JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 337-449.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__337_0>

Formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives;

PAR M. G. HUMBERT.

Hermite, dans sa *Lettre à Liouville* (¹) et dans un Mémoire ultérieur (²), a donné une méthode, relativement élémentaire, pour établir les résultats classiques de Kronecker sur les nombres de classes. La méthode d'Hermite repose sur les développements en séries trigonométriques de certains quotients de fonctions thêta; il m'a semblé que sa souplesse permettrait, non seulement de retrouver, comme l'a fait l'illustre géomètre, des formules déjà connues, mais d'en obtenir de nouvelles.

C'est à cette recherche qu'est consacré le présent Mémoire, divisé en deux Parties.

Dans un premier Chapitre, je rappelle ou j'établis les développements en séries de Fourier qui seront le plus fréquemment utilisés dans la suite.

Le second Chapitre apporte un complément direct soit aux formules initiales de Kronecker, soit à celles qu'il leur a ajoutées plus tard.

Le troisième se rapporte à des formules d'une nature différente, que

(¹) *Comptes rendus*, t. LIII; *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. VII; *Œuvres*, t. II, p. 109.

(²) *Comptes rendus*, t. LV; *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. IX; *Œuvres*, t. II, p. 242.

j'appelle *formules du type de Liouville,* parce que ce géomètre en a fait connaître, sans démonstration d'ailleurs, les premiers exemples.

Dans le quatrième Chapitre, je donne des relations où figurent, avec les nombres de classes, certaines représentations d'un entier par la forme $x^2 - 2y^2$: c'est, je crois, la première fois qu'on voit apparaître une forme indéfinie dans les applications des fonctions elliptiques à l'Arithmétique. En particulier, je retrouve et j'établis un résultat indiqué par Stieltjes, sans aucune démonstration, dans sa correspondance avec Hermite.

Après un cinquième Chapitre, consacré à une digression arithmétique, le sixième Chapitre donne des formules où interviennent, à côté des nombres de classes, les minima des classes de même discriminant, ou les carrés de ces minima.

La deuxième Partie a trait tout entière aux applications de la transformation du troisième ordre, combinée avec la méthode d'Hermite.

J'y montre comment les formules établies dans la première Partie permettent, non seulement de démontrer, mais encore d'étendre, les relations entre les nombres de classes qui ont été déduites de la multiplication complexe de la fonction modulaire liée au tétraèdre; j'ajoute ensuite des relations d'un autre caractère, que je tire de développements nouveaux.

Je pourrai, dans un Mémoire ultérieur, apporter quelques compléments aux belles formules que M. Gierster a rattachées à la fonction de l'icosaèdre; mais je n'ose espérer que la méthode d'Hermite conduise à des relations telles que celles, si profondes et si générales, qu'a fait connaître M. Hurwitz, dans son étude des correspondances modulaires.

Observation générale. — Dans tout le Mémoire, je désignerai par $F(N)$ le nombre des classes binaires positives de discriminant N et de l'ordre propre, c'est-à-dire où les deux coefficients extrêmes ne sont pas pairs tous deux; $F_1(N)$ sera le même nombre pour les classes de l'ordre impropre (où les deux coefficients extrêmes sont pairs). Il n'est rien supposé sur la *primitivité* des formes, c'est-à-dire qu'une classe de discriminant N, de l'ordre propre, et dont les coefficients ont un diviseur commun impair, compte pour une unité dans $F(N)$; de même une classe de l'ordre impropre, dont les coefficients ont un diviseur commun quelconque, compte pour une unité dans $F_1(N)$.

Toutefois, selon les conventions ordinaires, dans F ou dans F_1, une classe équivalente à $a(x^2+y^2)$ compte pour $\frac{1}{2}$; dans F_1, une classe équivalente à $a(2x^2+2xy+2y^2)$ compte pour $\frac{1}{3}$.

On posera aussi

$$F(N)+F_1(N)=G(N),$$

de sorte que $G(N)$ est le nombre *total* des classes de discriminant N.

Toutes ces notations sont conformes à celles de Kronecker et d'Hermite; on fera également partout

$$F(0)=0; \qquad F_1(0)=-\tfrac{1}{12}.$$

On posera enfin, pour simplifier,

$$\begin{aligned} F(N)+3F_1(N)&=J(N),\\ F(N)-3F_1(N)&=I(N),\\ F(N)-\ \ F_1(N)&=E(N), \end{aligned}$$

et l'on aura

$$J(0)=-\tfrac{1}{4}, \qquad I(0)=\tfrac{1}{4}, \qquad E(0)=\tfrac{1}{12}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

PRINCIPAUX DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

1. *Notations adoptées.* — Pour rester en harmonie avec les premiers travaux d'Hermite, je poserai, en altérant légèrement les notations de Jacobi,

$$\Theta_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} e^{2mix} = 1 + 2\sum_{1} q^{m^2}\cos 2mx,$$

$$\Theta(x) = \sum_{-\infty} q^{m^2}(-1)^m e^{2mix} = 1 + 2\sum_{1} q^{m^2}(-1)^m \cos 2mx,$$

$$H_1(x) = \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)ix} = 2\sum_{0} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos(2m+1)x,$$

$$H(x) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m e^{(2m+1)ix} = 2\sum_{0} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m \sin(2m+1)x.$$

Je désignerai par θ_1, θ, η_1 les valeurs des trois premières fonctions pour $x = 0$; par η' la quantité $H'(0)$:

$$\theta_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}, \qquad \theta = \sum_{-\infty}(-1)^m q^{m^2}, \qquad \eta_1 = \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}};$$

$$\eta' = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m(2m+1)q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} = 2\sum_{0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}.$$

On sait que $\eta' = \eta_1\theta_1\theta$.

Les relations quadratiques entre les quatre fonctions s'écrivent :

$$\theta^2 H^2 + \theta_1^2 H_1^2 - \eta_1^2\Theta_1^2 = 0, \qquad \theta^2\Theta^2 - \theta_1^2\Theta_1^2 + \eta_1^2 H_1^2 = 0,$$

$$\theta^2 H_1^2 + \theta_1^2 H^2 - \eta_1^2\Theta^2 = 0, \qquad \theta^2\Theta_1^2 - \theta_1^2\Theta^2 + \eta_1^2 H^2 = 0.$$

La troisième, pour $x = 0$, donne la formule classique $\theta_1^4 = \theta^4 + \eta_1^4$.

Rappelons aussi les formules

$$\Theta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \Theta(x), \qquad \Theta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \Theta_1(x),$$

$$H_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -H(x), \qquad H\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = H_1(x),$$

et, si l'on pose

$$q = e^{i\pi\tau}, \qquad \lambda = e^{-ix}q^{-\frac{1}{4}},$$

les relations

$$\Theta_1\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=\lambda H_1(x),\qquad H_1\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=\lambda\Theta_1(x),$$
$$\Theta\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=i\lambda H(x),\qquad H\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)=i\lambda\Theta(x).$$

Enfin, on a

$$\Theta_1(x,-q)=\Theta(x,q),\qquad \Theta(x,-q)=\Theta_1(x,q),$$
$$H_1(x,-q)=H_1(x,q)e^{\frac{i\pi}{4}},\qquad H(x,-q)=H(x,q)e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

2. Les relations différentielles classiques s'écrivent :

$$H'\Theta-H\Theta'=\theta^2H_1\Theta_1,\qquad \Theta'H_1-\Theta H_1'=\theta_1^2\Theta_1H,$$
$$H'H_1-HH_1'=\eta_1^2\Theta_1\Theta,\qquad \Theta'\Theta_1-\Theta\Theta_1'=\eta_1^2H_1H,$$
$$H'\Theta_1-H\Theta_1'=\theta_1^2H_1\Theta,\qquad \Theta_1'H_1-\Theta_1H_1'=\theta^2\Theta H.$$

Si l'on désigne par θ_1'', θ'', η_1'' les valeurs des dérivées secondes de Θ_1, Θ, H_1, pour $x=0$, c'est-à-dire

$$\theta_1''=-4\sum_{-\infty}^{+\infty}m^2q^{m^2},\qquad \theta''=-4\sum_{-\infty}(-1)^m m^2q^{m^2},$$
$$\eta_1''=-\sum_{-\infty}^{+\infty}(2m+1)^2q^{\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

on déduit, des relations différentielles, les formules

$$\eta_1\theta_1''-\theta_1\eta_1''=\eta_1\theta_1\theta^4,\qquad \eta_1\theta''-\theta\eta_1''=\eta_1\theta\theta_1^4,\qquad \theta_1\theta''-\theta\theta_1''=\theta\theta_1\eta_1^4.$$

3. On trouvera, dans le second travail d'Hermite mentionné ci-dessus, les développements en séries de Fourier des quotients des quatre fonctions thêta prises deux à deux, ainsi que ceux des expressions telles que $HH_1:\Theta$, qui contiennent en dénominateur une de ces fonctions et en numérateur le produit de deux autres.

En dérivant les premiers développements, on obtient des formules telles que celles-ci :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\eta_1^2\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\mathrm{H}_1}{\Theta^2} = 4\sum_0^\infty 2m\frac{q^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,\\
&\eta_1^2\theta_1\theta\frac{\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}^2} = \frac{1}{\sin^2 x} + 4\sum_0 2m\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\cos 2mx,\\
&\theta_1^2\eta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\Theta^2} = 4\sum_0 (2m+1)\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\sin(2m+1)x,\\
&\theta_1^2\eta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\mathrm{H}_1^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 4\sum_0 (-1)^m(2m+1)\frac{q^{2m+1}}{1+q^{2m+1}}\sin(2m+1)x.
\end{aligned}
\right.
$$

Les autres formules du même type se déduisent de celles-là par les changements de x en $x+\frac{\pi}{2}$, et de q en $-q$.

4. On établit aisément, par la méthode indiquée plus bas (n° 5), les formules suivantes :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}_1\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta^2}\\
&\quad = 4\sum_1 (-1)^{m+1}q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin 2mx,\\
&\eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}_1\Theta_1\Theta}{\mathrm{H}^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\\
&\quad = 4\sum_1 (-1)^{m+1}q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos(2m+1)x.
\end{aligned}
\right.
$$

En y changeant x en $x+\frac{\pi}{2}$, on obtient les développements des deux autres expressions analogues

$$
\eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta\mathrm{H}_1}{\Theta_1^2} \qquad \text{et} \qquad \eta_1\theta_1\theta\frac{\mathrm{H}\Theta\Theta_1}{\mathrm{H}_1^2}.
$$

5. *Démonstration de la formule fondamentale d'Hermite.* — Cette formule est celle qui donne le développement de $\mathrm{H}^2\Theta_1 : \Theta^2$.

Hermite l'indique sans démonstration; il est facile de l'établir par une méthode due à Liouville et utilisée par Biehler dans sa seconde Thèse [1].

On considère simultanément les deux fonctions $H^2\Theta_1 : \Theta^2$ et $\Theta^2 H_1 : H^2$, dont la seconde se déduit de la première, à un facteur exponentiel près, par le changement de x en $x + \frac{\pi\tau}{2}$.

On a

$$\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \sum_0^\infty A'_m \cos 2mx,$$

car le développement de Fourier peut se faire dans une bande parallèle à l'axe des quantités réelles, et dont les deux lignes frontières passent par les points $\frac{\pi\tau}{2}$ et $-\frac{\pi\tau}{2}$, zéros de $\Theta(x)$; de plus, la fonction à développer étant paire et ayant la période π, il ne figurera que des cosinus de multiples pairs de x.

La fonction paire $\Theta^2 H_1 : H^2$ devient infinie pour $x = 0$, le terme principal est $\frac{1}{x^2}\frac{\theta^2\eta_1}{\eta'^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{x^2}\frac{1}{\eta_1\theta_1^2}$; il en résulte que la fonction

$$\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} - \frac{1}{\eta_1\theta_1^2}\frac{1}{\operatorname{tang} x \sin x}$$

n'a pas de pôles dans la bande ci-dessus; comme c'est une fonction paire, changeant de signe quand on change x en $x + \pi$, on aura

$$(\alpha) \qquad \eta_1\theta_1^2\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} = \frac{1}{\operatorname{tang} x \sin x} + \sum_0 B_m \cos(2m+1)x$$

et, par ce qui précède,

$$(\beta) \qquad \eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \sum_0 A_m \cos 2mx.$$

---

[1] *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*. Paris, Gauthier-Villars, 1879.

Changeons, dans (α), x en $x+\frac{\pi\tau}{2}$, il vient

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2}e^{-ix}q^{-\frac{1}{4}} = {} & \frac{1}{\operatorname{tang}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)} \\ & + \sum_0 B_m\cos(2m+1)\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Or

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)} = i\,\frac{e^{i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}+e^{-i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}}{e^{i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}-e^{-i\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)}},$$

et, par $q=e^{i\pi\tau}$, on trouve aisément

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tang}\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right)} &= i\,\frac{qe^{2ix}+1}{qe^{2ix}-1}\left(\frac{-2i\sqrt{q}e^{ix}}{1-qe^{2ix}}\right) \\ &= -2\sqrt{q}e^{ix}(1+qe^{2ix}) \\ &\quad\times[1+2qe^{2ix}+\ldots+(m+1)q^m e^{2mix}+\ldots]. \end{aligned}$$

De même

$$B_m\cos(2m+1)\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right) = \frac{B_m}{2}\left[e^{(2m+1)ix}q^{\frac{2m+1}{2}}+e^{-(2m+1)ix}q^{-\frac{(2m+1)}{2}}\right].$$

Portons ces valeurs au second membre de (γ); dans le premier membre, remplaçons $\eta_1\theta_1^2H^2\Theta_1 : \Theta^2$ par son développement (β), et égalons les coefficients de $e^{(2m-1)ix}$ et $e^{-(2m-1)ix}$ dans les deux membres. Il vient

$$\begin{aligned} A_m q^{-\frac{1}{4}} &= -4\sqrt{q}(2m-1)q^{m-1}+B_{m-1}q^{\frac{2m-1}{2}}, \\ A_{m-1}q^{-\frac{1}{4}} &= B_{m-1}q^{-\frac{2m-1}{2}}. \end{aligned}$$

Toutefois, si $m=1$, on a $A_0q^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}B_0q^{-\frac{1}{2}}$.

L'élimination de B_{m-1} donne la relation de récurrence :

$$(\delta)\qquad A_m = A_{m-1}q^{2m-1}-4(2m-1)q^{m-\frac{1}{4}};$$

toutefois

$$(\varepsilon) \qquad A_1 = 2A_0 q - 4q^{1-\frac{1}{4}}.$$

Posons $A_m = \mathcal{A}_m q^{m^2}$; on a, dans (δ) et (ε),

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{m-1} - 4(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{A}_1 = 2\mathcal{A}_0 - 4q^{-\frac{1}{4}}.$$

On en tire immédiatement

$$\mathcal{A}_m = 2\mathcal{A}_0 - 4\alpha_m,$$

étant posé

$$\alpha_m = q^{-\frac{1}{4}} + 3q^{-\frac{9}{4}} + \dots + (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}.$$

De là résultent, par les valeurs de A_m et B_m, les deux développements suivants, où l'on a remplacé $\mathcal{A}_0$ par $4\mathcal{A}$,

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = \mathcal{A}\Theta_1(x) - \sum_1^\infty q^{m^2}\alpha_m \cos 2mx,$$

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + \mathcal{A}H_1(x) - \sum_1^\infty q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m \cos(2m+1)x.$$

La première de ces formules a été donnée par Hermite (*Lettre à Liouville*).

6. *Remarque.* — *A priori*, la méthode suivie devait laisser dans les développements un terme indéterminé. Car, en cherchant à développer $(H^2 + \mu\Theta^2)\Theta_1 : \Theta^2$ et $(\Theta^2 + \mu H^2)H_1 : H^2$, on est conduit exactement aux mêmes équations que ci-dessus pour les A_m et les B_m, quelle que soit la constante μ; donc, dans le développement de $H^2\Theta_1 : \Theta^2$, par exemple, il devait figurer un terme $\mathcal{A}\Theta_1$, dont la méthode ne pouvait donner le coefficient $\mathcal{A}$.

7. *Détermination de* $\mathcal{A}$. — C'est, dans la théorie d'Hermite, le

point fondamental où apparaît le nombre des classes. Nous présenterons le raisonnement d'Hermite de la manière suivante.

On a (Hermite, *Comptes rendus*, t. LV, et *Œuvres*, t. II, p. 242-244) les développements :

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1\frac{H}{\Theta} = \sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\sin(2m+1)x,$$

$$\theta_1\frac{H\Theta_1}{\Theta} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-m^2})\sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre ces deux relations, et égalons, dans les deux membres nouveaux, développés en séries de Fourier, les termes indépendants de x.

Au premier membre, le terme cherché est $\mathcal{A}$; au second membre, en vertu de la formule $2\sin ax\sin bx = \cos(a-b)x - \cos(a+b)x$, ce sera la somme

$$\sum_0^\infty \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-m^2}).$$

On a ainsi

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{2m+1}{2}+\frac{(2m+1)^2}{4}-\mu^2}[1+q^{2m+1}+\ldots+q^{\rho(2m+1)}+\ldots].$$

Posons $\mathcal{A} = \sum q^{\frac{4N+3}{4}} f(4N+3)$, et cherchons à déterminer f; N est évidemment un entier variant de o à $+\infty$.

On a, en vertu de l'expression ci-dessus de $\mathcal{A}$, à poser

$$(E_1)\qquad 4N+3 = (2m+1)^2 + 2(2m+1) + 4\rho(2m+1) - 4\mu^2$$

et $f(4N+3)$ est le nombre des solutions de l'équation (E_1), avec les conditions $m \geqq 0$, $\rho \geqq 0$, $-m \leqq \mu \leqq m$.

Écrivons (E_1)

$$(E)\qquad 4N+3 = (2m+1)(2m+4\rho+3) - 4\mu^2$$

et considérons *la forme* φ positive, et *de l'ordre propre*,

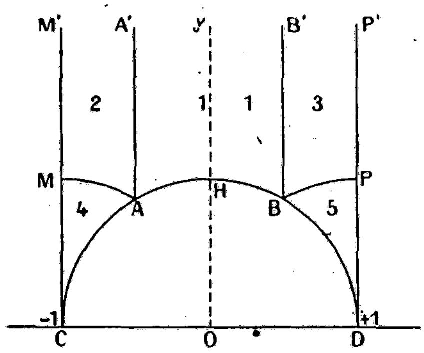
$$\varphi = (2m+1)x^2 + 4\mu xy + (2m+4\rho+3)y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le discriminant, par (E), est $4N+3$. On a, par ce qui précède,

$$\text{(I)} \qquad c > a, \quad \text{mod}\, b < a, \quad b \text{ pair}, \quad a \text{ et } c \text{ impairs};$$

et il y a autant d'unités dans $f(4N+3)$ qu'il y a de formes positives (a, b, c), de l'ordre propre, satisfaisant aux conditions (I), c'est-à-dire *de formes* φ.

Fig. 1.



Pour calculer ce nombre, partons de la division modulaire du plan : le point représentatif de la forme (a, b, c) étant le point

$$\frac{-b + i\sqrt{ac - b^2}}{a},$$

les inégalités (I) établissent que, pour *une forme* φ, le point représentatif est dans l'une des régions 1, 2, 3, 4, 5, mais non sur l'arc CABD, ni sur les droites CM', DP'.

Soit maintenant $\varphi_0 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ une forme *réduite* quelconque de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; son point représentatif est, comme on sait, *dans* la région 1, mais ne peut être sur son contour, car $\gamma = \alpha$, ou $2\beta = \pm\alpha$, avec $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N+3$, donneraient γ et α pairs, et φ_0 serait de l'ordre impropre.

La forme φ_0 (si $\beta \gtrless 0$) a une équivalente, et une seule, dont le point représentatif est soit *dans* 2, soit *dans* 3; à savoir :

$$\varphi_1 = \alpha x^2 + 2(\beta \pm \alpha)xy + (\gamma \pm 2\beta + \alpha)y^2;$$

de même elle a *une* équivalente, dont le point représentatif est *dans* 4 ou *dans* 5,

$$\varphi_2 = \gamma x^2 + 2(-\beta \pm \gamma)xy + (\gamma \mp 2\beta + \alpha)y^2;$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondent dans φ_1, comme dans φ_2 : si $\beta > 0$, il faut prendre dans φ_1 les signes inférieurs et dans φ_2 les supérieurs; ce sera l'inverse si $\beta < 0$.

Une et une seule des formes φ_0, φ_1, φ_2 est *une forme* φ, c'est-à-dire, puisque les *inégalités* (I) sont satisfaites pour toutes ces formes par la position même de leurs points représentatifs, qu'une et une seule de ces formes a son coefficient moyen pair, et ses extrêmes impairs.

C'est en effet :

φ_0 si α et γ impairs, β pair et $\gtreqless 0$;
φ_1 si α impair, β impair, γ pair;
φ_2 si γ impair, β impair, α pair.

Ce Tableau épuise toutes les parités possibles pour α, β, γ, à cause de la relation $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, et de l'hypothèse que α et γ ne sont pas tous deux pairs (ordre propre).

Donc, enfin, il y a *autant de formes* φ que de réduites de l'ordre propre, de discriminant $4N + 3$, en sorte qu'on trouve avec Hermite

$$f(4N + 3) = F(4N + 3),$$

$F(\Omega)$ désignant le nombre des classes de l'ordre propre de discriminant Ω.

Donc, enfin,

$$\mathcal{A} = \sum_{N=0}^{\infty} q^{N+\frac{3}{4}} F(4N + 3).$$

8. On traiterait de la même manière les fonctions analogues telles que $H^2 H_1 : \Theta^2$, $\Theta_1^2 H_1 : \Theta^2$, ... Pour cette dernière, la détermination du coefficient qui correspond à $\mathcal{A}$ est un peu plus difficile et revient aux calculs qu'a développés Hermite dans le paragraphe 3 de son second Mémoire (*Œuvres,* t. II, p. 248 et suiv.).

On obtient ainsi les *vingt-quatre formules* suivantes, qui se répartissent en trois groupes.

Premier groupe.

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{H^2\Theta_1}{\Theta^2} = && \mathcal{A}\Theta_1 - \sum_1^\infty q^{m^2}\alpha_m\cos 2mx,\\
&\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{\Theta^2 H_1}{H^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + && \mathcal{A}H_1 - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m\cos(2m+1)x,\\
&\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{H_1^2\Theta}{\Theta_1^2} = && \mathcal{A}\Theta - \sum_1 q^{m^2}\alpha_m(-1)^m\cos 2mx,\\
&\frac{1}{4}\eta_1\theta_1^2\frac{\Theta_1^2 H}{H_1^2} = \frac{\sin x}{4\cos^2 x} + && \mathcal{A}H - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m(-1)^m\sin(2m+1)x.
\end{aligned}\right.$$

$$\alpha_m = q^{-\frac{1}{4}} + 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}},$$

$$\mathcal{A} = \sum_0 q^{N+\frac{3}{4}}F(4N+3).$$

Les deux dernières formules se déduisent des premières par le changement de x en $x+\frac{\pi}{2}$.

Si maintenant on change q en $-q$, on obtient les quatre formules

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{H^2\Theta}{\Theta_1^2} = && -\mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}\Theta + \sum_1^\infty q^{m^2}\alpha_m(-1)^m\cos 2mx,\\
&\frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{\Theta_1^2 H_1}{H^2} = \frac{\cos x}{4\sin^2 x} + && \mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}H_1 - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m\cos(2m+1)x,\\
&\frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{H_1^2\Theta_1}{\Theta^2} = && -\mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}\Theta_1 + \sum_1 q^{m^2}\alpha_m\cos 2mx,\\
&\frac{1}{4}\eta_1\theta^2\frac{\Theta^2 H}{H_1^2} = \frac{\sin x}{4\cos^2 x} + && \mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}H - \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\alpha_m(-1)^m\sin(2m+1)x,
\end{aligned}\right.$$

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}(-q) = \sum_0^\infty e^{\frac{3i\pi}{4}}(-1)^N q^{N+\frac{3}{4}}F(4N+3).$$

En ajoutant membre à membre les deux formules où les premiers membres ont Θ^2 en dénominateur, on trouve

$$\frac{1}{4}\eta_1 \frac{\Theta_1}{\Theta^2}[\theta_1^2 H^2 + \theta^2 H_1^2] = \left(\mathcal{A} - \mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\Theta_1.$$

Mais $\theta_1^2 H^2 + \theta^2 H_1^2 = \eta_1^2 \Theta^2$ (n° **1**), de sorte qu'il reste

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{4}\eta_1^3;$$

c'est la relation d'Hermite (*Lettre à Liouville*) :

$$\eta_1^3 = 8\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\frac{8\nu+3}{4}} F(8\nu+3).$$

Joignons-y l'équation qui se déduit des expressions de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$:

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}} = 2\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} F(8\nu+7).$$

Deuxième groupe.

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{H^2 H_1}{\Theta^2} &= \qquad\qquad \mathcal{B} H_1 - 2\sum_1^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m \cos(2m+1)x,\\
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{\Theta^2\Theta_1}{H^2} &= \frac{1}{4\sin^2 x} + \mathcal{B}\Theta_1 - 2\sum_2 q^{m^2}\beta_{m-1}\cos 2mx,\\
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{H_1^2 H}{\Theta_1^2} &= \qquad\qquad \mathcal{B} H - 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m\beta_m \sin(2m+1)x,\\
\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1 \frac{\Theta_1^2\Theta}{H_1^2} &= \frac{1}{4\cos^2 x} + \mathcal{B}\Theta - 2\sum_2 q^{m^2}(-1)^m\beta_{m-1}\cos 2mx,
\end{aligned}\right.$$

$$\beta_m = q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + mq^{-m^2},$$

$$(6)\qquad \mathcal{B} = \sum_1 q^N F(4N) = 2\sum_1^{\infty} q^N F(N),$$

en comptant pour $\frac{1}{2}$ toute classe du type $a(x^2+y^2)$. Changeant q en $-q$, on aurait quatre formules analogues, où figurerait $\mathcal{B}(-q)$, que nous désignerons par $\mathfrak{B}'$:

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}(-q) = 2\sum_{1} (-1)^{\nu} q^{\nu} F(\nu).$$

Troisième groupe.

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{\Theta_1^2 H_1}{\Theta^2} &= \qquad\qquad \mathfrak{C}H_1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m \cos(2m+1)x, \\ \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{H_1^2\Theta_1}{H^2} &= \frac{1}{4\sin^2 x} - \mathfrak{C}\Theta_1 - 2\sum_{2} q^{m^2} \beta_{m-1} \cos 2mx, \\ \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{\Theta^2 H}{\Theta_1^2} &= \qquad\qquad \mathfrak{C}H + 2\sum_{1} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \beta_m \sin(2m+1)x, \\ \frac{1}{4}\theta^2\theta_1 \frac{H^2\Theta}{H_1^2} &= \frac{1}{4\cos^2 x} - \mathfrak{C}\Theta - 2\sum_{2} q^{m^2} (-1)^m \beta_{m-1} \cos 2mx, \end{aligned} \right.$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{4} + \sum_{1} q^{N} [F(N) - 3F_1(N)] = \sum_{0}^{\infty} q^{N} I(N).$$

Enfin, les quatre dernières formules se déduiraient des précédentes par changement de q en $-q$.

9. *Remarque.* — En ajoutant membre à membre les premières formules des deuxième et troisième groupes, on trouve la relation

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \frac{1}{4}\theta_1^3,$$

c'est-à-dire l'*équation de Kronecker* (¹) :

$$\theta_1^3 = 12\sum_{0} q^{N} [F(N) - F_1(N)],$$

qui donne le théorème classique sur les décompositions d'un entier en sommes de trois carrés, et d'où l'on déduit de suite les formules

(¹) *Crelle*, t. 57, p. 248; *Liouville*, 2ᵉ série, t. V, p. 289.

connues :

$$\eta_1 \theta_1^2 = 4\sum_0 q^{N+\frac{1}{4}} F(4N+1), \qquad \eta_1^2 \theta_1 = 4\sum_0 q^{N+\frac{1}{2}} F(4N+2).$$

Si l'on admet l'équation de Kronecker, les formules du troisième groupe se tirent immédiatement de celles du deuxième.

10. Hermite n'a fait connaître explicitement que la première formule du premier groupe; Kronecker a calculé la valeur de $\mathfrak{B}$, sans d'ailleurs donner *in extenso* aucune formule du second groupe (¹).

11. *Développements fondamentaux.* — En combinant les formules ci-dessus avec celles du n° **4**, et en appliquant les relations que fournit la transformation du second ordre, on arrive à de nouvelles formules qui joueront un *rôle fondamental* dans nos recherches.

Partons des deux développements

$$\frac{1}{4}\eta_1^2 \theta \frac{H_1^2 H}{\Theta^2} = -\mathfrak{B}' H + 2\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta'_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{1}{4}\theta_1^2 \theta \frac{\Theta_1^2 H}{\Theta^2} = \mathfrak{C}' H + 2\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta'_m \sin(2m+1)x,$$

qui se déduisent d'équations des second et troisième groupes par le changement de q en $-q$; $\mathfrak{C}'$ est $\mathfrak{C}(-q)$, et β'_m est $\beta_m(-q)$.

Il vient, en ajoutant membre à membre,

$$\theta \frac{H}{\Theta^2}[\theta_1^2 \Theta_1^2 + \eta_1^2 H_1^2]$$
$$= 4(\mathfrak{C}' - \mathfrak{B}') H + 16\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta'_m \sin(2m+1)x.$$

D'autre part, la première formule du n° **4** s'écrit

$$\theta \frac{H}{\Theta^2} 2\theta_1 \eta_1 \Theta_1 H_1 = 8\sum_1 (-1)^{m+1} q^{m^2}$$
$$\times \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] \sin 2mx$$

(¹) *Monatsberichte*, 26 mai 1862, p. 307.

et l'on en déduit, par addition, le développement de la fonction

$$\theta \frac{H}{\Theta^2}(\theta_1\Theta_1 + \eta_1 H_1)^2,$$

qui est, en vertu des formules de la transformation d'ordre 2, la fonction

$$\theta \frac{H(x,q)}{\Theta^2(x,q)} \Theta_1^4\left(\frac{x}{2}, q^{\frac{1}{2}}\right).$$

Changeons maintenant x en $2x$ et q en q^2, cette fonction devient, en vertu des mêmes formules (*voir* ci-après n° **14**),

$$\theta^2(q^2)\frac{H(x,q)H_1(x,q)}{\Theta^2(x,q)\Theta_1^2(x,q)}\Theta_1^4(x,q), \quad \text{ou} \quad \theta\theta_1\frac{HH_1}{\Theta^2}\Theta_1^2.$$

12. On a ainsi le développement

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\theta\theta_1 HH_1\frac{\Theta_1^2}{\Theta^2}\\
&\quad = 4[\mathcal{C}'(q^2) - \mathfrak{B}'(q^2)]\,H(2x, q^2)\\
&\qquad + 8\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}[-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2mq^{-2m^2}]\sin(4m+2)x\\
&\qquad + 8\sum_1 (-1)^{m+1} q^{2m^2}\left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\sin 4mx.
\end{aligned}\right.$$

On trouverait de même, ou par la méthode directe des n^{os} **5-7**, la formule analogue

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\theta\theta_1\Theta\Theta_1\frac{H_1^2}{H^2}\\
&\quad = \frac{1}{\sin^2 x} + 4[\mathfrak{B}'(q^2) - \mathcal{C}'(q^2)]\,\Theta(2x, q^2)\\
&\qquad - 8\sum_2 (-1)^m q^{2m^2}[-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2mq^{-2m^2}]\cos 4mx\\
&\qquad - 8\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\cos(4m+2)x.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\mathfrak{B}'(q^2) - \mathfrak{C}'(q^2) = \sum_0 (-1)^N q^{2N}[F(N) + 3F_1(N)] = \sum_0^\infty (-1)^N q^{2N} J(N),$$

$J(N)$ étant la fonction définie dans l'Introduction.

13. Enfin un procédé semblable donne les formules (10) et (11) :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_1\theta_1 H_1 \Theta_1 \frac{H^2}{\Theta^2} &= \left[\mathfrak{A}(\sqrt{q}) + e^{\frac{i\pi}{4}}\mathfrak{A}'(\sqrt{q})\right] H_1(x, \sqrt{q}) \\ &\quad - 4\sum_1 q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[3q^{-\frac{9}{8}} + \ldots + (4m-1)q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right]\cos(4m+1)x \\ &\quad - 4\sum_0 q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[\ q^{-\frac{1}{8}} + \ldots + (4m+1)q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}}\right]\cos(4m+3)x. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\mathfrak{A}(\sqrt{q}) + e^{\frac{i\pi}{4}}\mathfrak{A}'(\sqrt{q}) = 2\sum_0^\infty q^{\frac{8N+7}{8}} F(8N+7).$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_1\theta_1 H_1 \Theta_1 \frac{\Theta^2}{H^2} &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} + 2H_1(x, \sqrt{q})\sum_0 q^{\frac{8N+7}{8}} F(8N+7) \\ &\quad - 4\sum_1 q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[\ q^{-\frac{1}{8}} + \ldots + (4m-3)q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right]\cos(4m+1)x \\ &\quad - 4\sum_1 q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[3q^{-\frac{9}{8}} + \ldots + (4m-1)q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right]\cos(4m+3)x. \end{aligned}\right.$$

Les autres développements du même type se déduisent des précédents (n^{os} **12** et **13**) par les changements de x en $x + \frac{\pi}{2}$ et de q en $-q$.

14. Nous réunirons ici, pour y renvoyer au besoin, les principales formules de la *transformation du second ordre*.

$$\Theta\Theta_1 = \ \theta(q^2)\Theta(2x, q^2), \qquad HH_1 = \ \theta(q^2)H(2x, q^2),$$
$$\Theta_1^2 + \Theta^2 = 2\theta_1(q^2)\Theta_1(2x, q^2), \qquad H_1^2 - H^2 = 2\theta_1(q^2)H_1(2x, q^2);$$

d'où

$$\theta\theta_1 = \theta^2(q^2), \quad \eta_1^2 = 2\theta_1(q^2)\eta_1(q^2), \quad \theta_1^2 + \theta^2 = 2\theta_1^2(q^2),$$

$$\mathrm{H}\Theta = \tfrac{1}{2}\eta_1(\sqrt{q})\mathrm{H}(x, \sqrt{q}), \qquad \mathrm{H}_1\Theta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_1(\sqrt{q})\mathrm{H}_1(x, \sqrt{q}),$$

$$\Theta_1^2 + \mathrm{H}_1^2 = \theta_1(\sqrt{q})\Theta_1(x, \sqrt{q}), \quad \Theta^2 + \mathrm{H}^2 = \theta_1(\sqrt{q})\Theta(x, \sqrt{q}),$$

$$e^{\frac{i\pi}{4}}\mathrm{H}\Theta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\mathrm{H}(x, i\sqrt{q}), \quad e^{\frac{i\pi}{4}}\mathrm{H}_1\Theta = \tfrac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\mathrm{H}_1(x, i\sqrt{q}).$$

CHAPITRE II.

FORMULES DES DEUX TYPES DE KRONECKER.

15. Kronecker a donné deux sortes de formules, dans lesquelles, aux premiers membres, figurent des sommes *algébriques* de nombres de classes. Dans les formules du premier type (¹), qui sont au nombre de *huit*, les seconds membres contiennent des sommes de diviseurs réels; dans celles du deuxième type (²) interviennent des diviseurs complexes $a + bi$, c'est-à-dire des représentations par la forme $x^2 + y^2$. M. Hurwitz (³) a fait connaître des relations analogues, où apparaissent des diviseurs $a + bi\sqrt{2}$, c'est-à-dire des représentations par

$$x^2 + 2y^2.$$

Ce sont des formules nouvelles, se rattachant à ces deux types, que nous allons maintenant établir.

Complément aux formules du premier type.

16. Nous n'avons obtenu qu'une seule formule de ce type.

On a (nᵒˢ **3** et **14**) les développements

$$(12) \qquad \eta_1^2\theta_1\theta\frac{\mathrm{HH}_1}{\Theta^2} = 8\sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

(¹) *Crelle*, t. 57, p. 248; *Liouville*, 2ᵉ série, t. V, p. 289.

(²) *Monatsberichte*, avril 1875.

(³) *Crelle*, t. 99

et

$$(13)\qquad \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{\eta_1(i\sqrt{q})}H\Theta_1 = \sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre, en observant (n° **14**) que

$$\eta_1^2(i\sqrt{q}) = 2\eta_1(-q)\theta_1(-q) = 2\eta_1\theta e^{\frac{i\pi}{4}};$$

le premier membre sera

$$(14)\qquad \tfrac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\eta_1\theta_1 H_1\Theta_1\frac{H^2}{\Theta^2}e^{-\frac{i\pi}{8}},$$

c'est-à-dire, au facteur $\frac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})e^{-\frac{i\pi}{8}}$ près, le premier membre de (10).

Donc, dans (14), en vertu de (10), le terme en $\cos x$ est

$$(15)\qquad 2e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1(i\sqrt{q})q^{\frac{1}{8}}\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}F(8\nu+7).$$

Ce terme est dès lors égal au terme en $\cos x$ obtenu par le produit des seconds membres de (12) et (13), et qu'on calcule immédiatement par la formule $2\sin a\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$; on trouve ainsi l'expression

$$(16)\qquad 4\sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\left[q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} + q^{\frac{(2m-1)^2}{8}}(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}\right].$$

L'égalité des quantités (15) et (16) conduit à la formule que nous avons en vue.

En effet, dans (15), cherchons le coefficient de $q^{N+\frac{1}{8}}$, N étant nécessairement entier et positif. Il faut, à cet effet, poser

$$8N+1 = 8\nu+7+(2x+1)^2+1 \qquad (x \gtreqless 0)$$

et le coefficient cherché est

$$2\sum_{x\gtreqless 0}(-1)^{\frac{x(x+1)}{2}}F[8N-(2x+1)^2].$$

Pour avoir le coefficient de $q^{N+\frac{1}{8}}$ dans (16), il faut poser

$$(17)\quad \begin{cases} 8N+1 = 8m + (2m+1)^2 + 16m\rho, \\ \text{c'est-à-dire} \\ 2N = m(m+4\rho+3), \qquad (m, \rho \geqq 0) \end{cases}$$

et

$$(18)\quad \begin{cases} (8N+1) = 8m' + (2m'-1)^2 + 16m'\rho', \\ \text{c'est-à-dire} \\ 2N = m'(m'+4\rho'+1); \qquad (m', \rho' \geqq 0) \end{cases}$$

et le coefficient cherché est

$$4\sum m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}+\rho} + 4\sum m'(-1)^{\frac{(m'-1)(m'-2)}{2}+\rho'}.$$

On reconnaît sans difficulté, à l'aide de (17) et de (18), que cette expression est égale à la somme

$$-4\sum \delta(-1)^{\frac{(\delta_1+\delta)^2-1}{8}}$$

étendue aux décompositions $2N = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$; δ et δ_1 étant positifs et de parités différentes. *De là, la formule finale*

$$(19)\qquad \sum_{x \geqq 0} \left(\frac{2}{2x+1}\right) F[8N-(2x+1)^2] = -\sum \delta \left(\frac{2}{\delta_1+\delta}\right),$$

où l'on a introduit le symbole, $\left(\frac{2}{a}\right)$, de Jacobi; la somme, au premier membre, porte sur les valeurs positives entières de x, à partir de o, telles que $8N-(2x+1)^2$ ne soit pas négatif; la somme, au second membre, s'étend à toutes les décompositions en facteurs $2N = \delta\delta_1$, δ et δ_1 n'étant pas de même parité, et δ étant inférieur à δ_1.

17. *Remarques.* — 1° La formule (19) ne paraît pas rentrer dans les formules classiques I-VIII du premier type de Kronecker.

2° Si l'on partait des développements (n^{os} **5** et **14**) de $H\Theta_1 : \Theta^2$ et de $H_1\Theta_1$, en utilisant alors l'équation (8), au lieu de l'équation (10), on obtiendrait de même une relation où figure la fonction J, et qui coïncide, aux notations près, avec la formule VIII de Kronecker.

Notre formule (19) se présente donc comme l'analogue de celle-ci.

Nouvelles formules du second type.

18. Les développements en série qui vont nous servir sont ceux de fonctions telles que $H'H_1 : \Theta$.

Partons de la formule d'Hermite ([1])

$$\frac{1}{4}\eta_1 \frac{HH_1}{\Theta} = \sum q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx;$$

et dérivons les deux membres par rapport à x.

Au premier membre, en tenant compte des relations différentielles du n° **2**, on trouve

$$\frac{1}{4}\frac{\eta_1}{\Theta^2}(H'H_1\Theta - \theta_1^2\Theta_1 H^2),$$

d'où l'on tire, en utilisant la première formule (3), la relation

$$(20)\quad \frac{1}{4}\eta_1 \frac{H'H_1}{\Theta} = \mathcal{A}\Theta_1 + \sum_1^\infty q^{m^2}\left[(2m-1)q^{-\frac{1}{4}} + (2m-3)q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx.$$

On trouverait de même

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4}\eta_1 \dfrac{\Theta'_1\Theta}{H} = e^{\frac{i\pi}{4}}\mathcal{A}'H_1 + 2\sum\limits_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \\ \qquad \times \left[mq^{-\frac{1}{4}} + (m-1)q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos(2m+1)x, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4}\theta_1 \dfrac{H'\Theta_1}{\Theta} = \mathcal{B}H_1 + \dfrac{1}{2}q^{\frac{1}{4}}\cos x + \dfrac{1}{2}\sum\limits_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \\ \qquad \times \left[2m+1 + 2(2m-1)q^{-1} + 2(2m-3)q^{-4} + \ldots + 2q^{-m^2}\right]\cos(2m+1)x, \end{cases}$$

([1]) *Comptes rendus*, t. LV, p. 11; *Œuvres*, t. II, p. 244.

$$
(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\theta_1\frac{\Theta' H_1}{H} = \mathfrak{B}\Theta_1 + q\cos 2x + 2\sum_1 q^{(m+1)^2} \\
&\qquad \times\left[\frac{m+1}{2} + mq^{-1} + (m-1)q^{-4} + \ldots + q^{-m^2}\right]\cos(2m+2)x.
\end{aligned}\right.
$$

19. Cela posé, faisons $x = \frac{\pi}{4}$ dans les formules (20) à (23). On trouve directement, et en utilisant ensuite les formules du n° **14**,

$$
(24)\quad \Theta_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \Theta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{-\infty}(-1)^m q^{4m^2} = \theta(q^4) = \sqrt{\theta(q^2)\theta_1(q^2)},
$$

$$
(25)\quad H_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1(qi) = \sqrt{\theta(q^2)\eta_1(q^2)}.
$$

Dès lors, la substitution $x = \frac{\pi}{4}$ faite dans (21), par exemple, donne, au premier membre,

$$
\frac{1}{4}\eta_1\Theta'_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\theta_1(q^2)}}{\sqrt{\eta_1(q^2)}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{4}\Theta'_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}\,\theta_1(q^2).
$$

On a ainsi, en remplaçant $\Theta'_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ par son développement, la relation :

$$
(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{-\infty} q^{(2n+1)^2}(2n+1)(-1)^n \times \sum_{-\infty} q^{2m^2} \\
&\quad = \sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \times \sum_0 q^{\frac{4\nu+3}{4}}(-1)^\nu F(4\nu+3) \\
&\qquad - 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\left[mq^{-\frac{1}{4}} + (m-1)q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right].
\end{aligned}\right.
$$

Égalons les coefficients de q^N dans les deux membres de (26) :

1° N *pair*. Il n'y a pas de terme en q^N au premier membre; au second membre, si l'on pose $N = 2N'$, ce terme a pour coefficient, comme le donne un calcul facile,

$$
-\sum_{m \gtreqless 0} F[8N' - (2m+1)^2](-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} - 2\sum \delta(-1)^{\frac{(\delta+\delta_1)^2-1}{8}},
$$

la seconde somme s'étendant aux décompositions en facteurs $2N = \delta\delta_1$, où δ_1 et δ sont de parités contraires, et $\delta_1 > \delta$. On retrouve ainsi la formule (19).

2° N *impair;* $N = 2N' + 1$. — En ce cas, il n'y a pas de terme en q^N dans la somme $\sum\limits_1$ qui figure au second membre de (26).

Au premier membre, pour avoir le terme en q^N, posons

$$2N' + 1 = (2n+1)^2 + 2m^2, \qquad (m, n \gtreqless 0);$$

le coefficient cherché sera $\sum (-1)^n (2n+1)$. De là, *la formule nouvelle, à placer à côté de* (19),

$$(27) \quad \sum_{m \geqq 0} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F[8N' + 4 - (2m+1)^2] = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} a,$$

la somme, au second membre, portant sur les décompositions

$$2N' + 1 = a^2 + 2b^2 \qquad (a > 0,\ b \gtreqless 0).$$

20. En opérant de même sur le développement (20), on obtiendrait la formule VII de Kronecker, et un cas particulier d'une formule due à M. Hurwitz ([1]).

21. Le développement (22) conduit à *une seule formule, qui est nouvelle,*

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{m \gtreqless 0} (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F[4N + 1 - (2m+1)^2] \\ & \qquad = \sum \left(\frac{-2}{a}\right) a - 2 \sum d \left(\frac{2}{\frac{d + d_1}{2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Au second membre, la première somme porte sur les décompositions

$$4N + 1 = a^2 + 4b^2, \qquad (a > 0,\ b \gtreqless 0);$$

([1]) *Crelle*, t. 99.

la seconde sur les décompositions en facteurs $4N + 1 = d_1 d$, avec $d_1 \geqq d$. Toutefois, si $4N + 1$ est un carré parfait δ^2, le terme $-2\delta\left(\frac{2}{\delta}\right)$ devra être divisé par 2 (¹), c'est-à-dire être remplacé par $-\delta\left(\frac{2}{\delta}\right)$.

22. Le développement (23) ne donne que des résultats connus.

23. *Une autre méthode*, pour obtenir des relations du second type de Kronecker, consiste à poser $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans les équations (20) à (23).

Si dans la relation $\Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{2}\right) = e^{-ix} q^{-\frac{1}{4}} H_1(x)$, on fait $x = -\frac{\pi\tau}{4}$, on trouve

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = H_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right);$$

et, de même,

$$H\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = i\Theta\left(\frac{\pi\tau}{4}\right).$$

Si l'on remplace x par $\frac{\pi\tau}{4}$ dans les relations quadratiques entre les quatre fonctions thêta, on trouve aisément

$$\Theta\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) : \Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \theta\left(q^{\frac{1}{2}}\right) : \theta(q).$$

Enfin, on a directement

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \sum_{-\infty} q^{m^2} e^{2mi\pi\frac{\tau}{4}} = \sum_{-\infty} q^{m^2 + \frac{m}{2}} = q^{-\frac{1}{16}} \sum_{-\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{16}},$$

d'où

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{4}\right) = \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{16}} \eta_1\left(q^{\frac{1}{4}}\right).$$

Ces formules donnent les valeurs des quatre fonctions thêta pour $x = \frac{\pi\tau}{4}$.

(¹) Cela provient de ce que, dans le crochet qui figure au second membre de (22), le premier terme est $2m + 1$ et non $2(2m+1)$ comme l'exigerait l'analogie avec les termes suivants.

24. Faisons $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans l'équation, déduite de (20) par le changement de q en $-q$,

$$-\frac{1}{4}\eta_1\frac{H'H_1}{\Theta_1}$$
$$= e^{\frac{i\pi}{4}}\mathcal{A}'\Theta + \sum_1 (-1)^m q^{m^2}\Big[(2m-1)q^{-\frac{1}{4}} + \ldots$$
$$+ (2m-2\mu+1)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\Big]\cos 2mx.$$

Il vient, au premier membre,

$$\frac{1}{4}\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \times \sum_{-\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}+\frac{2n+1}{4}}(-1)^n(2n+1),$$

et au second

$$\sum_0 q^{\nu+\frac{3}{4}}(-1)^\nu F(4\nu+3) \times \sum_{-\infty} q^{m^2+\frac{m}{2}}(-1)^m$$
$$-\sum_1 (-1)^m q^{m^2}\frac{q^{\frac{m}{2}}+q^{-\frac{m}{2}}}{2}\Big[(2m-1)q^{-\frac{1}{4}} + \ldots$$
$$+ (2m-2\mu+1)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\Big].$$

Égalons, dans les deux membres, les coefficients de $q^{\frac{2N+1}{4}}$, en distinguant les cas de $N = 2M$ et $N = 2M+1$.

Si $N = 2M$, le coefficient cherché est, au premier membre, la somme

$$(29) \qquad \frac{1}{4}\sum (2n+1)(-1)^n,$$

étendue aux décompositions $16M + 5 = (4n+3)^2 + 4(2m+1)^2$, avec $m, n \gtreqless 0$. Cette formule exige que n soit impair, donc $(-1)^n = -1$.

Au second membre, le coefficient de $q^{\frac{4M+1}{4}}$ se compose des trois sommes

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m' \gtrless 0} F\left(\frac{16M+5-(8m'+5)^2}{4}\right)(-1)^{M-m'-1}\\ &\quad +\frac{1}{4}\sum(\delta-1)+\frac{1}{4}\sum(\delta'+1),\end{aligned}\right.$$

δ désignant tout diviseur de $16M+5$ inférieur à son conjugué ([1]) et du type $4h+3$; δ' tout diviseur de $16M+5$ inférieur à son conjugué et du type $4h+1$.

L'égalité des expressions (29) et (30) donne la formule cherchée; on la simplifie en observant que

$$\frac{1}{4}\sum(\delta-1)+\frac{1}{4}\sum(\delta'+1)=\frac{1}{4}\sum(\delta+\delta')+\frac{1}{4}A,$$

A étant la différence entre le nombre des décompositions

$$16M+5=\delta'\delta'_1 \qquad \text{où} \qquad \delta'\equiv\delta'_1\equiv 1 \pmod 4,$$

et celui des décompositions

$$16M+5=\delta\delta_1 \qquad \text{où} \qquad \delta\equiv\delta_1\equiv 3 \pmod 4.$$

Sous une autre forme, par un résultat classique, A est le *quart* du nombre des décompositions

$$(31)\qquad 16M+5=a^2+b^2,$$

a, $b\gtrless 0$, *a impair*, *b pair* (b est nécessairement impairement pair).

D'ailleurs a ou $-a$, soit εa, est du type $4n+3$; et la décomposition considérée ci-dessus

$$16M+5=(4n+3)^2+4(2m+1)^2$$

donne

$$\varepsilon a=4n+3, \qquad \text{d'où} \qquad 2n+1=\tfrac{1}{2}(\varepsilon a-1).$$

([1]) Si $A=\delta\delta_1$, les diviseurs δ et δ_1 sont dits *conjugués*.

Dès lors, la somme (29) s'écrit

$$-\tfrac{1}{4}\sum(2n+1) = -\tfrac{1}{8}\sum \varepsilon a + \tfrac{1}{8}\mathrm{B},$$

B étant le nombre des εa, c'est-à-dire la *moitié* du nombre des décompositions (31), nombre qui est $4\mathrm{A}$, de sorte que $\frac{1}{8}\mathrm{B}$ est $\frac{1}{4}\mathrm{A}$.

Ainsi le terme $\frac{1}{4}\mathrm{A}$ figure à la fois dans (29) et (30) et se détruit; il reste alors, si l'on observe que $\mathrm{F}(4\Omega) = 2\mathrm{F}(\Omega)$, la formule

$$2(-1)^{\mathrm{M}}\sum_{m \lesseqgtr 0}(-1)^m \mathrm{F}[16\mathrm{M}+5-(8m+5)^2] = \sum d + \tfrac{1}{2}\sum a,$$

d désignant tout diviseur de $16\mathrm{M}+5$ inférieur à son conjugué, et $\sum a$ s'étendant aux décompositions $16\mathrm{M}+5 = a^2+b^2$, où $a, b \gtreqless 0$, b pair, a impair et $\equiv 3 \pmod 4$.

25. On aurait une formule analogue en supposant $\mathrm{N} = 2\mathrm{M}+1$; *les deux formules se réunissent en une seule :*

$$2(-1)^{\mathrm{M}}\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m \mathrm{F}[16\mathrm{M}+8h+5-(8m-4h+5)^2]$$
$$= \sum d - \sum\left(\frac{-1}{a}\right)a.$$

Dans cette formule, h est soit 0, soit 1, à volonté; d désigne tout diviseur de $16\mathrm{M}+8h+5$, inférieur à son conjugué; la dernière somme, enfin, s'étend aux décompositions

$$16\mathrm{M}+8h+5 = a^2+b^2,$$

avec a, $b > 0$, a impair, b pair.

26. En faisant $x = \frac{\pi\tau}{4}$ dans la relation qu'on déduit de (22) par changement de q en $-q$, *on obtient la double formule*

$$2(-1)^{\mathrm{M}}\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m \mathrm{F}[16\mathrm{M}+8h+1-(8m+4h+1)^2]$$
$$= -\sum d\left(\frac{2}{d}\right)+\frac{1}{2}\sum\left(\frac{-1}{a}\right)a,$$

h est à volonté 0 ou 1; d désigne tout diviseur de $16\mathrm{M}+8h+1$, inférieur ou égal à son conjugué; la dernière somme enfin s'étend aux décompositions

$$16\mathrm{M}+8h+1=a^2+2b^2,$$

avec $a>0$, $b \gtreqless 0$.

Toutefois, si $16\mathrm{M}+8h+1$ est un carré δ^2, on divise par 2, au second membre, le terme $-\delta\left(\frac{2}{\delta}\right)$.

27. Nous n'insisterons pas davantage sur les formules qu'on obtiendrait par ce procédé, préférant aborder des relations d'un caractère plus nouveau.

CHAPITRE III.

FORMULES DES DEUX TYPES DE LIOUVILLE.

28. Liouville a indiqué une intéressante formule (1) où le premier membre est

$$\sum(-1)^m(2m+1)\mathrm{F}[8\mathrm{N}+4-(2m+1)^2],$$

et où le second membre dépend des décompositions de $8\mathrm{N}+4$ en deux carrés. Stieltjes a donné (2) la démonstration de la formule de Liou-

(1) *Liouville*, 2e série, t. XIV, p. 1.
(2) *Comptes rendus*, 10 décembre 1883; *Correspondance avec Hermite*, t. I, p. 66.

ville et en a établi d'analogues (¹), où figurent, sous le signe F, des expressions telles que $A - 2(2m+1)^2$, ou $A - 3(2m+1)^2$.

Dans l'ordre d'idées de Liouville, j'ai obtenu les résultats qui suivent.

29. *Formules nouvelles du premier type de Liouville.* — Dans la formule (22), changeons x en $x + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\theta_1 \frac{H'_1\Theta}{\Theta_1} = -4\mathfrak{B}H - 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m$$
$$\times[2m+1+\ldots+2(2m+1-2\mu)q^{-\mu^2}+\ldots+2q^{-m^2}]\sin(2m+1)x.$$

Égalons les valeurs principales des deux membres pour $x=0$. On a

$$\eta''_1\theta = -4\mathfrak{B}\eta' - 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}(-1)^m(2m+1)[2m+1+\ldots+2q^{-m^2}];$$

remplaçons η''_1 et η' par leurs valeurs (n^os **2** et **1**), et écrivons que les coefficients de $q^{N+\frac{1}{4}}$ sont les mêmes dans les deux membres, nous obtenons la relation nouvelle :

$$4\sum_{m\geqq 0}(-1)^m(2m+1)F[4N+1-(2m+1)^2]$$
$$= -\sum d(d_1+d)(-1)^{\frac{d_1+d-2}{4}} + (-1)^N\sum a^2.$$

La première somme, au second membre, s'étend aux décompositions $4N+1 = d_1 d$, où $d_1 \geqq d$; la deuxième aux décompositions

(32) $$4N+1 = a^2+4b^2, \qquad (a>0,\ b \gtreqless 0).$$

On peut simplifier la formule, en observant que

$$(-1)^{\frac{d_1+d-2}{4}} = (-1)^{N+\frac{d-1}{2}};$$

(¹) *Comptes rendus*, 17 décembre 1883.

on a alors au second membre le terme $-\sum dd_1(-1)^{N+\frac{d-1}{2}}$, c'est-à-dire

$$-(-1)^N N \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

et, comme le dernier $\sum$ est la moitié du nombre des décompositions (32), il est évident que

$$-(-1)^N N \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} = -\tfrac{1}{2}(-1)^N \sum (a^2+4b^2).$$

Notre formule prend ainsi la forme définitive :

$$8(-1)^N \sum_{m \geqq 0} (-1)^m (2m+1) F[4N+1-(2m+1)^2]$$
$$= -2\sum \left(\frac{-1}{d}\right) d^2 + \sum (a^2 - 4b^2),$$

la signification des sommes, au second membre, ayant été indiquée plus haut.

Toutefois, si $4N+1$ est un carré δ^2, on divisera par 2 le terme $-2\left(\frac{-1}{\delta}\right)\delta^2$ du second membre.

30. *Remarque.* — En changeant x en $x+\frac{\pi}{2}$ dans (21), et égalant les valeurs principales des deux membres pour $x=0$, on trouverait la formule même de Liouville.

31. *Suite des formules du premier type de Liouville.* — On a

$$\eta_1 \frac{\Theta' H_1 H}{\Theta^2} = \eta_1 \frac{H_1}{\Theta^2}(H'\Theta - \theta^2 \Theta_1 H_1) = \eta_1 \frac{H' H_1}{\Theta} - \eta_1 \theta^2 \frac{H_1^2 \Theta_1}{\Theta^2},$$

et, par (20), (4) et les expressions de $\mathcal{A}$ et $-\mathcal{A}' e^{\frac{i\pi}{4}}$ (n° **8**),

$$\eta_1 \frac{\Theta' H H_1}{\Theta^2} = 8\Theta_1 \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} F(8\nu+7) + 8\sum_1 q^{m^2}$$
$$\times\left[(m-1)q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + (m-2\mu+1)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \ldots + (-m+1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx.$$

D'autre part [n° **3**, (1)],

$$\eta_1^2\theta_1\theta\frac{\mathrm{HH}_1}{\Theta^2} = 8\sum_0 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx$$

et l'on a

$$\Theta' = 4\sum_0 mq^{m^2}(-1)^{m+1}\sin 2mx.$$

Effectuons le produit membre à membre de ces deux dernières relations; le terme indépendant de x, au premier membre, sera, par la formule du bas de la page précédente,

$$8\eta_1\theta_1\theta\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}}\mathrm{F}(8\nu+7); \tag{33}$$

au second membre, ce sera

$$16\sum_0 m^2\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}(-1)^{m+1}. \tag{34}$$

Remplaçons $\eta_1\theta_1\theta$ par η', et égalons les coefficients de $q^{2\mathrm{N}}$ dans (33) et (34), nous arrivons immédiatement *à la formule :*

$$\sum_{m\geq 0}(-1)^m(2m+1)\mathrm{F}[8\mathrm{N}-(2m+1)^2] = \sum\delta^2(-1)^{\frac{\delta_1+\delta+1}{2}}. \tag{35}$$

La somme, au second membre, s'étend aux décompositions, déjà rencontrées au n° **16**, $2\mathrm{N} = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$ et δ, δ_1 de parités différentes.

32. On trouve de même, en utilisant (22) et la première relation (7), le développement

$$\theta_1\Theta'\frac{\mathrm{H}\Theta_1}{\Theta^2} = 4(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathrm{H}_1 + 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\omega_m\cos(2m+1)x,$$

où l'on a posé,

$$\omega_m = 2m+1+\ldots+(4m-8\mu+2)q^{-\mu^2}+\ldots+(-4m+2)q^{-m^2}.$$

Maintenant, si l'on multiplie membre à membre les développements (n° **3**) de $\theta_1^2\eta_1, \theta H\Theta_1 : \Theta^2$ et de Θ', et si l'on égale dans les deux membres nouveaux les termes en $\cos x$, on arrive à la *formule simple*

$$(36) \qquad 2(-1)^N \sum_{m \geqq 0} (-1)^m (2m+1) J\left(\frac{4N+1-(2m+1)^2}{4}\right) = -\sum \left(\frac{-1}{d}\right) d^2,$$

d désignant tout diviseur de $4N+1$ inférieur ou égal à son conjugué. Toutefois, si $4N+1 = \delta^2$, le terme du second membre qui correspond à δ devra être divisé par 2.

Les formules (35) et (36) sont remarquables en ce sens qu'il ne figure, dans les seconds membres, que des diviseurs réels.

33. *Second type de Liouville.* — Liouville, toujours sans démonstration, a fait connaître une formule ([1]) où le premier membre est

$$\sum (2m+1)^2 F[4N-(2m+1)^2],$$

le second membre s'exprimant à l'aide des diviseurs de N. Nous retrouverons cette formule plus bas; nous en établirons d'abord d'autres, plus élégantes, qui donnent d'une manière générale les sommes

$$\sum m^2 F(N-m^2) \quad \text{et} \quad \sum m^2 F_1(N-m^2).$$

34. *Formules du second type.* — Partons de la relation qu'on déduit de (9), (n° **12**), en changeant x en $x+\frac{\pi}{2}$, à savoir :

$$\begin{aligned}\theta\theta_1 \frac{H^2}{H_1^2} \Theta\Theta_1 = \frac{1}{\cos^2 x} &+ 4\Theta(2x, q^2) \sum_0 (-1)^\nu q^{2\nu} J(\nu) \\ &- 8 \sum_2 (-1)^m q^{2m^2} [-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2m q^{-2m^2}] \cos 4mx, \\ &+ 8 \sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1} (2m-1) q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right] \cos(4m+2)x\end{aligned}$$

([1]) *Journal de Liouville*, 2e série, t. XII, p. 99.

et égalons les coefficients des termes en x^2 dans les deux membres.

Au premier membre, le coefficient de x^2 est

$$\theta\theta_1\frac{\eta_1^2\theta_1^2\theta^2}{\eta_1^2}\theta\theta_1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \theta^4\theta_1^4, \quad \text{ou} \quad \theta^8(q^2),$$

et l'on a évidemment

$$(37) \qquad \theta^8(q^2) = 1 + \sum_1 q^{2N}(-1)^N\varphi(N),$$

$\varphi(N)$ étant le nombre de décompositions de N en somme de huit carrés (à racines positives, négatives ou nulles, et l'ordre des carrés entrant en compte).

Il est bien connu d'ailleurs que

$$\varphi(2M+1) = 16\sum\delta^3, \qquad \varphi(2M) = 16\left[\sum\delta_p^3 - \sum\delta_i^3\right],$$

δ désignant tout diviseur de $2M+1$; δ_p (et δ_i) tout diviseur pair (et impair) de $2M$.

Au second membre, le coefficient de x^2 est

$$(38)\left\{\begin{aligned} &1 + 4\sum_0(-1)^\nu q^{2\nu}J(\nu)\times\sum_0 -16m^2q^{2m^2}(-1)^m \\ &+16\sum_2(-1)^m q^{2m^2}4m^2[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^m 2mq^{-2m^2}] \\ &-16\sum_1(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}(2m+1)^2\left[q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Égalons maintenant les coefficients de q^{2N} $(N > 0)$ dans les expressions (37) et (38).

Dans (37), c'est $(-1)^N\varphi(N)$; dans la première ligne de (38), c'est

$$-64(-1)^N\sum_0 m^2J(N-m^2);$$

enfin, dans les deux dernières lignes de (38), on voit aisément que c'est

$$16\sum(-1)^{d_1}(d_1-d)(d_1+d)^2,$$

somme étendue aux décompositions en facteurs $N = dd_1$, $d \leqq d_1$.

35. *Formules finales.* — Distinguons maintenant deux cas :

1° N *impair*. — On aura, en tenant compte de $dd_1 = N$,

$$(39)\quad 4\sum_{0} m^2 J(N-m^2) = N\sum(d_1-d) - 2\sum d^3, \quad (N = d_1 d;\ d \leqq d_1).$$

Toutefois, si N est un carré, δ_0^2, il faut diviser par 2 le terme $-2\delta_0^3$ du second membre.

On peut obtenir, par voie élémentaire, une formule analogue à (39).

Partons de la relation de Kronecker, (n° **9**),

$$\theta_1^3 = 12\sum_{0} q^\nu[F(\nu) - F_1(\nu)];$$

multiplions les deux membres par $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} m^2 q^{m^2}$ et égalons les coefficients de q^N dans les deux membres nouveaux.

Au premier membre, ce coefficient est $\sum m^2$ étendu à toutes les décompositions $N = x^2 + y^2 + z^2 + m^2$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{4}\sum(x^2+y^2+z^2+m^2) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4}N\varphi_1(N),$$

$\varphi_1(N)$ étant le nombre des décompositions de N en quatre carrés, ici $8\sum\delta$, puisque N est impair. On a dès lors

$$6\sum_{m \gtreqless 0} m^2[F(N-m^2) - F_1(N-m^2)]$$
$$= 12\sum_{m \geqq 0} m^2[F(N-m^2) - F_1(N-m^2)] = N\sum\delta,$$

δ désignant tout diviseur de N.

En combinant cette relation avec (39) de manière à faire disparaître successivement les termes en F_1 et en F, *on trouve les deux formules simples*

$$(40)\quad 8\sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) = N\sum d_1 - \sum d^3$$

$$(41)\quad 8\sum_{m>0} m^2 F_1(N-m^2) = \frac{1}{3}N\sum(d_1-2d) - \sum d^3 \qquad (N \text{ impair}).$$

Aux seconds membres, les sommes s'étendent aux décompositions $N = dd_1$, avec $d \leqq d_1$; on a de plus, comme d'ordinaire, $F(0) = 0$, $12F_1(0) = -1$. Si N est un carré, δ_0^2, les termes qui proviennent de la décomposition $N = \delta_0 . \delta_0$ doivent *tous* être divisés par 2 dans les seconds membres [1].

2° N *pair*. — La même série de calculs conduit aux résultats suivants.

Désignons par d_p tout diviseur pair, par d_i tout diviseur impair de N; soit $N = dd_1$ une décomposition quelconque de N en deux facteurs avec $d \leqq d_1$, posons

$$U(N) = \sum(-1)^{d_1}(d_1 - d),$$

$$U_3(N) = \sum(-1)^{d_1}(d_1^3 - d^3);$$

on a, N *étant pair quelconque*,

$$(42)\quad \begin{cases} 16\sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) \\ \quad = 3N\sum d_i - \sum d_p^3 + \sum d_i^3 + NU(N) + U_3(N), \end{cases}$$

---

[1] On peut dire aussi que, dans (40), et *quel que soit* N impair, la somme au second membre porte sur les décompositions $N = dd_1$, avec $d < d_1$. L'observation ne s'applique pas à (41).

La formule (40) s'écrit aussi, quel que soit N impair,

$$8\sum_{m>0} m^2 F(N-m^2) = \sum d(d_1^2 - d^2).$$

$$(43)\quad \begin{cases} 16\sum\limits_{m>0} m^2 F_1(N-m^2) \\ = -N\sum d_i - \sum d_p^3 + \sum d_i^3 + NU(N) + U_3(N). \end{cases}$$

Pour N carré parfait, il n'y a pas de modification; on suppose toujours $F(0)=0$, $12F_1(0)=-1$.

36. *Formule de Liouville* (¹). — Nous la trouverons en égalant les coefficients de x^2 dans les deux membres de (10), puis ceux de q^N dans les deux membres de la relation obtenue. Il vient ainsi

$$\sum_{m\geqq 0}(2m+1)^2 F[8N-(2m+1)^2] = -8\sum d'^3 + \sum(\delta_p-\delta_i)(\delta_p+\delta_i)^2,$$

d' désignant tout diviseur de N à conjugué impair, et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N=\delta_p\delta_i$, avec $\delta_i<\delta_p$, δ_i impair, δ_p pair. On peut écrire aussi

$$(44)\quad \begin{cases} \sum\limits_{m\geqq 0}(2m+1)^2 F[8N-(2m+1)^2] \\ = -8\sum d'^3 + 2N\sum(\delta_p-\delta_i) + \sum(\delta_p^3-\delta_i^3), \end{cases}$$

les d' et δ ayant la signification qui vient d'être indiquée.

37. *Remarques.* — 1° Si l'on multiplie par $\sum\limits_{-\infty}(2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}$ les deux membres de la relation d'Hermite (n° **8**, p. 350), et si l'on égale les coefficients de q^{2N+1} dans les deux nouveaux membres, on arrive à la formule

$$(45)\quad \sum_{m\geqq 0}(2m+1)^2 F[8N+4-(2m+1)^2] = (2N+1)\sum d,$$

d étant un diviseur quelconque de $2N+1$.

(¹) *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. XII, p. 99.

2° Les formules (44) et (45) sont implicitement contenues dans (42).

3° La formule donnée par Liouville, sans aucune indication de démonstration, comprend en réalité les deux relations (44) et (45).

38. *Dernière formule du second type.* — Reprenons la relation du n° **32** :

$$\theta_1 \Theta' \frac{H\Theta_1}{\Theta^2} = 4(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})H_1 + 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m \cos(2m+1)x,$$

et égalons les coefficients de x^2 dans les deux membres. Au premier membre, on a $\theta_1^2\theta''\eta' : \theta^2$; c'est-à-dire, en remplaçant η' par $\eta_1\theta_1\theta$ et $\eta_1\theta''$ par $\theta\eta_1'' + \theta\eta_1\theta_1^4$ (n° **2**),

$$\theta_1^3(\eta_1'' + \eta_1\theta_1^4) \quad \text{ou} \quad 4\eta_1''(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) + \eta_1\theta_1^7.$$

Il vient ainsi

$$\eta_1\theta_1^7 = 2\eta_1''(-\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C}) - q^{\frac{1}{4}} - \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \omega_m.$$

Or, égalons de même les coefficients de x^2 dans les deux membres de la première relation (5), nous trouvons

$$\eta_1^5\theta_1^3 = 2\eta_1''\mathfrak{B} + 4\sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \beta_m;$$

d'où, par combinaison avec la relation précédente,

$$(46) \quad \eta_1\theta_1^7 + 7\eta_1^5\theta_1^3 = 6\eta_1''(2\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) - q^{\frac{1}{4}} + \sum_1 (2m+1)^2 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (28\beta_m - \omega_m).$$

Maintenant, égalons, dans les deux membres de (46), les coefficients de $q^{N+\frac{1}{4}}$. Si l'on désigne par $C_{1,7}$ et $C_{5,3}$ les nombres des décompositions de $4N+1$ en un carré impair *suivi* de sept carrés pairs, et en cinq carrés impairs *suivis* de trois pairs, le coefficient cherché, au premier membre, est

$$C_{1,7} + 7C_{5,3}.$$

Or, si C est le nombre total des décompositions de $4N+1$ en huit carrés, écrits dans un ordre quelconque, on a évidemment

$$C = 8C_{1,7} + \frac{8.7.6}{1.2.3}C_{5,3} = 8(C_{1,7} + 7C_{5,3}).$$

Donc, le coefficient cherché au premier membre est le huitième de C, c'est-à-dire deux fois la somme des cubes des diviseurs de $4N+1$.

Si, maintenant, on observe que

$$2\mathfrak{B} - \mathfrak{C} = \sum q^\nu[4F(\nu) - F(\nu) + 3F_1(\nu)] = 3\sum q^\nu G(\nu),$$

en désignant toujours par $G(\nu)$, avec Kronecker, le nombre total,

$$F(\nu) + F_1(\nu),$$

des classes de discriminant ν (ordre propre et ordre impropre réunis), on achève le calcul sans difficulté, *et l'on arrive à la formule :*

$$24\sum_{m \geqq 0}(2m+1)^2 G\left(\frac{4N+1-(2m+1)^2}{4}\right) = \sum d(d_1+d)(d_1-3d);$$

la somme, au second membre, s'étend aux décompositions

$$4N+1 = dd_1, \qquad d \leqq d_1.$$

Toutefois, si $4N+1$ est carré, le terme qui provient de la décomposition $4N+1 = \delta.\delta$ doit être divisé par 2.

On peut observer que $G\left(\frac{\omega}{4}\right) = F\left(\frac{\omega}{4}\right) + F_1\left(\frac{\omega}{4}\right) = F_1(\omega)$, ce qui permet de n'introduire que F_1 dans la dernière formule.

39. *Remarque.* — En opérant sur la formule du n° **31**, comme l'on vient d'opérer sur celle analogue du n° **32**, on trouverait un résultat plus compliqué qu'il est inutile d'indiquer ici.

CHAPITRE IV.

FORMULES OU INTERVIENT LA CLASSE $x^2 - 2y^2$

40. Partons de la première formule (2), (nº 4),

$$\frac{1}{2}\eta_1\theta_1\theta\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2} = 2\sum_1 (-1)^{m+1} q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin 2mx$$

et de

$$H = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin(2m+1)x.$$

Multiplions membre à membre et égalons les coefficients des termes en $\cos x$ dans les deux nouveaux membres.

Au premier, en vertu de la formule fondamentale (10), ce coefficient est

$$(47) \qquad 2\theta q^{\frac{1}{8}} \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}} F(8\nu+7);$$

au second, par la formule $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, et par la multiplication directe, on obtient, pour le coefficient analogue,

$$(48) \qquad 2\sum_1 \left[q^{-\frac{1}{4}} - 3q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] q^{m^2}\left(q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} - q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\right).$$

Égalons maintenant les coefficients de q^N dans (47) et (48). Dans (47), on trouve de suite :

$$2\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m F(8N - 1 - 8m^2);$$

dans (48), il faut poser successivement

$$(49) \qquad \begin{cases} 4N = 4m^2 + (2m-1)^2 - (2\mu-1)^2 & (m,\ \mu \geqq 1,\ \mu \leqq m), \\ 4N = 4m'^2 + (2m'+1)^2 - (2\mu'-1)^2 & (m',\ \mu' \geqq 1,\ \mu' \leqq m') \end{cases}$$

et le coefficient cherché sera

$$(50) \qquad 2\sum(-1)^{\mu+1}(2\mu-1)+2\sum(-1)^{\mu'}(2\mu'-1).$$

Les équations (49) s'écrivent

$$(51) \qquad \begin{cases} 8N-1=(4m\ -1)^2-2(2\mu-1)^2, \\ 8N-1=(4m'+1)^2-2(2\mu'-1)^2, \end{cases}$$

ce qui fait apparaître la forme x^2-2y^2. Observons maintenant que, si l'on pose $8N-1=x^2-2y^2$, x et y sont nécessairement impairs; dès lors, les relations (51), jointes aux *inégalités* (49), se résument en

$$8N-1=x^2-2y^2, \qquad x,y\geqq 0, \quad x>2y$$

et l'expression (50) a pour valeur

$$2\sum(-1)^{\frac{x+y}{2}}y.$$

On a donc la formule nouvelle

$$(52) \qquad \sum_{m\gtrless 0}(-1)^m F(8N-1-8m^2)=\sum y(-1)^{\frac{x+y}{2}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux représentations

$$8N-1=x^2-2y^2, \qquad \text{avec} \qquad x,y\geqq 0, \quad x>2y.$$

41. En partant du produit de $\eta_1\theta_1\theta H_1\Theta_1 H:\Theta^2$ par Θ_1 et utilisant la formule fondamentale (8), on trouve, par un calcul tout semblable,

$$(53) \quad 2\sum_{m\geqq 0}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}J\left(\frac{8N+1-(2m+1)^2}{8}\right)=\sum\left(\frac{2}{x}\right)(2y-x),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$8N+1=x^2-2y^2, \qquad x,y\geqq 0, \quad x>2y.$$

Si $8N+1$ est un carré, δ^2, le terme $\left(\frac{2}{\delta}\right)(-\delta)$ du second membre, qui répond à $x=\delta$, $y=0$, doit être divisé par 2; et, comme toujours, $4J(0)=-1$.

42. *Remarque.* — En chassant, dans (20), le dénominateur Θ, et égalant les termes constants dans les deux membres nouveaux, on retrouverait (52). De même (53) s'obtiendrait à partir de (22).

43. Nous établirons plus loin, par une autre méthode, des relations du même genre; restant dans un ordre d'idées analogue, nous donnerons ici des formules qui se rattachent au premier type de Liouville, et qui dérivent d'un développement plus compliqué.

Ce développement est le suivant :

$$\begin{aligned}\Theta'\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2} = {} & 12\Theta_1(2x, q^2)\sum_0 q^{\frac{4\nu+3}{2}}F_1(4\nu+3) + 12H_1(2x, q^2)\sum_0 q^{2\nu}G(\nu) \\ & + 4\sum_1 q^{2m^2}\Big[(2m-3)q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (2m-6\mu+3)q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{2}} + \ldots \\ & \qquad + (-4m+3)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\Big]\cos 4mx \\ & + 4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\Big[\frac{2m+1}{2} + \ldots + (2m-6\mu+1)q^{-2\mu^2} + \ldots \\ & \qquad + (-4m+1)q^{-2m^2}\Big]\cos(4m+2)x \\ & + 2q^{\frac{1}{2}}\cos 2x.\end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant membre à membre les développements de Θ' et de $\eta_1\theta_1\theta H_1\Theta_1 H : \Theta^2$, il résulte de la relation précédente que le terme constant et le terme en $\cos 2x$ seront respectivement

$$12\eta'\sum_0 q^{\frac{4\nu+3}{2}}F_1(4\nu+3) \qquad \text{et} \qquad \eta'\Big[2q^{\frac{1}{2}} + 24q^{\frac{1}{2}}\sum_0 q^{2\nu}G(\nu)\Big].$$

En calculant ces termes directement, dans la multiplication, on obtient deux identités en q, qui conduisent sans difficulté à deux formules qu'on résume en celle-ci :

$$6\sum_{m\geqq 0}(-1)^m(2m+1)F_1\left(\frac{M-(2m+1)^2}{2}\right) = -\sum(x-y)(x-2y)(-1)^{\frac{x-1}{2}},$$

M désignant un entier $\equiv \pm 1 \pmod 8$, et la dernière somme s'étendant aux représentations

$$M = x^2 - 2y^2, \qquad \text{avec} \qquad x, y \geqq 0, \quad x > 2y.$$

Toutefois, si M est un carré, δ^2, on divise par 2, au second membre, le terme qui provient de la représentation $M = \delta^2 - 2.0^2$.

44. Les autres formules de ce Chapitre dérivent des développements des quotients tels que $H:\Theta^2$, établis par Biehler dans sa Thèse (¹).

Biehler a trouvé

$$\frac{1}{4}\eta_1^2\theta_1^2\theta\frac{H}{\Theta^2} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}(m+\mu-1)q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\sin(2m-1)x,$$

développement du même type que celui de $1:\Theta$, donné dans les *Fundamenta.*

On a, d'ailleurs (nº **14**),

$$H\Theta_1 = e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(iq^{\frac{1}{2}}\right)\sum_1 q^{\frac{(2m-1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+1}\sin(2m-1)x.$$

Multiplions membre à membre les deux dernières relations; au nouveau premier membre, d'après la première équation (3), le terme indépendant de x est $\mathcal{A}\theta\eta_1$; au nouveau second membre, c'est

$$e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(iq^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{m,\,\mu=1}^{\infty}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{8}+\frac{(2\mu-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

Mais la formule (nº **14**), $\eta_1^2(q) = 2\eta_1(q^2)\theta_1(q^2)$, donne

$$\eta_1^2\left(iq^{\frac{1}{2}}\right) = 2\eta_1(-q)\theta_1(-q) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}\eta_1\theta;$$

(¹) Paris, Gauthier-Villars, 1879.

il reste dès lors

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}e^{-\frac{i\pi}{8}}\eta_1\left(iq^{\frac{1}{2}}\right)=\sum_{m,\mu=1}^{\infty}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{8}+\frac{(2\mu-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

Le coefficient de $\mathcal{A}$ au premier membre est la série

$$\sum_{0}^{\infty}q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}};$$

égalons maintenant dans les deux membres les coefficients de $q^{N-\frac{1}{8}}$.

Au premier membre, en remplaçant $\mathcal{A}$ par sa valeur (n° **8**), le coefficient cherché est

$$(54)\qquad \sum_{m\geqq 0}F\left[\frac{8N-1-(2m+1)^2}{2}\right](-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Au second membre, nous devons poser

$$8N-1=(2m-1)^2+2(2\mu-1)^2+4(2m-1)(2\mu-1),$$

avec m, $\mu\geqq 1$, c'est-à-dire

$$(55)\qquad 8N-1=(2m+4\mu-3)^2-2(2\mu-1)^2,$$

et le coefficient cherché est

$$(56)\qquad \sum(m+\mu-1)(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\mu}.$$

L'équation (55) s'écrit

$$8N-1=x^2-2y^2,\qquad (x \text{ et } y \text{ nécessairement impairs}),$$

avec x, $y>0$ et $x>2y$; l'expression (56) devient

$$\sum\frac{x-y}{2}(-1)^{N+1},$$

de sorte qu'*on arrive à la formule*

$$2\sum_{m\geqq 0}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} F\left[\frac{8N-1-(2m+1)^2}{2}\right] = (-1)^{N+1}\sum(x-y),$$

la dernière somme s'étendant toujours aux représentations

$$8N-1 = x^2-2y^2,$$

avec $x, y > 0$; $x > 2y$.

45. Partons encore du développement ci-dessus de $H:\Theta^2$, et de (n° **14**)

$$\frac{1}{\theta(q^2)}HH_1 = 2\sum_0(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\sin(4m+2)x.$$

Multiplions membre à membre et égalons, dans les deux membres, les coefficients des termes en $\cos x$; nous arrivons, par un calcul semblable à celui du numéro précédent, *à la formule*

$$(57)\qquad \sum_{m\gtreqless 0}(-1)^m F(N-2m^2) = (-1)^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}}\sum x,$$

la dernière somme s'étendant encore aux représentations

$$N = x^2-2y^2, \qquad \text{avec} \qquad y \geqq 0, \qquad x \geqq 2y,$$

avec la restriction que le terme qui provient d'une représentation dans laquelle $y=0$, ou $x=2y$, doit être divisé par 2.

Remarque. — Stieltjes a indiqué ([1]) deux formules qui rentrent, comme cas particuliers, dans la relation (57) ci-dessus : elles se rapportent aux cas de N impair ou impairement pair. Mais aucun renseignement n'est donné par lui sur l'origine de ces formules; Stieltjes dit seulement que la présence d'une forme indéfinie sera sans doute la

([1]) *Correspondance avec Hermite*, t. I, p. 82-83.

source de très grandes difficultés si l'on veut entreprendre de les retrouver par l'analyse des fonctions elliptiques. « Je ne crois pas, ajoute-t-il, qu'on ait jamais vu s'introduire, dans ces calculs, des formes d'un déterminant positif, telles que $x^2 - 2y^2$. » Il est clair, d'après cela, que la méthode qui l'avait guidé diffère essentiellement de celle qui précède.

46. Enfin, en opérant de même sur les formules qui donnent les développements de $\eta_1 \theta_1^2 \theta^2 \Theta_1 : \Theta^2$ et $H_1 \Theta_1 : \eta_1(\sqrt{q})$ [Biehler, *loc. cit.*, p. 84 [1], et n° **14** de ce Mémoire], on arrive, en s'appuyant sur la première formule (7), et en posant $I(n) = F(n) - 3F_1(n)$, à la relation

$$2\sum_{m \geqq 0} I\left[\frac{8N+1-(2m+1)^2}{8}\right] = \sum (x-y);$$

la dernière somme porte sur les représentations

$$8N + 1 = x^2 - 2y^2,$$

avec $y \geqq 0$, $x > 2y$. Toutefois, le terme provenant d'une représentation où $y = 0$ devra être divisé par 2.

47. *Observation générale.* — Nous avons, dans ce qui précède, considéré les solutions de l'équation $N = x^2 - 2y^2$, pour lesquelles $y \geqq 0$, $x \geqq 2y$.

D'autre part, Dirichlet a montré que toutes les solutions ξ, η de cette équation se déduisent simplement des solutions X, Y, pour lesquelles $Y \geqq 0$, $2X > 3Y$, et cela, par la formule

$$\xi + \eta\sqrt{2} = (X + Y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n \qquad (n \gtreqless 0).$$

---

[1] La formule de Biehler est :

$$\eta_1 \theta_1^2 \theta^2 \Theta_1 : \Theta^2$$
$$= 2\sum_1^\infty q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}(2\mu-1) + 4\sum_1^\infty \sum_1^\infty (2m+2\mu-1) q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+(2\mu-1)m} \cos 2mx.$$

Les solutions ξ, η déduites ainsi d'une solution X, Y forment une *même série*.

Quelle relation y a-t-il entre les x, y et les X, Y?

Élargissant un peu la question, appelons solutions x, y non seulement celles définies ci-dessus, mais aussi les solutions x, $-y$; c'est-à-dire l'ensemble des solutions telles que

$$y \gtreqless 0; \quad x \geqq 2 \bmod y.$$

Soit maintenant une solution X, Y; adjoignons-lui la solution X′, Y′, de la même série, définie par

$$X' + Y'\sqrt{2} = (X + Y\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}),$$

c'est-à-dire

$$X' = 3X - 4Y; \qquad Y' = -(2X - 3Y).$$

Une des solutions X, Y et X′, Y′ est une solution x, y. En effet, si $X \geqq 2Y$, c'est X, Y; si $X < 2Y$, c'est X′, Y′ : car Y′ étant négatif (par l'hypothèse initiale $2X > 3Y$), on a

$$X' - 2|Y'| = 3X - 4Y - 2(2X - 3Y) = -X + 2Y,$$

quantité positive.

Toutefois, si $X = 2Y$, les *deux* solutions X, Y et X′, Y′ sont des solutions x, y : cela ne peut se produire que si N, égal à $X^2 - 2Y^2$, est le double d'un carré.

Inversement, étant donnée une solution x, y, *une* des deux solutions x, y et x', y', celle-ci définie par

$$x' + y'\sqrt{2} = (x + y\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}),$$

est une solution X, Y : on le reconnaît de même, en distinguant les cas de $y \geqq 0$ et $y < 0$.

Donc enfin :

1° Si N n'est pas le double d'un carré, les solutions x, y correspondent chacune à chacune aux solutions X, Y, et deux solutions correspondantes font partie d'une même série. On peut donc déduire toutes les solutions, aussi bien des x, y que des X, Y, et par la même formule.

2° Si $N = 2h^2$, les solutions $x = 2h$, $y = h$ et $x = 2h$, $y = -h$ correspondent à la même solution X, Y, à savoir $X = 2h$, $Y = h$; les autres solutions x, y et X, Y se correspondent chacune à chacune.

48. Stieltjes a également donné, sans démonstration complète (*Correspondance*, p. 58 et 82), des formules dont les premiers membres sont des sommes telles que

$$\sum F(n - 2m^2), \qquad \sum F(n - 8m^2),$$

analogues, par suite, à celle qui figure dans (57), et dont les seconds membres s'expriment à l'aide des diviseurs de n. Mais ces relations ne sont qu'une manière d'exprimer le nombre des représentations d'un entier par la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$; c'est pourquoi nous n'en parlerons pas ici, bien que nous ayons réussi à les établir complètement par les fonctions elliptiques, et même à les étendre ([1]).

CHAPITRE V.

DIGRESSION ARITHMÉTIQUE SUR CERTAINES RELATIONS ENTRE LES MINIMA DES FORMES DE MÊME DISCRIMINANT.

49. Reprenons l'équation (E) du n° **7**,

$$\text{(E)} \qquad 4N + 3 = (2m + 1)(2m + 4\rho + 3) - 4\mu^2,$$

où N est donné, et où les entiers indéterminés m, μ, ρ sont assujettis

([1]) On obtiendrait ces résultats en faisant $x = \frac{\pi}{4}$, ou $x = \frac{\pi\tau}{4}$, dans les formules rappelées au n° 3. C'est d'ailleurs une indication de Stieltjes lui-même, du moins pour $x = \frac{\pi}{4}$ (*loc. cit.*, p. 55).

aux conditions

$$(58) \qquad m \geqq 0; \qquad \rho \geqq 0; \qquad -m \leqq \mu \leqq m.$$

Nous avons fait correspondre à (E) la forme positive

$$\varphi = (2m+1)x^2 + 4\mu xy + (2m+4\rho+3)y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

de l'ordre propre et de discriminant $4N+3$, où a, b, c sont dès lors assujettis aux conditions

$$c > a; \qquad \text{mod}\, b < a; \qquad b \text{ pair, } a \text{ et } c \text{ impairs,}$$

et, pour avoir le nombre des solutions de (E), nous avons cherché le nombre *des formes* φ, qui lui est égal.

Nous avons alors vu qu'à toute réduite de discriminant $4N+3$, et *de l'ordre propre*

$$\varphi_0 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

correspondait *une et une seule forme* φ, *équivalente à* φ_0, et qu'on obtient par le Tableau suivant :

1° $\beta \geqq 0$.

α impair, γ impair......	$\varphi = \varphi_0 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$
α pair, γ impair........	$\varphi = (\gamma,\ \gamma-\beta,\ \gamma-2\beta+\alpha)$
α impair, γ pair........	$\varphi = (\alpha,\ \beta-\alpha,\ \gamma-2\beta+\alpha)$

2° $\beta < 0$.

α impair, γ impair.........	$\varphi = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$
α pair, γ impair..........	$\varphi = (\gamma,\ -\gamma-\beta,\ \gamma+2\beta+\alpha)$
α impair, γ pair..........	$\varphi = (\alpha,\ \beta+\alpha,\ \gamma+2\beta+\alpha)$

Nous en avons conclu de suite, avec Hermite, que le nombre des solutions de (E) est égal au nombre des réduites φ_0, c'est-à-dire à $F(4N+3)$.

50. On peut évaluer ce nombre de solutions d'une autre manière.

Écrivons (E) :

$$(E') \quad 4N+3=(2m+2\rho+2-2|\mu|)(2m+2\rho+2+2|\mu|)-(2\rho+1)^2,$$

et considérons la forme positive

$$\psi = (2m+2\rho+2-2|\mu|)x^2+2(2\rho+1)xy + (2m+2\rho+2+2|\mu|)y^2,$$

ou

$$\psi = ax^2+2bxy+cy^2.$$

Elle est de l'*ordre impropre* et de discriminant $4N+3$; ses coefficients a, b, c sont assujettis, par (58), aux conditions

$$a+c-2b>0; \qquad b>0; \qquad c-a<c+a-2b;$$

et

$$c+a\equiv c-a\equiv 0 \pmod 4; \qquad c\geqq a.$$

La condition $a+c-2b>0$ est vérifiée d'elle-même, puisque ψ est une forme positive; $c-a\equiv 0 \pmod 4$ résulte de $c+a\equiv 0 \pmod 4$; donc enfin les coefficients d'une *forme* ψ vérifient uniquement les conditions

$$b>0; \qquad |b|<a; \qquad c\geqq a; \qquad a+c\equiv 0 \pmod 4.$$

Naturellement a et c sont pairs, puisque ψ est de l'ordre impropre; b est nécessairement impair, par $ac-b^2=4N+3$.

A toute solution de (E') correspond ainsi une forme ψ; inversement, à une forme ψ correspondent *deux* solutions de (E'), car la connaissance de ψ détermine m, ρ et $|\mu|$, c'est-à-dire m, ρ et $\pm\mu$. Toutefois, si $a=c$, c'est-à-dire si $\mu=0$, à ψ ne répond qu'une solution de (E').

Observons maintenant que les inégalités $b>0$, $b<a$, $c\geqq a$ expriment que le point représentatif de ψ est (*fig.* 1, p. 347) *à gauche de* Oy, dans l'une des régions 1, 2, 4, arc CAH compris; il est sur CAH si $a=c$, et inversement: ψ est alors ambiguë. Il en résulte que le nombre des solutions de (E') est égal à celui des formes ψ où les coefficients sont assujettis aux mêmes conditions que ci-dessus, sauf $b>0$: car, à *deux* formes opposées non équivalentes, c'est-à-dire non ambiguës, (a, b, c) et $(a, -b, c)$, répondront *deux* solutions, $(m, \rho, \pm\mu)$, de (E'); à une forme ambiguë, c'est-à-dire équivalente à son opposée [et le cas ne se présente que pour $a = c$, à cause de $ac - b^2 \equiv 3 \pmod 4$)], répondra *une* solution, $(m, \rho, 0)$, de (E').

Donc, enfin, on a à chercher combien il existe de formes (a, b, c) de l'ordre impropre, ayant leur point représentatif dans la région totale 1, 2, 3, 4, 5 (arc CH compris), de discriminant $4N + 3$, et telles que $a + c \equiv 0 \pmod 4$.

Soit alors $\psi_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ une forme réduite quelconque de l'ordre impropre; en étudiant ses équivalentes dont le point représentatif est dans 1, 2, 3, 4 ou 5, on arrive sans difficulté aux résultats suivants :

1° $\beta > 0$ ($\beta = 0$ *est impossible par* $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$).

	Formes cherchées.
$\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$	(α, β, γ), $(\gamma, \gamma-\beta, \gamma-2\beta+\alpha)$, $(\alpha, \beta-\alpha, \gamma-2\beta+\alpha)$
$\alpha \equiv 0,\quad \gamma \equiv 2$	$(\alpha, \beta-\alpha, \gamma-2\beta+\alpha)$
$\alpha \equiv 2,\quad \gamma \equiv 0$	$(\gamma, \gamma-\beta, \gamma-2\beta+\alpha)$
$\alpha \equiv 0,\quad \gamma \equiv 0$	(α, β, γ)

2° $\beta < 0$.

$\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$	(α, β, γ), $(\gamma, -\gamma-\beta, \gamma+2\beta+\alpha)$, $(\alpha, \beta+\alpha, \gamma+2\beta+\alpha)$
$\alpha \equiv 0,\quad \gamma \equiv 2$	$(\alpha, \beta+\alpha, \gamma+2\beta+\alpha)$
$\alpha \equiv 2,\quad \gamma \equiv 0$	$(\gamma, -\gamma-\beta, \gamma+2\beta+\alpha)$
$\alpha \equiv 0,\quad \gamma \equiv 0$	(α, β, γ)

Distinguons maintenant deux cas.

1° $4N + 3 \equiv 7 \pmod 8$. — En ce cas, par $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$, il est impossible qu'on ait $\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$; il résulte alors des Tableaux précédents qu'à toute réduite ψ_0 correspond une et une seule des formes cherchées. Le nombre de celles-ci, c'est-à-dire le nombre des solutions de (E'), (ou E), est donc, avec nos notations habituelles, $F_1(4N + 3)$, ce qui donne une nouvelle démonstration de la relation classique

$$F_1(M) = F(M), \qquad [M \equiv 7 \pmod 8].$$

2° $4N+3 \equiv 3 \pmod 8$. — Alors, par $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N+3$, on a *nécessairement* $\alpha \equiv \gamma \equiv 2 \pmod 4$; c'est-à-dire qu'à une réduite ψ_0 correspondent *trois* [1] des formes cherchées; d'où

$$F_1(M) = \tfrac{1}{3}F(M), \qquad [M \equiv 3 \pmod 8].$$

51. Mais les Tableaux précédents nous donneront encore d'autres conséquences.

Soient h, k, l des quantités réelles quelconques, considérons la somme

$$\sum (4m+4\rho+4-4|\mu|)^h (2m+1)^k (4\rho+2)^l$$

étendue à toutes les solutions de (E) qui vérifient (58).

Les Tableaux du n° **49** établissent entre les réduites de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$, et les solutions de (E) les relations suivantes.

A une réduite (α, β, γ), où α impair, γ impair, répond la solution de (E) :

$$2m+1 = \alpha, \qquad 2\mu = \beta, \qquad 2m+4\rho+3 = \gamma.$$

Si α pair, γ impair :

$$2m+1 = \gamma, \qquad 2\mu = \varepsilon\gamma - \beta, \qquad 2m+4\rho+3 = \gamma - 2\varepsilon\beta + \alpha.$$

Si α impair, γ pair :

$$2m+1 = \alpha, \qquad 2\mu = \beta - \varepsilon\alpha, \qquad 2m+4\rho+3 = \gamma - 2\varepsilon\beta + \alpha,$$

$\varepsilon = \pm 1$ selon que $\beta \geqq 0$ ou $\beta < 0$.

---

[1] Ces trois formes ne coïncident que si (α, β, γ) a pour point représentatif le point A ou le point B de la figure 1, c'est-à-dire si (α, β, γ) équivaut à $a(2x^2+2xy+2y^2)$. Pour que la proposition du texte subsiste, il faut donc convenir de compter une telle réduite (ou classe) pour $\frac{1}{3}$. Cette remarque s'applique à tout ce qui suit.

Il en résulte, par un calcul immédiat, que la somme considérée s'obtient en ajoutant les trois sommes

$$\sum(\alpha+\gamma-2|\beta|)^h\alpha^k(\gamma-\alpha)^l; \quad \sum\alpha^h\gamma^k(\alpha-2|\beta|)^l; \quad \sum\gamma^h\alpha^k(\gamma-2|\beta|)^l$$

étendues respectivement aux réduites propres (α, β, γ) de discriminant $4N+3$, pour lesquelles

$$\alpha \text{ impair}, \gamma \text{ impair}; \quad \alpha \text{ pair}, \gamma \text{ impair}; \quad \alpha \text{ impair}, \gamma \text{ pair}.$$

En d'autres termes, la somme considérée n'est autre chose que

$$\sum m^h m_1^k(m_2-m_1)^l,$$

somme étendue cette fois à *toutes* les réduites *propres* de discriminant $4N+3$; m_1 et m_2 $(m_1 \leqq m_2)$ y désignent les deux premiers *minima impairs*, m le *minimum pair* d'une quelconque de ces réduites.

En utilisant les Tableaux du n° **50**, on trouve de même, *pour deuxième expression de la somme considérée*, la valeur suivante :

1° $4N+3 \equiv 7 \pmod 8$,

$$\sum(2\mu_1)^h\left(\frac{\mu}{2}\right)^k(\mu_1+\mu_2-\mu)^l,$$

où μ_1, μ_2 $(\mu_1 \leqq \mu_2)$ et μ sont respectivement les deux premiers minima $\equiv 0 \pmod 4$ et le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une réduite quelconque *impropre*, de discriminant $4N+3$.

2° $4N+3 \equiv 3 \pmod 8$.

$$\sum(2\nu_1)^h\left(\frac{\nu_3}{2}\right)^k(\nu_1+\nu_2-\nu_3)^l+\sum(2\nu_1)^h\left(\frac{\nu_2}{2}\right)^k(\nu_1+\nu_3-\nu_2)^l$$
$$+\sum(2\nu_2)^h\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^k(\nu_2+\nu_3-\nu_1)^l,$$

où ν_1, ν_2, ν_3, $(\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3)$ désignent les trois premiers minima d'une réduite *impropre* quelconque, de discriminant $4N+3$ [1].

52. Identifions maintenant les valeurs obtenues par les deux méthodes, et supposons d'abord $4N+3 \equiv 7 \pmod 8$; on a

$$\sum m^h m_1^k (m_2 - m_1)^l = \sum (2\mu_1)^h (\tfrac{1}{2}\mu)^k (\mu_1 + \mu_2 - \mu)^l, \tag{58}$$

les sommes, aux deux membres, s'étendant respectivement aux classes propres et impropres de discriminant $4N+3$.

Dans les deux membres, il y a un même nombre de termes; de plus, h, k, l étant quelconques, il résulte d'un principe bien connu [2] dans la théorie des nombres que les deux membres doivent être identiques, terme à terme.

Par suite :

A toute classe propre de discriminant $\equiv 7 \pmod 8$ *correspond une classe impropre du même discriminant; si* m_1, m_2 *sont les minima impairs et* m *le minimum pair* $(m_1 \leqq m_2)$ *de la propre, si* μ_1, μ_2 *sont les deux minima* $\equiv 0 \bmod 4$ $(\mu_1 \leqq \mu_2)$ *et* μ *le minimum* $\equiv 2 \pmod 4$ *de l'impropre correspondante, on a*

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}m, \qquad \mu_2 = m_1 + m_2 - \tfrac{1}{2}m, \qquad \mu = 2m_1.$$

53. Soit maintenant $4N+3 \equiv 3 \pmod 8$. De la relation analogue à (58) qui résulte immédiatement du n° **51**, on déduit ce théorème:

A toute classe impropre de discriminant $\equiv 3 \pmod 8$ *en correspondent trois propres du même discriminant; si* ν_1, ν_2, ν_3 *sont les trois premiers minima de l'impropre* $(\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3)$, *si* m_1, m_2; m'_1, m'_2; m''_1, m''_2 *sont les minima impairs et* m, m', m'' *les minima*

---

[1] En vertu de la Note de la page 388, si une des réduites est

$$a(2x^2 + 2xy + 2y^2),$$

il faut diviser par 3 la partie de l'expression précédente qui lui correspond.

[2] Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, 3e édition, p. 227.

pairs des trois propres correspondantes ($m_1 \leqq m_2, \ldots$), *on a* [1]

$$m = 2\nu_1, \qquad m' = 2\nu_1, \qquad m'' = 2\nu_2,$$
$$m_1 = \tfrac{1}{2}\nu_3, \qquad m'_1 = \tfrac{1}{2}\nu_2, \qquad m''_1 = \tfrac{1}{2}\nu_1,$$
$$m_2 = \nu_1 + \nu_2 - \tfrac{1}{2}\nu_3, \qquad m'_2 = \nu_1 + \nu_3 - \tfrac{1}{2}\nu_2, \qquad m''_2 = \nu_2 + \nu_3 - \tfrac{1}{2}\nu_1.$$

54. Corollaires. — 1° Les premiers minima impairs des trois classes propres associées à une même impropre étant toujours m_1, m'_1, m''_1, les seconds minima impairs (m_2, m'_2, m''_2) ont pour expressions, par ce qui précède,

$$2m'_1 + 2m''_1 - m_1, \quad 2m_1 + 2m''_1 - m'_1, \quad 2m_1 + 2m'_1 - m''_1.$$

Leur somme est $3(m_1 + m'_1 + m''_1)$, d'où ce théorème énoncé par Liouville sans démonstration :

La somme des seconds minima impairs des classes propres de discriminant $8M + 3$ *est trois fois la somme de leurs premiers minima impairs.*

2° De même, on établirait que :

La somme des carrés des seconds minima impairs est neuf fois celle des carrés des premiers minima impairs.

3° Considérons enfin, avec Liouville, la somme $\sum a(a' - a)$, a et $a'(a \leqq a')$ étant les deux minima impairs d'une classe propre quelconque de discriminant $8M + 3$. Par ce qui précède

$$\sum a(a'-a) = \sum m_1(2m'_1 + 2m''_1 - 2m_1) + m'_1(2m_1 + 2m''_1 - 2m'_1) + m''_1(2m_1 + 2m'_1 - 2m''_1)$$

---

[1] Si le discriminant est du type $3a^2$, parmi les classes impropres de ce discriminant figure celle de la forme $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$; il ne correspond à celle-là qu'une propre $a(x^2 + 3y^2)$, et les relations ci-dessous subsistent entre les minima des deux classes.

ou

$$\sum a(a'-a)=2\sum 2m_1m'_1+2m_1m''_1+2m'_1m''_1-m_1^2-m'^2_1-m''^2_1.$$

Mais l'expression du discriminant $8M+3$ en fonction des trois minima ν_1, ν_2, ν_3 d'une classe impropre est

$$4(8M+3)=2\nu_1\nu_2+2\nu_1\nu_3+2\nu_2\nu_3-\nu_1^2-\nu_2^2-\nu_3^2,$$

c'est-à-dire, par ce qui précède,

$$8M+3=2m_1m'_1+2m_1m''_1+2m'_1m''_1-m_1^2-m'^2_1-m''^2_1;$$

d'où, avec notations habituelles,

$$\sum a(a'-a)=\tfrac{2}{3}(8M+3)F(8M+3).$$

Toutes ces propositions ont été données par Liouville sans démonstration.

55. Les formules des n^{os} **52** et **53** relatives aux minima donneraient sans difficulté les expressions des formes propres et impropres qui sont en correspondance. On reconnaîtrait ainsi aisément que :

1° $4N+3\equiv 7 \bmod 8$. — L'impropre étant (A, B, C), la correspondante propre est l'une des trois formes

$$\left(\frac{A}{2}, B, 2C\right),\quad \left(2A, B, \frac{C}{2}\right),\quad \left(2A, B-A, \frac{A-2B+C}{2}\right),$$

dont une seule est d'ailleurs propre.

2° $4N+3\equiv 3 \pmod 8$. — Les trois formes ci-dessus sont propres et sont celles qui répondent à l'impropre.

On retombe ainsi sur un résultat bien connu, par exemple dans la théorie de la multiplication complexe (¹); mais, à ma connaissance du

(¹) Weber, *Elliptische Functionen*, p. 339-341. — *Voir* aussi Lipschitz, *Crelle*, t. 53.

moins, les relations entre les minima des classes correspondantes n'ont pas encore été remarquées explicitement.

CHAPITRE VI.

1° Formules où interviennent les minima des classes de même discriminant.

56. Les premiers membres des formules de Kronecker sont des sommes algébriques d'expressions telles que $F(N-x^2)$, les seconds membres sont fonctions des diviseurs de N; dans les relations qui vont être établies maintenant, les premiers membres sont des sommes du type $\sum \pm F(N-x^2-y^2)$, tandis que les seconds membres s'expriment à l'aide des *minima* des formes de discriminant N.

57. *Expression de* $\mathcal{A}\theta^2$. — Partons de la relation (2), (n° 4),

$$\frac{1}{4}\eta_1\theta_1\theta\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2}=\sum_1 q^{m^2}(-1)^{m+1}a_m\sin 2mx,$$

où

$$a_m=q^{-\frac{1}{4}}-3q^{-\frac{9}{4}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}};$$

et multiplions membre à membre avec la formule classique ([1])

$$\theta_1\theta\frac{H}{H_1}=\operatorname{tang}x+4\sum_1(-1)^m\frac{q^{2m}}{1+q^{2m}}\sin 2mx.$$

Égalons ensuite, dans les deux membres nouveaux développés en séries de Fourier, les termes indépendants de x.

Au premier membre, le terme cherché est $\mathcal{A}\theta^2$, en vertu même de la première relation (3). Au second membre, si l'on observe que, dans le développement en série de $\operatorname{tang}x\sin 2mx$, le terme indépendant

([1]) Hermite, *Comptes rendus*, t. LV, p. 11; *Œuvres*, t. II, p. 243.

est $(-1)^{m-1}$, on a, pour le terme cherché,

$$\sum_1 q^{m^2} a_m - 2\sum_1 q^{m^2} a_m \frac{q^{2m}}{1+q^{2m}},$$

d'où la relation

$$\mathcal{A}\theta^2 = \sum_1 q^{m^2} a_m \frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}} = \sum_1 q^{m^2} a_m [1 - 2q^{2m} + \ldots + 2(-1)^\rho q^{2\rho m} + \ldots].$$

Dans les deux membres, égalons maintenant les coefficients de $q^{N+\frac{3}{4}}$; au premier membre, on a évidemment, par l'expression de $\mathcal{A}$ (n° **8**),

$$(59) \qquad \sum_{x,\, y \gtreqless 0} (-1)^{x+y} F(4N + 3 - 4x^2 - 4y^2).$$

Au second membre, il faut poser

$$(60) \quad 4N + 3 = 4m^2 - (2\mu - 1)^2 + 8m\rho \qquad (m \geqq 1,\ \rho \geqq 0,\ 1 \leqq \mu \leqq m),$$

et le coefficient considéré est

$$(61) \qquad \sum (-1)^{\mu+\rho-1} 2(2\mu - 1),$$

la somme s'étendant aux solutions de (60) en m, μ, ρ, qui satisfont aux inégalités indiquées. Toutefois, une solution où $\rho = 0$ donne $(-1)^{\mu-1}(2\mu - 1)$ et non $(-1)^{\mu-1} 2(2\mu - 1)$, parce que, dans l'expression ci-dessus de $\mathcal{A}\theta^2$, le premier terme du crochet est 1 et non 2, comme l'exigerait l'analogie avec les termes suivants.

Pour évaluer la somme (61), écrivons (60) :

$$4N + 3 = (2m + 2\rho - 2\mu + 1)(2m + 2\rho + 2\mu - 1) - 4\rho^2,$$

et faisons correspondre à la solution (m, μ, ρ) la forme

$$\varphi = (2m + 2\rho - 2\mu + 1)x^2 + 4\rho xy + (2m + 2\rho + 2\mu - 1)y^2,$$

ou plus simplement (a, b, c).

D'après cela, et d'après les inégalités (60), φ est une forme positive, de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; ses coefficients sont assujettis à

$$a \text{ et } c \text{ impairs}, \qquad a+c \equiv 0 \pmod 4,$$
$$c-a \equiv 2 \pmod 4, \qquad b \text{ pair},$$
$$a+c-2b \geqq 2, \qquad b \geqq 0, \qquad 4 \leqq c-a+2 \leqq a+c-2b.$$

Ces conditions se réduisent évidemment aux suivantes :

$$(62) \qquad a \text{ et } c \text{ impairs}, \qquad c > a, \qquad a > b, \qquad b \geqq 0.$$

Les trois dernières expriment que le point représentatif de φ est situé (*fig.* 1, p. 347) *à gauche de* Oy, dans l'une des régions 1, 2, 4; il peut être sur Oy, mais non sur le reste du contour total.

A chaque solution de (60) correspond ainsi une forme φ, et réciproquement; de sorte que la somme (61), à évaluer, s'écrit :

$$(63) \qquad 2\sum(-1)^{\frac{1}{4}(c-a+2b-2)}\frac{c-a}{2},$$

étendue cette fois aux formes φ; toutefois si $b=0$, le terme correspondant de la somme (63) doit être divisé par 2. Ce cas d'exception est précisément le seul cas où la forme φ, *propre*, et de discriminant $4N+3$, puisse être ambiguë.

Maintenant soit $\varphi_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ une réduite *quelconque* de l'ordre propre, de discriminant $4N+3$; les seules formes équivalentes qui *puissent* avoir leur point représentatif dans la région indiquée ci-dessus sont :

$$\varphi_0 = (\alpha, \beta, \gamma), \qquad \varphi_1 = (\alpha, \beta+\alpha, \gamma+2\beta+\alpha),$$
$$\varphi_2 = (\gamma, -\beta+\gamma, \gamma-2\beta+\alpha).$$

1° α *et* γ *impairs*. — φ_0 peut seule être une forme φ, et ne l'est que si $\beta \geqq 0$. En ce cas, elle donne, dans (63), le terme

$$2(-1)^{\frac{1}{4}(\gamma-\alpha+2\beta-2)}\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

qu'on écrit aussi

$$(64)\qquad (\mu_2 - \mu_1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2 - \mu - 2)},$$

en désignant par μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leqq \mu_2$) les deux minima impairs de φ_0; par μ son minimum pair. (Ici, en effet, $\mu_1 = \alpha$, $\mu_2 = \gamma$, $\mu = \alpha + \gamma - 2\beta$).

Si $\beta = 0$, le terme (64) doit être divisé par 2.

En d'autres termes, si l'on introduit à la fois les deux formes *opposées* (α, β, γ) et $(\alpha, -\beta, \gamma)$, qui, ici, ne peuvent être équivalentes que pour $\beta = 0$, on peut dire qu'une réduite (α, β, γ) *quelconque,* pour laquelle α et γ sont impairs, β étant $\gtreqless 0$, donne dans la somme (63) le terme

$$\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2 - \mu - 2)}.$$

2° α *impair;* γ *pair.* — φ_1 seule peut être une forme φ, et ne l'est que si $\beta < 0$. (Ici β ne peut être nul, car $\alpha\gamma - \beta^2 = 4N + 3$ montre que β est impair). Il lui correspond, dans (63), le terme

$$2(-1)^{\frac{1}{4}(\gamma + 4\beta + 2\alpha - 2)}\frac{\gamma + 2\beta}{2} \qquad \text{ou} \qquad (\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2 - \mu - 2)},$$

car $\mu_1 = \alpha$, $\mu_2 = \alpha + \gamma + 2\beta$, $\mu = \gamma$. On peut dire aussi que, à *toute* réduite (α, β, γ) pour laquelle α est impair et γ pair, répond encore, dans (63), le terme

$$\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2 - \mu - 2)}.$$

3° α *pair;* γ *impair.* — C'est ici φ_2 qui s'introduit, et le résultat est le même.

Donc enfin, la somme (63), que nous savons égale à l'expression (59), n'est autre chose que la somme

$$\frac{1}{2}\sum(\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2 - \mu - 2)},$$

étendue à *toutes* les classes propres de discriminant $4N + 3$; μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leqq \mu_2$) désignent les deux minima impairs, μ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

D'ailleurs, on peut simplifier un peu l'expression de l'unité qui figure dans la somme. En effet, la valeur du discriminant en fonction des trois minima :

$$4(4N+3) = -(\mu_2 - \mu_1 + \mu)^2 + 4\mu\mu_2$$

donne

$$\mu\mu_2 = 4N + 3 + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1 + \mu}{2}\right)^2.$$

Le premier membre étant pair (à cause de μ), on en conclut que $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1 + \mu)$ est impair, et dès lors $\mu\mu_2 \equiv 0 \pmod 4$, c'est-à-dire $\mu \equiv 0 \pmod 4$; de plus

$$\mu\mu_2 \equiv 4N + 4 \pmod 8 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4}\mu\mu_2 \equiv N + 1 \pmod 2.$$

Par suite

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{4}(2\mu_2 - \mu - 2)} &= (-1)^{\frac{1}{4}\mu_2(2\mu_2 - \mu - 2)} \\ &= (-1)^{N+1}(-1)^{\frac{1}{2}\mu_2(\mu_2 - 1)} = (-1)^{N+1}(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_2 - 1)},\end{aligned}$$

car μ_2 est impair, par définition.

D'ailleurs, $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1 + \mu)$ étant impair et $\mu \equiv 0 \pmod 4$, on voit que $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$ est impair, c'est-à-dire que

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_2 - 1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1 + 1)}.$$

58. *Finalement, nous obtenons la relation*

$$\begin{aligned}&\sum_{x, y \gtreqless 0} (-1)^{x+y} F(4N + 3 - 4x^2 - 4y^2) \\ &\qquad = \frac{1}{2}(-1)^N \sum (\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu_1 - 1)}.\end{aligned}$$

Au premier membre, la somme porte sur toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de x, y, telles que $4N + 3 - 4x^2 - 4y^2$ ne soit pas négatif; *on tient compte de l'ordre* de x^2 et de y^2, c'est-à-dire que, si $x \gtrless y$, on a à prendre les *deux* termes

$$(-1)^{x+y}F(4N+3-4x^2-4y^2)$$

et

$$(-1)^{y+x}F(4N+3-4y^2-4x^2);$$

c'est-à-dire à doubler le premier de ces termes.

Au second membre, la somme porte sur les classes propres de discriminant $4N+3$; μ_1, μ_2 ($\mu_1 \leqq \mu_2$) sont les deux minima impairs, μ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

59. *Remarque.* — En faisant $x=0$ dans la troisième des relations (3), on obtiendrait l'expression de $\mathcal{A}\theta$ (¹) :

$$\mathcal{A}\theta = \sum_0 (-1)^\nu q^{\frac{4\nu+3}{4}} \psi(4\nu+3),$$

$\psi(n)$ représentant la somme des diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$: c'est, d'une manière plus précise, la fonction $\frac{1}{2}[\Phi(n)-\Psi(n)]$ de Kronecker (²).

Par suite

$$\mathcal{A}\theta^2 = \sum_0 (-1)^\nu q^{\frac{4\nu+3}{4}} \psi(4\nu+3) \times \sum_{-\infty} (-1)^m q^{m^2};$$

ce qui donne une expression du coefficient de $q^{N+\frac{3}{4}}$ dans $\mathcal{A}\theta^2$, où ne figure que la fonction ψ. On aura dès lors, en vertu de ce qui précède,

$$\frac{1}{2}\sum(\mu_2-\mu_1)(-1)^{\frac{\mu_1-1}{2}} = \sum_{m \gtreqless 0} \psi(4N+3-4m^2),$$

et, par suite, la somme qui figure au premier membre s'exprime à l'aide de la seule fonction ψ.

Des remarques analogues s'appliqueront aux formules qui suivent.

(¹) *Voir* aussi Hermite, *Lettre à Liouville* (*Œuvres*, t. II, p. 119-120).

(²) $\Phi(n)$ est la somme des diviseurs de n; $\Psi(n)$ est $\sum(d_1-d)$ étendue aux décompositions $n=dd_1$, $d \leqq d_1$.

60. *Expression de* $\mathcal{A}\eta_1\theta$. — On opère, comme au n° **57**, sur les formules (n° **5**) :

$$\eta_1^2\theta_1\theta\frac{HH_1}{\Theta^2} = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

$$\theta_1\frac{\Theta_1 H}{H_1} = \frac{1}{\cot x} + 2\sum_1 q^{m^2}(-1)^{m+1}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2}]\sin 2mx;$$

et l'on trouve

$$4\mathcal{A}\eta_1\theta = 8\sum_1(-1)^{m-1}\left[\frac{mq^m}{1+q^{2m}} + m\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}(1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2})\right].$$

Égalant les coefficients de q^N dans les deux membres, on parvient, par des raisonnements analogues aux précédents, à la *formule*

$$4\sum_{x,\,y\gtreqless 0}(-1)^x F[4N-4x^2-(2y+1)^2] = 2\sum\mu(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+2)}.$$

Dans le premier membre, $4x^2$ est écrit avant $(2y+1)^2$, c'est-à-dire que l'ordre des deux carrés est fixé; au second membre, la somme porte sur les classes propres de discriminant $4N$; μ_1 et $\mu_2(\mu_1 \leqq \mu_2)$ sont les deux minima impairs, μ le minimum pair d'une quelconque de ces classes.

On peut écrire aussi

$$\sum\mu(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+2)} = 4(-1)^{N+1}\sum_{m\geqq 0}\psi[4N-(2m+1)^2].$$

61. Des calculs semblables (¹), à partir des développements de $\eta_1\theta_1\theta H_1\Theta_1 H:\Theta^2$ et $\eta_1\theta H:\Theta_1$; puis de $\theta_1^2\eta_1\theta H\Theta_1:\Theta^2$ et $\eta_1 H_1 H:\Theta$,

---

(¹) Il faudrait seulement, au lieu des termes indépendants, égaler les termes en $\cos x$.

donneraient les expressions de

$$\mathfrak{W}\theta^2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{W}\theta\theta_1;$$

ce qui conduirait *aux deux formules* ci-dessous :

$$2\sum_{x,y \gtreqless 0} (-1)^{x+y} F(N - x^2 - y^2) = \frac{(-1)^N}{2} \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu)(-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2-\mu+2)},$$

$$2\sum_{x,y \gtreqless 0} (-1)^{x} \;\; F(N - x^2 - y^2) = \sum \mu_1 (-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1+\mu_2+2)}.$$

Les seconds membres s'étendent aux classes propres de discriminant $4N$; les μ_1, μ_2, μ ont les mêmes significations qu'au n° **60**. Dans les premiers membres, l'ordre des carrés entre en ligne de compte.

62. En opérant enfin d'une manière semblable, et utilisant les formules du troisième groupe (n° **8**), on formerait $\mathfrak{S}\eta_1^2$ et $\mathfrak{S}\eta_1\theta_1$, d'où *deux formules*. D'abord :

$$2\sum_{x,y \gtreqless 0} I\left[\frac{4N - 2 - (2x+1)^2 - (2y+1)^2}{4}\right] = \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu)(-1)^{\frac{\mu-2}{4}},$$

la somme, au second membre, s'étend aux classes propres de discriminant $4N - 2$; μ_1 et $\mu_2 (\mu_1 \leqq \mu_2)$ sont les minima impairs, μ le minimum pair d'une de ces classes.

Enfin :

$$2\sum_{x,y \gtreqless 0} I\left[\frac{4N + 1 - 4x^2 - (2y+1)^2}{4}\right] = 2\sum \mu_1 (-1)^{\frac{\mu-2}{4}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux classes propres de discriminant $4N + 1$; μ_1 et $\mu_2 (\mu_1 \leqq \mu_2)$ sont les minima impairs, μ le minimum pair d'une de ces classes.

Toutefois, si $4N + 1$ est un carré, δ^2, parmi les classes propres de discriminant $4N + 1$ figure $\delta x^2 + \delta y^2$; le terme correspondant, au second membre de la dernière formule, doit être divisé par 2, c'est-à-dire que, là encore, la classe compte pour $\frac{1}{2}$. Enfin $I(0) = \frac{1}{4}$.

2° Propriétés de certaines fonctions numériques liées aux minima des classes de même discriminant.

63. On peut introduire certaines fonctions, liées aux minima des classes de même déterminant, et qui satisfont à des relations analogues à celles de Kronecker, vérifiées par les nombres de classes eux-mêmes.

64. *Fonction $\mathcal{J}$*. — Soit $\mathcal{K}$ le terme indépendant de x dans le développement, en série de Fourier, de la fonction

$$\eta_1 \theta_1 \theta H' \frac{H_1 \Theta_1}{\Theta^2}.$$

Pour l'obtenir, on multiplie membre à membre les deux relations

$$\eta_1 \theta_1 \theta \frac{H_1 \Theta_1 H}{\Theta^2} = 4 \sum_1 q^{m^2} (-1)^{m+1} a_m \sin 2mx, \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ \mathbf{57}),$$

$$\frac{H'}{H} = \operatorname{cotang} x + 4 \sum_1 \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2mx;$$

et l'on calcule directement le terme indépendant dans le produit des deux seconds membres. C'est un calcul analogue à celui du n° **57**, et qui conduit à la formule

$$\mathcal{K} = 2 \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N q^{N+\frac{3}{4}} \mathcal{J}(4N+3),$$

étant posé

$$(64') \qquad \mathcal{J}(4N+3) = \sum (\mu_2 - \mu_1)(-1)^{\frac{\mu_2 - \mu_1 - 2}{4}};$$

la dernière somme s'étend aux classes propres de discriminant $4N+3$, μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leqq \mu_2$) sont les deux minima impairs d'une telle classe.

D'autre part, si l'on multiplie membre à membre les développements

$$H' = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (2m+1)\cos(2m+1)x,$$

$$\eta_1\theta_1\theta^2 \frac{H_1\Theta_1}{\Theta^2} = 4\sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} \cos(2m+1)x, \qquad (\text{n}^\text{o}\ 3)$$

au premier membre nouveau, le terme indépendant de x est $\mathcal{H}\theta$; au second membre (développé en série de Fourier), c'est évidemment

$$4\sum_0 (-1)^m (2m+1)^2 \frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}.$$

Il ne reste plus qu'à égaler, dans cette expression et dans $\mathcal{H}\theta$, les coefficients de $q^{\mathrm{N}+\frac{3}{4}}$ pour obtenir la *formule*

$$(-1)^{\mathrm{N}} \sum_{x \gtreqless 0} \mathfrak{F}(4\mathrm{N}+3-4x^2) = 2\sum d^2 (-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

la somme, au second membre, s'étendant aux décompositions en facteurs

$$4\mathrm{N}+3 = dd_1, \qquad d < d_1.$$

Ainsi, la fonction numérique $\mathfrak{F}(4n+3)$, définie par (64'), en fonction des minima impairs des classes propres de discriminant $4n+3$, vérifie une relation du même genre que la fonction $\mathrm{F}(4n+3)$, qui exprime le nombre de ces classes; seulement, au second membre apparaissent des *carrés* de diviseurs (réels et positifs), tandis que, dans les formules de Kronecker, ces diviseurs ne figurent qu'à la première puissance.

65. *Fonction* $\mathcal{G}$. — Si l'on calcule de même le terme indépendant, $\mathfrak{z}$, dans le développement de Fourier de

$$\eta_1\theta_1\theta\,\Theta'_1 \frac{HH_1}{\Theta^2},$$

en utilisant ceux de $\eta_1 \theta_1 \theta \mathrm{H}_1 \Theta_1 \mathrm{H} : \Theta^2$ et $\Theta'_1 : \Theta_1$, on trouve aisément

$$\mathfrak{s} = 4 \sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{4}} \mathcal{G}(8\nu + 7),$$

étant posé

$$\mathcal{G}(8\nu + 7) = \sum \mu (-1)^{\frac{1}{4}(\mu_1 + \mu_2 + \mu + 2)},$$

somme étendue aux classes *de l'ordre impropre* de discriminant $8\nu + 7$, μ_1 et $\mu_2 (\mu_1 \leqq \mu_2)$ étant les deux minima $\equiv 0 \pmod 4$, et μ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une telle classe.

D'autre part, la multiplication des développements de

$$\eta_1^2 \theta_1 \theta \mathrm{H} \mathrm{H}_1 : \Theta^2, \qquad (\text{n}^\circ\ \mathbf{3}),$$

et de Θ'_1 permet de calculer $\mathfrak{s}\eta_1$, *d'où la formule*

$$\sum_{x \geqq 0} \mathcal{G}[8\mathrm{N} - (2x+1)^2] = -2 \sum \delta^2 (-1)^{\frac{\delta_1 - \delta - 1}{2}},$$

la seconde somme s'étendant aux décompositions

$$2\mathrm{N} = \delta\delta_1,$$

$0 < \delta_1$ et δ, δ_1 étant de parités différentes.

On pourrait multiplier aisément les exemples de cette nature.

3° Formules où interviennent les carrés des minima des classes de même discriminant.

66. *Expression de* $\mathcal{A}'\eta_1 \theta_1^3$. — En dérivant le développement classique de $\mathrm{H}^2 : \Theta^2$, à savoir

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2} = 8 \sum_0^\infty \frac{mq^m}{1 - q^{2m}} - 8 \sum_0^\infty \frac{mq^m}{1 - q^{2m}} \cos 2mx,$$

et utilisant les relations différentielles (n° **2**), on a

$$(65)\qquad \eta_1^2\theta_1^2\theta^2\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^3} = 8\sum_1^\infty \frac{m^2q^m}{1-q^{2m}}\sin 2mx.$$

D'autre part [1],

$$(66)\quad \theta_1\frac{\Theta H_1}{H} = \operatorname{cotang} x + 2\sum_1 q^{m^2}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2}]\sin 2mx.$$

Multiplions (65) et (66) membre à membre, et égalons ensuite les termes constants dans les deux membres nouveaux, développés en séries de Fourier.

Le premier membre, $\eta_1^2\theta_1^3\theta^2 H_1^2\Theta_1 : \Theta^2$, a pour terme constant, d'après (4),

$$(67)\quad -4\mathcal{A}'e^{\frac{i\pi}{4}}\eta_1\theta_1^3,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad 4\eta_1\theta_1^3\sum_0^\infty(-1)^\nu q^{\nu+\frac{3}{4}}F(4\nu+3).$$

Au second membre nouveau, le terme constant est [2]

$$(68)\quad 8\sum\frac{m^2q^m}{1-q^{2m}} + 8\sum_1 m^2\frac{q^{m^2+m}}{1-q^{2m}}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-(m-1)^2}].$$

Égalons maintenant les coefficients de q^N dans les expressions (67) et (68).

Dans (67), en vertu de la relation classique [3]

$$\eta_1\theta_1^3 = 2\sum_{h=0}^\infty q^{h+\frac{1}{4}}\Phi(4h+1),$$

---

(1) HERMITE, *Comptes rendus*, t. LV; *Journal de Liouville*, 2e série, t IX, p. 145; *Œuvres*, t. II, p. 244.

(2) Car dans le développement $\operatorname{cotang} x \sin 2mx$, le terme constant est 1.

(3) Cette relation exprime que le nombre de décompositions de $4h+1$ en quatre carrés, le carré impair écrit d'abord, est égal à deux fois la somme des diviseurs de $4h+1$.

où $\Phi(n)$ désigne la somme des diviseurs de n, le coefficient de q^N est

$$8\sum_{h\geqq 0}(-1)^{N+h+1}F(4N-4h-1)\Phi(4h+1).$$

Dans (68), le coefficient de q^N se compose de deux parties.
On doit d'abord poser

$$N = m' + 2m'\rho' = m'(2\rho'+1), \tag{69}$$

et prendre $8\sum m'^2$.

Il faut poser ensuite

$$N = m^2 + m + 2m\rho - \mu^2 \qquad (m \geqq 1,\ \rho \geqq 0,\ |\mu| \leqq m-1), \tag{70}$$

et prendre $8\sum m^2$, étendue à toutes les solutions m, ρ, μ de cette équation, qui vérifient les inégalités indiquées.

Écrivons (70)

$$4N = (2m+2\rho-2|\mu|+1)(2m+2\rho+2|\mu|+1)-(2\rho+1)^2$$

et faisons correspondre à toute solution m, μ, ρ la forme positive, de l'ordre propre et de discriminant $4N$,

$$\varphi = (2m+2\rho-2|\mu|+1,\ 2\rho+1,\ 2m+2\rho+2|\mu|+1) = (a, b, c).$$

Les coefficients de φ vérifient les conditions

$$a \text{ et } c \text{ impairs}, \qquad a+c \equiv 2, \qquad c-a \equiv 0 \pmod 4, \qquad b \text{ impair},$$
$$b > 0, \qquad \frac{c+a-2b}{4} \geqq 1, \qquad a > b, \qquad c \geqq a,$$

qui, le discriminant étant $4N$, se réduisent évidemment aux suivantes :

$$b \text{ impair}, \qquad b > 0, \qquad a > b, \qquad c \geqq a. \tag{71}$$

A une solution (m, μ, ρ) de (70) correspond ainsi une forme φ ; à une forme φ répondent (à cause de $\pm\mu$) *deux* solutions de (70), sauf si $\mu = 0$.

On a donc finalement à considérer les formes φ et à prendre la somme

$$2 \times 8 \sum \frac{(a+c-2b)^2}{16} \quad \text{ou} \quad \sum (a+c-2b)^2,$$

étendue à toutes ces formes. Toutefois, si $\mu = 0$, c'est-à-dire si $c = a$, le terme $(a+c-2b)^2$ doit être divisé par 2.

Les inégalités (71) montrent que le point représentatif de φ est (*fig.* 1, p. 347) *à gauche de* Oy, dans l'une des régions 1, 2, 4, y compris le contour M′CAH, et non compris la ligne Hy.

Soit alors $\varphi_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ une réduite *quelconque* propre, de discriminant 4N.

1° Si β est impair et $\beta > 0$, φ_0 est une forme φ. Si $\beta < 0$, aucune équivalente de φ_0 n'est une forme φ.

Pour $\beta > 0$, φ_0 donne le terme $(\alpha + \gamma - 2\beta)^2$, ou μ^2, en désignant par μ le minimum pair de φ.

Toutefois, si $\alpha = \gamma$ (ce qui est le seul cas où φ_0 puisse être ambiguë lorsque β est impair), il faut prendre seulement $\frac{1}{2}\mu^2$.

On peut donc dire, en introduisant les réduites opposées (α, β, γ) et $(\alpha, -\beta, \gamma)$, qu'une réduite *quelconque*, propre (α, β, γ), de discriminant 4N, où β est impair, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$, μ désignant son minimum pair.

2° Si β est pair, l'un des deux coefficients α, γ est $\equiv 0 \pmod 4$, l'autre est impair. On trouve encore, par un raisonnement semblable à celui du n° **57**, qu'une réduite *quelconque*, où β est pair, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$. Il n'y a qu'un cas d'exception, c'est celui d'une réduite ambiguë, φ_0, pour laquelle $\beta = 0$.

En ce cas, aucune des formes

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta \pm \alpha, \gamma \pm 2\beta + \alpha), \quad (\gamma, -\beta \pm \gamma, \gamma \mp 2\beta + \alpha)$$

n'est une forme φ : car si, par exemple, c'est α qui est impair, la seule équivalente à φ_0 qui *puisse* être une forme φ est $(\alpha, \alpha, \gamma + \alpha)$, et, comme en ce cas $a = b$, elle n'est effectivement pas forme φ.

Donc enfin, dans le coefficient cherché de q^N, chaque réduite propre, de discriminant $4N$, donne le terme $\frac{1}{2}\mu^2$, sauf les réduites pour lesquelles $\beta = 0$: mais les termes qui proviennent de (69), à savoir

$$8\sum m'^2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\sum (4m')^2,$$

font évidemment disparaître l'exception, car ils s'écrivent $\frac{1}{2}\sum \mu^2$, somme étendue aux réduites *propres* de discriminant $4N$, pour lesquelles le coefficient moyen est nul.

67. Par suite, *la conclusion de cette discussion est la formule :*

$$(-1)^{N+1}\sum_{h \geqq 0}(-1)^h F(4N-4h-1)\Phi(4h+1) = \frac{1}{16}\sum \mu^2;$$

$\Phi(n)$ est la somme des diviseurs de n, et la somme au second membre s'étend aux classes propres de discriminant $4N$, μ désignant le minimum pair d'une quelconque de ces classes. Bien entendu, au premier membre, h, qui part de 0, prend toutes les valeurs (positives et entières) qui ne rendent pas $4N - 4h - 1$ négatif, c'est-à-dire que $h = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$.

Cette formule est intéressante en ce qu'elle exprime $\sum \mu^2$ à l'aide seulement des deux fonctions F et Φ.

68. De même, en partant de (65) et du développement de $\eta_1 \Theta\Theta_1 : \mathrm{H}$, on formerait $\mathfrak{S}\,\eta_1^3\theta_1$, d'où la formule

$$\sum_{h \geqq 0} \mathrm{I}\left[\frac{4N-1-(4h+3)}{4}\right]\Phi(4h+3) = \frac{1}{16}\sum \mu^2,$$

la somme s'étendant, au second membre, aux classes propres de discriminant $4N-1$, et μ désignant le minimum pair d'une telle classe.

On n'oubliera pas que $\mathrm{I}(0) = \frac{1}{4}$.

Indiquons maintenant une voie différente pour obtenir des relations analogues.

69. *Définition de la fonction* $\mathcal{E}(q)$. — Nous désignerons par $\mathcal{E}(q)$, ou plus simplement $\mathcal{E}$, le terme constant dans le développement trigonométrique de

$$\eta_1^3 \theta_1^2 \theta^2 \frac{\Theta_1 H_1^2 H^2}{\Theta^4}.$$

On peut évaluer $\mathcal{E}$ de diverses manières.

En premier lieu, partons des développements

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1 H}{\Theta^3} = 8 \sum_1 \frac{m^2 q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2mx,$$

$$\eta_1 \frac{HH_1}{\Theta} = 4 \sum_1 q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin 2mx;$$

en multipliant membre à membre et égalant les termes constants, on trouve

$$\mathcal{E} = 16 \sum_1^\infty m^2 \frac{q^{m^2+m}}{1 - q^{2m}} \left[q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right],$$

$\mathcal{E}$ est donc de la forme

$$\mathcal{E} = \sum_0^\infty q^{2N - \frac{1}{4}} \alpha_N, \tag{72}$$

et, si l'on pose

$$8N - 1 = 4m^2 + 4m + 8m\rho - (2\mu - 1)^2 \tag{73}$$
$$(m \geqq 1, \quad \rho \geqq 0, \quad 0 < \mu \leqq m),$$

$$\alpha_N = 16 \sum m^2,$$

la somme s'étendant aux solutions indiquées, m, ρ, μ, de (73). En écrivant (73)

$$8N - 1 = (2m + 2\rho - 2\mu + 2)(2m + 2\rho + 2\mu) - (2\rho + 1)^2 = ac - b^2,$$

et faisant correspondre à la solution m, ρ, μ la forme (a, b, c) positive, impropre, et de discriminant $8N-1$, on reconnaît, par la marche déjà si souvent suivie, qu'on a

$$\alpha_N = \frac{1}{2}\sum(\mu_1^2+\mu_2^2), \tag{74}$$

μ_1 et μ_2 ($\mu_1 \leqq \mu_2$) étant les deux minima $\equiv 0 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque, de discriminant $8N-1$.

70. *Seconde évaluation de* α_N. — En opérant de même sur les deux développements (n^os **3** et **4**) :

$$\eta_1^2\theta_1\theta\,\frac{HH_1}{\Theta^2} = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

$$\eta_1\theta_1\theta\,\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta^2} = 4\sum_1(-1)^{m+1}q^{m^2}a_m\sin 2mx,$$

(*voir* n° **57**), on trouve :

$$\mathcal{E} = 16\sum_1(-1)^{m+1}m\,\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right].$$

On est ainsi conduit, pour calculer α_N, à poser

$$8N-1 = 4m^2+4m+8m\rho-(2\mu-1)^2, \quad (m \geqq 1,\ \rho \geqq 0,\ 0 < \mu \leqq m),$$

d'où

$$\alpha_N = 16\sum m(2\mu-1)(-1)^{m+\rho+\mu}.$$

En introduisant la même forme (a, b, c) que ci-dessus, on trouve

$$\alpha_N = \sum(2\mu_1\mu_2 - \mu\mu_1 - \mu\mu_2), \tag{75}$$

μ_1, μ_2 étant les minima $\equiv 0 \pmod 4$, ($\mu_1 \leqq \mu_2$) et μ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque, de discriminant $8N-1$.

71. La comparaison des deux valeurs de α_N conduit à la relation suivante :

$$(76) \qquad \sum(\mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu\mu_1 + 2\mu\mu_2 - 4\mu_1\mu_2) = 0;$$

la somme s'étendant à toutes les classes impropres d'un discriminant donné, $8N - 1$; μ_1, μ_2 et μ ont les significations qui viennent d'être indiquées.

La relation (76), qui semble nouvelle, ne paraît pas facilement démontrable par voie élémentaire.

Exemple. — Soit $8N - 1 = 15$; il y a deux classes impropres $(2, 1, 8)$ et $(4, 1, 4)$, pour lesquelles μ_1, μ_2, μ ont les valeurs respectives

$$8, 8, 2 \quad \text{et} \quad 4, 4, 6;$$

et l'on a bien

$$(8^2 + 8^2 + 4.8 + 4.8 - 4.64) + (4^2 + 4^2 + 12.4 + 12.4 - 4.16) = 0.$$

72. *Troisième évaluation de* α_N. — Il faut partir des relations [n^{os} **5** et **8**, (5)]

$$\eta_1^2 \theta_1 \frac{H^2 H_1'}{\Theta^2} = 4 \mathfrak{Vb} H_1 - 8 \sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (q^{-1} + \ldots + m q^{-m^2}) \cos(2m+1)x,$$

$$\eta_1 \theta_1 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1}{\Theta^2} = 4 \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1 - q^{2m+1}} \cos(2m+1)x;$$

et faire encore le produit membre à membre. On obtient ainsi, pour $\mathfrak{C}$, la somme des deux expressions

$$16 \mathfrak{Vb} \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{2m+1}{2}}}{1 - q^{2m+1}}$$

et

$$(77) \qquad -16 \sum_0 (2m+1) \frac{q^{\frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{2m+1}{2}}}{1 - q^{2m+1}} (q^{-1} + \ldots + m q^{-m^2}).$$

Cherchons le coefficient de $q^{k+\frac{3}{4}}$ dans la première.

En vertu de l'expression de $\mathfrak{B}$ (p. 350), ce sera

$$(78)\quad 16\sum(2m+1)F[4k+3-(2m+1)^2-2(2m+1)-4(2m+1)\rho],$$

m étant entier positif, ρ entier positif ou nul, et la somme s'étendant à toutes les valeurs de m, ρ qui ne rendent pas négative la quantité sur laquelle porte F.

La quantité (78), que nous désignerons par β_k, s'écrit évidemment

$$\beta_k = 16\sum_{h\geqq 0} F[4k+3-(4h+3)]\psi(4h+3),$$

$\psi(n)$ désignant, comme au n° **59**, la somme des diviseurs de n inférieurs à $\sqrt{n}$.

Il faut maintenant développer de même la quantité (77) suivant les puissances de q; cette quantité est évidemment du type

$$\sum_{k=0} q^{k+\frac{3}{4}}\gamma_k;$$

on calcule γ_k par nos méthodes ordinaires, et l'on trouve ainsi :

1° k impair .... $\gamma_k = \sum \mu(\mu_2-\mu_1)$

2° k pair .... $\gamma_k = 2\sum \nu_2(\nu_3-\nu_1)$

μ_1, μ_2 désignant les minima $\equiv 0 \pmod 4$ et μ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque de discriminant $4k+3$ (k impair); ν_1, ν_2, ν_3 ($\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$) les minima d'une classe impropre quelconque de discriminant $4k+3$ (k pair).

On obtient ainsi une nouvelle expression du coefficient de $q^{k+\frac{3}{4}}$ dans $\mathfrak{C}$; c'est $\beta_k+\gamma_k$.

1° *Soit k pair;* $k+\frac{3}{4}$ est du type $2k'+1-\frac{1}{4}$; comme il n'y a pas de tels termes dans $\mathfrak{C}$, il reste $\beta_k+\gamma_k=0$, c'est-à-dire, en faisant

$k = 2M$,

$$8\sum_{h\geqq 0} F[8M+3-(4h+3)]\psi(4h+3) = \sum \nu_2(\nu_3-\nu_1);$$

la dernière somme porte sur les classes impropres de discriminant $8M+3$, et ν_1, ν_2, ν_3 désignent les trois minima d'une quelconque de ces classes ($\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$).

2° *Soit k impair;* $k = 2N-1$; on trouve, en égalant $\beta_k + \gamma_k$ à la valeur (75) de α_N,

$$8\sum_{h\geqq 0} F[8N-1-(4h+3)]\psi(4h+3) = \sum \mu_1(\mu_2-\mu),$$

μ_1, μ_2 étant les deux minima $\equiv 0 \pmod 4$ et μ le minimum $\equiv 2 \pmod 4$ d'une classe impropre quelconque de discriminant $8N-1$, ($\mu_1 \leqq \mu_2$).

73. *Quatrième évaluation de* α_N. — On partira des formules :

$$\eta_1^3\theta_1^2\theta\frac{H^2H_1}{\Theta^3} = -2\sum_0 (2m+1)^2\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\cos(2m+1)x + \frac{1}{2}\eta_1\theta_1^4\theta\frac{H_1}{\Theta},$$

$$\theta\frac{H_1\Theta_1}{\Theta} = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}[1-2q^{-1}+\ldots+2(-1)^m q^{-m^2}]\cos(2m+1)x;$$

une suite de calculs analogues conduira aux deux relations ci-dessous, où les notations du numéro précédent sont conservées et où $\varphi(n)$ désigne la somme des diviseurs *impairs* de n :

$$32\sum_{h\geqq 0} F(8N-1-4h)[2(-1)^{h+1}-1]\varphi(h) = \sum(\mu_1^2+\mu_2^2-\mu^2),$$

$$32\sum_{h\geqq 0} F(8M+3-4h)[2(-1)^{h}+1]\varphi(h) = \sum(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2).$$

On fera $\varphi(0) = \frac{1}{24}$ et l'on ne comptera que pour $\frac{1}{3}$ la classe $(2a, a, 2a)$.

74. En introduisant de même le terme en $\cos x$ du développement trigonométrique de

$$\eta_1^2 \theta_1^3 \theta^2 \frac{H_1 \Theta_1^2 H^2}{\Theta^4},$$

on arriverait à des résultats dont nous ne citerons ici qu'un seul,

$$\begin{aligned} 8 \sum_{h \geqq 0} F[4N - (4h+1)] \psi(4h+1) \\ = \sum m_1(m_1 + m_2 - m) \left[1 - (-1)^{\frac{m}{4}}\right], \end{aligned}$$

la dernière somme s'étendant aux classes propres de discriminant $4N$, m_1, m_2 étant les deux minima impairs ($m_1 \leqq m_2$), m le minimum pair d'une telle classe.

Enfin $\psi(4h+1)$ a le sens précis indiqué au n° **59**; c'est, si $4h+1$ non carré, la somme des diviseurs du nombre $4h+1$ *inférieurs* à sa racine carrée; si $4h+1 = \delta^2$, c'est cette même somme augmentée de $\frac{1}{2}\delta$.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE I.

FORMULES DÉDUITES DES DÉVELOPPEMENTS FONDAMENTAUX.

75. Rappelons d'abord les relations suivantes, qui appartiennent à la transformation du troisième ordre des fonctions thêta (¹) :

$$-C\,H(3x, q^3) = H(x) H\left(x - \frac{\pi}{3}\right) H\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

(¹) *Voir*, par exemple, WEBER, *Elliptische Functionen*, § 28.

$$C\,H_1(3x, q^3) = H_1(x) H_1\left(x - \frac{\pi}{3}\right) H_1\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C\,\Theta\,(3x, q^3) = \Theta\,(x)\,\Theta\,\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\,\Theta\,\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$C\,\Theta_1(3x, q^3) = \Theta_1(x)\Theta_1\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\,\Theta_1\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

la constante C ayant pour valeur $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\eta_1\,\theta_1\,\theta : H\left(\frac{\pi}{3}\right)$; on a d'ailleurs directement pour $H\left(\frac{\pi}{3}\right)$ la valeur $\sqrt{3}\,\eta(q^3)$, en désignant par $\eta(q)$, avec M. Weber, la fonction

$$\eta(q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{3m^2+m+\frac{1}{12}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

On conclut immédiatement des relations précédentes

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} H\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\,\eta(q^3), \\ H_1\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \eta(q^3)\frac{\sqrt{\theta\theta_1}}{\sqrt{\theta(q^3)\theta_1(q^3)}}, \\ \Theta\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \eta(q^3)\frac{\sqrt{\eta_1\theta_1}}{\sqrt{\eta_1(q^3)\theta_1(q^3)}}, \\ \Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \eta(q^3)\frac{\sqrt{\eta_1\theta}}{\sqrt{\eta_1(q^3)\theta(q^3)}}. \end{aligned}\right.$$

76. Lemme. — Faisons $x = \frac{\pi}{3}$ dans le développement classique

$$\eta_1^2\,\theta_1^2\,\frac{H^2}{\Theta^2} = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - 8\sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2mx;$$

il vient, en vertu de (79),

$$(80)\qquad 3\eta_1\,\theta_1\,\eta_1(q^3)\,\theta_1(q^3) = 8\sum_1 \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\left(1 - \cos\frac{2m\pi}{3}\right).$$

D'ailleurs (n° **14**),

$$\eta_1\,\theta_1 = \tfrac{1}{2}\,\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right), \qquad \eta_1(q^3)\,\theta_1(q^3) = \tfrac{1}{2}\,\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right);$$

quant à $\cos\frac{2m\pi}{3}$, c'est 1, si $m \equiv 0 \pmod 3$, et $-\frac{1}{2}$ dans tout autre cas. Si maintenant on égale les coefficients de q^{N} dans les deux membres de (80), on obtient immédiatement ce théorème :

Le nombre des décompositions de 8N *selon la formule*

$$8\mathrm{N} = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 3(2z+1)^2 + 3(2t+1)^2,$$

où x, y, z, t sont entiers, positifs, nuls ou négatifs, est égal à seize fois la somme des diviseurs de N *dont les conjugués sont impairs et qui ne sont pas multiples de* 3.

77. *Relations déduites de la formule fondamentale* (10). — Dans cette formule (10), qui s'écrit

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta_1\theta_1\mathrm{H}_1\Theta_1\frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2} = 2\mathrm{H}_1(x,\sqrt{q})\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}\mathrm{F}(8\nu+7) - 4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \\ &\qquad\times\left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \ldots\right]\cos(2m+1)x, \end{aligned}\right.$$

faisons $x = \frac{\pi}{3}$. Le premier membre, en vertu de (79), est

$$3\eta_1(q^9)\theta_1(q^3)\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ou, d'après le n° **14**,

$$\frac{3}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right)\frac{1}{2}\eta_1(\sqrt{q})\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{q}\right),$$

c'est-à-dire

$$(81)\qquad \frac{3}{4}\eta_1^2\left(q^{\frac{3}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Le second membre est

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &2\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}\mathrm{F}(8\nu+7)\times\sum_{-\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} \\ &-4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \ldots\right]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}. \end{aligned}\right.$$

Égalons les coefficients de q^N dans les deux expressions (81) et (82).

Dans (81), on doit poser

$$(83)\quad 8N = 3(2z+1)^2 + 3(2t+1)^2 + (2y+1)^2 + (2m+1)^2$$
$$\left(z,\, t,\, y,\, m \gtreqless 0\right)$$

et prendre la somme

$$(84)\qquad \frac{3}{4}\sum \cos(2m+1)\frac{\pi}{3},$$

étendue à toutes les décompositions (83) de 8N.

Or :

1° Si $N \equiv 0 \pmod 3$, $2y+1$ et $2m+1$, dans (83), sont $\equiv 0 \pmod 3$; donc $\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}$ est -1, et la somme (84), c'est-à-dire le coefficient de q^N dans (81), est $-\frac{3}{4}\mathfrak{N}$, où $\mathfrak{N}$ désigne le nombre des représentations (83), nombre calculé d'une manière générale au n° **76**.

2° Si $N \equiv -1 \pmod 3$, l'un des entiers $2y+1$, $2m+1$ est $\equiv 0 \pmod 3$, l'autre $\equiv \pm 1 \pmod 3$; d'ailleurs, on a évidemment

$$\frac{3}{4}\sum \cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}\sum\left[\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} + \cos(2y+1)\frac{\pi}{3}\right],$$

et comme, au second membre, un des cosinus est -1, l'autre $+\frac{1}{2}$, la somme (84) est égale à $-\frac{3}{16}\mathfrak{N}$.

3° Si $N \equiv +1 \pmod 3$, comme $2y+1$ et $2m+1$ sont tous deux $\equiv \pm 1 \pmod 3$, $\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}$ est $\frac{1}{2}$, et la somme (84) est $\frac{3}{8}\mathfrak{N}$.

Cherchons maintenant le coefficient de q^N dans (82).

Dans la première ligne de (82), c'est évidemment

$$2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Dans la seconde ligne, il faut poser

$$(85)\quad 8N = (2m+1)^2 - (2\mu-1)^2, \qquad m,\, \mu \geqq 1, \qquad \mu < m,$$

m et μ étant de plus de même parité, et prendre la somme

$$-4\sum(2\mu-1)\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Or on écrit (85)

$$2N=(m-\mu+1)(m+\mu)=\delta\delta_1,$$

δ_1, c'est-à-dire $m+\mu$, étant pair, et δ, ou $m-\mu+1$, impair, puisque m et μ sont de même parité; de plus $\delta<\delta_1$. On en conclut immédiatement que, dans la seconde ligne de (82), le coefficient cherché est

$$-4\sum(\delta_1-\delta)\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3},$$

la somme s'étendant aux décompositions, déjà rencontrées au n° **56**,

$$2N=\delta\delta_1,\qquad \delta_1 \text{ pair},\quad \delta \text{ impair},\qquad \delta<\delta_1.$$

Il ne reste plus qu'à égaler les deux valeurs trouvées pour le coefficient considéré.

Auparavant, faisons $x=0$ dans (10), et égalons, dans les deux membres, les coefficients de q^N; nous trouvons immédiatement la formule

$$(86)\qquad 0=\sum_{m\gtreqless 0}F[8N-(2m+1)^2]-2\sum(\delta_1-\delta),$$

la dernière somme s'étendant aux mêmes décompositions $2N=\delta\delta_1$ que ci-dessus.

78. *Formules finales.* — Maintenant, égalons les valeurs obtenues pour le coefficient de q^N dans (81) et (82).

1° $N\equiv-1 \pmod 3$. On a (n° **76**) $\mathfrak{M}=16\sum d'$, d' étant un diviseur quelconque de N à conjugué impair; et, par suite,

$$-\frac{3}{16}16\sum d'=2\sum_{m\gtreqless 0}F[8N-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}-4\sum(\delta_1-\delta)\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3}.$$

Quand on pose $2N = \delta\delta_1$, d'où $\delta\delta_1 \equiv 1 \pmod 3$, on voit que δ_1 et δ sont simultanément $\equiv +1$ ou $\equiv -1 \pmod 3$; l'un étant pair, l'autre impair, $\delta_1 + \delta$ est impair et $\equiv \pm 2 \pmod 3$, c'est-à-dire que $\delta_1 + \delta$ est $6h + 1$ ou $6h + 5$; donc

$$\cos(\delta_1 + \delta)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi

$$-3\sum d' = 2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N - (2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} - 2\sum(\delta_1 + \delta).$$

Combinant avec (86), et observant encore que $\cos[(2m+1)\pi : 3]$ est -1, si $2m+1 \equiv 0 \pmod 3$, et $\frac{1}{2}$ en tout autre cas, *on obtient les deux formules*

$$\left.\begin{aligned}
&(87)\quad \sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N - 9(2\mu+1)^2] = \sum d' \\
&(88)\quad \sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N - (6\rho \pm 1)^2] = -\sum d' + 2\sum(\delta_1 - \delta)
\end{aligned}\right\}\quad N \equiv -1 \pmod 3,$$

d' désignant tout diviseur de N à conjugué impair, et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta\delta_1$ où $\delta_1 > \delta$, δ_1 pair, δ impair.

2° $N \equiv +1 \pmod 3$. On a de même

$$6\sum d' = 2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N - (2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} - 4\sum(\delta_1 - \delta)\cos(\delta_1 + \delta)\frac{\pi}{3}.$$

Ici, par $2N = \delta\delta_1$, la somme $\delta_1 + \delta$ est impaire et $\equiv 0 \pmod 3$; donc $\cos[(\delta_1 + \delta)\pi : 3]$ est -1, et l'on trouve, en combinant avec (86),

$$\left.\begin{aligned}
&(89)\quad \sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N - (6\rho \pm 1)^2] = 2\sum d' \\
&(90)\quad \sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N - 9(2\mu+1)^2] = -2\sum d' + 2\sum(\delta_1 - \delta)
\end{aligned}\right\}\quad N \equiv 1 \pmod 3,$$

d', δ, δ_1 ayant même signification que ci-dessus.

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. On a

$$-12\sum d'' = 2\sum_{m \gtreqless 0} F[8N-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} - 4\sum(\delta_1-\delta)\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3},$$

d'' désignant (n° **76**) tout diviseur de N *non multiple de* 3 et à conjugué impair.

Ici (à moins que N ne soit pas divisible par 9), $\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3}$ n'a pas une valeur fixe; on peut écrire, d'ailleurs,

$$\cos(\delta_1+\delta)\frac{\pi}{3} = -1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2,$$

le *symbole de Jacobi*, $\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)$, étant nul si $\delta_1+\delta \equiv 0 \pmod 3$.

La combinaison avec (86) donne

$$\left.\begin{aligned}
&(91)\quad \sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N-(6\rho\pm 1)^2] = -4\sum d'' + 2\sum(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2\\
&(92)\quad \sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N-9(2\mu+1)^2] = 4\sum d'' + 2\sum(\delta_1-\delta)\left[1-\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\} N \equiv 0 \pmod 3,$$

d'' désigne tout diviseur de N non multiple de 3 et à conjugué impair; δ_1 et δ ont la même signification que plus haut.

79. *Remarque.* — Si N, multiple de 3, ne l'est pas de 9, le symbole de Jacobi qui figure dans les deux dernières formules est égal à ± 1; si, de plus, on observe que $4\Sigma d'' = \Sigma d'$, d' désignant *tout* diviseur de N à conjugué impair, on voit que les formules (92) et (91) coïncident avec (87) et (88).

Ainsi, pour $N \equiv 0 \pmod 3$, et non $\equiv 0 \pmod 9$, les formules (87) et (88) subsistent.

80. *Formules complémentaires.* — On peut, *par voie élémentaire,* obtenir des formules analogues aux précédentes, et dans lesquelles $8N+4$ remplacerait $8N$. On part, pour cela, de la relation d'Hermite (n° **8**) :

$$\eta_1^3(\sqrt{q}) = 8\sum_0 q^{\frac{8\nu+3}{8}} F(8\nu+3);$$

et l'on multiplie les deux membres par $H_1\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{q}\right)$; on égale ensuite, dans les deux nouveaux membres, les coefficients de $q^{\frac{1}{2}(2N+1)}$. Calculons ceux-ci.

Au premier membre, il faut poser

$$(93) \quad \begin{cases} 8N+4 = (2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+(2t+1)^2, \\ \qquad (x, y, z, t \gtreqless 0) \end{cases}$$

et prendre $\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3}$ étendu aux représentations (93).

Au second membre, on a, pour le coefficient cherché,

$$8\sum_{m \gtreqless 0} F[8N+4-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3}.$$

Distinguons maintenant divers cas.

1° $N \equiv -1 \pmod 3$. Alors, dans le second membre de (93), deux des quantités au carré sont $\equiv 0 \pmod 3$, les deux autres sont $\equiv \pm 1$; dès lors, on a

$$\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}\sum\left[\cos(2x+1)\frac{\pi}{3}+\ldots+\cos(2t+1)\frac{\pi}{3}\right] = \sum\frac{1}{4}\left(-1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right);$$

c'est-à-dire que cette somme est $-\mathfrak{N}:4$, $\mathfrak{N}$ désignant le nombre des représentations (93), qui est égal, comme on sait, à 16 fois la somme des diviseurs de $2N+1$.

On a donc

$$8\sum_{m \gtreqless 0} F[8N+4-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = -4\Phi(2N+1).$$

Mais, si l'on avait multiplié les deux membres de la relation d'Hermite par $H_1(0, \sqrt{q})$, on aurait trouvé de même

$$(94)\qquad 8\sum_{m \gtreqless 0} F[8N+4-(2m+1)^2] = 16\Phi(2N+1),$$

formule valable quel que soit N. En combinant les deux dernières relations, on trouve

$$\left.\begin{aligned}(95)\quad &\sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N+4-9(2\mu+1)^2] = \Phi(2N+1)\\ (96)\quad &\sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N+4-(6\rho \pm 1)^2] = \Phi(2N+1)\end{aligned}\right\} N \equiv -1 \pmod 3,$$

$\Phi(n)$ désignant la somme des diviseurs de n.

2° $N \equiv 1 \pmod 3$. En ce cas, $8N+4 \equiv 0 \pmod 3$; *supposons que* $8N+4$ *ne soit pas multiple de* 9 ([1]), on trouve

$$\left.\begin{aligned}(97)\quad &2\sum_{\mu \gtreqless 0} F[8N+4-9(2\mu+1)^2] = \Phi(2N+1)\\ (98)\quad &2\sum_{\rho \gtreqless 0} F[8N+4-(6\rho \pm 1)^2] = 3\Phi(2N+1)\end{aligned}\right\} N \equiv +1 \pmod 3.$$

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. Le nombre $8N+4$ étant $\equiv 1 \pmod 3$, les décompositions (93) sont des deux types :

$$(99)\qquad 8N+4 = 9(2x'+1)^2 + 9(2y'+1)^2 + 9(2z'+1)^2 + (2t'+1)^2,$$

$$(100)\qquad 8N+4 = (2x''+1)^2 + (2y''+1)^2 + (2z''+1)^2 + (2t''+1)^2,$$

les carrés non précédés du facteur 9 n'étant pas multiples de 3.

Soient $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}''$ les nombres des décompositions (99) et (100); on a

$$\begin{aligned}\sum \cos(2t+1)\frac{\pi}{3} &= \frac{1}{4}\sum{}' \left[3(2x'+1)\frac{\pi}{3} + \ldots + (2t'+1)\frac{\pi}{3}\right] + \sum{}'' \cos(2t''+1)\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{1}{4}\sum{}'\left(-1-1-1+\frac{1}{2}\right) + \sum{}'' \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}\mathfrak{N}' + \frac{1}{2}\mathfrak{N}''.\end{aligned}$$

([1]) Si $8N+4 \equiv 0 \pmod 9$, on obtient aisément les formules correspondantes.

Par suite

$$8\sum_{m \gtrless 0} F[8N+4-(2m+1)^2]\cos(2m+1)\frac{\pi}{3} = -\frac{5}{8}\mathfrak{N}' + \frac{1}{2}\mathfrak{N}''.$$

En combinant avec (94), et observant que $\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}''$ est égal à $16\Phi(2N+1)$, on trouve

$$(101) \qquad 24\sum_{\mu \gtrless 0} F[8N+4-9(2\mu+1)^2] = \frac{9}{4}\mathfrak{N}'. \qquad N \equiv 0 \pmod 3.$$

D'ailleurs, *a priori*, $\mathfrak{N}'$ n'est pas connu explicitement.

Cette formule, bien qu'ainsi incomplète, nous sera utile plus loin (n° **86**).

Nous allons passer maintenant aux applications de la formule fondamentale (9).

81. *Lemme*. — Dans la relation bien connue

$$\theta^2\theta_1^2\frac{H^2}{H_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 8\sum_1 \frac{(-1)^m m q^{2m}}{1-q^{2m}}(1-\cos 2mx),$$

faisons $x = \frac{\pi}{3}$; nous arrivons, en imitant la marche suivie au n° **76**, à cette proposition qui, d'ailleurs, n'est pas nouvelle :

Le nombre des représentations de N *par la forme*

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

est égal à

$$4(-1)^N \sum d(-1)^d \left(\frac{d}{3}\right)^2,$$

la somme s'étendant à *tous* les diviseurs d, de N, et le *symbole de Jacobi*, $\left(\frac{d}{3}\right)$, étant nul, si $d \equiv 0 \pmod 3$, selon une convention classique.

82. — *Relations déduites de la formule fondamentale* (9). — Prenons la relation, déduite de (9) par changement de x en $x+\frac{\pi}{2}$,

$$(9')\quad\left\{\begin{aligned} \theta\theta_1\frac{H^2\Theta_1\Theta}{H_1^2} &= \frac{1}{\cos^2 x}+4\Theta(2x,q^2)\sum_0(-1)^\nu q^{2\nu}J(\nu)\\ &-8\sum_2(-1)^m q^{2m^2}\,[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^m 2mq^{-2m^2}]\cos 4mx\\ &+8\sum_1(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\cos(4m+2)x, \end{aligned}\right.$$

et faisons-y successivement $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$; égalons ensuite, dans les deux membres, les coefficients de $q^{2N}(N>0)$.

Il vient, pour $x=0$,

$$0=4\sum_{m\gtreqless 0}(-1)^N J(N-m^2)-8\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $N=\delta\delta_1$, où $\delta\leqq\delta_1$. Nous poserons, dans ce qui suit,

$$\text{(102)}\qquad U(N)=\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta);$$

de sorte que l'on a

$$\text{(103)}\qquad \sum_{m\gtreqless 0}J(N-m^2)=2(-1)^N U(N).$$

Faisons maintenant $x=\frac{\pi}{3}$ dans (9'); le premier membre, en vertu de (79), est

$$3\theta_1(q^3)\theta(q^3)\Theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

c'est-à-dire, (nº **14**),

$$\text{(104)}\qquad 3\theta^2(q^6)\theta(q^2)\Theta\left(\frac{2\pi}{3},q^2\right)\quad\text{ou}\quad 3\theta^2(q^6)\theta(q^2)\sum_{-\infty}(-1)^m q^{2m^2}e^{\frac{4mi\pi}{3}}.$$

Le coefficient de q^{2N} dans (104) s'obtient comme il suit :
Posons

$$(105) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2N = 6x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 2m^2 \\ \qquad \text{c'est-à-dire} \\ N = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + m^2, \end{array} \right.$$

le coefficient cherché sera

$$(106) \qquad 3\sum(-1)^{x+y+z+m} e^{\frac{4mi\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad 3(-1)^N \sum e^{\frac{4mi\pi}{3}},$$

quantité évidemment réelle, et dont la valeur dépend de la valeur de N (mod 3).

1° $N \equiv -1 \pmod 3$. — Alors, dans (105), $m \equiv \pm 1 \pmod 3$, et la partie réelle de $e^{\frac{4mi\pi}{3}}$, c'est-à-dire $\cos(4m\pi : 3)$ est $-1 : 2$; l'expression (106) est donc

$$-\frac{3}{2}(-1)^N \mathfrak{N},$$

$\mathfrak{N}$ désignant ici le nombre des décompositions (105), c'est-à-dire, en vertu du n° **81**,

$$(106') \qquad -\frac{3}{2} 4 \sum (-1)^d d,$$

la somme s'étendant aux diviseurs de N.

2° $N \equiv +1 \pmod 3$. — Dans (105), une des quantités z, m est $\equiv \pm 1$, l'autre $\equiv 0 \pmod 3$; dès lors

$$3(-1)^N \sum e^{\frac{4mi\pi}{3}} = \frac{3}{2}(-1)^N \sum \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(-1)^N \mathfrak{N},$$

de sorte que la valeur de l'expression (106) est

$$(106'') \qquad \frac{3}{4} 4 \sum (-1)^d d.$$

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. — Dans (105), $m \equiv 0 \pmod 3$; la valeur de l'expression (106) est donc $3(-1)^N\mathfrak{N}$ ou (n° **81**)

$$(106''') \qquad 3.4\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2,$$

somme étendue aux diviseurs de N.

Il faut maintenant calculer de même le coefficient de q^{2N} au second membre de (9′), après qu'on y a fait $x=\frac{\pi}{3}$.

On trouve, sans difficulté,

$$(107) \qquad \left\{\begin{array}{l} 4(-1)^N\sum\limits_{m\gtreqless 0} J(N-m^2)e^{\frac{4mi\pi}{3}} \\ \quad -8\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\cos\frac{2\pi}{3}(\delta_1+\delta), \end{array}\right.$$

la dernière somme s'étendant toujours aux décompositions

$$N=\delta\delta_1, \qquad \delta\leqq\delta_1.$$

Il ne reste plus qu'à égaler (107) à (106′), (106″), (106‴), selon les trois cas distingués pour obtenir les formules cherchées.

83. *Premières formules.* — 1° $N\equiv -1 \pmod 3$. — L'égalité de (107) et de (106′) donne, si l'on observe que (107) est réel et que $\delta_1+\delta\equiv 0 \pmod 3$,

$$4(-1)^N\sum_{m\gtreqless 0} J(N-m^2)\cos\frac{4m\pi}{3}=-6\sum d(-1)^d+8\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta).$$

La dernière somme est U(N), par (102). Combinant avec (103), on trouve

$$(108) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum\limits_{\sigma\gtreqless 0} J[N-(3\sigma\pm 1)^2]= & (-1)^N\sum d(-1)^d, \\ \sum\limits_{\nu\gtreqless 0} J(N-9\nu^2) & =-(-1)^N\sum d(-1)^d+2(-1)^N U(N); \end{array}\right.$$

d désigne un diviseur quelconque de N.

2° $N \equiv +1 \pmod 3$. — On a, en égalant (107) et (106″), et combinant ensuite avec (103) :

$$(109)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu \gtreqless 0} J(N-9\nu^2) = \frac{1}{2}(-1)^N \sum d(-1)^d, \\ \sum\limits_{\sigma \gtreqless 0} J[N-(3\sigma \pm 1)^2] = \frac{-1}{2}(-1)^N \sum d(-1)^d + 2(-1)^N U(N). \end{cases}$$

3° $N \equiv 0 \pmod 3$. — On trouve de même

$$(110)\quad \begin{cases} (-1)^N \sum\limits_{\sigma \gtreqless 0} J[N-(3\sigma \pm 1)^2] \\ \quad = -2\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2 + 2\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2; \end{cases}$$

et l'autre somme se déduira immédiatement de celle-là par (103). Si N n'est pas multiple de 9, on a $\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2 = 1$.

84. *Formules complémentaires.* — Partons de la relation de Kronecker :

$$\theta_1^3 = 12\sum E(\nu) q^\nu,$$

où $E(\nu) = F(\nu) - F_1(\nu)$, et multiplions les deux membres par θ_1. Nous trouvons, en égalant ensuite les coefficients de q^N, et utilisant le résultat classique sur le nombre de décompositions de N en quatre carrés,

$$(111)\qquad 12\sum_{m \gtreqless 0} E(N-m^2) = 8[2+(-1)^N]\varphi(N),$$

$\varphi(N)$ désignant la somme des diviseurs *impairs* de N.

Multiplions de même les deux membres de la relation de Kronecker par $\Theta_1\left(\frac{\pi}{3}\right)$, il vient

$$(112)\qquad 12\sum_{m \gtreqless 0} E(N-m^2)\cos 2m\frac{\pi}{3} = \sum \cos\frac{2\pi t}{3},$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2. \tag{113}$$

1° $N \equiv -1 \pmod 3$. — Dans (113), deux des x, y, z, t sont $\equiv 0$, les deux autres $\equiv \pm 1 \pmod 3$; donc, dans (112),

$$\begin{aligned}\sum \cos\frac{2\pi t}{3} &= \frac{1}{4}\sum\left(\cos 2\pi\frac{x}{3} + \ldots + \cos 2\pi\frac{t}{3}\right)\\ &= \sum \frac{1}{4}\left(1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sum \frac{1}{4} = \frac{1}{4} 8[2 + (-1)^N]\varphi(N).\end{aligned}$$

Combinant alors (111) et (112), on trouve

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{\nu \gtreqless 0} E(N - 9\nu^2) &&= \frac{1}{3}[2 + (-1)^N]\varphi(N),\\ &\sum_{\sigma \gtreqless 0} E[N - (3\sigma \pm 1)^2] &&= \frac{1}{3}[2 + (-1)^N]\varphi(N).\end{aligned}\right. \tag{114}$$

2° $N \equiv 0 \pmod 3$ *et non* $\equiv 0 \pmod 9$. — Dans (113), un seul des x, y, z, t est $\equiv 0 \pmod 3$, et l'on trouve sans difficulté, en combinant (111) et (112),

$$\left\{\begin{aligned}&\sum E(N - 9\nu^2) &&= \frac{1}{6}[2 + (-1)^N]\varphi(N),\\ &\sum E[N - (3\sigma \pm 1)^2] &&= \frac{1}{2}[2 + (-1)^N]\varphi(N).\end{aligned}\right. \tag{115}$$

3° $N \equiv 0 \pmod 9$. — Dans (113), un seul des x, y, z, t est $\equiv 0 \pmod 3$, ou tous le sont. Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_4$ les nombres respectifs de ces deux sortes de décompositions.

Le calcul de $\sum \cos \frac{2\pi t}{3}$ dans (112) donne

$$12 \sum E(N - m^2) \cos \frac{2m\pi}{3} = -\frac{1}{8}\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_4,$$

d'où, à l'aide de (111),

$$(116)\quad \begin{cases} \sum E(N-9\nu^2) = \frac{1}{48}\mathfrak{M}_1 + \frac{1}{12}\mathfrak{M}_4, \\ \sum E[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{16}\mathfrak{M}_1. \end{cases}$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_4 = 8[2+(-1)^N]\varphi(N), \qquad \mathfrak{M}_4 = 8[2+(-1)^N]\varphi\left(\frac{N}{9}\right).$$

4° $N \equiv 1 \pmod 3$. — Soient $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$ les nombres des décompositions (113) dans lesquelles 3 ou 0 des x, y, z, t sont multiples de 3; en calculant $\sum \cos\frac{2\pi t}{3}$ dans (112), on trouve

$$12\sum E(N-m^2)\cos\frac{2m\pi}{3} = \frac{5}{8}\mathfrak{N}_3 - \frac{1}{2}\mathfrak{N}_0,$$

d'où, par combinaison avec (111),

$$(117)\quad \begin{cases} \sum E(N-9\nu^2) = \frac{1}{16}\mathfrak{N}_3; \\ \sum E[N-(3\sigma\pm 1)^2] = \frac{3}{8}\mathfrak{N}_3 + \frac{3}{2}\mathfrak{N}_0. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}_0 = 8[2+(-1)^N]\varphi(N);$$

de plus, *si* N *est pair*, il est aisé d'établir, par voie élémentaire, que $\mathfrak{N}_0 = 2\mathfrak{N}_3$. *En ce cas, on peut donc calculer* $\mathfrak{N}_3$ *et* $\mathfrak{N}_0$, c'est-à-dire les seconds membres des formules (117). Si N est impair, il ne semble y avoir aucune relation simple entre $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$.

85. *Formules définitives. Premier cas :* $N \equiv -1 \pmod 3$. — En réunissant les quatre formules (108) et (114), on obtient les quatre formules qui leur sont équivalentes :

$$4\sum_{\sigma \gtreqless 0} F\,[N-(3\sigma \pm 1)^2] = \sum d_p + 2\sum d_i,$$

$$4\sum F_1[N-(3\sigma \pm 1)^2] = \sum d_p - \tfrac{2}{3}[1+2(-1)^N]\sum d_i,$$

$$4\sum_{\nu \gtreqless 0} F\,(N-9\nu^2) \quad = -\sum d_p + 2[1+(-1)^N]\sum d_i + 2(-1)^N U(N),$$

$$4\sum F_1(N-9\nu^2) \quad = -\sum d_p - \tfrac{2}{3}[1-(-1)^N]\sum d_i + 2(-1)^N U(N);$$

d_i et d_p désignent respectivement, *ici comme plus bas*, les diviseurs impairs et pairs de N; et l'on a posé

$$U(N) = \sum (-1)^{\delta_1}(\delta_1 - \delta),$$

somme étendue aux décompositions en facteurs $N = \delta_1\delta$, avec $\delta \leqq \delta_1$.

Deuxième cas : $N \equiv 0 \pmod 3$ *et non* $\equiv 0 \pmod 9$. — On trouve, par (110) et (115),

$$4\sum_{\nu \gtreqless 0} F\,(N-9\nu^2) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\sum d_p + \sum d_i,$$

$$4\sum F_1(N-9\nu^2) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\sum d_p - \tfrac{1}{3}[1+2(-1)^N]\sum d_i,$$

$$4\sum_{\sigma \gtreqless 0} F\,[N-(3\sigma \pm 1)^2] = -\tfrac{1}{2}\sum d_p + [3+2(-1)^N]\sum d_i + 2(-1)^N U(N),$$

$$4\sum F_1[N-(3\sigma \pm 1)^2] = -\tfrac{1}{2}\sum d_p - \sum d_i + 2(-1)^N U(N).$$

Troisième cas : $N \equiv 0 \pmod 9$. — Il faut combiner cette fois (110) et (116). Les formules sont un peu plus compliquées, et nous n'en donnerons que deux :

$$
\begin{aligned}
4\sum_{\sigma \gtreqless 0} F\,[N-(3\sigma\pm 1)^2] = {} & \frac{3}{2}[2+(-1)^N]\left[\varphi(N)-\varphi\left(\frac{N}{9}\right)\right] \\
& -(-1)^N 2\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2 \\
& +(-1)^N 2\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] = {} & -\frac{1}{2}[2+(-1)^N]\left[\varphi(N)-\varphi\left(\frac{N}{9}\right)\right] \\
& -(-1)^N 2\sum(-1)^d d\left(\frac{d}{3}\right)^2 \\
& +(-1)^N 2\sum(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)^2;
\end{aligned}
$$

$\varphi(N)$ est la somme des diviseurs impairs de N; d un diviseur quelconque de N; δ_1 et δ sont des diviseurs conjugués de N, $N=\delta\delta_1$ et $\delta \leqq \delta_1$. Enfin $\left(\frac{d}{3}\right)$ et $\left(\frac{\delta_1+\delta}{3}\right)$ sont les symboles de Jacobi, nuls si leurs numérateurs sont multiples de 3.

Quatrième cas : $N\equiv 1 \pmod 3$ *et pair.* — La combinaison de (109) et de (117), où $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$ sont remplacées par leurs valeurs, donne les relations

$$
\begin{aligned}
4\sum_{\nu \gtreqless 0} F\,(N-9\nu^2) &= \frac{1}{2}\sum d_p + \sum d_i, \\
4\sum F_1(N-9\nu^2) &= \frac{1}{2}\sum d_p - \sum d_i, \\
4\sum_{\sigma \gtreqless 0} F\,[N-(3\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{2}\sum d_p + 5\sum d_i + 2\,U(N), \\
4\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{2}\sum d_p - \sum d_i + 2\,U(N).
\end{aligned}
$$

Ces formules coïncident avec celles du second cas, lorsque N est supposé pair dans celles-ci.

Cinquième cas : $N \equiv 1 \pmod 3$ *et impair.* — Il ne paraît pas possible d'obtenir de relations analogues aux précédentes, parce que, dans (117), $\mathfrak{N}_3$ et $\mathfrak{N}_0$ sont inconnus. Bien entendu, les formules (109), en J, subsistent; nous verrons plus loin qu'on peut encore les compléter (n° **88**).

86. *Formules liées à la fonction modulaire du tétraèdre.* — La multiplication complexe de la fonction modulaire du tétraèdre a conduit à des formules plus simples, mais moins étendues que les précédentes, et qui sont comprises dans celles-ci.

Ces formules, qu'on trouvera au Tome II (p. 234) des *Modulfunctionen* de MM. Klein et Fricke, sont relatives aux nombres de classes où le coefficient moyen est indifféremment pair et impair; elles donnent, dans les notations ci-dessus, les deux sommes *totales :*

$$(118)\quad \left\{\begin{array}{lll} \sum F(N-9\nu^2) & +\sum F_1(N-9\nu^2) & +\sum F_1[4N-9(2\mu+1)^2], \\ \sum F[N-(3\sigma\pm 1)^2] & +\sum F_1[N-(3\sigma\pm 1)^2] & +\sum F_1[4N-(6\rho\pm 1)^2]. \end{array}\right.$$

Or nos formules des n^{os} **78**, **80** et **85** donnent chacune des sommes *partielles* qui figurent dans ces expressions; il n'y a qu'un seul cas d'exception, celui de $N \equiv 1 \pmod 3$ et impair, c'est-à-dire $N = 6M+1$.

Voici comment on peut, dans ce cas, évaluer les deux sommes (118).

On a, en ajoutant membre à membre la première équation (117) et la première (109), et observant que N est impair,

$$2\sum_{\nu \gtreqless 0} G(N-9\nu^2) = \frac{1}{16}\mathfrak{N}_3 + \frac{1}{2}\sum d,$$

G étant $F+F_1$, et d un diviseur quelconque de N.

On a ensuite, par (101), puisque $F_1(8h+3) = \frac{1}{3}F(8h+3)$, et que $4N \equiv 4 \pmod 8$,

$$\sum_{\mu \gtreqless 0} F_1[4N-9(2\mu+1)^2] = \frac{1}{32}\mathfrak{N}';$$

la première somme (118) est donc égale à

$$\frac{1}{32}(\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}') + \frac{1}{4}\sum d;$$

$\mathfrak{N}_3$ est le nombre des décompositions de N en quatre carrés dont trois sont multiples de 3; $\mathfrak{N}'$ celui des décompositions de 4N en quatre carrés *impairs,* dont trois sont multiples de 3. Or il est bien facile d'établir, d'une manière élémentaire, que

$$\mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}' = 8\sum d;$$

et, dès lors, la première somme (118) a pour valeur $\frac{1}{2}\sum d$, c'est-à-dire moitié de la somme des diviseurs de N, ce qui est la formule donnée par MM. Klein et Fricke.

La seconde somme (118) s'évalue de même et se prête à la même vérification.

87. *Remarque.* — Les relations (103) et (111) donnent par combinaison :

$$2\sum_{m \gtreqless 0} F(N - m^2) = (-1)^N U(N) + [2 + (-1)^N]\varphi(N),$$

$$2\sum F_1(N - m^2) = (-1)^N U(N) - \frac{1}{3}[2 + (-1)^N]\varphi(N).$$

Ces relations reviennent aux formules I, II, IV et V de Kronecker (1); la seconde est plus générale que la formule IV, en ce qu'elle ne suppose pas N impair.

Rappelons que $\varphi(N)$ est la somme des diviseurs impairs de N.

---

(1) Les formules I, II, V donnent $\sum F(N - m^2)$, selon qu'on suppose N multiple de 4, N impairement pair, N impair; IV donne $\sum G(N - m^2)$ pour N impair. *Voir* aussi la formule XI (n° 134) du *Report* de St. Smith.

88. *Dernières formules.* — On a évidemment, C_0 désignant une contante en x,

$$\left.\begin{aligned}
C_0 H\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= H(x) H\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) H\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right)\\
C_0 H_1\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= H_1(x) H_1\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) H_1\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right)\\
C_0 \Theta\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= \Theta(x) \Theta\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) \Theta\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right)\\
C_0 \Theta_1\left(x, q^{\frac{1}{3}}\right) &= \Theta_1(x) \Theta_1\left(x - \frac{\pi\tau}{3}\right) \Theta_1\left(x + \frac{\pi\tau}{3}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (q = e^{i\pi\tau}),$$

d'où l'on déduit, sans qu'il soit utile de déterminer C_0,

$$\Theta\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) = -i \frac{\sqrt{\eta_1 \theta_1}}{\sqrt{\eta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right) \theta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right)}},$$

$$\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) = -i \frac{\sqrt{\eta_1 \theta}}{\sqrt{\eta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right) \theta\left(q^{\frac{1}{3}}\right)}},$$

$$H_1\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) : H\left(\frac{\pi\tau}{3}\right) = -i \frac{\sqrt{\theta\theta_1}}{\sqrt{\theta\left(q^{\frac{1}{3}}\right) \theta_1\left(q^{\frac{1}{3}}\right)}}.$$

1° Faisant $x = \frac{\pi\tau}{3}$ dans la formule (10), et imitant la marche suivie au n° **77**, on arrive à la relation ci-dessous, où N désigne un entier quelconque $\equiv -1 \pmod 3$:

$$(119) \qquad \sum_{\rho \gtreqless 0} F\left[\frac{8N - (6\rho \pm 1)^2}{9}\right] = -\sum d' + \frac{2}{3}\sum(\delta_1 - \delta),$$

d' désignant tout diviseur de N à conjugué impair; et la dernière somme s'étendant aux décompositions $2N = \delta\delta_1$, où $\delta < \delta_1$, δ_1 pair, δ impair. Naturellement, ρ ne prend que les valeurs telles que $8N - (6\rho \pm 1)^2$ soit positif et multiple de 9. Cette formule se place à côté de la formule (88).

2° Si maintenant on fait $x = \frac{\pi\tau}{3}$ dans (9'), (n° **82**), on trouve de même, en désignant par N un entier quelconque $\equiv 1 \pmod 3$),

$$(120)\qquad \sum_{\sigma \gtreqless 0} J\left[\frac{N-(3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = (-1)^N \left[\frac{2}{3} U(N) - \frac{1}{2}\sum d_p + \frac{1}{2}\sum d_i\right],$$

les notations du n° **85** étant conservées.

D'ailleurs, on reconnaît immédiatement qu'on a

$$(121)\qquad \sum_{\sigma \gtreqless 0} E\left[\frac{N-(3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{N}_3,$$

$\mathfrak{N}_3$ étant toujours le nombre de décompositions de N en quatre carrés, dont trois sont multiples de 3.

Donc, *si* N *est pair*, c'est-à-dire si N, qui est $3h+1$, est du type $6M+4$, $\mathfrak{N}_3$ est connu (n° **84**, 4°), et la combinaison des formules (120) et (121) donne les relations :

$$4\sum_{\sigma \gtreqless 0} F\left[\frac{6M+4-(3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = \frac{2}{3}U(N) - \frac{1}{2}\sum d_p + \sum d_i,$$

$$4\sum_{\sigma \gtreqless 0} F_1\left[\frac{6M+4-(3\sigma \pm 1)^2}{9}\right] = \frac{2}{3}U(N) - \frac{1}{2}\sum d_p + \frac{1}{3}\sum d_i.$$

Si N est impair, on n'a pas de pareilles formules; toutefois, si l'on élimine $\mathfrak{N}_3$ entre (121) et la première équation (117), on obtient une relation entre les quatre sommes (où l'on a écrit h au lieu de $3\sigma \pm 1$) :

$$\sum F(N-9\nu^2);\quad \sum F_1(N-9\nu^2);\quad \sum F\left(\frac{N-h^2}{9}\right);\quad \sum F_1\left(\frac{N-h^2}{9}\right).$$

Ces sommes sont d'ailleurs liées par la première équation (109), et par (120); on peut donc de plusieurs manières former une relation qui ne contienne que deux d'entre elles; on a, par exemple,

$$4\sum_{\nu,\sigma \gtreqless 0} \left\{F(N-9\nu^2) - 3F\left[\frac{N-(3\sigma \pm 1)^2}{9}\right]\right\} = 2\Phi(N) + 2U(N),$$

N étant du type $6M+1$, et $\Phi(N)$ étant la somme de ses diviseurs [1].

[1] On déduirait sans difficulté des relations de ce paragraphe la formule de

CHAPITRE II.

NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

89. *Développement de* $H_1\Theta_1 H : \Theta$. — Dans les deux formules d'Hermite :

$$(122)\quad \begin{cases} \theta_1 \dfrac{H\Theta_1}{\Theta} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}[1+2q^{-1}+\ldots+2q^{-m^2}]\sin(2m+1)x, \\ \eta_1 \dfrac{HH_1}{\Theta} = 4\sum_1 q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}}+\ldots+q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx, \end{cases}$$

changeons x en $2x$, q en q^2; en vertu du nº **14**, nous avons ainsi les développements de

$$\frac{1}{2}HH_1\frac{\Theta_1^2+\Theta^2}{\Theta\Theta_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}HH_1\frac{\Theta_1^2-\Theta^2}{\Theta\Theta_1},$$

car, par les relations quadratiques entre les thêta,

$$\eta_1^2(H_1^2-H^2) = 2\theta_1^2(q^2)(\Theta_1^2-\Theta^2).$$

Dès lors, par addition, on a le développement de $H_1\Theta_1 H : \Theta$; c'est-à-dire qu'on l'obtient en ajoutant les seconds membres des relations (122), où x et q sont remplacés par $2x$ et q^2.

Ainsi

$$(123)\quad \begin{cases} \dfrac{H_1\Theta_1 H}{\Theta} = 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}(1+2q^{-2}+\ldots+2q^{-2m^2})\sin(4m+2)x \\ \qquad\qquad + 4\sum_1 q^{2m^2}\left(q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)\sin 4mx. \end{cases}$$

MM. Klein-Fricke (*loc. cit.*) qui donne, dans la notation de ces géomètres, la somme $\sum H\left(\dfrac{4N-k^2}{9}\right)$, lorsque $N \equiv 1 \pmod 3$.

Cette formule a déjà été donnée par Biehler (*loc. cit.*, p. 31), qui l'établit directement.

90. *Développement de* $H^2H_1^2\Theta_1 : \Theta^2$. — On applique la méthode de Liouville (nº **5**) en considérant simultanément

$$\eta_1 H^2H_1^2\Theta_1 : \Theta^2 \quad \text{et} \quad \eta_1 \Theta^2\Theta_1^2 H_1 : H^2;$$

on trouve ainsi, sans difficulté,

$$\begin{aligned}
\eta_1 \frac{H^2H_1^2\Theta_1}{\Theta^2} = {} & \mathfrak{L}\Theta_1(3x, q^3) + \mathfrak{M}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(3m+1)^2}{3}} \cos(6m+2)x \\
& - 4\sum_1 q^{3m^2}\left[3q^{-\frac{3}{4}} + \ldots + 3(2m-1)q^{-\frac{3(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 6mx \\
& - 4\sum_1 q^{\frac{(3m+1)^2}{3}}\left[5q^{-\frac{25}{12}} + \ldots + (6m-1)q^{-\frac{(6m-1)^2}{12}}\right]\cos(6m+2)x \\
& - 4\sum_0 q^{\frac{(3m+2)^2}{3}}\left[q^{-\frac{1}{12}} + \ldots + (6m+1)q^{-\frac{(6m+1)^2}{12}}\right]\cos(6m+4)x.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ désignent des coefficients, jusqu'ici indéterminés, et dont la recherche est le point délicat de notre étude.

91. *Détermination de* $\mathfrak{L}$. — Multiplions membre à membre les deux développements (nºs **3** et **89**) :

$$\begin{aligned}
\eta_1 \frac{HH_1}{\Theta} &= 4\sum_1 q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx, \\
\frac{H_1\Theta_1 H}{\Theta} &= 2\sum_0 q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}(1 + 2q^{-2} + \ldots + 2q^{-2m^2})\sin(4m+2)x \\
&\quad + 2\sum_1 q^{2m^2}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)\sin 4mx,
\end{aligned}$$

et égalons, dans les deux membres nouveaux, développés en séries de

Fourier, les termes indépendants de x. Il vient :

$$\frac{1}{4}\mathfrak{L} = \sum_1 q^{6m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{4}}\right)\left(2q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)$$
$$+ \sum_0 q^{\frac{3}{2}(2m+1)^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(4m+1)^2}{4}}\right)(1 + 2q^{-2} + \ldots + 2q^{-2m^2}).$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{4}\mathfrak{L} = \sum_0 q^{2N+1+\frac{1}{4}}\sigma_N,$$

σ_N étant un coefficient indépendant de q, on voit de suite, par l'expression précédente de $\mathfrak{L}$, que σ_N est le nombre des solutions entières x, y, z de l'équation

$$(124) \qquad 8N + 5 = 6x^2 - z^2 - 2y^2,$$

satisfaisant aux conditions

$$(125) \qquad x > 0, \qquad 0 \leqq z \leqq 2x - 1, \qquad -x + 1 \leqq y \leqq x - 1.$$

Enfin, observons, en vertu même de (124), que z est impair et que x et y sont de parités contraires.

Écrivons maintenant (124) de la manière suivante :

$$3(8N + 5) = 3(3x + y - z)(3x + y + z) - 9(x + y)^2,$$

et faisons correspondre à la solution x, y, z la forme $(\alpha, 3\beta, 3\gamma)$:

$$\varphi = (3x + y - z)X^2 + 6(x + y)XY + 3(3x + y + z)Y^2;$$

d'où, pour α, β, γ, en utilisant aussi (125), les conditions

$$(126) \quad \begin{cases} \alpha > \beta > 0, \qquad \gamma \geqq \alpha, \qquad \alpha + \gamma - 4\beta > 0, \\ \gamma - \alpha \equiv 0 \pmod 2, \qquad \gamma + \alpha - 2\beta \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

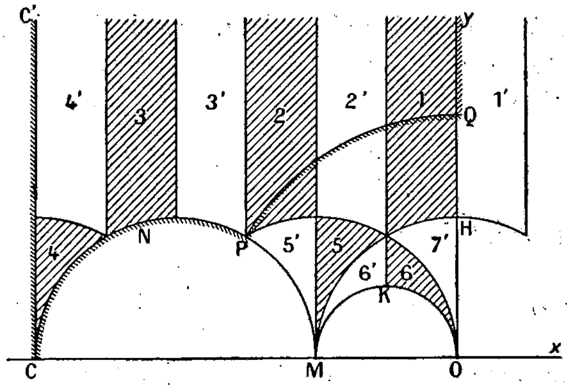
D'après cela, φ est une forme positive, de discriminant $3(8N + 5)$.

Les *inégalités* (126) expriment que le point représentatif de φ est (*fig.* 2) dans la région $\mathcal{R}$, limitée par le contour C′CNPQy (contour renforcé par un liséré); le point ne peut être *sur* ce contour, sauf sur l'arc PQ [1].

De plus, z étant impair, x et y étant de parités contraires, on voit que $3x+y\pm z$ est pair, c'est-à-dire que φ est de l'ordre impropre.

Donc enfin, σ_N est égal au nombre *des formes* φ, c'est-à-dire des formes positives, impropres, de discriminant $3(8N+5)$, du type $(\alpha, 3\beta, 3\gamma)$, dont le point représentatif est dans $\mathcal{R}$, et telles que $\gamma+\alpha-2\beta\equiv 0 \pmod 4$:

Fig. 2.



Supposons d'abord que $8N+5$ ne soit pas multiple de 3, et cherchons combien il *peut* y avoir de formes φ équivalentes à une réduite donnée (a, b, c), de l'ordre impropre et de discriminant $3(8N+5)$.

1° $b>0$. — La réduite $\varphi_1=(a, b, c)$ a son point représentatif dans la région ombrée 1; ses équivalentes dans 2, 3, 4 [2] sont respectivement :

$$\varphi_2=(a,\ a+b,\ a+2b+c),\qquad \varphi_3=(a,\ 2a+b,\ 4a+4b+c),$$
$$\varphi_4=(c,\ 3c-b,\ 9c-6b+a).$$

---

(1) O est l'origine; Ox, Oy les axes respectifs des quantités réelles et des quantités purement imaginaires; PQ est un arc de cercle, de centre O et de rayon $\sqrt{3}$; OM $=1$.

(2) C'est-à-dire des équivalentes dont les points représentatifs sont dans 2, 3, 4.

Une seule *peut* être une forme φ. Car, si a n'est pas multiple de 3, une et une seule des quantités b, $a+b$, $2a+b$ est multiple de 3; une et une seule des formes φ_1, φ_2, φ_3 a donc son coefficient moyen $\equiv 0 \pmod 3$, et le coefficient extrême l'est aussi, puisque le discriminant est multiple de 3.

Si $a \equiv 0 \pmod 3$, φ_4 seule peut être une forme φ et ne peut l'être que dans ce cas.

2° $b < 0$ [1]. — La réduite (a, b, c) a son point dans $1'$; elle a une équivalente dans chacune des régions $2'$, $3'$, $4'$; on reconnaît de suite qu'une seule des *quatre* formes *peut* être une forme φ.

Il faut maintenant examiner dans quels cas *la* forme, équivalente à la réduite (a, b, c), qui *peut* être une forme φ, l'est effectivement; on arrive sans difficulté aux résultats qui suivent :

1° $c \equiv 0 \pmod 3$, (*d'où* $b \equiv 0$). — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ :

$$\text{si } b > 0, \qquad \text{quand on a} \qquad c \geqq 3a$$

et que a, c ne sont pas simultanément multiples de 4;

$$\text{si } b < 0, \qquad \text{quand} \qquad c \equiv 0 \pmod 4.$$

2° $a \equiv 0 \pmod 3$, (*d'où* $b \equiv 0$). — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ :

$$\text{si l'on a, à la fois, } b > 0, \qquad a \equiv 0 \pmod 4.$$

3° $a + 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ :

$$\text{si l'on a, à la fois, } a + 2b + c \geqq 3a \qquad \text{et} \qquad c \equiv 0 \pmod 4.$$

4° $a - 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme φ si a et c ne sont pas simultanément multiples de 4.

Ces quatre cas épuisent toutes les hypothèses possibles, à cause de

[1] $b = 0$ est impossible, la forme (a, b, c) étant impropre et de discriminant impair.

$ac - b^2 \equiv 0 \pmod 3$; les conditions indiquées sont nécessaires et suffisantes.

On peut maintenant, et c'est cette idée qui va nous conduire au but, associer à la solution x, y, z de (124), au lieu de la forme φ, une forme $(\alpha', 3\beta', 3\gamma')$, ou ψ, définie par

$$\alpha' = 3x + y + z, \qquad \beta' = x + y, \qquad \gamma' = 3x + y - z,$$

ce qui revient à changer z en $-z$ dans les coefficients de φ.

Les coefficients de ψ, qui est une forme *impropre*, de discriminant $3(8N+5)$, satisfont uniquement à

$$\alpha' \geqq \gamma' > \beta' > 0, \qquad \alpha' + \gamma' - 4\beta' > 0, \qquad \alpha' + \gamma' - 2\beta' \equiv 0 \pmod 4.$$

Le coefficient cherché, σ_N, est donc aussi égal au nombre des formes ψ.

Les inégalités montrent que le point représentatif de ψ est dans le quadrilatère curviligne MKOHQPM. En procédant comme plus haut, on établit ce qui suit, où (a, b, c) désigne encore une réduite impropre quelconque, de discriminant $3(8N+5)$.

1° $c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\begin{array}{llll} \text{si } b > 0, & \text{quand à la fois} \quad c \leqq 3a & \text{et} \quad a - c \equiv 2 & \pmod 4, \\ \text{si } b < 0, & \text{quand} & a \equiv 0 & \pmod 4. \end{array}$$

2° $a \equiv 0 \pmod 3$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\begin{array}{llll} \text{si } b > 0, & \text{quand} & c \equiv 0 & \pmod 4, \\ \text{si } b < 0, & \text{quand} & a - c \equiv 2 & \pmod 4. \end{array}$$

3° $a + 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe (a, b, c) contient *une* forme ψ :

$$\text{si, à la fois, } a + 2b + c \leqq 3a \quad \text{et} \quad c \equiv 0 \pmod 4.$$

4° $a - 2b + c \equiv 0 \pmod 3$. — La classe (a, b, c) contient une forme ψ :

$$\text{si } a \equiv 0 \pmod 4.$$

Cela posé, σ_N, égal au nombre des formes φ, comme à celui des formes ψ, est la demi-somme de ces deux nombres.

On en conclut que $2\sigma_N$ est égal au nombre des classes de formes de l'ordre impropre, et de discriminant $3(8N+5)$.

En effet, soient (a, b, c) et $(a, -b, c)$ deux réduites opposées, non équivalentes (c'est-à-dire non ambiguës), représentant deux de ces classes, opposées entre elles; la relation $ac - b^2 \equiv 7 \pmod 8$ montre que a et c ne sont pas simultanément $\equiv 2 \pmod 4$. Dès lors, les deux Tableaux ci-dessus montrent aisément que, dans chacun des quatre cas, et quelles que soient les valeurs de a et $c \pmod 4$, les deux classes (a, b, c) et $(a, -b, c)$ contiennent, *au total*, soit deux formes φ et pas de ψ; soit deux formes ψ et pas de φ; soit une forme φ et une forme ψ; donc, deux classes opposées donnent deux unités dans le nombre total des formes φ et ψ, c'est-à-dire encore qu'une classe non ambiguë donne une unité dans ce nombre total.

Le même fait se vérifie pour une classe ambiguë.

Donc enfin, σ_N, égal à la moitié du nombre total des formes φ et ψ, est la moitié du nombre des classes impropres, de discriminant $3(8N+5)$.

Si $8N+5$ est multiple de 3, on constate que toute classe impropre de discriminant $3(8N+5)$ donne encore *une demi-unité* dans σ_N si elle ne contient pas 3 en facteur; si elle contient ce facteur, elle donne *deux unités*.

Donc enfin, dans tous les cas,

$$2\sigma_N = F_1[3(8N+5)] + 3F_1\left(\frac{8N+5}{3}\right),$$

le dernier F_1 étant nul si $8N+5$ n'est pas multiple de 3, ou encore

$$\mathfrak{L} = 2\sum_0 q^{\frac{8N+5}{4}}\left[F[3(8N+5)] + 3F\left(\frac{8N+5}{3}\right)\right],$$

car ici (nº **50**) les F_1 sont égaux aux F.

92. *Détermination de* $\mathfrak{M}$. — On multiplie encore membre à membre les deux développements introduits à propos de $\mathfrak{L}$, au commencement du n° **91**; le coefficient de $\cos 2x$ dans le second membre nouveau, développé en série de Fourier, est $\mathfrak{M} q^{\frac{1}{3}}$.

On trouve, en opérant comme plus haut, que

$$\frac{1}{4}\mathfrak{M} q^{\frac{1}{3}} = \sum q^{2N+\frac{1}{4}}\omega_N,$$

ω_N étant le nombre des solutions entières x, y, z de

$$24N - 1 = 2x^2 - 3z^2 - 6y^2,$$

vérifiant

$$0 < 3z < 2x, \qquad -x < 3y < x.$$

En écrivant

$$24N - 1 = 3(x - y - z)(x - y + z) - (x - 3y)^2,$$

et faisant correspondre à la solution x, y, z successivement les deux formes

$$[x-y-z,\ x-3y,\ 3(x-y+z)] \quad [x-y+z,\ x-3y,\ 3(x-y-z)],$$

on trouve que ω_N est égal au nombre des classes de l'ordre impropre, de discriminant $24N - 1$, ou que

$$\mathfrak{M} = 4\sum_1 q^{\frac{24N-1}{12}} F(24N - 1).$$

93. *Développement de* $\theta_1 H^2 \Theta_1^2 H_1 : \Theta^2$. — Sans donner *in extenso* ce développement, qui nous serait inutile, disons seulement que les coefficients des termes en $\cos x$ et en $\cos 3x$ y sont respectivement

$$\mathfrak{N} = 2q^{\frac{1}{12}}\sum_{N=0}^{\infty} q^{\frac{3N+2}{3}} J(3N + 2),$$

$$\mathfrak{P} = q^{\frac{3}{4}} \sum_{N=0}^{\infty} q^N\left[J(N) + 3J\left(\frac{N}{3}\right)\right].$$

$J\left(\frac{N}{3}\right)$ étant nul si N n'est pas multiple de 3, et $J(0)$ étant égal à $-\frac{1}{4}$, comme d'ordinaire.

Les développements des expressions analogues à $H^2H_1^2\Theta_1 : \Theta^2$ n'introduisent pas d'autres fonctions numériques que $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$.

94. *Développements auxiliaires.* — En appliquant la méthode de Liouville (n° 5), et changeant ensuite x en $x+\frac{\pi}{2}$, on obtient les quatre développements

$$H\,\Theta\,H_1 = A\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{3m^2+2m}\sin(6m+2)x,$$

$$H\,\Theta\,\Theta_1 = Aq^{-\frac{1}{4}}\sum q^{3m^2+m}\sin(6m+1)x,$$

$$H_1\Theta_1 H = A\sum q^{3m^2+2m}(-1)^m\sin(6m+2)x,$$

$$H_1\Theta_1\Theta = Aq^{-\frac{1}{4}}\sum q^{3m^2+2m}(-1)^m\cos(6m+1)x,$$

A étant un coefficient que la méthode laisse indéterminé, et qu'on calcule en faisant $x=0$ dans la dernière équation. On trouve ainsi

$$\eta_1\theta_1\theta = Aq^{-\frac{1}{4}}\sum_{-\infty} q^{3m^2+m}(-1)^m.$$

Mais on connaît la relation classique (¹)

$$\eta_1\theta_1\theta = 2\eta^3,$$

étant posé

$$\eta = q^{\frac{1}{12}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{3m^2+m} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{12}(6m+1)^2};$$

par suite

$$A = 2q^{\frac{1}{3}}\eta^2.$$

(¹) Par exemple, *voir* WEBER, *Elliptische Functionen*, § 21.

95. *Corollaires.* — Dérivons en x les trois premières relations du numéro précédent, et faisons ensuite $x = 0$; en tenant compte de ce que $H'(0)$ est $\eta_1\theta_1\theta$, et remplaçant A par sa valeur, on trouve

$$\eta_1\theta\,\eta = q^{\frac{1}{3}}\sum_{-\infty}(6m+2)q^{3m^2+2m} = \sum_{-\infty}^{+\infty}(6m+2)q^{\frac{(3m+1)^2}{3}},$$

$$\eta_1\theta_1\eta = q^{\frac{1}{3}}\sum(-1)^m(6m+2)q^{3m^2+2m} = \sum_{-\infty}(-1)^m(6m+2)q^{\frac{(3m+1)^2}{3}},$$

$$\theta_1\theta\,\eta = q^{\frac{1}{12}}\sum(6m+1)q^{3m^2+m} = \sum_{-\infty}(6m+1)q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

On en déduirait immédiatement des conséquences arithmétiques, que nous laissons ici de côté parce qu'elles n'intéressent pas les nombres de classes.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES DES NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS.

96. Multiplions membre à membre les relations (n^os **94** et **3**)

$$H_1\Theta_1 H = A\sum_{-\infty} q^{3m^2+2m}(-1)^m\sin(6m+2)x,$$

$$\eta_1^2\theta_1\theta\frac{HH_1}{\Theta^2} = 8\sum_{0}\frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin 2mx,$$

et égalons les termes indépendants de x dans les deux membres nouveaux. Nous trouvons, en tenant compte de la valeur de A, l'équation

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\mathfrak{L}\eta q^{-\frac{1}{4}} = {} & \sum_{0}(-1)^m\frac{q^{3m^2+5m+1}(3m+1)}{1+q^{6m+2}}\\ & +\sum_{0}(-1)^m\frac{q^{3m^2+7m+3}(3m+2)}{1+q^{6m+4}}.\end{aligned}$$

Égalant ensuite, dans les deux membres, les coefficients de q^{2N+1}, on obtient sans difficulté la formule :

$$\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m \left\{ F\left[24N+16-(6m+1)^2\right] + 3F\left[\frac{24N+16-(6m+1)^2}{9}\right] \right\}$$
$$= -2\sum d\left(\frac{3}{d+d_1}\right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6N+4 = dd_1$, avec $d < d_1$, et d, d_1 étant de parités différentes (¹).

97. De même, en égalant, dans les deux membres du produit considéré au commencement du numéro précédent, les termes en $\cos x$, on obtient l'expression de $\mathfrak{M}\eta$, et la formule :

$$\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m F[24N-(6m+1)^2] = -\sum d\left(\frac{3}{d+d_1}\right);$$

la dernière somme s'étend aux décompositions $6N = dd_1$, avec $d < d_1$, d et d_1 étant de parités différentes, et un seul des deux étant multiple de 3.

98. En procédant de même à partir des développements de $H_1\Theta_1 H$ et $H\Theta_1 : \Theta^2$, on trouverait les expressions de $\mathfrak{N}\eta$, $\mathfrak{P}\eta$. De la première, on déduit cette formule

$$\sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m J\left[\frac{12N+9-(6m+1)^2}{4}\right] = -\sum \delta\left(\frac{3}{\frac{\delta+\delta_1}{2}}\right),$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $12N+9 = \delta\delta_1$, avec $\delta < \delta_1$, et un seul des deux facteurs δ, δ_1 étant multiple de 3.

(¹) $\left(\frac{3}{d+d_1}\right)$ est le symbole de Jacobi. Ici, $d+d_1$ ne peut être multiple de 3, car $dd_1 \equiv 1 \pmod 3$. Au premier membre, la seconde fonction F est nulle si $24N+16-(6m+1)^2$ n'est pas multiple de 9.

99. *Formules du premier type de Liouville.* — Multiplions membre à membre les relations (nos **66** et **94**),

$$\eta_1^2\theta_1^2\theta^2\frac{\mathrm{H}_1\Theta_1\mathrm{H}}{\Theta^3} = 8\sum_0 \frac{m^2q^m}{1-q^{2m}}\sin 2mx,$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}\mathrm{H}\Theta\mathrm{H}_1 = \sum_{-\infty} q^{3m^2+2m}\sin(6m+2)x,$$

et égalons, dans les développements des deux membres nouveaux, les termes indépendants et les termes en $\cos x$; nous obtenons ainsi les valeurs de

$$\mathcal{L}\theta\eta\theta_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}\theta\eta\theta_1.$$

Par exemple, on a

$$\mathcal{L}q^{-\frac{1}{3}}\theta\eta\theta_1 = 4\sum_0(3m+1)^2\frac{q^{3m^2+5m+1}}{1-q^{6m+2}} - 4\sum_0(3m+2)^2\frac{q^{3m^2+7m+3}}{1-q^{6m+4}}.$$

Si maintenant on remplace $\theta\eta\theta_1$ par sa valeur (n° **95**), on trouve, en égalant les coefficients de $q^{2\mathrm{N}+1}$ dans les deux membres, la formule :

$$\sum_{m\gtreqless 0}(6m+1)\left\{\mathrm{F}[24\mathrm{N}+16-(6m+1)^2]+3\mathrm{F}\left[\frac{24\mathrm{N}+16-(6m+1)^2}{9}\right]\right\}$$
$$= 2\sum\left(\frac{d}{3}\right)d^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6\mathrm{N}+4 = dd_1$, $d < d_1$ et d, d_1 de parités différentes.

L'expression de $\mathfrak{M}\theta\eta\theta_1$ conduit à la formule :

$$\sum_{m\gtreqless 0}(6m+1)\mathrm{F}[24\mathrm{N}-(6m+1)^2] = -\sum\left(\frac{d+d_1}{3}\right)d^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $6\mathrm{N} = dd_1$, $d < d_1$, d et d_1 de parités différentes, et un seul des deux multiple de 3.

De même, en formant $\mathfrak{N}\eta\theta\eta_1$, on aura

$$\sum_{m \gtreqless 0} (3m+1)\,\mathrm{J}[3\mathrm{N}-(3m+1)^2] = \sum \left(\frac{\delta+\delta_1}{3}\right)\delta^2,$$

la dernière somme s'étendant aux décompositions $3\mathrm{N} = \delta\delta_1$, avec $\delta < \delta_1$, δ et δ_1 de même parité, et un seul des deux étant multiple de 3. Dès lors cette somme est nulle si N est impairement pair.

100. *Relations où intervient la forme x^2+3y^2.* — On peut obtenir, d'une manière simple, des formules qui rappellent celles du *second type de Kronecker*.

Multiplions, en effet, par η les deux membres la relation classique (n° **9**),

$$\eta_1^2\theta_1 = 4\sum_0 q^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{F}(4\nu+2),$$

il vient, en utilisant l'expression de $\eta_1\theta_1\eta$ (n° **95**),

$$\eta_1 \sum_{-\infty} q^{\frac{(3m+1)^2}{3}}(-1)^m(6m+2) = 4\sum_0 q^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{F}(4\nu+2)\times\sum_{-\infty}(-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}}.$$

D'où, en égalant les coefficients de $q^{\mathrm{N}+\frac{7}{12}}$, la formule :

$$4\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m\mathrm{F}\left[\frac{12\mathrm{N}+7-(6m+1)^2}{3}\right] = \sum b(-1)^{\frac{b}{2}-1},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $12\mathrm{N}+7 = 3a^2+b^2$, avec $a \gtrless 0$; $b \gtrless 0$, et de plus b (qui est nécessairement pair) étant du type $6h+2$.

En opérant de même sur la relation

$$\eta_1\theta_1^2 = 4\sum_0 q^{\nu+\frac{1}{4}}\mathrm{F}(4\nu+1),$$

on trouve

$$4\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m F\left[\frac{12N+4-(6m+1)^2}{3}\right] = 2\sum b(-1)^{b-1},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $3N+1 = 3a^2+b^2$, avec $a \gtreqless 0$; $b \gtrless 0$, et b étant $\equiv 1 \pmod 3$.

101. *Relations où intervient la forme indéfinie* x^2-6y^2. — En multipliant membre à membre la relation (n° **14**) :

$$\frac{1}{\theta(q^2)}\mathrm{HH}_1 = 2\sum_0 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \sin(4m+2)x,$$

et celle qui donne $\eta_1 \theta_1 \theta \, \mathrm{H}_1 \Theta_1 \mathrm{H} : \Theta^2$ (n° **4**), on obtient les expressions de

$$\mathfrak{L}\theta(q^2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}\theta(q^2),$$

qui conduisent immédiatement aux formules suivantes. D'abord :

$$\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m\left[F(24N+15-24m^2)+3F\left(\frac{8N+5-8m^2}{3}\right)\right]$$
$$= -2\sum (x-3y)(-1)^{\frac{x}{4}},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $16N+10 = x^2-6y^2$, avec $y>0$; $x>3y$ [x est nécessairement $\equiv 0 \pmod 4$]. Ensuite :

$$\sum_{m \gtreqless 0}(-1)^m F(24N-1-24m^2) = -\sum y\left(\frac{-1}{y}\right)(-1)^{\frac{x-2}{4}},$$

la dernière somme s'étendant aux représentations $48N-2 = x^2-6y^2$, avec $y>0$; $x>3y$ [x est nécessairement $\equiv 2 \pmod 4$].

102. Si l'on multiplie l'un par l'autre les développements de

$$\frac{1}{A}\mathrm{H}_1\Theta_1\mathrm{H} \quad \text{et} \quad \eta_1\theta_1\theta\,\frac{\Theta'}{\Theta^2}$$

(ce dernier déduit par dérivation du développement classique de $\eta_1 \theta_1 \theta : \Theta$), on trouve sans difficulté, en se reportant à la première formule du n° **43**, et calculant le terme indépendant et celui en $\cos 2x$ du produit, les deux relations suivantes. D'abord :

$$6 \sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m F_1 \left[\frac{24N + 19 - (6m+1)^2}{6}\right] = -\sum \left(\frac{3}{x}\right)(x - 3y),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$24N + 19 = x^2 - 6y^2, \qquad y > 0, \qquad x > 3y.$$

Ensuite :

$$6 \sum_{m \gtreqless 0} (-1)^m F_1 \left[\frac{24N + 1 - (6m+1)^2}{6}\right] = -\sum \left(\frac{3}{x}\right)(x - 3y),$$

la dernière somme s'étendant aux représentations

$$24N + 1 = x^2 - 6y^2, \qquad y \geqq 0, \qquad x > 3y.$$

Toutefois, si $24N + 1$ est un carré, a^2, le terme $-\left(\frac{3}{a}\right) a$, qui provient de la représentation $x = a$, $y = 0$, doit être divisé par 2 (1).

---

(1) L'impression de ce Travail était terminée quand j'ai eu communication de trois intéressants Mémoires, dont deux en langue tchèque, de M. Karel Petr, professeur à l'Université de Prague (*Acad. des Sciences de Bohême*, 1900-1901). M. Petr a complété, comme je l'ai fait (n° 8), la formule initiale d'Hermite, et donné les deux développements (9) et (10). Il en a déduit les formules (35) et (36) du premier type de Liouville et celles (40) à (44) du second type; enfin il a obtenu trois des formules du Chapitre IV, où figure la classe $x^2 - 2y^2$. C'est donc à lui que revient le mérite d'avoir fait apparaître une forme indéfinie dans les applications arithmétiques des fonctions elliptiques.