-c$ est égal à l'angle $\Theta$ que fait la tangente menée au point $c$ au contour donné S, dans le sens de l'intégration $cA$ (*fig.* 14), avec l'axe des abscisses, cet angle étant compté dans le sens des arguments croissants.

D'autre part, l'argument de $\sqrt{z\varphi - 1}$ est inférieur à $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue. On peut donc écrire, en appelant $\lambda$ un nombre compris entre $-1$ et $+1$,

$$\text{argument de } \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}} = \Theta + \lambda\frac{\pi}{4}.$$

La partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ a donc le signe de $\cos\left(\Theta + \lambda\frac{\pi}{4}\right)$ et la partie imaginaire le signe de $\sin\left(\Theta + \lambda\frac{\pi}{4}\right)$.

Or, $\cos\left(\Theta + \lambda\frac{\pi}{4}\right)$ restant positif, quelle que soit la valeur de $\lambda$, lorsque $\Theta$ est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, on voit que la partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est alors positive.

Si $\Theta$ est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, c'est $\sin\left(\Theta + \lambda\frac{\pi}{4}\right)$ qui est positif; la partie imaginaire de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est donc positive.

Si $\Theta$ est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$, la partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est négative.

Si $\Theta$ est compris entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$, la partie imaginaire de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est négative.

*Remarque.* — Supposons l'intégrale proposée fonction d'un paramètre qui n'entre que dans $f(z)$. En différentiant la fonction $f(z)$ par rapport à ce paramètre, sous le signe $\int$, on obtient une nouvelle intégrale qui est la dérivée de la proposée par rapport au paramètre. Le développement de cette dérivée, suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, s'obtient en différentiant terme à terme le second membre de la formule (34).

Cette proposition résulte sur-le-champ de ce que les coefficients des différentes puissances de $\frac{1}{n}$ dans la formule (34) sont des fonctions linéaires de $f, f', f'', \ldots$.

*Deuxième cas.* — Considérons maintenant le cas plus général où l'on a, dans le voisinage du point $u = c$,

$$(35)\qquad \begin{cases} f(u) = B_1(u-c)^{\beta_1} + B_2(u-c)^{\beta_2} + \ldots, \\ \varphi(u) = \varphi(c) + A_1(u-c)^{\alpha_1} + A_2(u-c)^{\alpha_2} + \ldots, \end{cases}$$

les exposants $\beta_1, \beta_2, \ldots$ étant rangés par ordre de grandeurs croissantes, ainsi que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, ces derniers exposants étant de plus positifs, les A et les B représentant d'ailleurs des constantes.

En désignant, pour simplifier, $\varphi(c)$ par $\varphi$, on tire de là

$$z = \frac{1}{\varphi(u)} = \frac{1}{\varphi}\left[1 - \frac{A_1}{\varphi}(u-c)^{\alpha_1} + \ldots\right].$$

En posant

$$(36)\qquad v = -\frac{\varphi}{A_1}(z\varphi - 1),$$

l'équation qui précède devient

$$v = (u-c)^{\alpha_1} + \ldots.$$

On en tire, par la méthode des approximations successives ou celle des coefficients indéterminés,

$$(37)\qquad u - c = v^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots.$$

Or, on a

$$(38)\qquad F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1} + \ldots.$$

En remplaçant $u - c$ par sa valeur (37),

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1} v^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1} + \ldots$$

ou

$$(39) \qquad F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}(z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}|1 + \ldots|.$$

Les termes non écrits entre crochets sont formés de puissances positives de $z\varphi - 1$, le plus faible exposant $h$ de ces termes étant le plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}, \quad 1.$$

Il est à remarquer que, si l'on avait posé

$$v = \frac{\varphi}{A_1}(1 - z\varphi),$$

on aurait remplacé, dans le développement (37) de $F(z)$, $u - c$ par

$$u - c = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots,$$

et l'on serait arrivé à l'expression

$$(39') \qquad F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}|1 + \ldots|.$$

Nous nous servirons plus loin de cette seconde forme du développement de $F(z)$.

Dans la formule (39), on peut prendre une détermination quelconque du binome $(z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$, à condition de choisir, en conséquence, la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$.

Nous pouvons maintenant appliquer à notre intégrale (28), supposée mise sous la forme

$$I = \int F(z)\frac{dz}{z^{n-2}},$$

la règle établie au n° 5, en partant de l'expression (39) de $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$.

Dans le cas actuel, $\frac{1}{\varphi}$ tient lieu de la quantité $a$ du n° 5 et $n+1$ est mis à la place de $n$.

Puisque nous pouvons choisir la détermination de $(z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$ dans le développement de $F(z)$, prenons celle dont l'argument est inférieur à $\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1} - 1\right)\frac{\pi}{2}$ pour les points du contour d'intégration très près du point $z = \frac{1}{\varphi}$. Dans ces conditions, en appliquant la règle, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int F(z)\frac{dz}{z^{n+2}} \\ &= -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}\varphi^{n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(n+2-\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma(n+2)}(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

$\varepsilon$ étant de l'ordre de $\frac{1}{n^h}$.

Cette formule peut encore s'écrire, en développant les fonctions $\Gamma$ comme pour la formule (34),

$$I = \frac{B_1}{\alpha_1}\left(-\frac{\varphi(c)}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}\varphi^n(c)\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}\right)}{n^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}}(1+\varepsilon). \tag{40}$$

Il reste à fixer la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi(c)}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}$ ou, si l'on veut, la détermination de $\left(-\frac{\varphi(c)}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$.

Désignons, comme plus haut, par $\Theta$ l'angle inférieur à $2\pi$ que fait, avec l'axe des abscisses, la tangente menée au point $c$ au contour donné S, dans le sens de l'intégration $c$A (*fig.* 14), cet angle étant compté dans le sens des arguments croissants.

Supposons les constantes A et B des développements (35) déterminées de telle sorte que les arguments de $(u-c)^{\mu_1}$, $(u-c)^{\beta_1}$, ...,

$(u-c)^{\alpha_1}$, $(u-c)^{\alpha_2}$, ... aient respectivement pour valeur $\beta_1\Theta$, $\beta_2\Theta$, ..., $\alpha_1\Theta$, $\alpha_2\Theta$, ... lorsque $u$ est infiniment voisin du point $c$ sur le contour S.

En supposant $z$ infiniment voisin de $\frac{1}{\varphi}$, sur le contour $S_1$, et infiniment voisin de $c$, sur le contour S, on a fait, dans le développement de $F(z)$ [formules (36), (37), (38) et (39)],

$$u-c=\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(z\varphi-1)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1}=\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(z\varphi-1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

Nous pouvons donc écrire la relation suivante entre les arguments, à un multiple de $2\pi$ près,

$$\arg.(u-c)=\arg.\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}+\arg.(z\varphi-1)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

$$\arg.(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1}=\arg.\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}+\arg.(z\varphi-1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}},$$

ou, puisque l'argument de $z\varphi-1$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, le long du contour S, dans le voisinage du point $c$,

$$\arg.\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}=(\beta_1+1-\alpha_1)\Theta+\lambda\,\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}\,\frac{\pi}{2},$$

$\lambda$ étant compris entre $-1$ et $+1$.

Cette égalité permet de choisir, sans ambiguïté, l'argument $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$.

L'argument à prendre est celui qui s'approche le plus de

$$(\beta_1+1-\alpha_1)\Theta,$$

puisque deux arguments de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$ diffèrent d'au moins

$$\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}2\pi.$$

Si l'on voulait avoir une valeur de I plus approchée que celle que nous avons obtenue, il faudrait pousser plus loin le développement (39) de $F(z)$, le sens des facteurs susceptibles de plusieurs déterminations s'obtenant toujours par la règle qui vient d'être établie.

*Cas particulier.* — Un cas particulier intéressant se présente lorsque, $\varphi(u)$ étant holomorphe dans le voisinage du point $u=c$, sans que $\varphi'(c)$ soit nul, on a, dans le voisinage de $c$,

$$f(u)=(u-c)^\beta[B_1+B_2(u-c)+B_3(u-c)^2+\ldots].$$

De l'équation $z=\frac{1}{\varphi(u)}$ on tire

$$u-c=-\frac{\varphi}{\varphi'}(z\varphi-1)\left[1-\left(1-\frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}\right)(z\varphi-1)+\ldots\right].$$

On a, d'ailleurs,

$$-\frac{f(u)}{\varphi'(u)}=(u-c)^\beta\left[-\frac{B_1}{\varphi'}+\left(B_1\frac{\varphi''}{\varphi'^2}-\frac{B_2}{\varphi'}\right)(u-c)+\ldots\right],$$

et l'on en conclut

$$\begin{aligned}F(z)={}&\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta(z\varphi-1)^\beta\frac{1}{\varphi'}\\&\times\left\{-B_1-\left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}-\beta\right)-\frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right](z\varphi-1)+\ldots\right\}.\end{aligned}$$

Appliquant la règle donnée au n° **5**, il vient

$$\begin{aligned}I&=\int f(z)\varphi^n(z)\,dz\\&=\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\varphi^n\Gamma(\beta+1)\left\{B_1\frac{\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(n+2)}\right.\\&\qquad+\left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}-\beta\right)-\frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right]\\&\qquad\qquad\left.\times\frac{(\beta+1)\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(n+2)}+\ldots\right\},\end{aligned}$$

ou, en développant les fonctions $\Gamma$ suivant les puissances descendantes de $n$, comme nous l'avons déjà fait pour la formule (34),

$$(41)\qquad \mathrm{I}=\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\varphi^n\frac{\Gamma(\beta+1)}{n^{\beta+1}}\left\{\mathrm{B}_1+\frac{\beta+1}{n}\left[\frac{\beta+2}{2}\left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2}-1\right)\mathrm{B}_1-\frac{\varphi}{\varphi'}\mathrm{B}_2\right]+\ldots\right\},$$

les termes négligés entre crochets contenant $\frac{1}{n^2}$ en facteur.

Si l'on suppose que la détermination du facteur $(u-c)^\beta$, qui figure dans le développement de $f(z)$, correspond au plus petit argument positif de $u-c$, et si l'on appelle $\Theta$ le plus petit angle positif que fait avec la direction positive de l'axe des abscisses la demi-tangente au contour d'intégration, menée au point $u=c$, du côté de ce contour, la détermination du facteur $\left(-\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta$, qui rentre dans l'expression de I, est celle dont l'argument diffère le moins du produit $\beta\Theta$. Cette expression de I suppose essentiellement d'ailleurs, comme nous l'avons dit au commencement du n° **12**, que le point de départ de la variable d'intégration, sur le contour, est le point $u=c$.

**13.** Nous nous proposons maintenant de chercher la valeur approchée de l'intégrale $\mathrm{I}=\int f(u)\varphi^n(u)\,du$ lorsque l'on ne peut déformer le contour d'intégration, de façon que $|\varphi(u)|$, le long de ce contour, prenne sa plus grande valeur à l'une de ses extrémités.

*Premier cas.* — Nous supposerons d'abord que l'on puisse faire passer le contour d'intégration par un point $u=c$, dans le voisinage duquel $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont holomorphes et tel que $|\varphi(c)|$ soit la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$, le long du nouveau contour, $c$ étant en outre racine simple de $\varphi'(u)$.

La question ainsi posée est loin d'être nouvelle. Elle a été étudiée, pour la première fois, par Laplace, par des procédés peu rigoureux (*Calcul des probabilités*), dans le cas des intégrales de variables réelles. M. Darboux (*loc. cit.*) a cependant confirmé le résultat de Laplace et l'a étendu au cas des intégrales de variables complexes.

Nous reprenons ici l'étude de ce problème, à cause de son importance. La voie que nous allons suivre, pour en obtenir la solution, est entièrement nouvelle et à l'abri de toute critique.

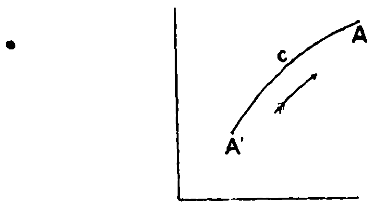
Soit $A'cA$ le chemin d'intégration, tracé dans le plan de la variable $u$; on a

$$I = \int f(u)\varphi^n(u)\,du = (A'cA) = (cA) - (cA'),$$

et chacune des intégrales qui figurent au dernier membre de cette égalité rentre dans la catégorie étudiée au n° **12**.

Or, si l'on se reporte au changement de variable qui a conduit à

Fig. 15.




l'équation (32), on voit que, pour $u$ infiniment voisin de $c$ et, par suite, $z$ infiniment voisin de $\frac{1}{\varphi}$, on a la relation

$$u - c = \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{z\varphi - 1}.$$

De là il résulte que si l'on adopte un certain argument pour $\sqrt{z\varphi - 1}$, en partant du point $z = \frac{1}{\varphi}$, sur le contour correspondant à $cA$, on doit adopter un argument différent d'un multiple impair de $\pi$, pour ce binome, quand on partira du même point, sur le contour correspondant à $cA'$, puisque $u - c$ change de signe quand on passe du sens $cA$ au sens $cA'$.

Si donc nous partons sur le contour correspondant à $cA$ avec la détermination de $\sqrt{z\varphi - 1}$, d'argument inférieur à $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue, comme nous l'avons fait pour établir la formule (34), nous devons partir, sur le contour correspondant à $cA'$, avec la détermination dont l'argument diffère de $\pi$ de celui de la première, c'est-à-dire avec la détermination adoptée tout à l'heure, mais changée de signe.

Si donc on prend pour $(cA)$ la valeur (34), on obtient $(cA')$ en changeant le signe du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$. Il en résulte

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I} &= (c\mathrm{A}) - (c\mathrm{A}') \\ &= \sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} \\ &\quad\times \varphi^n\left[f+\frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{4\varphi''}-\frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2}+\frac{f'\varphi'''}{\varphi''}+\frac{f\varphi''}{2\varphi}-f''\right)\frac{1+\varepsilon}{2n+1}\right], \end{aligned}\right.$$

$\varepsilon$ étant une quantité qui tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment (¹).

On choisit la détermination du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$, comme il a été dit au n° **12**.

Il reste à développer I, suivant les puissances descendantes de $n$, en remplaçant $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$ et $\Gamma(n+2)$ par leurs valeurs asymptotiques qui se déduisent de l'expression de Stirling. Mais la formule qui vient d'être obtenue peut servir elle-même à trouver ces valeurs asymptotiques. Partons, à cet effet, de

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty \mathrm{E}^{-u} u^{q-1}\,du,$$

où E désigne la base des logarithmes népériens.

Changeons $q$ en $n+p$, $u$ en $nu$, $p$ étant un nombre fini et $n$ un nombre qui peut croître indéfiniment; il vient

$$\frac{\Gamma(n+p)}{n^{n+p}} = \int_0^\infty u^{p-1}(u\mathrm{E}^{-u})^n\,du.$$

(¹) Il est à remarquer que les termes de la formule (34), qui ne contiennent pas $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ en dénominateur ou en facteur, disparaissent dans la différence $(c\mathrm{A}) - (c\mathrm{A}')$. Les termes dépendant de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$, qui sont au contraire doublés dans cette différence, proviennent des termes du développement de $\mathrm{F}(z)$ (p. 244) dans lesquels figurent les puissances fractionnaires du binome $z\varphi - 1$.

La fonction $u\mathrm{E}^{-u}$ passe par un maximum absolu pour $u=1$ lorsque $u$ est réel et positif; nous nous trouvons donc dans le cas où la relation trouvée ci-dessus est applicable. En posant $f(u)=u^{p-1}$, $\varphi(u)=u\mathrm{E}^{-u}$ et $c=1$, il faut faire dans l'expression de I

$$f=1,\qquad \varphi=\mathrm{E}^{-1},\qquad \frac{\varphi}{\varphi''}=-1,\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$
$$f'=p-1,\qquad \frac{\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}=3,$$
$$f''=(p-1)(p-2),\qquad \frac{\varphi'''}{\varphi''}=-2,$$

On trouve ainsi

$$\frac{\Gamma(n+p)}{n^{n+p}}=\sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}\,\mathrm{E}^{-n}\left[1+\left(\frac{17}{12}+p^2-p\right)\frac{1}{2n}(1+\varepsilon')\right].$$

Faisant dans cette égalité successivement $p=\frac{3}{2}$, puis $p=2$, et divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)}=n^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{5}{8}\,\frac{1}{n}(1+\varepsilon'')\right].$$

De cette expression on déduit la formule suivante, dont nous avons déjà fait usage au n° **12**, pour passer de la formule (34) à la formule (34),

$$(43)\quad \Gamma(n+p)=\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}^{-n}n^{n+p-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{12n}[1+6p(p-1)](1+\varepsilon)\right\},$$

$\varepsilon$ tendant vers zéro, lorsque $n$ croît indéfiniment.

On en conclut également

$$(44)\quad \mathrm{I}=\sqrt{\frac{-2\varphi}{\varphi''}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\varphi^n\left\{f+\frac{1}{2n}\left[-\frac{3}{4}f+\frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{1}{4}\frac{f\varphi^{\text{IV}}}{\varphi''}-\frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2}+\frac{f'\varphi'''}{\varphi''}-f''\right)\right](1+\varepsilon)\right\},$$

expression dans laquelle le radical $\sqrt{\frac{-2\varphi}{\varphi''}}$ a le sens qui a été défini au n° **12** (p. 246).

Cette formule importante joue un rôle essentiel dans mes recherches sur le développement de la fonction perturbatrice.

Nous avons déjà fait observer que le second membre de la formule (34) qui nous a servi à établir la formule (42) est une fonction linéaire et homogène de $f$, $f'$, $f''$, .... L'expression de I à laquelle nous venons d'arriver est donc, elle aussi, une fonction linéaire et homogène de $f$, $f'$, $f''$, etc.

Une conséquence importante résulte immédiatement de cette propriété.

Si la fonction $f(u)$ contient un paramètre dont ne dépend ni la fonction $\varphi(u)$, ni la forme du chemin d'intégration, l'évaluation approchée de l'intégrale obtenue en dérivant ou intégrant, sous le signe $\int$, la fonction $f(u)$ un certain nombre de fois par rapport à ce paramètre, cette évaluation, dis-je, s'obtient en dérivant ou intégrant le second membre de la formule (43) autant de fois par rapport à ce paramètre.

Nous nous bornerons à observer que, d'après cette remarque, il est légitime de dériver ou d'intégrer les deux membres de la formule (43) par rapport à $p$, puisque, dans l'intégrale $\int_0^\infty u^{p-1}(u\mathrm{E}^{-u})^n\,du$ qui nous a servi à évaluer asymptotiquement $\Gamma(n+p)$, le paramètre $p$ n'entre que dans $u^{p-1}$ tenant lieu de la fonction $f(u)$ qui fait partie de l'élément différentiel de l'intégrale (28).

*Deuxième cas.* — Supposons maintenant que, dans le voisinage d'un point d'affixe $u=c$, on puisse écrire

$$(45)\qquad \begin{cases} f(u)=\mathrm{B}_1(u-c)^{\beta_1}+\mathrm{B}_2(u-c)^{\beta_2}+\ldots,\\ \varphi(u)=\varphi(c)+\mathrm{A}_1(u-c)^{\alpha_1}+\mathrm{A}_2(u-c)^{\alpha_2}+\ldots,\end{cases}$$

$\beta_1$, $\beta_2$, ... allant en croissant et $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... désignant des exposants positifs rangés par ordre de grandeur croissante.

Imaginons qu'on puisse déformer le contour C, le long duquel est prise l'intégrale

$$(46)\qquad \mathrm{I}=\int f(u)\,\varphi^n(u)\,du,$$

de manière à le faire passer par le point $c$, et supposons que ce nouveau contour $C_1$ jouisse des propriétés suivantes : 1° ce contour serait équivalent au contour donné, si le point $u = c$ n'était pas un point singulier de $f(u)$ et de $\varphi(u)$ ; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$ le long du contour $C_1$ est $|\varphi(c)|$.

Dans ces conditions, la considération de ce point $u = c$ conduit souvent à l'évaluation asymptotique de l'intégrale I pour $n$ très grand.

Il convient, avant d'étudier le problème, de se rendre compte de la façon dont varie $|\varphi(u)|$ dans le voisinage du point $u = c$.

Posons, à cet effet,

$$u - c = r\mathrm{E}^{i\zeta}, \qquad \varphi(c) = \alpha + i\beta, \qquad \mathrm{A}_1 = \gamma + i\delta,$$

$r$ étant très petit. On en déduit, pour $u$ très voisin de $c$,

$$|\varphi(u)| = |\varphi(c)| + \frac{r^{\alpha_1}}{|\varphi(c)|}[(\alpha\gamma + \beta\delta)\cos\alpha_1\zeta + (\beta\gamma - \alpha\delta)\sin\alpha_1\zeta] + \ldots.$$

Les racines de l'expression entre crochets sont fournies par une équation en $\operatorname{tang}\alpha_1\zeta$. Si donc $\zeta = \zeta_1$ est une racine, les autres sont fournies par la relation

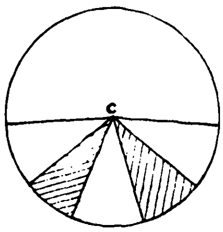
$$\zeta = k\frac{\pi}{\alpha_1} + \zeta_1.$$

Marquons, sur la circonférence de rayon $r$ décrite du point $u = c$ comme centre, les points correspondant à ces racines; joignons, ensuite, ces points de division au point $u = c$. Nous divisons ainsi l'aire du cercle en secteurs tels que, pour tous les points compris dans un même secteur, la différence $|\varphi(u)| - |\varphi(c)|$ conserve un signe constant. De plus, si $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ dans un secteur, on a $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ dans les secteurs qui le comprennent. Enfin, dans un secteur où $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$, le point de la circonférence $(r)$, où $|\varphi(u)|$ est maximum, se trouve sur la bissectrice de ce secteur; dans un secteur où $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$, le point de la circonférence $(r)$, où $|\varphi(u)|$ est minimum, se trouve également sur la bissectrice de ce secteur.

Revenons à l'intégrale proposée et figurons un certain nombre de secteurs autour du point $c$, en couvrant de hachures ceux dans lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$.

Dans ces conditions, les deux branches du contour $C_1$, séparées par le point $c$, passent nécessairement à travers les secteurs non hachurés pour atteindre le point $c$. D'autre part, pour que le contour $C_1$ devienne équivalent au contour C, pour l'intégrale proposée, il faut lui faire subir une déformation infiniment petite dans le voisinage du point $u = c$. On peut, par exemple, arrêter les deux branches du contour $C_1$, séparées par le point $u = c$, à une distance infiniment

Fig. 16.




petite de ce point et raccorder ces deux branches par un arc de cercle $\sigma$, de rayon infiniment petit, ayant son centre en $c$. Nous désignerons par $C_2$ ce nouveau contour qui est équivalent à C.

Il y a lieu de considérer plusieurs hypothèses :

Ou bien l'arc de cercle $\sigma$ sous-tend un angle inférieur à $\frac{\pi}{\alpha_1}$ et il arrive alors nécessairement que le contour $C_2$, dans le voisinage du point $c$, se trouve dans un même secteur non hachuré;

Ou bien l'arc de cercle $\sigma$ sous-tend un angle compris entre $\frac{\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{3\pi}{\alpha_1}$, et il arrive alors nécessairement que l'arc $\sigma$ traverse complètement un secteur hachuré et un seul;

Ou bien l'arc de cercle $\sigma$ soùs-tend un angle supérieur à $\frac{3\pi}{\alpha_1}$ et il arrive alors nécessairement que l'arc $\sigma$ traverse complètement plusieurs secteurs hachurés.

Nous allons examiner successivement ces trois hypothèses :

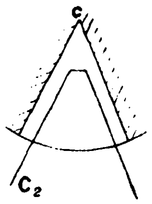
1° Dans la première hypothèse, $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ le long du contour $C_2$ (*fig.* 17).

Or, si l'on fait la transformation $\varphi(u) = \frac{1}{z}$, l'intégrale proposée est ramenée à la forme

$$(47) \qquad I = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+2}},$$

et cette nouvelle intégrale doit être prise, comme nous l'avons déjà expliqué, le long du contour correspondant au contour $C_2$, dans le

Fig. 17.




plan de la variable $z$. D'après l'inégalité $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$, ce contour correspondant est de seconde espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, correspondant du point $u = c$. Ce point ne peut donc pas fournir la valeur approchée de l'intégrale.

2° Les choses se passent d'une manière toute différente dans la seconde hypothèse.

Figurons, en effet, les deux secteurs dans lesquels passent les deux branches du contour $C_1$ et le secteur intermédiaire, à l'intérieur duquel $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ (*fig.* 18).

Du point $c$ comme centre, avec un rayon inférieur à $r$, décrivons un arc de cercle $\sigma \stackrel{\prime}{=} BB'$ limité aux bissectrices des secteurs non hachurés, à l'intérieur desquels $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$. Nous pouvons d'abord déformer le contour $C_1$ à l'intérieur de l'aire des secteurs limités par la circonférence $r$, de façon à le faire passer par les points B et B'.

Remplaçant ensuite la partie BCB' de ce contour par l'arc BB', nous obtenons le contour $C_2$ équivalent au contour $C_1$ pour l'intégrale proposée.

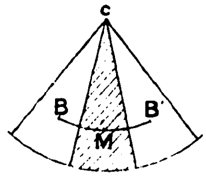
Si nous posons maintenant

$$\varphi(u) = \frac{1}{z},$$

pour ramener l'intégrale proposée à la forme (47), il est aisé de voir que le contour correspondant au contour $C_2$, dans le plan de la variable $z$, est un contour de première espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, correspondant du point $u = c$.

En effet, les différentes parties du contour $C_2$, autres que BB', se transforment, dans le plan de la variable $z$, en deux chemins D et D'

Fig. 18.



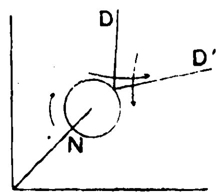

(*fig.* 19) plus éloignés de l'origine que le point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, à cause de l'inégalité $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$. D'autre part, quand la variable $u$ suit le chemin BB', l'argument de $u - c$ varie de $\frac{2\pi}{\alpha_1}$, puisque l'angle de chaque secteur est $\frac{\pi}{\alpha_1}$, et l'argument de $1 - z\varphi$ varie de $2\pi$, comme il résulte de la relation

$$(48) \qquad u - c = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

que l'on a rencontrée à propos de la formule (39').

Nos chemins D et D' sont donc reliés par un arc de cercle qui enve-

Fig. 19.




loppe entièrement le point $z = \frac{1}{\varphi}$, comme l'indique la figure 19, et le contour formé est bien de première espèce par rapport à ce point.

Nous pouvons donc trouver la valeur approchée de I, pour $n$ très grand, en partant du développement (39') de $F(z)$ dans le voisinage du point $z = \frac{1}{\varphi}$ et appliquant les considérations développées au n° **8**.

On peut donc écrire

$$(49)\quad I = -2i\pi\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}\varphi^{n+1}\times\frac{\Gamma\left(n-\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+1\right)\Gamma(n+2)}(1+\varepsilon),$$

$\varepsilon$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Cette formule suppose, d'ailleurs, le sens de l'intégration tel que la variable $z$ tourne dans le sens rétrograde autour du point $z = \frac{1}{\varphi(z)}$. S'il en était autrement, on devrait changer de signe le second membre. Or, la formule (48) permet de déterminer ce sens, connaissant le contour $C_2$ dans le plan de la variable $u$. En effet, $\alpha_1$ étant positif, la variable $z$ tourne autour du point $z = \frac{1}{\varphi}$ dans le même sens que la variable $u$ autour du point $c$, puisque, quand l'argument de $u - c$ varie dans un sens, l'argument de $(1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ varie nécessairement de la même quantité, dans le même sens.

Il reste à fixer la détermination du facteur $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$, pour donner un sens précis à l'expression (49) de I. A cet effet, il faut remarquer que, pour obtenir le développement (39') de $F(z)$, en supposant $u$ infiniment voisin de $c$ et $z$ infiniment voisin de $\frac{1}{\varphi(c)}$, on a fait

$$(u-c)^{\beta_1+1-\alpha_1} = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(1-z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

Admettons que les coefficients des développements (45) aient été calculés de telle sorte que les arguments de $(u-c)^{\alpha_1}$, $(u-c)^{\alpha_2}$, ..., $(u-c)^{\beta_1}$, $(u-c)^{\beta_2}$, ... s'obtiennent en multipliant respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ le plus petit argument positif $\Theta$ de $u - c$. On peut écrire, à un multiple près de $2\pi$, d'après l'identité que nous venons de rappeler,

$$(\beta_1 + 1 - \alpha_1)\Theta = \text{arg. de}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} + \text{arg. de}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}.$$

Considérons le point M (*fig.* 18), milieu de l'arc BB'. C'est en ce point du contour $C_2$, tracé dans le plan de la variable $u$, que $|\varphi(u)|$ prend sa plus grande valeur.

A ce point M correspond donc, dans le plan de la variable $z$, le point N où le contour correspondant à $C_2$ est rencontré par le segment de droite joignant l'origine au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$.

Or, l'application du théorème III, exposée au n° **8**, suppose essentiellement que la détermination de $(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$, qui figure dans le développement de $F(z)$, soit réelle et positive au point N. En prenant égal à zéro l'argument de $1 - z\varphi$ en ce point et appelant $\Theta_0$ la valeur de $\Theta$ au point M, nous devons donc avoir, à un multiple de $2\pi$ près,

$$(\beta_1 + 1 - \alpha_1)\Theta_0 = \text{arg. de}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}},$$

ce qui définit complètement le sens du facteur $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$.

Mais on peut fixer autrement cette détermination.

En effet, les points pour lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$ étant nécessairement à l'intérieur du secteur couvert de hachures, si l'on appelle $\Theta_1$ le plus petit argument positif de $u - c$ relatif à l'un d'eux, $\Theta_1$ diffère de $\Theta_0$ d'une quantité moindre en valeur absolue que $\frac{\pi}{2\alpha_1}$. La règle donnée, pour trouver l'argument de $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$, est par suite équivalente à la suivante. On peut dire que l'argument de ce facteur, qu'il convient de choisir, est celui qui diffère de $(\beta_1 + 1 - \alpha_1)\Theta_1$ d'une quantité moindre, en valeur absolue, que $\frac{\beta_1 + 1 - \alpha_1}{\alpha_1}\,\frac{\pi}{2}$.

3° Examinons, enfin, la troisième hypothèse correspondant au cas où l'arc $\sigma$ traverse complètement plusieurs secteurs couverts de hachures.

On doit remarquer tout d'abord que l'angle sous-tendu par $\sigma$ est compris entre $\frac{3\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{5\pi}{\alpha_1}$, si cet arc traverse complètement deux secteurs hachurés; que cet angle est compris entre $\frac{5\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{7\pi}{\alpha_1}$, si l'arc $\sigma$ traverse complètement trois secteurs hachurés, etc.

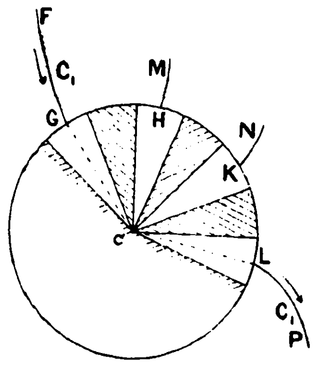
Lorsque l'arc $\sigma$ traverse deux secteurs hachurés, il est facile de voir que l'intégrale proposée est égale à la somme de deux intégrales de la nature de celles que nous venons d'étudier à propos de la seconde hypothèse.

Si l'arc $\sigma$ traverse trois secteurs hachurés, l'intégrale proposée est égale à la somme de trois intégrales de la nature de celles qui ont été étudiées à propos de la seconde hypothèse, et ainsi de suite.

Démontrons-le, par exemple, dans ce dernier cas :

Soit FGcLP le contour $C_1$ (*fig.* 20). Supposons que ce contour

Fig. 20.




devienne équivalent au contour C, pour l'intégrale proposée, quand on remplace la partie en pointillé GcL par l'arc de cercle infiniment petit GHKL.

Les courbes d'égal module de $\varphi(u)$ passant par le point $u = c$ étant tangentes aux rayons qui limitent les secteurs, ces courbes ne peuvent s'entrecouper une seconde fois qu'à distance finie du point $c$. Il en résulte qu'on peut tracer, dans les secteurs sans hachures, des chemins de longueurs finies MH et NK le long desquels $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$.

Dès lors, on peut remplacer l'intégrale (FGHKLP) par la somme des trois intégrales (FGHM) + (MHKN) + (NKLP) qui sont chacune précisément de la nature de celles qui correspondent à la seconde hypothèse examinée ci-dessus.

Toutes ces intégrales peuvent, du reste, se déduire d'une seule d'entre elles, car ce qui change, quand on passe de l'une à la suivante, c'est uniquement l'argument de $(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1}$ dans le développement de $F(z)$ autour du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, argument qui varie, en plus ou en moins, de $\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1} - 1\right)2\pi$.

La règle à suivre pour obtenir ces intégrales est donc la suivante :

Quand on aura obtenu, au moyen de la formule (49), une intégrale correspondant à un secteur hachuré, on obtiendra l'intégrale correspondant au secteur hachuré voisin, rencontré en tournant autour du point $u - c$ dans le sens direct, on obtiendra, dis-je, cette intégrale en multipliant la précédente par le facteur $E^{2i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$. La seconde intégrale partielle, correspondant au second secteur hachuré rencontré en tournant autour du point $u - c$ dans le sens direct, s'obtiendra en multipliant le second membre de la formule (49) par $E^{4i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$, et ainsi de suite.

Si au lieu de tourner dans le sens direct, autour du point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, on tourne dans le sens rétrograde, l'intégrale correspondant au premier secteur rencontré s'obtiendra en multipliant le second membre de la formule (49) par $E^{-2i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$, l'intégrale correspondant au second secteur en multipliant la même expression par $E^{-4i\pi\left(\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}-1\right)}$, etc.

Si l'on voulait avoir une valeur plus approchée que celle que nous avons obtenue (49) pour l'intégrale I, il faudrait pousser plus loin le développement (39′) de $F(z)$, le sens des facteurs susceptibles de plusieurs déterminations s'obtenant toujours par la règle qui a été exposée après avoir obtenu la formule (49).

*Cas particulier*. — Un cas particulier intéressant se présente lorsque, $\varphi(u)$ étant holomorphe dans le voisinage du point $u = c$, sans que $\varphi'(c)$ soit nul, on a, dans le voisinage de $c$,

$$f(u) = (u - c)^{\beta}[B_1 + B_2(u - c) + B_3(u - c)^2 + \ldots].$$

De l'équation

$$z = \frac{1}{\varphi(u)}$$

on tire

$$u - c = \frac{\varphi}{\varphi'}(1 - z\varphi)\left[1 + \left(1 - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'^2}\right)(1 - z\varphi) + \ldots\right].$$

On a d'ailleurs

$$-\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = (u-c)^\beta\left[-\frac{B_1}{\varphi'} + \left(B_1\frac{\varphi''}{\varphi'^2} - \frac{B_2}{\varphi'}\right)(u-c) + \ldots\right],$$

et l'on en conclut

$$F(z) = \left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta (1 - z\varphi)^\beta \frac{1}{\varphi'}\left\{-B_1 + \left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - \beta\right) - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right](1 - z\varphi) + \ldots\right.$$

les termes négligés entre crochets contenant $(1 - z\varphi)^2$ en facteur.

On trouve maintenant, en appliquant la règle exposée au n° **8**,

$$\begin{aligned} I = &-2i\pi\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\varphi^n\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \\ &\times\left\{B_1\frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+2)} + (\beta+1)\left[B_1\left(\frac{\beta+2}{2}\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - \beta\right) - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right]\frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(n+2)} + \ldots\right\}\end{aligned}$$

ou, en développant les fonctions eulériennes,

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} I = &-\frac{2i\pi}{\Gamma(-\beta)}\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}\frac{\varphi^n}{n^{\beta+1}} \\ &\times\left\{B_1 + \frac{\beta+1}{n}\left[\frac{\beta+2}{2}\left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - 1\right)B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\right] + \frac{1}{n^2}(\quad)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Mais il faut voir dans quelles circonstances cette formule est applicable.

Figurons, à cet effet, dans le plan de la variable $u$ (*fig.* 21), les axes de coordonnées, le point $u = c$ et la droite $AcB$ séparant, dans le voisinage du point $c$, les régions du plan où

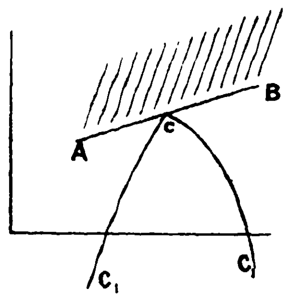
$$|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$$

de celles où

$$|\varphi(u)| < |\varphi(c)|.$$

Couvrons de hachures les premières régions, comme nous l'avons fait jusqu'ici. Dans ces conditions, le contour $C_1$, dont nous avons

Fig. 21.




donné plus haut la définition, doit nécessairement être tracé dans la région non hachurée, dans le voisinage du point $c$. Il y a maintenant deux cas à considérer :

1° S'il est nécessaire de déformer $C_1$, infiniment peu, dans la région non hachurée, pour rendre ce contour équivalent au contour proposé, l'expression de I à laquelle nous venons de parvenir n'est pas applicable;

2° Si le contour $C_1$, pour devenir équivalent au contour proposé, doit être déformé vers la région hachurée, l'expression de I est applicable.

Au surplus, l'expression (50) suppose que la variable, en cheminant le long du contour $C_1$ déformé, tourne autour de $c$ dans le sens rétrograde.

Dans le cas contraire, il faut changer le signe du second membre.

Enfin, pour fixer le sens du facteur $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$, on cherche celui de $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta}$. Supposons les coefficients B du développement de $f(u)$ choisis de façon que la détermination du facteur $(u-c)^{\beta}$ qui y figure corresponde au plus petit argument positif de $u - c$. Dans ces conditions, si l'on appelle $\Theta_1$ le plus petit argument positif de $u - c$, pour un point quelconque pris dans la région hachurée, la détermination de $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^\beta$ correspond à l'argument qui diffère de $\beta\Theta_1$ d'une quantité moindre que $\beta\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue.

## § V.

### Généralisation des théorèmes II et III.

**14.** Nous avons trouvé (p. 214) que l'intégrale suivante, dans laquelle $h > -1$,

$$\mathrm{I} = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \frac{dz}{z^{n+1}},$$

prise le long d'un contour de troisième espèce par rapport au point $a$, s'étendant à l'infini, a pour valeur

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Donnons au symbole $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^h$ le sens $\mathrm{E}^{h \operatorname{Log}\left(\frac{z}{a}-1\right)}$ et, pour achever de le définir, choisissons comme argument de $\frac{z}{a} - 1$ celui qui est nul le long du prolongement du segment joignant l'origine au point $a$. On peut alors différentier $q$ fois les deux membres par rapport à $h$ et écrire

$$(51)\quad \mathrm{J} = \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \operatorname{Log}^q \left(\frac{z}{a} - 1\right) dz = \frac{1}{a^n} \frac{d^q}{dh^q} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}.$$

Or on a, pour $n$ très grand et positif

$$\frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(h+1)}{n^{1+h}}\left[1 + \frac{h(h+1)}{2n}(1+\varepsilon)\right],$$

$\varepsilon$ tendant vers zéro lorsque $n$ croît indéfiniment.

Cette formule pouvant être différentiée terme à terme par rapport à $h$, comme nous l'avons fait remarquer à propos de la formule (44), on en conclut que, pour $n$ très grand, l'intégrale J est de l'ordre de $\frac{\text{Log}^q n}{n^{1+h}}$, le produit

$$J \frac{n^{1+h}}{\text{Log}^q n}$$

tendant vers une limite lorsque $n$ croît indéfiniment.

En s'appuyant sur ce résultat et suivant une marche analogue à celle qui a conduit au théorème II, on est amené à généraliser ce théorème.

On remarque d'abord (notations de la remarque du lemme II) que le produit

$$R^n \frac{n^{1+h}}{\text{Log}^q n} \int_0^l \frac{\left(\frac{x}{R}\right)^h}{(R+x)^{n+1}} \text{Log}^q \frac{x}{R}\, dx,$$

tend vers une limite lorsque $n$ croît indéfiniment.

On en déduit que le produit suivant, dans lequel $h$ est supérieur à $-1$, $q$ un entier positif et $\psi(z)$ une fonction analytique finie dans le voisinage de $a$,

$$a^n \frac{n^{1+h}}{\text{Log}^q n} \int \left(\frac{z}{a} - 1\right)^h \text{Log}^q \left(\frac{z}{a} - 1\right) \psi(z)\, dz,$$

ne dépasse pas une quantité fixe lorsque $n$ croît indéfiniment (démonstration analogue à celle du lemme VI). De là résulte immédiatement le théorème suivant qui généralise le théorème II :

THÉORÈME IV. — *Soient $n$ un nombre positif très grand, entier, fractionnaire ou incommensurable, et* F$(z)$ *une fonction indépendante de $n$.*

*Considérons l'intégrale*

$$M = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un contour C de troisième espèce par rapport à un* *point d'affixe $z = a$. Cette intégrale étant supposée finie, pour $n$ fini, admettons que le point $a$ soit séparé des singularités de $F(z)$ et de l'origine par des espaces finis. Admettons, en outre, qu'on puisse écrire, dans le domaine de $a$,*

$$F(z) = F_1(z) + \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \operatorname{Log}^{q}\left(\frac{z}{a} - 1\right),$$

$$\begin{aligned} F_1(z) = \quad & A_1\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_1} \operatorname{Log}^{q_1}\left(\frac{z}{a} - 1\right) \\ & + A_2\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_2} \operatorname{Log}^{q_2}\left(\frac{z}{a} - 1\right) + \ldots \\ & + A_p\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_p} \operatorname{Log}^{q_p}\left(\frac{z}{a} - 1\right), \end{aligned}$$

*la fonction $\psi(z)$ étant finie dans le domaine de $a$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$ désignant des nombres entiers ou fractionnaires vérifiant les inégalités*

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \alpha;$$

*$q_1, q_2, \ldots, q_p, q$ des entiers positifs et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des constantes.*

*Dans ces conditions, si l'on pose*

$$N = \int F_1(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

*l'intégrale étant prise le long du contour C, le produit*

$$a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\operatorname{Log}^q n}(M - N)$$

*n'augmente pas indéfiniment avec $n$.*

*Évaluation approchée de* M. — On admet essentiellement, pour appliquer ce théorème, que les constantes A sont choisies de façon que les déterminations des binomes et des logarithmes népériens figurant dans le développement de $F(z)$ correspondent à celui des arguments de $\frac{z}{a} - 1$ qui est nul pour les points du plan situés sur le prolongement, au delà de $a$, du segment de droite allant de l'origine à ce point $a$. On admet de plus que le sens de l'intégration est tel que la variable parte du point $a$.

Posons
$$U_p = \frac{1}{a^n}\frac{d^{q_p}}{d\alpha_p^{q_p}}\frac{\Gamma(\alpha_p+1)\Gamma(n-\alpha_p)}{\Gamma(n+1)}.$$

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait au n° 5, il résulte du théorème IV qu'on peut écrire

$$(52)\qquad M = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_pU_p + N_1,$$

le produit $a_n \dfrac{n^{1+\alpha}}{\operatorname{Log}^q n} N_1$ n'augmentant pas indéfiniment avec $n$. Par conséquent, si l'on prend $A_1U_1$ comme valeur approchée de M on commet une erreur de l'ordre de $\dfrac{1}{a^n}\dfrac{\operatorname{Log}^{q_2} n}{n^{1+\alpha_2}}$, c'est-à-dire que le produit

$$(M - A_1V_1)\, a^n \frac{n^{1+\alpha_2}}{\operatorname{Log}^{q_2} n}$$

n'augmente pas indéfiniment avec $n$. En prenant

$$M = A_1V_1 + A_2V_2$$

on commet une erreur de l'ordre de $\dfrac{1}{a^n}\dfrac{\operatorname{Log}^{q_3} n}{n^{1+\alpha_3}}$, etc.

L'erreur relative commise en prenant pour M sa valeur approchée est d'autant plus petite, pour $n$ très grand, qu'on prend plus de termes dans le second membre de la formule (52).

**15.** Le théorème III relatif à l'évaluation approchée des intégrales de la forme

$$2i\pi I = \int F(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

prises le long d'un contour de première espèce par rapport à un point singulier $z = a$ de $F(z)$, peut être généralisé de la même manière que le théorème II.

Nous avons trouvé qu'on a (lemme VII)

$$2i\pi\int\left(1-\frac{z}{a}\right)^h\frac{dz}{z^{n+1}}=\frac{1}{a^n}\,\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour de première espèce par rapport au point $a$. On tire de là, en différentiant $q$ fois par rapport à $h$,

$$(53)\qquad 2i\pi\int\frac{\left(1-\frac{z}{a}\right)^h\operatorname{Log}^q\left(1-\frac{z}{a}\right)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{a^n}\,\frac{d^q}{dh^q}\,\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)},$$

et il en résulte, comme dans le cas de la formule (51), que l'intégrale écrite dans le premier membre est, pour $n$ très grand, de l'ordre de $\frac{1}{a^n}\,\frac{\operatorname{Log}^q n}{n^{1+h}}$ si $h$ n'est pas un entier positif. Lorsque $h$ est entier et positif, $\frac{1}{\Gamma(-h)}$ étant nul, l'intégrale est, pour $n$ très grand, de l'ordre de $\frac{1}{a^n}\,\frac{\operatorname{Log}^{q-1} n}{n^{1+h}}$.

La formule (53) suppose d'ailleurs essentiellement que les déterminations du binome et du logarithme népérien qui figurent sous le signe $\int$ correspondent à l'argument $1-\frac{z}{a}$ qui se réduit à zéro pour les points du plan situés sur le segment de droite joignant l'origine au point $a$. D'autre part, la variable en cheminant sur le contour d'intégration doit tourner autour du point $a$ dans le sens rétrograde.

En s'appuyant sur le lemme VIII, sur l'extension du lemme VI (p. 268) et sur le résultat que nous venons d'obtenir, suivant d'ailleurs un raisonnement calqué sur celui que nous avons employé pour arriver à la démonstration du théorème III, on arrive à étendre ce théorème comme nous allons l'indiquer. Il y a cependant une légère différence dans l'application du lemme VIII, parce que le long du chemin de troisième espèce $aB_1$ (*fig.* 9) on doit poser

$$\left(1-\frac{z}{a}\right)^\alpha\operatorname{Log}^q\left(1-\frac{z}{a}\right)=E^{i\pi\alpha}\left(\frac{z}{a}-1\right)^\alpha\left[i\pi+\operatorname{Log}\left(\frac{z}{a}-1\right)\right]^q,$$

les déterminations du binome et du logarithme népérien écrits dans le second membre correspondant à l'argument de $\frac{z}{a}-1$ qui est nul pour les points du plan situés au delà du point $a$, sur le prolongement du segment de droite joignant l'origine à ce point $a$.

De même on doit poser, pour les points situés le long du contour de troisième espèce $aD_1$ (*fig.* 9),

$$\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\mathrm{Log}^{q}\left(1-\frac{z}{a}\right)\equiv E^{-i\pi\alpha}\left(\frac{z}{a}-1\right)^{\alpha}\left[-i\pi+\mathrm{Log}\left(\frac{z}{a}-1\right)\right]^{q}.$$

Il en résulte qu'au lieu d'avoir à considérer deux intégrales dont la somme multipliée par $a^{n}\frac{n^{1+\alpha}}{\mathrm{Log}^{q} n}$ n'augmente pas indéfiniment avec $n$, on se trouve en présence d'une somme de $2q+2$ intégrales dont le produit par le même facteur n'augmente pas indéfiniment avec $n$.

Ce point de détail réglé, voici comment peut s'énoncer l'extension du théorème III :

THÉORÈME V. — *Soient $n$ un nombre positif très grand, entier, fractionnaire ou incommensurable, et $F(z)$ une fonction indépendante de $n$.*

*Considérons l'intégrale*

$$2i\pi M=\int_{C}F(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*prise le long d'un contour de première espèce par rapport à un point singulier isolé $a$ de $F(z)$. Admettons qu'on puisse écrire, dans le domaine de $a$,*

$$F(z)=\varphi(z)+F_1(z)+\left[\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\mathrm{Log}^{q}\left(1-\frac{z}{a}\right)\right]\psi(z),$$

*$\psi(z)$ désignant une fonction analytique finie dans le domaine de $a$, $\varphi(z)$ étant holomorphe dans le domaine de $a$ et $F_1(z)$ représentant l'expression*

$$\begin{aligned}F_1(z)= {} & A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\mathrm{Log}^{q_1}\left(1-\frac{z}{a}\right)\\ & +A_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}\mathrm{Log}^{q_2}\left(1-\frac{z}{a}\right)+\ldots\\ & +A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{p}\mathrm{Log}^{q_p}\left(1-\frac{z}{a}\right),\end{aligned}$$

*dans laquelle $A_1, A_2, \ldots, A_p$ désignent des constantes, les $q$ des entiers positifs, les $\alpha$ vérifiant les inégalités*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \alpha,$$

*$\alpha$ étant en outre supérieur à $-1$.*

*Dans ces conditions, si l'on pose*

$$2i\pi N = \int_C F_1(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

*l'intégrale étant prise le long du contour $C$, le produit*

$$a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^q n}(M - N), \qquad \textit{si } \alpha \textit{ n'est pas un entier positif,}$$

*ou*

$$a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^{q+1} n}(M - N), \qquad \textit{si } \alpha \textit{ est un entier positif,}$$

*n'augmente pas indéfiniment avec $n$.*

*Évaluation approchée de $M$.* — On admet essentiellement, pour appliquer ce théorème, que les constantes $A$ qui rentrent dans le développement de $F_1(z)$ sont choisies de façon que les déterminations des binomes et des logarithmes népériens, figurant dans le même développement, correspondent à l'argument de $1 - \frac{z}{a}$ qui est nul pour les points du plan situés le long du segment de droite joignant l'origine au point $a$. De plus, on suppose que la variable d'intégration chemine sur le contour, de manière à tourner, dans le sens rétrograde, autour du point $a$, dans le voisinage de ce point.

Si l'on pose

$$U_p = \frac{1}{a^n}\frac{d^{q_p}}{d\alpha_p^{q_p}}\frac{\Gamma(n-\alpha_p)}{\Gamma(-\alpha_p)\Gamma(n+1)},$$

il résulte de ce théorème qu'on a

$$(54) \qquad M = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_p U_p + N'_1,$$

le produit $a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^q n} N'_1$, si $\alpha$ est quelconque, ou $a^n \frac{n^{1+\alpha}}{\text{Log}^{q-1} n} N'_1$, si $\alpha$ est entier et positif, n'augmentant pas indéfiniment avec $n$.

Les termes de cette somme étant tels que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro, lorsque $n$ croît indéfiniment, si l'on prend un certain nombre de termes comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre du premier terme négligé.

Ainsi, en prenant $A_1 U_1$ comme valeur approchée, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{a^n} \frac{\text{Log}^{q_1}}{n^{1+\alpha_1}}$ ou $\frac{1}{a^n} \frac{\text{Log}^{q_1-1}}{n^{1+\alpha_1}}$ si $\alpha_1$ est entier positif. On peut écrire

$$M = A_1 U_1 (1 + \varepsilon_1),$$

le produit

$$\frac{n^{\alpha_2 - \alpha_1}}{\text{Log}^{q_2 - q_1} n} \varepsilon_1$$

n'augmentant pas indéfiniment avec $n$.

En prenant $A_1 U_1 + A_2 U_2$ comme valeur approchée, on peut écrire

$$M = (A_1 U_1 + A_2 U_2)(1 + \varepsilon_2),$$

le produit

$$\frac{n^{\alpha_3 - \alpha_1}}{\text{Log}^{q_3 - q_1} n} \varepsilon_2$$

n'augmentant pas indéfiniment avec $n$, etc.

L'erreur relative commise sur M est d'autant plus faible qu'on prend plus de termes dans la formule (54) ([1]).

---

([1]) Le théorème peut être étendu à des points singuliers auxquels correspondent, dans $F_1(z)$, des termes de la forme $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha \text{Log}^{-q}\left(1 - \frac{z}{a}\right)$, où $q$ est un entier positif. Il faut partir à cet effet de l'identité

$$\int \frac{\left(1 - \frac{z}{a}\right)^\alpha}{\text{Log}^q\left(1 - \frac{z}{a}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}$$

$$= -(1)^q \frac{2i\pi}{a^n} \int_0^1 dh_1 \int_0^1 dh_2 \ldots \int_0^1 dh_q \frac{\Gamma(n + q - \alpha - h_1 - \ldots - h_q)}{\Gamma(-\alpha - h_1 - \ldots - h_q)\Gamma(n + q + 1)}.$$

Mais on est ainsi conduit à des transcendantes qui ne se prêtent pas au calcul numérique.

*Remarque.* — Si le contour d'intégration était également de première espèce, par rapport à d'autres points singuliers de $F(z)$, situés à la même distance de l'origine que le point $a$, il faudrait, comme on l'a expliqué à propos de l'application du théorème III, considérer séparément chacun de ces points singuliers particuliers et faire la somme des résultats obtenus.

Enfin, pour exprimer M suivant les puissances descendantes de $n$, il faudra développer la formule (54) au moyen de l'expression (43) de la fonction eulérienne qu'on peut différentier par rapport à $p$, comme nous l'avons déjà fait observer.

Le théorème qui vient d'être énoncé joue un rôle capital dans mes recherches sur le développement approché de la fonction perturbatrice.

## VI.

Les résultats obtenus aux nos **14** et **15** conduisent à la valeur approchée des intégrales de la forme

$$I = \int f(u)\,\varphi^n(u)\,du,$$

dans des conditions encore plus générales que celles dans lesquelles nous nous sommes déjà placés.

**16.** Supposons d'abord que le contour d'intégration parte d'un point $u = c$ et, de plus, que $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$, le long de ce contour.

Admettons, en outre, qu'on puisse écrire, dans le voisinage du point $c$,

$$(55)\qquad \begin{cases} f(u) = B_1(u-c)^{\beta_1}\operatorname{Log}^{q_1}(u-c) \\ \qquad\qquad + B_2(u-c)^{\beta_2}\operatorname{Log}^{q_2}(u-c) + \ldots, \\ \varphi(u) = \varphi(c) + A_1(u-c)^{\alpha_1} + A_2(u-c)^{\alpha_2} + \ldots, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ étant supérieurs à $-1$ et rangés par ordre de grandeurs croissantes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ désignant des exposants positifs, rangés également par ordre de grandeurs croissantes, les $q$ représentant d'ailleurs des entiers positifs, les B et les A des constantes.

Dans ces conditions, l'évaluation approchée de I pour $n$ très grand, peut être ramenée à celle des intégrales étudiées au n° **14**.

En posant

$$z = \frac{1}{\varphi(u)},$$

on ramène l'intégrale à la forme

$$I = \int F(z)\frac{dz}{z^{n+2}},$$

le contour d'intégration, dans le plan de la variable $z$, étant de troisième espèce par rapport au point $z = \frac{1}{\varphi(c)}$, comme on l'a expliqué au n° **12**.

Or, des équations (55) on tire, comme au n° **12**, en écrivant $\varphi$ à la place de $\varphi(c)$,

$$(56) \qquad u - c = \left(\frac{-\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(z\varphi - 1)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots,$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned} F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} & (z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \\ & \times \left[\operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(z\varphi - 1)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1} + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits contenant en facteur une puissance de $(z\varphi - 1)$ supérieure à $\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}$ égale au plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2+1-\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1+1+\alpha_2-2\alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_1+1}{\alpha_1}.$$

On peut encore écrire

$$\begin{aligned} F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} & (z\varphi - 1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \\ & \times \left[\operatorname{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \frac{1}{\alpha_1}\operatorname{Log}(z\varphi - 1)\right]^{q_1} + \ldots, \end{aligned}$$

ou

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \sum_{r=0}^{r=q_1} \frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}$$

$$\times\left[\mathrm{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r} \frac{1}{\alpha_1^r}(z\varphi-1)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}[\mathrm{Log}(z\varphi-1)]^r+\ldots.$$

Ce développement de $F(z)$, dans le voisinage du point $z=\frac{1}{\varphi}$, donne, en appliquant la règle établie au n° **14**,

$$I = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \sum_{r=0}^{r=q_1} \frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}$$

$$\times\left[\mathrm{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r} \frac{1}{\alpha_1^r}\varphi^{n+1}\frac{d^r}{dt^r}\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(n+1-t)}{\Gamma(n+2)}+\ldots,$$

$t$ étant mis à la place de $\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}$.

Les termes négligés contiennent en dénominateur une puissance de $n$ égale au plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2+1}{\alpha_1},\quad \frac{\beta_1+1+\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1},\quad \frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+1$$

et en facteur une puissance positive de $\mathrm{Log}\, n$.

Il reste pour clore la question à fixer la détermination de

$$\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}} \quad \text{et de} \quad \mathrm{Log}\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

On part à cet effet de la formule (56).

Appelons, comme au n° **12**, $\Theta$ l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, la tangente menée au point $u=c$, au contour donné, dans le sens de l'intégration que l'on suppose partir du point $c$.

Admettons que les constantes des développements (55) aient été choisies de telle sorte que les déterminations des binomes et des logarithmes qui y figurent correspondent à l'argument de $u-c$ égal à $\Theta$ pour les points du contour infiniment voisins de $u=c$. Dans ces conditions on verra, par des considérations analogues à celles qui ont été développées au n° **12**, que l'argument de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ qu'on doit prendre est celui qui diffère de $\Theta$ d'une quantité inférieure à $\frac{\pi}{2\alpha_1}$ en valeur absolue. L'argument de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$ s'obtient en multipliant celui de $\left(-\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ par $\beta_1+1-\alpha_1$.

**17.** Supposons maintenant que le point $c$, dans le voisinage duquel $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont exprimées par les formules (55) (¹), ne soit pas une extrémité du contour d'intégration C de l'intégrale

$$I=\int f(u)\varphi^n(u)\,du,$$

mais qu'on puisse déformer ce contour de manière à le faire passer par le point $u=c$ et qu'il jouisse alors des propriétés suivantes : 1° ce nouveau contour $C_1$ serait équivalent au contour donné si le point $u=c$ n'était pas un point singulier de $f(u)$ et de $\varphi(u)$; 2° la plus grande valeur de $|\varphi(u)|$ le long de $C_1$ est $|\varphi(c)|$.

Il y a alors, comme pour le problème étudié au n° **13**, à examiner trois hypothèses qui peuvent se présenter quand on déforme le contour $C_1$ pour le rendre équivalent au contour C (se reporter au n° **13**, 2ᵉ cas) :

1° Lorsque l'angle sous-tendu par l'arc $\sigma$, qui a été considéré page 259, est inférieur à $\frac{\pi}{\alpha_1}$, on voit, comme au n° **13**, que le point $c$ ne peut servir à évaluer l'intégrale I;

2° L'angle sous-tendu par l'arc $\sigma$ est compris entre $\frac{\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{3\pi}{\alpha_1}$.

Dans cette hypothèse, le contour $C_2$, que nous avons considéré au n° **13** et qui est équivalent au contour C pour l'intégrale proposée,

---

(¹) Les exposants $\beta$ figurant dans ces développements ne sont plus astreints, dans ce qui suit, à être supérieurs à $-1$.

ce contour, dis-je, passe par des points pour lesquels $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$. Appelons $\Theta_1$ le plus petit argument positif du binome $u - c$ relatif à l'un d'eux. Supposons que les déterminations des binomes et des logarithmes figurant dans les formules (55) correspondent au plus petit argument positif de $u - c$.

Dans ces conditions, en raisonnant comme nous l'avons fait pour établir la formule (49) et développant $F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi(u)}$, comme à la page 276, mais en partant de l'expression

$$u - c = \left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \ldots,$$

on a

$$(57)\quad F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} + \frac{1}{\alpha_1}\operatorname{Log}(1 - z\varphi)\right]^{q_1} + \ldots,$$

ou

$$F(z) = -\frac{B_1}{\alpha_1 A_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}\sum_{r=0}^{r=q_1}\frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r}\frac{1}{\alpha_1^r}(1 - z\varphi)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}[\operatorname{Log}(1 - z\varphi)]^r + \ldots,$$

et il en résulte, en appliquant la règle établie au n° **15**,

$$(58)\quad \frac{1}{2i\pi}I = -\frac{B_1}{\alpha_1}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1}{\alpha_1}}\varphi^n\sum_{r=0}^{r=q_1}\frac{q_1!}{r!(q_1-r)!}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\right]^{q_1-r}\frac{1}{\alpha_1^r}\frac{d^r}{dt^r}\frac{\Gamma(n+1-t)}{\Gamma(-t)\Gamma(n+2)} + \ldots,$$

$t$ étant mis à la place de $\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}$. Cette formule suppose, du reste, le sens de l'intégration tel que la variable $u$ tourne autour du point $c$ dans le sens rétrograde en décrivant la partie du contour $C_2$ voisine de $c$. Les termes négligés contiennent en dénominateur une puissance de $u$ égale au plus petit des nombres

$$\frac{\beta_2+1}{\alpha_1},\quad \frac{\beta_1+1+\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1},\quad \frac{\beta_1+1}{\alpha_1}+1$$

et en facteur une puissance de $\operatorname{Log} n$.

On verrait, par des considérations analogues à celles qui ont été développées à propos de la formule (49), que l'argument de $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ qu'il convient de choisir est celui qui diffère de $\Theta_1$ d'une quantité moindre que $\frac{\pi}{2\alpha_1}$ en valeur absolue. De même l'argument de la détermination de $\left(\frac{\varphi}{A_1}\right)^{\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}}$ qu'il convient de choisir est celui qui diffère de $(\beta_1+1-\alpha_1)\Theta_1$ d'une quantité moindre que $\frac{\beta_1+1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue.

3° L'angle sous-tendu par l'arc $\sigma$ est supérieur à $\frac{3\pi}{\alpha_1}$.

Si cet angle est compris entre $(2k-1)\frac{\pi}{\alpha_1}$ et $(2k+1)\frac{\pi}{\alpha_1}$, $k$ étant un entier, on voit, par des considérations identiques à celles qui ont été développées à la fin du n° **13** (p. 263), que l'intégrale proposée est la somme de $k$ intégrales de la nature de celle dont nous venons de trouver la valeur, en étudiant la seconde hypothèse.

Toutes ces intégrales peuvent, du reste, se déduire de l'une d'entre elles, car ce qui change dans le développement (57) de $F(z)$, quand on passe de l'une à la suivante, c'est uniquement l'argument de $1-z\varphi$ qui varie, en plus ou en moins, de $2\pi$ suivant le sens de l'intégration.

La règle à suivre pour obtenir ces intégrales est donc la suivante :

Quand on aura obtenu, au moyen de la formule (58), une des intégrales correspondant à un secteur hachuré (*voir* la fin du n° **13**), on obtiendra l'intégrale partielle correspondant au secteur hachuré voisin rencontré en tournant, autour du point $u=c$, dans le sens direct, on obtiendra, dis-je, cette intégrale en remplaçant le rapport $\frac{\varphi}{A_1}$, dans la formule (58), par $\frac{\varphi}{A_1}E^{2i\pi}$, E désignant comme toujours la base des logarithmes népériens.

L'intégrale partielle correspondant au secteur hachuré, rencontré ensuite en tournant toujours autour du point $u=c$, dans le sens direct, s'obtiendra de même en remplaçant, dans la formule (58), $\frac{\varphi}{A_1}$ par $\frac{\varphi}{A_1}E^{4i\pi}$, et ainsi de suite.

Si au lieu de tourner dans le sens direct, autour du point $c$, on tournait dans le sens rétrograde, on devrait remplacer, dans la formule (58), $\frac{\varphi}{A_1}$ par $\frac{\varphi}{A_1}E^{-2i\pi}$ pour l'intégrale partielle correspondant au secteur hachuré immédiatement voisin de celui dont on est parti, puis par $\frac{\varphi}{A_1}E^{-4i\pi}$ pour l'intégrale partielle suivante, etc.