JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. POPOVICI

Sur les équations aux intégrales réciproques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 79-106.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__79_0>

Sur les équations aux intégrales réciproques;

PAR M. C. POPOVICI.

Dans le présent Mémoire je vais exposer une question qui offre un intérêt spécial, par le fait qu'elle regarde à la fois l'Analyse, la Géométrie et la Mécanique, et aussi par les rapports de symétrie qui existent entre les différentes conséquences qu'elle entraîne.

Mon étude est divisée en deux Parties. Dans la première Partie je traite le problème au point de vue de l'Analyse et de la Géométrie avec les applications qu'il offre à la théorie des groupes. Dans la deuxième je donne l'interprétation mécanique du problème.

Une partie de ces résultats a été communiquée à l'Académie des Sciences (22 avril 1907) et le cas de deux variables a été développé dans un article paru dans le *Bulletin de la Société mathématique* (T. XXXV, fasc. II).

PREMIÈRE PARTIE.

I. Nous appellerons *équations aux intégrales réciproques* deux systèmes d'équations différentielles :

$$\frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{u_{n-1}} = dx_n, \tag{1}$$

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{v_{n-1}} = dx_n, \tag{2}$$

où $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sont le système fondamental d'intégrales premières des équations (1) et $u_1, \ldots, u_{n-1}$ le système fondamental d'intégrales premières des équations (2).

Pour trouver un système de fonctions u et v satisfaisant à notre problème, nous devons intégrer le système de $2(n-1)$ équations aux dérivées partielles non linéaires suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 \dfrac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + u_{n-1} \dfrac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ v_1 \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + v_{n-1} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \\ \qquad (k = 1, \ldots, n-1). \end{array}\right.$$

Je vais démontrer d'abord que, quel que soit le procédé par lequel on obtienne un système de solutions, les $2(n-1)$ relations finies qui les définissent sont toujours réductibles à la forme

$$(4)\qquad x_k = \mathrm{F}_k(u_1, \ldots, u_{n-1}) + \Phi_k(v_1, \ldots, v_{n-1}) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$(5)\qquad \lambda_j(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \mu_j(v_1, \ldots, v_{n-1}) \qquad (j = 2, \ldots, n-1).$$

Nous arriverons à ce résultat même par des conclusions remarquables.

Considérons, tout d'abord, les deux équations linéaires suivantes :

$$(6)\qquad \mathrm{U}(z) = u_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$(7)\qquad \mathrm{V}(z) = v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$u_1, \ldots, u_{n-1}; v_1, \ldots, v_{n-1}$ étant des solutions supposées connues du problème.

Ces deux équations sont en involution.

En effet, on a

$$\mathrm{U}[\mathrm{V}(z)] - \mathrm{V}[\mathrm{U}(z)] = \sum_{k=1}^{k=n-1} [\mathrm{U}(v_k) - \mathrm{V}(u_k)] \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Cette expression est identiquement nulle en vertu des équations (3).

Il résulte, d'après la théorie de Jacobi et Mayer, que *les équations* $\mathrm{U}(z) = 0$ et $\mathrm{V}(z) = 0$ *admettent* $n-2$ *intégrales communes.*

Les relations (5) sont déjà établies.

Une conséquence géométrique de ce dernier résultat, c'est que *les deux congruences de caractéristiques*

$$u_1 = a_1, \ldots, u_{n-1} = a_{n-1}, \qquad v_1 = b_1, \ldots, v_{n-1} = b_{n-1}$$

admettent une famille de surfaces à deux dimensions communes :

$$(8) \quad k_2 = \lambda_2(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad \ldots, \quad k_{n-1} = \lambda_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

$$(9) \quad k_2 = \mu_2(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad \ldots, \quad k_{n-1} = \mu_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Ces surfaces dépendent de $n-2$ paramètres $k_2, \ldots, k_{n-1}$; nous les appellerons *surfaces intégrales communes.*

Voyons maintenant comment sont distribués sur chacune de ces surfaces les deux faisceaux de courbes u et v. Pour cela remarquons que, pendant un déplacement suivant une courbe $u_i = a_i$ caractéristique du système (2), toutes les courbes $v_i = b_i$ qui la rencontrent ont leurs tangentes parallèles aux points d'intersection; en outre, les cosinus directeurs de ces tangentes sont exprimés précisément par les nombres

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + 1}}.$$

Il en résulte que *les caractéristiques constituent deux faisceaux de courbes de translation sur chaque surface intégrale commune;* ces surfaces sont par conséquent des surfaces de translation et s'expriment par des relations de la forme

$$(10) \qquad x_k = f_k(u; k_2, \ldots, k_{n-1}) + \varphi_k(v; k_2, \ldots, k_{n-1}) \qquad (k = 1, \ldots, n);$$

u désignera une fonction arbitraire de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et v une fonction arbitraire de $v_1, \ldots, v_{n-1}$; les paramètres $k_2, \ldots, k_{n-1}$ seront les indices d'une telle surface dans l'espace à n dimensions.

Pour des valeurs constantes des $k_2, \ldots, k_{n-1}$, les équations (8), (9) ou (10) nous représentent la même surface; en vertu de ces équations la famille de surfaces (10) peut s'exprimer sous la forme (4), (5).

Ces équations expriment que les caractéristiques intégrales de l'une des équations $U(z)=0$, par exemple, sont engendrées par le mouvement de translation d'une surface

$$(\mathrm{F}) \qquad x_1^1 = \mathrm{F}_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad x_n^1 = \mathrm{F}_n(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

sur une surface fixe

$$(\Phi) \qquad x_1^2 = \Phi_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad x_n^2 = \Phi_n(v_1, \ldots, v_{n-1}),$$

ce mouvement n'étant pas arbitraire, mais réglé par les équations (5) qui expriment une correspondance entre les courbes de la surface F et celles de la surface Φ, de telle façon que, lorsque la surface F glisse sur une courbe

$$k_2 = \mu_2(v_1, \ldots, v_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad k_{n-1} = \mu_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

de la surface Φ, ce sont les points de la courbe correspondante

$$k_2 = \lambda_2(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad k_{n-1} = \lambda_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

dont les trajectoires sont des caractéristiques du système (1). Nous appellerons pour cette raison les surfaces F et Φ *surfaces génératrices.*

II. Passons maintenant à l'intégration du système (3), c'est-à-dire à la recherche des fonctions F, Φ; λ et μ. Pour cela appliquons aux équations (4) et (5) les opérations $U(z)$ et $V(z)$ en tenant compte des équations (3). Nous aurons les relations

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \sum_k \mathrm{F}_1^k \; \mathrm{U}(u_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{n-1} &= \sum_k \mathrm{F}_{n-1}^k \mathrm{U}(u_k), \\ 1 &= \sum_k \mathrm{F}_n^k \; \mathrm{U}(u_k), \\ 0 &= \sum_k \lambda_j^k \; \mathrm{U}(u_k), \end{aligned} \right. \qquad (12) \left\{ \begin{aligned} v_1 &= \sum_k \Phi_1^k \; \mathrm{V}(v_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_{n-1} &= \sum_k \Phi_{n-1}^k \mathrm{V}(v_k), \\ 1 &= \sum_k \Phi_n^k \; \mathrm{V}(v_k), \\ 0 &= \sum_k \mu_j^k \; \mathrm{V}(v_k), \end{aligned} \right.$$

où l'on a mis, pour abréger, $\frac{\partial F_i}{\partial u_k} = F_i^k$, etc.; $k = 1, \ldots, n-1$, $j = 2, \ldots, n-1$.

Pour que ces équations soient compatibles par rapport aux expressions $U(u_k)$ et $V(v_k)$, il faut que F_n et Φ_n soient des intégrales des équations linéaires

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & F_1^1 & \ldots & F_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} & F_{n-1}^1 & \ldots & F_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \frac{\partial F}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} v_1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0,$$

où les fonctions $F_1, \ldots, F_{n-1}$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ peuvent être choisies à notre gré; ce sont des fonctions arbitraires de l'intégration; quant aux fonctions $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, elles doivent être des intégrales des équations homogènes correspondantes,

$$D_0 = \begin{vmatrix} u_1 & F_1^1 & \ldots & F_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} & F_{n-1}^1 & \ldots & F_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_0 = \begin{vmatrix} v_1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 0 & \frac{\partial \mu}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \mu}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Le problème est ainsi réduit à l'intégration de deux équations linéaires à $n-1$ variables D et Δ. On pourrait, par cette méthode, trouver une infinité d'intégrales des équations réciproques; mais nous allons voir qu'il n'est pas besoin d'intégrer aucune équation pour avoir des solutions satisfaisant à notre problème.

A cet effet, proposons-nous de résoudre le problème qui correspond à deux surfaces génératrices données d'avance,

$$x_n^1 = F(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1); \qquad x_n^2 = \Phi(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2);$$

cela revient à se donner déjà une intégrale de chaque équation D et Δ.

On peut résoudre d'un seul coup le problème par rapport à un groupe de $2(n-1)$ surfaces génératrices associées,

$$x_n^1 = \mathrm{F}^i(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1), \qquad x_n^2 = \Phi^i(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2)$$
$$(i = 1, \ldots, n-1),$$

c'est-à-dire en se donnant d'avance $n-1$ intégrales des équations D et Δ, et chercher les fonctions $\mathrm{F}_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $\Phi_k(v_1, \ldots, v_{n-1})$, ou, en d'autres termes, la représentation paramétrique de ces surfaces qui correspond à notre problème.

En prenant comme variables $x_1^1, \ldots, x_n^1$ et $x_1^2, \ldots, x_n^2$, les équations D et Δ peuvent s'écrire (¹)

$$\left(u_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1^1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{n-1}^1} + 1\right) \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{n-1})}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_{n-1})} = 0,$$
$$\left(v_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1^2} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}^2} + 1\right) \frac{\mathrm{D}(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{\mathrm{D}(v_1, \ldots, v_{n-1})} = 0;$$

comme $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{n-1}$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ désignent des variables indépendantes, on obtient, en exprimant que F^i et Φ^i sont des intégrales, les équations

$$(13) \quad u_1 \frac{\partial \mathrm{F}^i}{\partial x_1^1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial \mathrm{F}^i}{\partial x_{n-1}^1} + 1 = 0$$
$$(14) \quad v_1 \frac{\partial \Phi^i}{\partial x_1^2} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x_{n-1}^2} + 1 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Ces équations nous donnent $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et $v_1, \ldots, v_{n-1}$ en fonction des x_k^1 et x_k^2; mais si l'on veut avoir le problème résolu par rapport aux deux surfaces génératrices,

$$x_n^1 = \mathrm{F}^i(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1), \qquad x_n^2 = \Phi^i(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2),$$

les équations (13), (14) et ces deux dernières nous donnent $x_1^1, \ldots, x_n^1$

(¹) En effet, on a

$$\mathrm{D} = u_1 \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F})}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_{n-1})} + \ldots + u_{n-1} \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{n-2}\mathrm{F})}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_{n-1})} + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{n-1})}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_{n-1})}$$
$$= \left(u_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{F}_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{F}_{n-1}} + 1\right) \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{n-1})}{\mathrm{D}(u_1, \ldots, u_{n-1})}.$$

et $x_1^2, \ldots, x_n^2$; c'est-à-dire $F_1, \ldots, F_n$ et $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ en fonction de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Quant aux fonctions $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; $\mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, ce sont des intégrales des équations

$$u_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1^1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_{n-1}^1} = 0, \qquad v_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_1^2} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial \mu}{\partial x_{n-1}^2} = 0;$$

par suite, les λ et μ seront des fonctions des expressions $F^i - F^k$ et $\Phi^i - \Phi^k$ que l'on a exprimées en fonction de u et v. On aura, par suite, comme intégrales communes les relations

$$L_j(F^1 - F^2, \ldots, F^1 - F^{n-1}) = M_j(\Phi^1 - \Phi^2, \ldots, \Phi^1 - \Phi^{n-1})$$
$$(j = 2, \ldots, n-1),$$

où les fonctions L_j et M_j peuvent être choisies arbitrairement; ce fait exprime que nous sommes libres de choisir, à notre gré, la correspondance entre les courbes des deux surfaces génératrices par rapport auxquelles on se propose d'exprimer les intégrales.

III. Considérons le système d'équations non linéaires suivantes :

$$(3)' \quad \begin{cases} A(u_k) = A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \dfrac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \dfrac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0, \\ B(v_k) = B_1(v_1, \ldots, v_{n-1}) \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}) \dfrac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$
$$(k = 1, \ldots, n-1),$$

les fonctions données $A_1, \ldots, A_{n-1}$; $B_1, \ldots, B_{n-1}$ étant supposées distinctes.

Ce système peut aussi s'intégrer par les méthodes données précédemment. On peut d'ailleurs le réduire à la même forme que les équations (3), en prenant comme inconnues les expressions A et B, et ainsi l'on arrive au système de $2(n-1)$ équations

$$A(B_k) = 0, \qquad B(A_k) = 0.$$

Les fonctions u et v jouissent des mêmes propriétés générales que les intégrales des équations (3), à savoir : elles peuvent se déterminer sans aucune quadrature; les équations linéaires

$$A(z)=A_1(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+A_{n-1}(u_1,\ldots,u_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

$$B(z)=B_1(v_1,\ldots,v_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+B_{n-1}(v_1,\ldots,v_{n-1})\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

sont en involution; les deux congruences de caractéristiques u et v admettent une famille de surfaces intégrales communes, sur lesquelles les deux faisceaux de courbes u et v sont des courbes de translation.

Les intégrales se présentent sous la même forme (4), (5); en leur appliquant les opérations A et B, on obtient les équations

$$(11)' \quad \begin{cases} A_i=\sum_k F_i^k A(u_k), \\ 0=\sum_k \lambda_j^k A(u_k), \end{cases}$$

$$(12)' \quad \begin{cases} B_i=\sum_k \Phi_i^k B(v_k), \\ 0=\sum_k \mu_j^k B(v_k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=1,\ldots,n, \\ A_n=B_n=1, \\ j=2,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Les fonctions F et Φ sont déterminées par les équations

$$D=\begin{vmatrix} A_1 & F_1^1 & \ldots & F_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1} & F_{n-1}^1 & \ldots & F_{n-1}^{n-1} \\ 1 & F_n^1 & \ldots & F_n^{n-1} \end{vmatrix}=0, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} B_1 & \Phi_1^1 & \ldots & \Phi_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n-1} & \Phi_{n-1}^1 & \ldots & \Phi_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \Phi_n^1 & \ldots & \Phi_n^{n-1} \end{vmatrix}=0$$

et les fonctions λ et μ par les équations homogènes correspondantes.

Une propriété géométrique intéressante est la suivante :

Il existe un ensemble de points formant une courbe suivant lesquels les deux congruences de caractéristiques se raccordent.

Cette courbe est donnée par les équations

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) = B_1(v_1, \ldots, v_{n-1}), \qquad \ldots,$$
$$A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Cet ensemble peut constituer même une surface à p dimensions si p de ces équations se trouvent parmi les $n-2$ intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$, ou plus généralement si les équations de notre courbe se réduisent seulement à $n-p-1$ équations distinctes, en vertu des $n-2$ relations qui constituent les intégrales communes. Si une caractéristique u traverse cet espace en un point $x_1^0, \ldots, x_n^0$, la caractéristique v, qui passe par ce même point, le traverse aussi avec la même tangente. Si la caractéristique u contient un arc entier situé dans cet espace, toutes les caractéristiques v qui la rencontrent en un point de cet arc auront une portion commune avec la caractéristique u qui sera constituée par cet arc dans toute sa longueur.

Les équations réciproques et la théorie des groupes.

Les intégrales des équations réciproques jouissent de belles propriétés au point de vue de la théorie des groupes que nous allons diviser en deux catégories :

1° Groupes d'opérations qui transforment un système donné d'intégrales en un nouveau système d'intégrales des mêmes équations linéaires;

2° Groupes qui transforment un système d'intégrales en un nouveau système appartenant aux équations non linéaires.

Cette dernière propriété nous permettra de déduire d'un système de solutions connues une infinité de solutions dépendant des fonctions arbitraires.

Nous allons démontrer, en outre, que ces opérations forment un groupe, non seulement au point de vue de transformer les intégrales les unes dans les autres, mais que le produit de plusieurs opérations peut être remplacé par une seule. On obtient, par ces transformations, des intégrales appartenant à un même groupe.

I. Considérons le système général de $2(n-1)$ équations $(3)'$. De ces équations nous avons déduit les équations (11)' et (12)' qui, résolues par rapport aux expressions $A(u_k)$ et $B(v_k)$, nous donnent des relations de la forme

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
&A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \\
&\quad = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1}), \\
&B_1(v_1, \ldots, v_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1}) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} \\
&\quad = b_k(v_1, \ldots, v_{n-1}).
\end{aligned}
\right.
$$

Ces relations expriment que *les fonctions* $u_1, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}$ *forment un groupe par rapport aux opérations* $A(z)$ et $B(z)$.

Toutes les fonctions $F(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $\Phi(v_1, \ldots, v_{n-1})$ font partie du groupe. Quelle que soit une fonction $H(u_1, \ldots, u_{n-1})$, il existe une fonction $F(u_1, \ldots, u_{n-1})$ qui donne

$$A[F(u_1, \ldots, u_{n-1})] = H(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

On n'a qu'à chercher une intégrale de l'équation

$$a_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} = H(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Pour $H = 0$ on obtient les intégrales communes des équations $A(z)$ et $B(z)$. Si nous répétons sur $a_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$ et $b_k(v_1, \ldots, v_{n-1})$ les opérations $A(z)$ et $B(z)$, nous obtenons évidemment des intégrales des mêmes équations linéaires $B(z) = 0$ et $A(z) = 0$.

Il est intéressant de démontrer directement cette propriété que les fonctions u et v forment un groupe.

A cet effet, remarquons que, les équations linéaires étant en involution, nous pouvons écrire

$$
\left.
\begin{aligned}
&A[B(u_k)] - B[A(u_k)] = 0 \\
&A[B(v_k)] - B[A(v_k)] = 0
\end{aligned}
\right. \qquad (k = 1, \ldots, n-1).
$$

Or, comme on a

$$A(v_k) = 0, \qquad B(u_k) = 0,$$

il en résulte

$$B[A(u_k)] = 0, \qquad A[B(v_k)] = 0.$$

Donc les expressions $A(u_k)$ sont encore des intégrales de l'équation $B(z) = 0$ et $B(v_k)$ des intégrales de l'équation $A(z) = 0$. Il s'ensuit que l'on aura

$$A(u_k) = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad B(v_k) = b_k(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Ces intégrales ne forment pas toujours des systèmes fondamentaux, les fonctions a_k et b_k n'étant pas nécessairement distinctes.

II. Nous sommes en possession d'un nouveau moyen d'intégrer le système (3)'. Remarquons, en effet, que notre problème se réduit à l'intégration du système (1) qui a l'avantage sur le précédent d'être séparé par rapport aux inconnues $u_1, \ldots, u_{n-1}$, d'une part, et $v_1, \ldots, v_{n-1}$, de l'autre.

Les $2(n-1)$ équations non homogènes (1) sont en réalité des *intégrales intermédiaires* du système (3)' et les fonctions $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont des fonctions arbitraires de l'intégration.

Pour trouver les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$, nous sommes conduits à considérer le système de caractéristiques suivant :

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{A_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} = dx_n = \frac{du_1}{a_1} = \ldots = \frac{du_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

Désignons les $n-2$ intégrales des dernières $n-2$ équations caractéristiques par

$$(3) \quad u_2 = \lambda^2(u_1; k_2, \ldots, k_{n-1}), \quad \ldots, \quad u_{n-1} = \lambda^{n-1}(u_1; k_2, \ldots, k_{n-1}).$$

Remplaçons dans a_1, $A_1, \ldots, A_{n-1}$ les expressions $u_2, \ldots, u_{n-1}$ par ces valeurs et désignons par a_1^k, $A_1^k, \ldots, A_{n-1}^k$ les expressions ainsi obtenues.

Considérons enfin les intégrales

$$I_1 = \int \frac{A_1^k du_1}{a_1^k}, \qquad \ldots, \qquad I_{n-1} = \int \frac{A_{n-1}^k du_1}{a_1^k}, \qquad I_n = \int \frac{du_1}{a_1^k}.$$

Les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ intégrales des équations

$$A(u_k) = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

seront données par des équations de la forme

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Pi_k[x_1 - I_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, x_n - I_n(u_1, \ldots, u_{n-1}),\\ &\qquad \lambda_2(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \lambda_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})] = 0 \end{aligned} \right.$$
$$(k = 1, \ldots, n-1),$$

où $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont les valeurs de $k_2, \ldots, k_{n-1}$ tirées des équations (3); on suppose également que l'on ait remplacé dans les intégrales effectuées $I_1, \ldots, I_n$ les expressions $k_2, \ldots, k_{n-1}$ par ces valeurs. Quant aux fonctions Π_k, elles sont arbitraires tant que les fonctions $b_k(v_1, \ldots, v_{n-1})$ ne sont pas données; autrement elles dépendent exclusivement de la forme de ces fonctions.

Pour une détermination des fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$, la deuxième série d'intégrales $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sera donnée par les relations

$$(5)\quad \frac{B_1(v_1, \ldots, v_{n-1})}{\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_2, \ldots, x_n)}} = \ldots = \frac{B_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})}{\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n)}} = \frac{1}{\dfrac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}}.$$

III. Pour justifier notre méthode il faut démontrer que les fonctions $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sont en réalité des intégrales de l'équation $A(z) = 0$, et cela quelles que soient les fonctions $a_1, \ldots, a_{n-1}$, dont nous avons affirmé, sans le démontrer, que l'on est libre de les prendre arbitraires.

Cela va résulter du théorème suivant, plus général, qui contient la réciproque de ce que nous venons d'établir et qui est très remarquable par son dualisme :

Si les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à l'opération

$$U(z) = u_1 \frac{\partial z}{dx_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

alors :

1° *Les fonctions*

$$v_k = \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, x_{n-1})}, \qquad \left[\Delta(u, x_k) = \frac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)}\right]$$
$$(k = 1, \ldots, n-1)$$

forment aussi un groupe par rapport à l'opération

$$V(z) = v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

2° *Les deux groupes de fonctions* $u_1, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}$ *admettent un sous-groupe d'ordre* $n-2$ *commun.*

3° *Les équations* $U(z) = 0$ *et* $V(z) = 0$ *sont en involution.*

4° *Chacune de ces équations admet* $n-2$ *intégrales fonctions de ses coefficients, et ces intégrales sont justement les solutions communes des équations considérées.*

5° *Les fonctions* $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *sont les intégrales de l'équation* $V(z) = 0$, *et* $v_1, \ldots, v_{n-1}$ *les intégrales de l'équation* $U(z) = 0$.

Considérons l'expression

$$U[V(z)] - V[U(z)] = H(z).$$

On a, par hypothèse,

$$U(u_k) = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

et

$$V(u_k) = 0$$

par la définition même des fonctions v.

Il en résulte

$$H(u_k) = 0.$$

Or

$$H(z) = \sum [U(v_k) - V(u_k)] \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

On aura donc les $n-1$ équations

$$U(v_1)\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + U(v_{n-1})\frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

On suppose

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0,$$

car autrement les quantités $v_1, \ldots, v_{n-1}$ seraient infinies.

Il s'ensuit que l'on aura forcément

$$U(v_1) = 0, \quad \ldots, \quad U(v_{n-1}) = 0.$$

La dernière partie de notre théorème est démontrée.

Il en résulte que l'on aura $H(z) = 0$. Donc $U(z)$ et $V(z)$ forment un système en involution, ce qui donne

$$U[V(v_k)] - V[U(v_k)] = 0.$$

Or

$$U(v_k) = 0.$$

Donc

$$V(v_k) = b_k(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Les fonctions v forment aussi un groupe par rapport à l'opération $V(z)$.

Enfin, on voit aisément que les $n-2$ intégrales de chacune des équations

$$a_1(u_1, \ldots, u_{n-1})\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})\frac{\partial\lambda}{\partial u_{n-1}} = 0,$$

$$b_1(v_1, \ldots, v_{n-1})\frac{\partial\mu}{\partial v_1} + \ldots + b_{n-1}(v_1, \ldots, v_{n-1})\frac{\partial\mu}{\partial v_{n-1}} = 0$$

sont des intégrales communes des équations $U(z) = 0$, $V(z) = 0$ et fonctions des coefficients mêmes de ces équations.

Ces conclusions subsistent aussi dans le cas où les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à une opération $A(z)$.

IV. Ce théorème nous impose logiquement le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$, reconnaître s'il existe un système de fonctions

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad \ldots, \quad A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})$$

telles que les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ forment un groupe par rapport à l'opération

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Pour trouver si ces fonctions existent, remarquons que les fonctions

$$v_k = \frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, x_{n-1})}$$

doivent être, dans ce cas, les intégrales de l'équation $A(z) = 0$.

Supposons que ces fonctions soient distinctes. Alors, les fonctions

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) = A_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots,$$
$$A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) = A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

seront données par les équations

$$A_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, x_{n-1})}$$

et ces fonctions elles-mêmes seront les intégrales de l'équation

$$V(z) = 0.$$

Ainsi, il existe un système de fonctions $A_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})$ de la nature indiquée, si les identités

$$A_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial v_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} = 0$$
$$(k = 1, \ldots, n-1)$$

sont vérifiées.

Le problème se réduit donc à la vérification des identités *rationnelles* par rapport aux expressions données $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Enfin, si dans les expressions $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ on prend comme variables $u_1, \ldots, u_{n-1}, x_n$, la variable x_n disparaîtra et l'on aura les fonctions cherchées $A_1, \ldots, A_{n-1}$ en fonction de $u_1, \ldots, u_{n-1}$, dans le cas où nous avons appris qu'elles existent.

V. Dans le cas particulier où le nombre des variables est pair, soit $2n$, et où l'expression

$$A_1 dx_{2n} - A_2 dx_{2n-1} + \ldots + A_{2n-1} dx_2 - dx_1$$

admet un facteur intégrant, nous tombons sur des groupes de Lie.

Désignons par u l'intégrale que l'on obtient avec un facteur intégrant. On a les parenthèses de Poisson :

$$(uv_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2n-1),$$
$$(v_i v_k) = b_{i,k}(v_1, \ldots, v_{2n-1}) \qquad (i, k = 1, \ldots, 2n-1).$$

D'après le théorème fondamental de Lie, le système d'équations

$$(v_1 z) = 0, \qquad \ldots, \qquad (v_{2n-1} z) = 0$$

doit être en involution. On voit bien que u est l'intégrale commune.

Remarquons que u doit être une fonction de $v_1, \ldots, v_{2n-1}$, car on a

$$(uu) = 0.$$

VI. Nous allons résoudre maintenant le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant aux relations

$$A_1(u_1, \ldots, u_{n-1})\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})\frac{\partial u_k}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} = a_k(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

trouver les surfaces de translation (surfaces génératrices et surfaces intégrales communes) qui correspondent à ces fonctions.

On se propose de trouver la solution du problème sous la forme

$$x_i = F_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) + \Phi_i(v_1, \ldots, v_{n-1}),$$
$$\lambda_j(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \mu_j(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

D'après les équations connues $(11)'$, on voit que les fonctions F_i

sont respectivement des intégrales des équations

$$a_1 \frac{\partial F_i}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial F_i}{\partial u_{n-1}} = A_i$$

et les fonctions λ_j des intégrales de l'équation

$$a_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} = 0.$$

Ces intégrales ne peuvent pas être prises arbitrairement; elles dépendent de la forme sous laquelle on nous donne les fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Supposons que ces fonctions soient données sous la forme (4). On peut considérer ces équations comme le résultat de l'élimination de $v_1, \ldots, v_{n-1}$ entre les équations

$$\Phi_i = x_i - F_i, \qquad \mu_j = \lambda_j.$$

Alors, on prendra (¹)

$$F_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) = I_i(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Pour achever le problème, on exprimera Φ_i et μ_j en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ à l'aide des fonctions connues $u_1, \ldots, u_{n-1}$. On déduira $x_1, \ldots, x_{n-1}$ à l'aide des formules (5) en fonction de x_n; $v_1, \ldots, v_{n-1}$, et en remplaçant dans Φ_i et μ_j la variable x_n disparaîtra et nous aurons enfin ces dernières expressions en fonction de $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

VII. Les intégrales des équations non linéaires jouissent encore des propriétés remarquables, au point de vue de la transformation, d'un

---

(¹) Cette détermination n'est pas la seule possible, car on peut mettre les équations (4) sous la forme

$$\pi_i^h[x_1 - I_1 - h_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \ldots, x_n - I_n - \lambda_n(\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}); \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}] = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n-1);$$

mais les surfaces intégrales communes seront toujours les mêmes, car elles sont déterminées avec la congruence de courbes $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

système d'intégrales en un nouveau système. Ce dernier ne correspondra plus aux mêmes équations linéaires.

Voici ces propriétés :

1° *Si le système de* $2(n-1)$ *fonctions*

$$\begin{array}{lll} u_1(x_1, \ldots, x_n), & \ldots, & u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \\ v_1(x_1, \ldots, x_n), & \ldots, & v_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

constitue un système d'intégrales des équations réciproques, les fonctions

$$\begin{array}{lll} u_1(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n), & \ldots, & u_{n-1}(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n), \\ v_1(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n), & \ldots, & v_{n-1}(\rho x_1 + \xi_1, \ldots, \rho x_n + \xi_n), \end{array}$$

$\rho, \xi_1, \ldots, \xi_n$ *étant des constantes, nous donneront un nouveau système d'intégrales des équations réciproques.*

Il suffit de regarder la forme des équations différentielles (3) ou (3)' pour voir que les nouvelles fonctions sont aussi des intégrales si les premières le sont.

Nous exprimerons cette propriété en disant que *les intégrales des équations réciproques admettent comme groupe de transformations l'homothétie et la translation.* Nous avons ainsi déduit du système connu d'intégrales un nouveau système dépendant de $n+1$ constantes arbitraires.

On voit bien que ces transformations forment un groupe par rapport à elles-mêmes; p transformations successives d'indices ρ'; ξ'_1, $\ldots$, ξ''_1; $\ldots$, ρ^p; ξ^p_1, $\ldots$, ξ^p_n sont équivalentes à la transformation unique dont les indices sont

$$\begin{array}{ll} \rho^p \rho^{p-1} \ldots \rho'; & \xi^p_1 + \rho^p \xi^{p-1}_1 + \ldots + \rho^p \rho^{p-1} \ldots \rho^2 \xi'_1, \quad \ldots, \\ & \xi^p_n + \rho^p \xi^{p-1}_n + \ldots + \rho^p \rho^{p-1} \ldots \rho^2 \xi'_n. \end{array}$$

2° *Si les fonctions* $u_1(x_1, \ldots, x_n)$, etc., *sont un système connu d'intégrales des équations non linéaires et les fonctions*

$$k_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad k_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

sont les intégrales communes des équations linéaires correspondantes, alors on obtient, par la substitution,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \rho(K_2, \ldots, K_{n-1})X_1 + \xi_1(K_2, \ldots, K_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \rho(K_2, \ldots, K_{n-1})X_n + \xi_1(K_2, \ldots, K_{n-1}) \end{array}\right. \quad [K_i(x_1, \ldots, x_n) = k_i(X_1, \ldots, X_n)],$$

un nouveau système d'intégrales, quelles que soient les fonctions arbitraires ρ; $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Les nouvelles fonctions $K_i(x_1, \ldots, x_n)$ *seront aussi les intégrales communes.*

Pour démontrer cette propriété générale, nous allons désigner par $U(z)$ une opération U effectuée sur une fonction z dans laquelle on considère les fonctions $k_2, \ldots, k_{n-1}$ comme des constantes; c'est-à-dire la variation U de z, qui correspond à un déplacement suivant une surface intégrale commune. Désignons par U_i et V_i ce que deviennent u_i et v_i après la substitution.

Nous allons démontrer les relations

$$U(V_i) = U_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial V_i}{\partial x_1} + \ldots + U_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial V_i}{\partial x_n} + \frac{\partial V_i}{\partial x_n} = 0.$$

En effet,

$$U(V_i) = U(\overline{V_i}) + \sum_p \frac{\partial V_i}{\partial K_p} U(K_p).$$

En vertu de la première propriété, on a $U(\overline{V_i}) = 0$. Il nous reste à démontrer que l'on a $U(K_p) = 0$. Remarquons que, par hypothèse,

$$U_1\frac{\partial K}{\partial X_1} + \ldots + U_{n-1}\frac{\partial K}{\partial X_{n-1}} + \frac{\partial K}{\partial X_n} = 0.$$

Désignons par $\overline{U}(K)$ une telle opération. Nous aurons

$$0 = \overline{U}(K) = \sum_i U_i \sum_r \frac{\partial K}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial X_i} \qquad i, r = 1, \ldots, \quad U_n = 1,$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial X_i} = X_r\frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_r}{\partial X_i},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_i} = X_i\frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial X_i} + \rho.$$

Il résulte

$$0 = \rho \overline{U}(K) + \sum_r \frac{\partial K}{\partial x_r}\left[X_r \overline{U}(\rho) + \overline{U}(\xi_r)\right].$$

On a, par hypothèse,

$$\overline{U}(\rho) = \overline{U}(\xi_r) = 0;$$

donc

$$U(K) = 0.$$

Nous avons ainsi démontré que les nouvelles fonctions sont aussi des intégrales et que les intégrales communes s'obtiennent par la même substitution.

Nous dirons que *les intégrales des équations réciproques admettent comme groupe de transformations une homothétie et une translation variable arbitrairement, quand on passe d'une surface intégrale commune à une autre.*

Nous obtenons ainsi le moyen de *déduire d'un système d'intégrales connues une infinité d'autres dépendant de $n+1$ fonctions arbitraires à $n-2$ variables.*

En répétant ces opérations, il paraît possible d'obtenir des intégrales dépendant d'une infinité de fonctions arbitraires; mais en réalité, comme nous allons le voir, il ne reste que $n+1$ fonctions distinctes.

Cela résulte de l'interprétation géométrique. En effet, répéter ces opérations revient à transformer plusieurs fois les caractéristiques par homothétie et translation; après p opérations de cette nature, on peut revenir aux caractéristiques primitives par une homothétie et une translation résultantes; ces résultantes ne seront pas les mêmes que pour les caractéristiques qui se trouvaient sur la même surface intégrale commune. On aura ainsi des nouvelles solutions, et les intégrales communes se transforment en des nouvelles.

Les surfaces génératrices subissent des transformations plus complètes; ainsi une surface développable se transforme en une surface réglée si les droites étaient des caractéristiques.

Nous avons donc établi que non seulement les intégrales forment un groupe par rapport aux transformations (x), mais que ces transformations forment un groupe par rapport à elles-mêmes.

Pour trouver la fonction d'homothétie ρ et les fonctions de translation ξ_i résultantes, désignons par $X_1^1, \ldots, X_n^1, \ldots, X_1^p, \ldots, X_n^p$ les points successivement transformés; par $K_j^i(x_1, \ldots, x_n)$ les fonctions $k_j(X_1^i, \ldots, X_n^i)$ et par $\rho^i(K^i)$; $\xi_1^i(K^i), \ldots, \xi_n^i(K^i)$ les fonctions

$$\rho^i(k_2, \ldots, k_{n-1});\quad \xi_1^i(k_2, \ldots, k_{n-1}),\quad \ldots,\quad \xi_n^i(k_2, \ldots, k_{n-1}).$$

On aura facilement

$$\begin{aligned} \rho(x_1, \ldots, x_n) &= \rho^p(K^p)\ldots\rho^1(K^1), \\ \xi_r(x_1, \ldots, x_n) &= \xi_r^p(K^p) + \rho^p(K^p)\xi_r^{p-1}(K^{p-1}) + \ldots \\ &\quad + \rho^p(K^p)\ldots\rho^2(K^2)\xi_r^1(K^1). \end{aligned}$$

Il est intéressant d'étudier ce qui arrive quand ces opérations se répètent à l'infini. Pour que le résultat final ait un sens, il faut que les expressions $\rho; \xi_1, \ldots, \xi_n$ admettent une limite et, pour cela, il suffit que les expressions

$$\rho^1\rho^2\ldots\rho^p;\quad \xi_1^1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_1^p,\quad \ldots,\quad \xi_n^1 + \xi_n^2 + \ldots + \xi_n^p$$

soient uniformément convergentes.

DEUXIÈME PARTIE.

Applications des équations aux intégrales réciproques à la Mécanique.

I. Nous avons vu les propriétés dont jouissent les intégrales des équations réciproques au point de vue de la Géométrie et à celui de la théorie des groupes. Ces propriétés ont des interprétations mécaniques très intéressantes; elles nous permettent de traiter une question générale de la Dynamique. C'est le cas du mouvement produit par des forces fonctions de vitesses.

Ce cas prend même un intérêt particulier par ses rapports avec les questions que nous venons d'étudier, et des théorèmes curieux en résultent.

Parmi ces résultats je citerai que, une loi de forces étant donnée,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^2 x_n}{dt^2} = X_n(x_1, \ldots, x_n, t), \end{cases}$$

on peut toujours reconnaître s'il existe un mouvement produit par des forces fonctions ne dépendant que des vitesses, lequel admet avec le premier un faisceau de trajectoires communes. Dans tous ces cas on peut trouver les trajectoires, c'est-à-dire les intégrales communes, sans même connaître les équations du dernier mouvement; c'est là un fait très curieux, puisque même quand on connaît les forces en fonction de vitesses il faut intégrer n équations différentielles et ensuite faire n quadratures. Nous serons dispensés de toutes ces opérations, et, en outre, nous aurons la facilité d'intégrer le système (1) qui contient évidemment une classe très générale des équations de la Dynamique.

II. Considérons les équations caractéristiques du mouvement

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = dt = \frac{dv_1}{X_1} = \ldots = \frac{dv_n}{X_n}.$$

Si nous désignons par $V(z)$ l'opération

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t},$$

on a

$$X_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_1} v_1 + \ldots + \frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_n + \frac{\partial v_k}{\partial t} = V(v_k),$$

et les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$(2)\qquad dt = \frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = \frac{dv_1}{V(v_1)} = \ldots = \frac{dv_n}{V(v_n)}.$$

Si la loi du mouvement est fonction de vitesses, on aura

$$(3) \qquad V(v_1) = L_1(v_1, \ldots, v_n), \qquad \ldots, \qquad V(v_n) = L_n(v_1, \ldots, v_n),$$

ou en d'autres termes, quelles que soient les expressions des vitesses, elles forment un groupe par rapport à l'opération $V(z)$.

Nous avons vu dans la première Partie de cette étude que toutes les fois qu'un système de fonctions $v_1, \ldots, v_n$ constitue un groupe par rapport à l'opération $V(z)$, le système d'équations

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = dt$$

admet un second système d'équations aux intégrales réciproques; c'est-à-dire qu'il existe un système de fonctions $u_1, \ldots, u_{n-1}$ uniques et déterminées, telles que le système

$$\frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_n}{u_n} = dt$$

admet pour intégrales $v_1, \ldots, v_n$, et le système primitif admet pour intégrales $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Il s'ensuit de ces faits que *les expressions les plus générales des vitesses, résultant d'un mouvement produit par des forces fonctions des vitesses, sont des solutions des équations aux intégrales réciproques.*

En d'autres termes, les fonctions $v_1, \ldots, v_n$ seront des intégrales des équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_1 \frac{\partial v_k}{\partial x_1} + \ldots + u_n \frac{\partial v_k}{\partial x_n} + \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0, \\ & v_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ seront aussi des vitesses qui correspondent à un mouvement défini par des équations de la forme

$$\frac{dx_1}{u_1} = \ldots = \frac{dx_n}{u_n} = dt = \frac{dv_1}{M_1} = \ldots = \frac{dv_n}{M_n},$$

$M_1, \ldots, M_n$ étant des fonctions des vitesses $u_1, \ldots, u_n$.

L'inverse du théorème énoncé plus haut est exact seulement pour les intégrales des équations réciproques de la forme simple (4).

Les intégrales des équations réciproques plus générales peuvent être considérées comme des forces fonctions des vitesses ou des trajectoires qui leur correspondent.

Les trajectoires seront données par les intégrales des équations

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, \ldots, x_n, t), \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = v_n(x_1, \ldots, x_n, t).$$

Nous allons voir qu'elles se trouvent sans aucune quadrature.

Pour plus de précision, proposons-nous le problème suivant :

Étant donné un système de fonctions

$$v_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, v_n(x_1, \ldots, x_n, t),$$

vitesses d'un mouvement quelconque.

1° *Reconnaître si ces vitesses peuvent être considérées comme résultant d'un mouvement équivalent, où les forces sont des fonctions uniquement des vitesses;*

2° *Trouver l'expression générale des trajectoires du mouvement;*

3° *Trouver la loi de forces en fonction des vitesses du mouvement équivalent.*

La première et la deuxième partie se résolvent d'un seul coup.

Il faut vérifier que les expressions

$$(5) \qquad u_1 = \frac{\Delta(v, x_1)}{\Delta(v, t)}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{\Delta(v, x_n)}{\Delta(v, t)},$$

où l'on a mis

$$\Delta(v, x_i) = \frac{D(v_1, \ldots, v_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, t)},$$

sont des intégrales de l'équation linéaire

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Si ces équations sont vérifiées, alors les vitesses satisfont à la condition demandée par notre problème, et

$$u_1 = a_1, \quad \ldots, \quad u_n = a_n,$$

$a_1, \ldots, a_n$ étant des constantes, définissent la congruence des trajectoires qui correspondent aux vitesses $v_1, \ldots, v_n$.

Pour résoudre la troisième partie, on considère les expressions

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V(v_1) = X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V(v_n) = X_n(x_1, \ldots, x_n, t), \end{array} \right.$$

et l'on remplace $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $v_1, \ldots, v_n, t$; la variable t disparaîtra, et l'on aura

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1(x_1, \ldots, x_n, t) = L_1(v_1, \ldots, v_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n(x_1, \ldots, x_n, t) = L_n(v_1, \ldots, v_n). \end{array} \right.$$

III. Un problème qui contient le précédent et qui aussi ne peut pas se résoudre sans la connaissance des équations aux intégrales réciproques est le suivant :

Étant données les équations du mouvement

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) :$$

1° *Reconnaître s'il existe un mouvement provenant des forces fonctions de vitesses seulement, qui admet avec le premier un faisceau de trajectoires communes, parcourues suivant la même loi;*

2° *Trouver les équations qui définissent ces trajectoires;*

3° *Trouver l'expression des forces en fonction des vitesses du mouvement équivalent.*

Il s'agit de reconnaître si un système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \qquad \frac{dv_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$$

admet n intégrales intermédiaires de la forme

$$X_i(x_1, \ldots, x_n, t) = L_i\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right).$$

Nous allons voir ce fait curieux que, si le système d'équations données admet n intégrales intermédiaires de la forme indiquée, ces intégrales ne contiennent aucune fonction arbitraire; c'est-à-dire les fonctions $L_1, \ldots, L_n$ seront parfaitement déterminées pour des fonctions $X_1, \ldots, X_n$ données.

Remarquons que, s'il existe un système d'intégrales particulières

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = v_n(x_1, \ldots, x_n, t),$$

$v_1, \ldots, v_n$ étant des vitesses qui proviennent d'une loi de forces fonctions de vitesses, alors l'équation

$$v_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

doit admettre comme intégrales les expressions

$$\frac{\Delta(v, x_k)}{\Delta(v, t)} = u_k.$$

Or, on a

$$\Delta(L, x_k) = \frac{D(L_1, \ldots, L_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)} \Delta(v, x_k)$$

et

$$\Delta(L, x_k) = \Delta(X, x_k),$$

tout cela parce que le mouvement considéré dérive des forces $L_1, \ldots, L_n$ fonctions de vitesses.

Nous avons déjà les trajectoires avant de connaître même la loi des forces; le faisceau de trajectoires cherché sera donné, dans le cas où le mouvement demandé existe, sans aucune quadrature par les équations

$$\frac{\Delta(X, x_k)}{\Delta(X, t)} = a_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Ces équations nous donnent les trajectoires et la loi du temps ; ces trajectoires forment une congruence.

Une conséquence intéressante est que, *si les expressions des forces* $X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n, t)$ *sont algébriques, les équations des trajectoires le seront aussi.*

Les fonctions u_k étant calculées, nous devons former maintenant les fonctions

$$\frac{\Delta(u, x_k)}{\Delta(u, t)} = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)} = v_k. \tag{9}$$

Si les fonctions $v_1, \ldots, v_n$ *sont les intégrales de l'équation* $U(z) = 0$, *alors il existe un faisceau de trajectoires satisfaisant aux conditions demandées.*

En d'autres termes, notre problème se réduit à la vérification de n identités

$$\frac{\Delta(X, x_1)}{\Delta(X, t)} = \frac{\Delta^2(X, x_1)}{\Delta^2(X, t)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta(X, x_n)}{\Delta(X, t)} = \frac{\Delta^2(X, x_n)}{\Delta^2(X, t)}. \tag{10}$$

Ces égalités sont faciles à vérifier puisqu'elles sont rationnelles, par rapport aux fonctions données $X_1, \ldots, X_n$.

Nous avons vu comment on trouve les trajectoires du mouvement; pour avoir, maintenant, l'expression des forces fonctions de vitesses, nous prendrons dans les fonctions $X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n, t)$, comme variables, $v_1, \ldots, v_n, t$. Après ce changement, la variable t disparaîtra et nous obtiendrons les fonctions $L_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, L_n(v_1, \ldots, v_n)$; ces fonctions seront ainsi complètement déterminées et nous aurons ce théorème :

Un système d'équations du second ordre (1) *qui définissent le mouvement d'un point libre ne peut admettre un système d'intégrales intermédiaires de la forme*

$$X_k(x_1, \ldots, x_n, t) = L_k\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right),$$

dépendant de fonctions ou de constantes arbitraires.

Au contraire, pour des fonctions $L_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, L_n(v_1, \ldots, v_n)$ données exprimant une loi de forces quelconque, il existe une infinité de fonctions $X_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n, t)$ exprimant une loi des forces qui donne des trajectoires communes avec les premières.

Si l'on regarde les égalités (10) comme des équations différentielles par rapport aux fonctions $X_1, \ldots, X_n$, on voit que les expressions des forces *qui donnent une congruence de trajectoires communes avec des trajectoires résultant des forces fonctions de vitesses sont des intégrales des équations du troisième ordre* (10).

Ce système d'équations admet un système d'intégrales intermédiaires

$$B_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)}, \quad \ldots, \quad B_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\Delta^2(X, x_k)}{\Delta^2(X, t)},$$

$B_1, \ldots, B_n$ étant des fonctions arbitraires.

Ces équations du second ordre, nous savons les intégrer; ce sont les équations aux intégrales réciproques suivantes :

$$B_1(X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \ldots + B_n(X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = 0,$$
$$u_1\frac{\partial X_k}{\partial x_1} + \ldots + u_n\frac{\partial X_k}{\partial x_n} + \frac{\partial X_k}{\partial t} = 0,$$

dont nous avons donné plus haut les méthodes d'intégration. Les fonctions $B_1, \ldots, B_n$ seront les vitesses du mouvement.