JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AURIC

Recherches sur les fractions continues algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 105-206.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__105_0>

Recherches sur les fractions continues algébriques (1);

PAR M. AURIC,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

INTRODUCTION.

1. Nous nous proposons, dans cette étude, de perfectionner, sur certains points importants, la détermination des conditions de convergence d'une fraction continue algébrique et de rattacher plus étroitement ce mode de développement si fécond, d'une part à la théorie des fonctions méromorphes et quasi-méromorphes, d'autre part à celle des intégrales définies à coupures déjà envisagées par Hermite et surtout par Stieltjes dans ses mémorables recherches.

En premier lieu il importe de mettre ce mode de développement sous la forme normale, canonique, qui lui convient. A cet effet considérons un polynome ou une série S_0 ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de la variable et de degré maximum k :

$$S_0 = a_0^k x^k + a_0^{k-1} x^{k-1} + \ldots \qquad (a_0^k \neq 0).$$

Considérons de même un polynome ou une série S_1 de degré maximum $k - 1$:

$$S_1 = a_1^{k-1} x^{k-1} + a_1^{k-2} x^{k-2} + \ldots \qquad (a_1^{k-1} \neq 0).$$

En divisant S_0 par S_1 nous obtiendrons comme quotient un binome

(1) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Grand Prix des Sciences mathématiques).

de la forme $\alpha_1 x + \beta_1$ et comme reste un polynome ou une série $-S_2$ de degré maximum $k-2$:

$$S_2 = a_2^{k-2} x^{k-2} + a_2^{k-3} x^{k-3} + \ldots,$$

et, en général, on aura

$$a_2^{k-2} \neq 0.$$

On pourra donc écrire

$$S_0 = (\alpha_1 x + \beta_1) S_1 - S_2.$$

De même, en effectuant la division de S_1 par S_2, on aura

$$S_1 = (\alpha_2 x + \beta_2) S_2 - S_3$$

avec

$$S_3 = a_3^{k-3} x^{k-3} + a_3^{k-4} x^{k-4} + \ldots,$$

et, en général, on aura

$$a_3^{k-3} \neq 0,$$

et ainsi de suite.

Dès lors la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ se développera en fraction continue sous la forme suivante (¹) :

$$\text{(A)} \qquad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x + \beta_1 \dot{-} \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} \dot{-} \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} \dot{-} \ldots,$$

et il est clair que cette fraction continue sera limitée ou illimitée, selon que $\frac{S_0}{S_1}$ sera réductible ou non à une fraction rationnelle.

Le calcul qui précède est, d'ailleurs, identique au procédé classique pour la recherche du plus grand commun diviseur entre S_0 et S_1; si S_{n+1} est le premier reste identiquement nul, S_n sera le plus grand commun diviseur cherché et $\alpha_n x + \beta_n$ le dernier dénominateur partiel (²) de la fraction continue.

(¹) Notation abrégée très répandue en Allemagne (Baltzer, Müller, etc.).

(²) Terminologie empruntée à l'allemand (*Theilnenner*) de préférence à l'appellation française, *quotient incomplet*, qui peut donner lieu à confusion : nous

Telle est, semble-t-il, la forme normale, canonique (A) sous laquelle se présentera, en général, le développement d'une fraction continue algébrique, si on la considère comme le quotient de deux séries entières dont les degrés maxima diffèrent d'une unité.

2. Toutefois, il pourra arriver exceptionnellement que les m premiers termes d'un reste S_i soient nuls simultanément : dans ce cas le quotient de S_{i-1} par S_i, au lieu d'être un binome de la forme $\alpha x + \beta$, sera un polynome de la forme

$$\alpha x^{m+1} + \beta x^m + \ldots + \mu x + \nu.$$

Si ce fait exceptionnel se présente à chaque division, le développement en fraction continue prendra la forme

$$\text{(B)} \qquad \frac{S_0}{S_1} = R_1 - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} - \ldots,$$

dans laquelle R_i représente un polynome entier de degré déterminé; mais, de ce qui précède, il résulte clairement que cette forme de développement (B), loin de représenter la forme normale, canonique, représente, au contraire, un développement ayant des propriétés restrictives et exceptionnelles, et, par suite, ne possède nullement le caractère de généralité qu'on serait tenté de lui supposer *a priori*.

3. Il est cependant possible de généraliser la forme normale (A), sans pourtant tomber dans le cas particulier exceptionnel que nous venons de signaler.

Considérons, comme précédemment, le polynome ou la série S_0 de degré maximum k.

Soit de même un polynome ou une série S_1 de degré maximum $k-i$:

$$S_1 = a_1^{k-i} x^{k-i} + a_1^{k-i-1} x^{k-i-1} + \ldots.$$

appellerons de même *numérateurs partiels* (*Theilzähler*) les numérateurs des diverses fractions successives; enfin les S_i seront appelés les *restes* ou les *termes* successifs de la fraction continue.

Divisons S_0 par S_1 et poussons la division jusqu'à obtenir pour le quotient λ_1, qui est de degré maximum i, un polynome de la forme

$$\lambda_1 = \alpha_1^i x^i + \alpha_1^{i-1} x^{i-1} + \ldots + \alpha_1^{i-m} x^{i-m}.$$

Le reste de la division sera évidemment de degré maximum $k-m-1$ et de la forme

$$-a_2^{k-2i} x^{k-m-1} - a_2^{k-2i-1} x^{k-m-2} - a_2^{k-2i-2} x^{k-m-3} - \ldots,$$

et, en général, on aura

$$a_2^{k-2i} \neq 0.$$

Si nous posons

$$S_2 = a_2^{k-2i} x^{k-2i} + a_2^{k-2i-1} x^{k-2i-1} + \ldots,$$

on aura

$$S_0 = \lambda_1 S_1 - x^{2i-m-1} S_2.$$

De même, en divisant S_1 par S_2, on obtiendra

$$S_1 = \lambda_2 S_2 - x^{2i-m-1} S_3$$

avec

$$S_3 = a_3^{k-3i} x^{k-3i} + a_3^{k-3i-1} x^{k-3i-1} + \ldots,$$

et ainsi de suite.

Dès lors le développement de $\frac{S_0}{S_1}$ en fraction continue prendra la forme

$$\text{(C)} \qquad \frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dot{-} \frac{x^{2i-m-1}}{\lambda_2} \dot{-} \frac{x^{2i-m-1}}{\lambda_3} \dot{-} \ldots$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n^i x^i + \alpha_n^{i-1} x^{i-1} + \ldots + \alpha_n^{i-m} x^{i-m}.$$

4. Examinons en premier lieu le cas où λ_n se réduit à un monome; dans la forme (C), il faut faire $m = 0$, ce qui donne

$$\text{(C')} \qquad \frac{S_0}{S_1} = \alpha_1 x^i \dot{-} \frac{x^{2i-1}}{\alpha_2 x^i} \dot{-} \frac{x^{2i-1}}{\alpha_3 x^i} \dot{-} \ldots.$$

En divisant les deux membres par x^i, il vient

$$\text{(D)} \qquad \frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 - \frac{\frac{1}{x}}{\alpha_2} - \frac{\frac{1}{x}}{\alpha_3} - \frac{\frac{1}{x}}{\alpha_4} - \cdots$$

C'est la forme habituellement employée pour réduire en fraction continue une série entière ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x. Par une transformation facile, cette forme se ramène manifestement à la suivante :

$$\text{(D')} \qquad \frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 - \frac{1}{\alpha_2 x} - \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_4 x} - \frac{1}{\alpha_5} - \cdots$$

C'est, à la constante α_1 près, et dans le cas où les α_n sont réels et positifs, la forme qui a fait l'objet des recherches de Stieltjes. Il est clair, d'ailleurs, que cette forme conduira à des résultats différents, du moins au point de vue formel, suivant que l'on s'arrêtera à un dénominateur partiel de rang pair ou de rang impair (¹); en groupant deux par deux ces dénominateurs partiels successifs, Stieltjes a montré, par une transformation facile, que la forme (D′) se ramène à la forme normale (A), laquelle ne présente plus cet inconvénient ou, pour mieux dire, cette influence de la parité du dernier dénominateur partiel employé.

La forme normale (A) doit donc *a priori* conduire à des résultats plus généraux que la forme (D′); remarquons, d'ailleurs, que cette dernière forme peut être considérée comme un cas particulier exceptionnel de la forme (A) (cas où $\alpha_{2n+1} = \beta_{2n} = 0$).

En divisant les deux membres de (C′) par x^{i-1}, il vient

$$\text{(E)} \qquad \frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = \alpha_1 x - \frac{x}{\alpha_2 x} - \frac{x}{\alpha_3 x} - \frac{x}{\alpha_4 x} - \cdots,$$

laquelle forme se ramène manifestement à

$$\text{(E')} \qquad \frac{S_0}{x^{i-1} S_1} = \alpha_1 x - \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3 x} - \frac{1}{\alpha_4} - \cdots$$

(¹) De même les formules qui permettent de passer d'un développement de Taylor à la fraction continue (D) correspondante ne sont pas les mêmes (*voir* Chap. VI), suivant que le rang du dénominateur partiel est pair ou impair.

Celle-ci ne diffère de la forme de Stieltjes (D′) que par la parité du dénominateur partiel affecté de la variable x; on peut également considérer cette forme comme un cas particulier de la forme normale (A) (cas où $\alpha_{2n}=\beta_{2n+1}=0$).

La forme (C′) devient également, en posant $x=y^2$ et en divisant les deux membres par y^{2i-1},

$$\text{(F)} \qquad \frac{S_0}{y^{2i-1}S_1}=\alpha_1 y \dot{-} \frac{1}{\alpha_2 y} \dot{-} \frac{1}{\alpha_3 y} \dot{-} \frac{1}{\alpha_4 y} \dot{-} \cdots,$$

dans laquelle tous les dénominateurs partiels, quelle que soit leur parité, sont affectés de la variable $y=\sqrt{x}$; on peut aussi considérer cette forme comme un cas particulier de la forme (A) (cas où $\beta_n=0$).

Dans les formes (D′), (E′), (F), nous avons ramené les numérateurs partiels à l'unité; on peut faire cette opération sur les dénominateurs partiels et, par une transformation facile, la forme (C′) devient

$$\text{(G)} \qquad \frac{S_0}{\alpha_1 x^i S_1}=1 \dot{-} \frac{\frac{1}{\alpha_1\alpha_2 x}}{1} \dot{-} \frac{\frac{1}{\alpha_2\alpha_3 x}}{1} \dot{-} \frac{\frac{1}{\alpha_3\alpha_4 x}}{1} \dot{-} \cdots.$$

En posant

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_n}=\rho_n, \qquad \frac{1}{x}=z,$$

il vient

$$\text{(G′)} \qquad \frac{z^i S_0}{\alpha_1 S_1}=1 \dot{-} \frac{\rho_2 z}{1} \dot{-} \frac{\rho_3 z}{1} \dot{-} \frac{\rho_4 z}{1} \dot{-} \cdots$$

qui est également une forme très usitée.

Considérons maintenant le cas où les λ_n sont des binomes; dans la forme (C), il faut faire $m=1$, ce qui donne

$$\text{(C″)} \qquad \frac{S_0}{S_1}=\alpha_1 x^i+\beta_1 x^{i-1} \dot{-} \frac{x^{2i-2}}{\alpha_2 x^i+\beta_2 x^{i-1}} \dot{-} \frac{x^{2i-2}}{\alpha_3 x^i+\beta_3 x^{i-1}} \dot{-} \cdots,$$

d'où, en divisant les deux membres par x^{i-1}, on retombe manifestement sur la forme normale (A) :

$$\frac{S_0}{x^{i-1}S_1}=\alpha_1 x+\beta_1 \dot{-} \frac{1}{\alpha_2 x+\beta_2} \dot{-} \frac{1}{\alpha_3 x+\beta_3} \dot{-} \cdots.$$

En divisant les deux membres de (C″) par x^i, on trouve

$$\frac{S_0}{x^i S_1} = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{x} \dotplus \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha_2 + \frac{\beta_2}{x}} \dotplus \frac{\frac{1}{x^2}}{\alpha_3 + \frac{\beta_3}{x}} \dotplus \cdots$$

et, en posant $\frac{1}{x} = z$,

$$\text{(H)} \qquad \frac{z^i S_0}{S_1} = \alpha_1 + \beta_1 z \dotplus \frac{z^2}{\alpha_2 + \beta_2 z} \dotplus \frac{z^2}{\alpha_3 + \beta_3 z} \dotplus \cdots$$

De même, en posant $x = y^2$ et en divisant les deux membres de (C″) par y^{2i-1}, on trouve

$$\frac{S_0}{y^{2i-1} S_1} = \alpha_1 y + \frac{\beta_1}{y} \dotplus \frac{\frac{1}{y^2}}{\alpha_2 y + \frac{\beta_2}{y}} \dotplus \frac{\frac{1}{y^2}}{\alpha_3 y + \frac{\beta_3}{y}} \dotplus \cdots$$

et, en posant $\frac{1}{y} = \upsilon$,

$$\text{(H}'\text{)} \qquad \frac{\upsilon^{2i-1} S_0}{S_1} = \frac{\alpha_1}{\upsilon} + \beta_1 \upsilon \dotplus \frac{\upsilon^2}{\frac{\alpha_2}{\upsilon} + \beta_2 \upsilon} \dotplus \frac{\upsilon^2}{\frac{\alpha_3}{\upsilon} + \beta_3 \upsilon} \dotplus \cdots.$$

5. En résumé, on verrait que les formes normales généralisées (C) se ramènent à trois catégories principales :

Première catégorie : $i = m$. — Dans ce cas, on a

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_2} \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_3} \dotplus \frac{x^{m-1}}{\lambda_4} \dotplus \cdots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n^m x^m + \alpha_n^{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_n^1 x + \alpha_n^0.$$

La fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en x : si S_0 est de degré maximum k, S_n sera de degré maximum $k - mn$.

Deuxième catégorie : $i = 0$. — Dans ce cas, en posant $x = \frac{1}{z}$, il vient

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dotplus \frac{z^{m+1}}{\lambda_2} \dotplus \frac{z^{m+1}}{\lambda_3} \dotplus \frac{z^{m+1}}{\lambda_4} \dotplus \cdots,$$

avec

$$\lambda_n = \beta_n^m z^m + \beta_n^{m-1} z^{m-1} + \ldots + \beta_n^1 z + \beta_n^0.$$

La fraction continue ne renferme que des polynomes entiers en $z = \frac{1}{x}$; $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont de même degré minimum en z.

Troisième catégorie. — Nous ferons rentrer dans cette catégorie les développements pour lesquels les numérateurs partiels sont tous égaux à l'unité; il sera nécessaire à cet effet de faire une distinction selon la parité de m.

a. m impair. — Nous poserons dans la forme (C)

$$2i - m - 1 = 2h,$$

d'où

$$i = \frac{m+1}{2} + h = j + h,$$

et la forme devient, en divisant les deux membres par x^h,

$$\text{(I)} \qquad \frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_4} - \ldots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \ldots + \mu_n x^{2-j} + \nu_n x^{1-j}.$$

b. m pair. — Nous poserons dans la forme (C)

$$2i - m - 1 = 2h - 1,$$

d'où

$$i = \frac{m}{2} + h = j + h.$$

Par suite, en divisant les deux membres par x^h,

$$\frac{S_0}{x^h S_1} = \lambda_1 - \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_2} - \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_3} - \frac{\frac{1}{x}}{\lambda_4} - \ldots,$$

avec

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \ldots + \mu_n x^{1-j} + \nu_n x^{-j}.$$

En posant $x = y^2$, on pourra multiplier les deux membres par y et il viendra

$$\text{(J)} \qquad \frac{S_0}{y^{2h-1}S_1} = \lambda_1 y \dotplus \frac{1}{\lambda_2 y} \dotplus \frac{1}{\lambda_3 y} \dotplus \frac{1}{\lambda_4 y} \dotplus \ldots,$$

avec

$$\lambda_n y = \alpha_n y^{2j+1} + \beta_n y^{2j-1} + \ldots + \mu_n y^{3-2j} + \nu_n y^{1-2j}.$$

6. Nous aurions pu diriger nos opérations de manière à réduire à l'unité tous les dénominateurs partiels. Considérons, comme précédemment, deux polynomes ou séries S_0, S_1 et admettons qu'ils aient le même premier terme Ax^k :

$$S_0 = Ax^k + a_0^{k-1}x^{k-1} + a_0^{k-2}x^{k-2} + \ldots,$$
$$S_1 = Ax^k + a_1^{k-1}x^{k-1} + a_1^{k-2}x^{k-2} + \ldots.$$

On aura évidemment

$$S_0 - S_1 = -(a_1^{k-1} - a_0^{k-1})x^{k-1} - (a_1^{k-2} - a_0^{k-2})x^{k-2} - \ldots,$$

et l'on pourra écrire

$$S_0 = S_1 - \frac{\alpha_1}{x}S_2, \qquad \alpha_1 = \frac{a_1^{k-1} - a_0^{k-1}}{A},$$

S_2 étant un polynome ou série dont le premier terme sera Ax^k, comme S_0 et S_1.

On aura de même

$$S_1 = S_2 - \frac{\alpha_2}{x}S_3,$$

et ainsi de suite; d'où l'on déduit la forme de développement déjà obtenue :

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \dotplus \frac{\frac{\alpha_1}{x}}{1} \dotplus \frac{\frac{\alpha_2}{x}}{1} \dotplus \frac{\frac{\alpha_3}{x}}{1} \dotplus \ldots.$$

Si les polynomes ou séries S_0, S_1 ont leurs m premiers termes identiques, il est facile de reconnaître que l'on pourra déterminer le polynome P_2, tel que l'on ait

$$S_0 = S_1 - P_2 S_2,$$

S_2 commençant par les mêmes m premiers termes que S_0 et S_1 : il suffira, en effet, de diviser $S_0 - S_1$ par le polynome π formé avec ces m premiers termes communs et d'arrêter au $m^{\text{ième}}$ terme le quotient P_2 qui sera ainsi de degré maximum $-m$ et de degré minimum $-(2m-1)$; on aura ainsi le développement

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 - \frac{P_2}{1} - \frac{P_3}{1} - \frac{P_4}{1} - \ldots.$$

De même considérons une série entière S_0 représentant, non plus un développement de Taylor, mais un développement de Laurent illimité dans les deux sens et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable

$$S_0 = \ldots a_0^k x^k + \ldots + a_0^1 x + a_0^0 + b_0^1 \frac{1}{x} + \ldots + b_0^k \frac{1}{x^k} + \ldots.$$

Soit également

$$S_1 = \ldots a_1^n x^n + \ldots + a_1^1 x + a_1^0 + b_1^1 \frac{1}{x} + \ldots + b_1^k \frac{1}{x^k} + \ldots.$$

Il est clair qu'en posant

$$\beta_1 a_1^0 = a_0^0,$$

on pourra écrire

$$S_0 = \beta_1 S_1 - S_2,$$

et dans S_2 on aura

$$a_2^0 = 0,$$

et, en général,

$$a_2^1 \neq 0, \qquad b_2^1 \neq 0.$$

De même, en posant

$$S_1 = (\alpha_2 x + \beta_2) S_2 - S_3,$$

on pourra déterminer α_2 et β_2 de manière à avoir dans S_3

$$a_3^0 = a_3^1 = 0.$$

Il suffira pour cela de satisfaire aux relations

$$a_1^0 = \alpha_2 b_2^1, \qquad a_1^1 = \beta_2 a_2^1.$$

De même, en posant

$$S_2 = \left(\beta_3 + \frac{\gamma_3}{x}\right) S_3 - S_4,$$

on pourra déterminer β_3 et γ_3 de manière à avoir, dans S_4,

$$a_4^1 = a_4^0 = b_4^1 = 0.$$

Il suffira d'écrire

$$a_2^1 = \gamma_3 a_3^2, \qquad b_2^1 = \beta_3 b_3^1,$$

et ainsi de suite, les dénominateurs partiels étant alternativement de la forme

$$\alpha_{2n} x + \beta_{2n} \quad \text{et} \quad \beta_{2n+1} + \gamma_{2n+1} \frac{1}{x}.$$

En continuant de la sorte on voit que S_{2n} pourra s'écrire

$$S_{2n} = x^n P(x) + x^{-n} Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

$P(x)$ et $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ étant des séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes et toutes positives de la variable.

La connaissance des deux séries initiales S_0, S_1 permettra donc de déterminer une suite limitée ou illimitée

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots,$$

ce qui constitue une généralisation naturelle de la théorie des fractions continues.

D'une manière tout à fait générale on peut admettre que les séries ou polynomes S_0, S_1, S_2, ... sont données au moyen d'une relation récurrente de la forme

$$\alpha_{n-1} S_{n-1} = \beta_n S_n - \gamma_{n+1} S_{n+1},$$

dans laquelle les α_n, β_n, γ_n sont des fonctions connues en x et en n.

Il sera possible, dès lors, de mettre le rapport $\frac{S_0}{S_1}$ des deux termes initiaux sous la forme d'un développement en fraction continue.

Nous avons, en effet, la série de relations

$$S_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_0} S_1 - \frac{\gamma_2}{\alpha_0} S_2,$$

$$S_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_1} S_2 - \frac{\gamma_3}{\alpha_1} S_3,$$

d'où

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_0} - \frac{\frac{\gamma_2}{\alpha_0}}{\frac{\beta_2}{\alpha_1}} - \frac{\frac{\gamma_3}{\alpha_1}}{\frac{\beta_3}{\alpha_2}} - \frac{\frac{\gamma_4}{\alpha_2}}{\frac{\beta_4}{\alpha_3}} - \ldots,$$

et, par une réduction facile,

$$\frac{\alpha_0 S_0}{S_1} = \beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3} - \frac{\alpha_3 \gamma_4}{\beta_4} - \ldots,$$

qui constitue le développement le plus général.

On trouverait de même par les relations récurrentes ci-dessus

$$\frac{\gamma_{n+1} S_{n+1}}{S_n} = \beta_n - \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_{n-1}} - \frac{\alpha_{n-2} \gamma_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-3} \gamma_{n-2}}{\beta_{n-3}} - \ldots.$$

7. Le présent Mémoire est divisé en six Chapitres.

Dans le premier, nous avons établi les formules générales qui permettent d'exprimer un reste quelconque, S_i, en fonction de deux autres restes également quelconques.

Nous avons été amené à introduire des symboles Q_n^i qui sont les termes des fractions approchées ordinairement dénommées *réduites* et dont nous démontrons plusieurs propriétés générales. Nous établissons enfin une formule qui permet de grouper plusieurs numérateurs et dénominateurs partiels successifs.

Dans le deuxième Chapitre nous étudions les conditions de convergence d'une fraction continue selon le mode de croissance ou de décroissance pour $n = \infty$ de Q_n^0 ou de $\frac{S_0}{S_n}$; nous démontrons ensuite une proposition générale relative au domaine de convergence de la fraction continue où l'on voit apparaître, sous certaines restrictions, mais d'une manière élémentaire, la notion de coupure introduite par Hermite et par Stieltjes.

Dans le troisième Chapitre, nous étudions les fractions continues de la forme

$$Y_1 = \lambda_1 \dot{-} \frac{1}{\lambda_2} \dot{-} \frac{1}{\lambda_3} \dot{-} \frac{1}{\lambda_4} \dot{-} \cdots$$

ou

$$Y_2 = 1 \dot{-} \frac{\mu_2}{1} \dot{-} \frac{\mu_3}{1} \dot{-} \frac{\mu_4}{1} \dot{-} \cdots,$$

dans lesquelles les λ_n, μ_n sont des polynomes entiers en x et $\frac{1}{x}$ dont les coefficients diminuent au delà de toute limite pour $n = \infty$.

Dans le premier cas, on peut dire que la fraction continue représente les deux fonctions méromorphes ou quasi-méromorphes

$$Y_1 = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

et nous indiquons une limite supérieure de l'ordre apparent et, par conséquent, du genre des fonctions entières ou quasi-entières P_0, P_1, I_0, I_1 aux points essentiels o et ∞.

Dans le second cas, Y_2 représente une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe dont l'ordre apparent a une limite supérieure qui se détermine comme dans le cas précédent.

Dans le quatrième Chapitre, nous démontrons tout d'abord que la fraction périodique simple

$$Y = \lambda \dot{-} \frac{\mu}{\lambda} \dot{-} \frac{\mu}{\lambda} \dot{-} \cdots$$

est constamment égale à la racine de plus grand module de l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0.$$

Cette fraction est partout convergente, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles les deux racines ont même module et qui forment une véritable coupure : sur ces courbes on a $\frac{\lambda^2}{\mu} = t$, t étant un nombre réel quelconque compris entre o et $+4$.

Si la fraction continue est de la forme

$$Y = \lambda_1 - \frac{\mu_2}{\lambda_2} - \frac{\mu_3}{\lambda_3} - \frac{\mu_4}{\lambda_4} - \ldots,$$

λ_n, μ_n étant des polynomes entiers en x et $\frac{1}{x}$ dont les limites respectives pour $n = \infty$ sont λ et μ, deux cas sont à considérer :

a. $\frac{\lambda^2}{\mu}$ est égal à un nombre réel quelconque, t, compris entre o et $+4$.

Dans ce cas l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0$$

a deux racines α, β, de même module.

On peut dire alors que la fraction continue représente sur tout le plan complexe deux fonctions méromorphes ou quasi-méromorphes aux points essentiels o et ∞ :

$$Y_1 = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \qquad Y_2 = \frac{P_0 - \beta I_0}{P_1 - \beta I_1}, \qquad P_0 I_1 - I_0 P_1 = R_0.$$

L'ordre apparent de P_0, I_0, P_1, I_1, R_0 a une limite supérieure, en général facile à déterminer.

b. $\frac{\lambda^2}{\mu}$ est égal à un nombre autre que t ou à une fraction rationnelle.

Dans ce cas l'équation caractéristique

$$Y^2 - \lambda Y + \mu = 0$$

possède deux racines α, β dont l'une, α par exemple, a, en général, un module supérieur à celui de l'autre. La fraction continue représente alors la fonction méromorphe ou quasi-méromorphe

$$Y = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_0}, \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R_0$$

sur tout le plan complexe, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles on a

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = t,$$

t étant un nombre réel quelconque compris entre o et $+4$.

Dans le Chapitre V, nous étendons à l'axe des x tout entier les résultats que Stieltjes n'avait obtenus que pour la partie négative de cet axe; les notations employées permettent d'apporter de notables simplifications dans l'exposé de ces résultats. Nous indiquons également comment on pourrait généraliser la théorie des fractions continues pour l'appliquer à un système de k fonctions initiales données.

Enfin, dans le dernier Chapitre, nous établissons les formules qui permettent de passer d'une série de Taylor au développement correspondant en fraction continue de la forme normale (A) et nous donnons diverses applications des théories qui précèdent.

CHAPITRE I.

FORMULES GÉNÉRALES [1].

8. Considérons les relations générales

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{A}) \left\{\begin{array}{l} \rho_{i-n}\,a_{i-n} = \lambda_{i-n+1}a_{i-n+1} - \mu_{i-n+2}a_{i-n+2},\\ \rho_{i-n+1}a_{i-n+1} = \lambda_{i-n+2}a_{i-n+2} - \mu_{i-n+3}a_{i-n+3},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \rho_{i-2}\,a_{i-2} = \lambda_{i-1}\,a_{i-1} - \mu_i\,a_i,\end{array}\right.\\ \qquad\ \ \rho_{i-1}\,a_{i-1} = \lambda_i\,a_i - \mu_{i+1}\,a_{i+1},\\ (\mathrm{B}) \left\{\begin{array}{l} \rho_i\,a_i = \lambda_{i+1}\,a_{i+1} - \mu_{i+2}\,a_{i+2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \rho_{i+n-1}a_{i+n-1} = \lambda_{i+n}\,a_{i+n} - \mu_{i+n+1}a_{i+n+1}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Au moyen des relations (A), en remontant de proche en proche, on peut exprimer a_i en fonction linéaire de a_{i-n} et de a_{i-n+1}; de même, au moyen des relations (B), en descendant de proche en proche, on peut exprimer a_i en fonction linéaire de a_{i+n} et de a_{i+n+1}; c'est l'étude

---

(1) *Voir* Auric, *Essai sur la théorie des fractions continues* (*Journal de M. Jordan*, 1902, p. 387).

de ces fonctions et de leurs relations entre elles que nous allons entreprendre en premier lieu.

9. Posons

$$a_i = \rho_{i+n} P^i_{i+n} a_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} a_{i+n+1}. \tag{2}$$

Nous avons, d'après (1), et cela quel que soit le signe de n,

$$\rho_{i+n} a_{i+n} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} a_{i+n+2},$$

d'où, en substituant dans (2),

$$a_i = (\lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n}) a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} P^i_{i+n} a_{i+n+2}.$$

Or, par définition,

$$a_i = \rho_{i+n+1} P^i_{i+n+1} a_{i+n+1} + \mu_{i+n+2} Q^i_{i+n+1} a_{i+n+2},$$

d'où il vient par comparaison

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{i+n+1} P^i_{i+n+1} &= \lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n}, \\ Q^i_{i+n+1} &= - P^i_{i+n}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

et il est clair que ces relations subsistent quel que soit le signe de n.

10. En remplaçant dans (2) P^i_{i+n} par sa valeur $-Q^i_{i+n+1}$, tirée de (3), il vient

$$a_i = \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n} a_{i+n+1} - \rho_{i+n} Q^i_{i+n+1} a_{i+n}, \tag{4}$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$a_i = \begin{vmatrix} Q^i_{i+n} & \rho_{i+n} a_{i+n} \\ Q^i_{i+n+1} & \mu_{i+n+1} a_{i+n+1} \end{vmatrix}. \tag{4'}$$

Nous avons par définition

$$a_i = \rho_{i+1} P^i_{i+1} a_{i+1} + \mu_{i+2} Q^i_{i+1} a_{i+2} = \frac{\lambda_{i+1}}{\rho_i} a_{i+1} - \frac{\mu_{i+2}}{\rho_i} a_{i+2},$$

d'où l'on tire

$$- Q^i_{i+2} = P^i_{i+1} = \frac{\lambda_{i+1}}{\rho_i \rho_{i+1}} = \frac{1}{\rho_{i+1}}(\lambda_{i+1} P^i_i + \mu_{i+1} Q^i_i),$$

$$Q^i_{i+1} = -\frac{1}{\rho_i} = \qquad -P^i_i.$$

Il en résulte

(5)
$$\left\{\begin{array}{l} P^i_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_i}(\lambda_i \; P^i_{i-1} + \mu_i \; Q^i_{i-1}), \\ Q^i_i = 0 = \qquad -P^i_{i-1}, \\ \text{d'où} \\ P^i_{i-1} = 0 = \frac{1}{\rho_{i-1}}(\lambda_{i-1} P^i_{i-2} + \mu_{i-1} Q^i_{i-2}), \\ Q^i_{i-1} = \frac{1}{\mu_i} = \qquad -P^i_{i-2}, \\ \text{et, par suite,} \\ \qquad P^i_{i-2} = -\frac{1}{\mu_i}, \qquad Q^i_{i-2} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}\mu_i}. \end{array}\right.$$

Ce sont des valeurs particulières des symboles P et Q qui nous seront utiles dans la suite.

11. La relation (3) nous donne par substitution

(6) $$\rho_{i+n+1} Q^i_{i+n+2} = \lambda_{i+n+1} Q^i_{i+n+1} - \mu_{i+n+1} Q^i_{i+n};$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q de même indice supérieur.

De même la relation (1)

$$\rho_{i+n} a_{i+n} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - \mu_{i+n+2} a_{i+n+2}$$

donne, si l'on exprime a_{i+n}, a_{i+n+1} et a_{i+n+2} en fonction de a_k et de a_{k+1}, et si l'on égale dans les deux membres les coefficients de a_{k+1},

(7) $$\rho_{i+n} Q^{i+n}_k = \lambda_{i+n+1} Q^{i+n+1}_k - \mu_{i+n+2} Q^{i+n+2}_k;$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q de même indice inférieur.

12. Les relations (6) et (7) ne sont d'ailleurs que des cas particuliers d'une relation plus générale que nous allons établir.

La relation (4) donne, en effet, par le même procédé que celui employé pour obtenir la relation (7),

$$(8) \qquad Q_k^i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i Q_k^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_k^{i+n},$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(8') \qquad Q_k^i = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^i & \rho_{i+n} Q_k^{i+n} \\ Q_{i+n+1}^i & \mu_{i+n+1} Q_k^{i+n+1} \end{vmatrix}.$$

Pour $k = i + n - 1$ cette relation devient

$$Q_{i+n-1}^i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i Q_{i+n-1}^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_{i+n-1}^{i+n},$$

et, en observant que, d'après (5),

$$Q_{i+n-1}^{i+n+1} = \frac{\lambda_{i+n}}{\mu_{i+n}\mu_{i+n+1}}, \qquad Q_{i+n-1}^{i+n} = \frac{1}{\mu_{i+n}},$$

on obtient

$$\mu_{i+n} Q_{i+n-1}^i = \lambda_{i+n} Q_{i+n}^i - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i;$$

c'est la relation (6).

De même, si dans (8) on fait $n = -2$, il vient

$$Q_k^i = \mu_{i-1} Q_{i-2}^i Q_k^{i-1} - \rho_{i-2} Q_{i-1}^i Q_k^{i-2},$$

et, en remplaçant Q_{i-2}^i, Q_{i-1}^i par leurs valeurs tirées de (5),

$$\mu_i Q_k^i = \lambda_{i-1} Q_k^{i-1} - \rho_{i-2} Q_k^{i-2};$$

c'est la relation (7).

13. Si, dans la relation (8), on fait $k = i$, il vient

$$Q_i^i = 0 = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i Q_i^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_i^{i+n},$$

d'où, en supposant

$$\rho_{i+n} Q^i_{i+n} Q^i_{i+n+1} \neq 0,$$

$$\frac{Q_i^{i+n}}{Q^i_{i+n}} = \frac{\mu_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} \frac{Q_i^{i+n+1}}{Q^i_{i+n+1}}.$$

On aura donc successivement, en supposant $n > 0$,

$$\frac{Q_i^{i+n-1}}{Q^i_{i+n-1}} = \frac{\mu_{i+n}}{\rho_{i+n-1}} \frac{Q_i^{i+n}}{Q^i_{i+n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{Q_i^{i+1}}{Q^i_{i+1}} = \frac{\mu_{i+2}}{\rho_{i+1}} \frac{Q_i^{i+2}}{Q^i_{i+2}},$$

$$1 = -\frac{\mu_{i+1}}{\rho_i} \frac{Q_i^{i+1}}{Q^i_{i+1}},$$

d'après (5), d'où, en multipliant membre à membre,

$$Q^i_{i+n+1} = -\prod_{j=i}^{j=i+n} \frac{\mu_{j+1}}{\rho_j} Q_i^{i+n+1}.$$

Posons pour simplifier

$$\prod_{j=i}^{j=i+k} \frac{\mu_{j+1}}{\rho_j} = M_i^{i+k+1}, \qquad k > 0;$$

nous obtiendrons la formule fondamentale de réciprocité des indices

$$Q^i_{i+k} = -M_i^{i+k} Q_i^{i+k}, \qquad k > 0;$$

avec $k < 0$, nous aurions

$$Q_i^{i-k} = -M^i_{i-k} Q^i_{i-k},$$

d'où

$$Q^i_{i-k} = -\frac{1}{M^i_{i-k}} Q_i^{i-k}.$$

Il suffira donc de poser

$$M_i^{i-k} = \frac{1}{M^i_{i-k}} \qquad \text{ou} \qquad M_i^{i-k} M^i_{i-k} = 1$$

pour avoir la formule générale

$$Q_j^i = -M_i^j Q_i^j, \tag{9}$$

quel que soit j.

En particulier, pour $i = j$, comme $Q_i^i = 0$, M_i^i aurait une valeur indéterminée; nous verrons plus loin que l'on est amené à écrire l'égalité conventionnelle $M_i^i = 1$.

Nous avons admis au début de la démonstration

$$\rho_{i+n} Q_{i+n}^i Q_{i+n+1}^i \neq 0.$$

Si l'on avait $Q_{i+n}^i = 0$, la relation (8) donnerait

$$\rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i Q_i^{i+n} = 0.$$

Or on ne peut avoir simultanément

$$Q_{i+n}^i = 0, \qquad Q_{i+n+1}^i = 0,$$

car (8) donnerait, quel que soit k, $Q_k^i = 0$, ce qui est en contradiction avec $Q_{i+1}^i = -\frac{1}{\rho_i}$; il faut donc, si les ρ_i sont supposés tous ni nuls ni infinis [1], que l'on ait $Q_i^{i+n} \neq 0$, ce qui prouve bien la généralité de la formule (9).

14. Revenons à la formule (4)

$$a_i = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^i a_{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^i a_{i+n}.$$

D'après (9) nous avons

$$Q_{i+n}^i = -M_i^{i+n} Q_i^{i+n}, \qquad Q_{i+n+1}^i = -M_i^{i+n+1} Q_i^{i+n+1},$$

---

(1) Nous supposons cette condition remplie, sinon il existerait une relation linéaire entre deux a_i consécutifs et, par suite, tous les a_i s'exprimeraient linéairement en fonction de l'un d'entre eux, hypothèse qui doit être écartée *a priori*, sauf le cas où la fraction continue est limitée.

d'où, en substituant,

$$\frac{a_i}{\rho_{i+n}} = -\frac{\mu_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} \mathrm{M}_i^{i+n} \mathrm{Q}_i^{i+n} a_{i+n+1} + \mathrm{M}_i^{i+n+1} \mathrm{Q}_i^{i+n+1} a_{i+n};$$

mais il est aisé de vérifier que l'on a, quel que soit le signe de n,

$$\frac{\mu_{i+n+1}}{\rho_{i+n}} \mathrm{M}_i^{i+n} = \mathrm{M}_{i+n}^{i+n+1} \mathrm{M}_i^{i+n} = \mathrm{M}_i^{i+n+1}$$

et, plus généralement, quels que soient i, j, k,

$$\mathrm{M}_i^j \mathrm{M}_j^k = \mathrm{M}_i^k$$

avec l'égalité conventionnelle $\mathrm{M}_i^i = 1$.

Il viendra donc, en substituant,

$$(10) \qquad \frac{a_i}{\rho_{i+n}} = \mathrm{M}_i^{i+n+1} (\mathrm{Q}_i^{i+n+1} a_{i+n} - \mathrm{Q}_i^{i+n} a_{i+n+1}),$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(10') \qquad a_i = \rho_j \mathrm{M}_i^{j+1} \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \\ \mathrm{Q}_i^j & \mathrm{Q}_i^{j+1} \end{vmatrix}.$$

Cette formule peut également s'écrire

$$(10'') \qquad a_i = \mu_{j+1} \mathrm{M}_i^j \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \\ \mathrm{Q}_i^j & \mathrm{Q}_i^{j+1} \end{vmatrix},$$

d'où, par le procédé déjà employé pour obtenir la relation (7),

$$(11) \qquad \frac{\mathrm{Q}_k^i}{\rho_j \mathrm{M}_i^{j+1}} = \frac{\mathrm{Q}_k^i}{\mu_{j+1} \mathrm{M}_i^j} = \begin{vmatrix} \mathrm{Q}_k^j & \mathrm{Q}_k^{j+1} \\ \mathrm{Q}_i^j & \mathrm{Q}_i^{j+1} \end{vmatrix},$$

et, si $k = i + 1$, on aura, puisque $\mathrm{Q}_{i+1}^i = -\frac{1}{\rho_i}$,

$$(12) \qquad \mathrm{Q}_i^j \mathrm{Q}_{i+1}^{j+1} - \mathrm{Q}_{i+1}^j \mathrm{Q}_i^{j+1} = \frac{1}{\rho_i \rho_j \mathrm{M}_i^{j+1}} = \frac{\mathrm{M}_{j+1}^i}{\rho_i \rho_j} = \frac{\mathrm{M}_j^{i+1}}{\mu_{i+1} \mu_{j+1}},$$

et ces relations sont absolument générales.

15. Si dans le second membre de (11) nous multiplions la première colonne par $-a_{j+1}$ et la seconde par a_j, il viendra, en ajoutant les colonnes ainsi multipliées et en tenant compte des relations

$$a_k = \rho_j M_k^{j+1}(Q_k^{j+1} a_j - Q_k^j a_{j+1}),$$
$$a_i = \rho_j M_i^{j+1}(Q_i^{j+1} a_j - Q_i^j a_{j+1}),$$
$$Q_k^i a_j = \rho_j M_i^{j+1} \begin{vmatrix} Q_k^j & \dfrac{a_k}{\rho_j M_k^{j+1}} \\ Q_i^j & \dfrac{a_i}{\rho_j M_i^{j+1}} \end{vmatrix}$$

et, en réduisant,

$$Q_k^i a_j = Q_k^j a_i - M_i^k Q_i^j a_k \tag{13}$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$M_i^k Q_i^j a_k = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ Q_k^i & Q_k^j \end{vmatrix}, \tag{13'}$$

et, par le procédé déjà employé,

$$M_i^k Q_i^l Q_l^k = \begin{vmatrix} Q_l^i & Q_l^j \\ Q_k^i & Q_k^j \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Telle est la relation la plus générale que nous voulions établir.

En particulier, la relation (13) montre que, si a_i et a_k ont un diviseur commun δ, celui-ci divisera également $Q_k^i a_j$; or, s'il ne divisait pas Q_k^i, il diviserait nécessairement a_j (j quelconque); si donc on admet que les a_j ont été débarrassés de leur plus grand commun diviseur, il reste démontré cette proposition fondamentale que le plus grand commun diviseur de a_i et de a_k divise Q_k^i.

16. Considérons les relations (1); la formule récurrente

$$\frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{\mu_{i+2} a_{i+2}}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{\rho_{i+1}\mu_{i+2}}{\dfrac{\rho_{i+1} a_{i+1}}{a_{i+2}}}$$

permet d'écrire le rapport $\frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}}$ sous la forme d'un développement en fraction continue :

$$(15)\quad \frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{\rho_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+2}} - \frac{\rho_{i+2}\mu_{i+3}}{\lambda_{i+3}} - \ldots - \frac{\rho_{i+n-2}\mu_{i+n-1}}{\lambda_{i+n-1}} - \frac{\mu_{i+n}a_{i+n}}{a_{i+n-1}}.$$

Réciproquement, la relation récurrente

$$\frac{\mu_{i+n}a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2}a_{i+n-2}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{\rho_{i+n-2}\mu_{i+n-1}}{\frac{\mu_{i+n-1}a_{i+n-1}}{a_{i+n-2}}}$$

permet d'écrire

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mu_{i+n}a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} &- \frac{\rho_{i+n-2}\mu_{i+n-1}}{\lambda_{i+n-2}} \\ &- \frac{\rho_{i+n-3}\mu_{i+n-2}}{\lambda_{i+n-3}} - \ldots - \frac{\rho_{i+1}\mu_{i+2}}{\lambda_{i+1}} - \frac{\rho_i a_i}{a_{i+1}}. \end{aligned}\right.$$

En particulier, admettons que tous les ρ_i et les μ_i soient égaux à l'unité, on aura

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda_{i+1} - \frac{1}{\lambda_{i+2}} - \frac{1}{\lambda_{i+3}} - \ldots - \frac{1}{\lambda_{i+n-1}} - \frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$$

et

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \lambda_{i+n-1} - \frac{1}{\lambda_{i+n-2}} - \frac{1}{\lambda_{i+n-3}} - \ldots - \frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{a_i}{a_{i+1}},$$

ce qui constitue un théorème fondamental sur la réversibilité des restes, bien connu dans la théorie des fractions continues arithmétiques.

Admettons que, dans (15), a_{i+n} soit le premier reste nul rencontré; on aura d'après (4)

$$\begin{aligned} a_i &= \mu_{i+n}Q^i_{i+n-1}a_{i+n} - \rho_{i+n-1}Q^i_{i+n}a_{i+n-1}, \\ a_{i+1} &= \mu_{i+n}Q^{i+1}_{i+n-1}a_{i+n} - \rho_{i+n-1}Q^{i+1}_{i+n}a_{i+n-1}; \end{aligned}$$

d'où en divisant, puisque $a_{i+n-1} \neq 0$,

$$(17)\quad \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{Q^i_{i+n}}{Q^{i+1}_{i+n}}.$$

Cette relation aurait pu, d'ailleurs, se démontrer directement, car la formule récurrente (7)

$$\rho_i Q^i_{i+n} = \lambda_{i+1} Q^{i+1}_{i+n} - \mu_{i+2} Q^{i+2}_{i+n}$$

donne, pour $\rho_i \dfrac{Q^i_{i+n}}{Q^{i+1}_{i+n}}$, le même développement *limité* que pour $\rho_i \dfrac{a_i}{a_{i+1}}$.

De même admettons que, dans (16), a_i soit le premier reste nul rencontré; on trouvera comme précédemment, d'après (4),

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \frac{Q^{i+n}_i}{Q^{i+n-1}_i}.$$

Or

$$Q^i_{i+n} = -M^{i+n}_i Q^{i+n}_i, \qquad Q^i_{i+n+1} = -M^{i+n+1}_i Q^{i+n+1}_i;$$

d'où, en substituant,

$$(18) \qquad \frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} = \rho_{i+n-1} \frac{Q^i_{i+n}}{Q^i_{i+n-1}}.$$

Cette relation aurait pu d'ailleurs se démontrer directement, car la formule récurrente (6)

$$\rho_{i+n-1} Q^i_{i+n} = \lambda_{i+n-1} Q^i_{i+n-1} - \mu_{i+n-1} Q^i_{i+n-2}$$

conduit, pour $\rho_{i+n-1} \dfrac{Q^i_{i+n}}{Q^i_{i+n-1}}$, au même développement *limité* que pour $\dfrac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$.

Les relations (4) rappelées ci-dessus donnent par division

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{\mu_{i+n} Q^i_{i+n-1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q^i_{i+n} a_{i+n-1}}{\mu_{i+n} Q^{i+1}_{i+n-1} a_{i+n} - \rho_{i+n-1} Q^{i+1}_{i+n} a_{i+n-1}}$$

et, par suite,

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{Q^i_{i+n-1}}{Q^{i+1}_{i+n-1}}\right)\left(\frac{\mu_{i+n} a_{i+n}}{a_{i+n-1}} - \rho_{i+n-1}\frac{Q^{i+1}_{i+n}}{Q^{i+1}_{i+n-1}}\right) &= \frac{M^{i+n-1}_{i+1}}{\rho_i (Q^{i+1}_{i+n-1})^2} \\ &= -\frac{1}{\rho_i Q^{i+1}_{i+n-1} Q^{i+n-1}_{i+1}}, \end{aligned} \right.$$

ce qui constitue une relation directe entre les deux rapports $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ et $\frac{\mu_{i+n}a_{i+n}}{a_{i+n-1}}$.

Enfin, la relation (13) donne, en supposant

$$i<j<k<l<m<\ldots<s<t<u,$$

$$Q_k^j a_i = Q_k^i a_j + M_i^k Q_i^j a_k$$

ou

$$Q_k^j a_i = Q_k^i a_j - M_j^k Q_j^i a_k,$$

et, par suite,

$$\frac{Q_k^j a_i}{a_j} = Q_k^i - M_j^k Q_j^i \frac{a_k}{a_j} = Q_k^i - \frac{M_j^k Q_j^i Q_l^k}{Q_l^k \dfrac{a_j}{a_k}}, \tag{20}$$

ce qui constitue le schéma d'un développement en fraction continue. On pourra donc écrire

$$Q_k^j \frac{a_i}{a_j} = Q_k^i - \cfrac{M_j^k Q_j^i Q_l^k}{Q_l^j - \cfrac{M_k^l Q_k^j Q_m^l}{Q_m^k - \cfrac{M_l^m Q_l^k Q_n^m}{Q_n^l - \cdots - Q_u^s - \cfrac{M_t^u Q_t^s}{\cfrac{a_t}{a_u}}}}},$$

ou, par une réduction facile,

$$\frac{1}{Q_j^i}\frac{a_i}{a_j} = \frac{Q_k^i}{Q_j^i Q_k^j} \dot{+} \frac{\frac{1}{Q_j^k}}{\frac{Q_l^j}{Q_k^j Q_l^k}} \dot{+} \frac{\frac{1}{Q_l^k Q_k^l}}{\frac{Q_m^k}{Q_l^k Q_m^l}} \dot{+} \frac{\frac{1}{Q_m^l Q_l^m}}{\frac{Q_n^l}{Q_m^l Q_n^m}} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{\frac{1}{Q_t^s Q_s^t}}{\frac{Q_u^s}{Q_t^s Q_u^t}} \dot{+} \frac{1}{Q_t^u \frac{a_t}{a_u}}.$$

Mais les formules connues

$$\rho_i Q_{i+1}^j a_i = \mu_{i+1} Q_i^j a_{i+1} - a_j,$$
$$a_t = \mu_u Q_{u-1}^t a_u - \rho_{u-1} Q_u^t a_{u-1}$$

permettent d'exprimer $\frac{a_i}{a_j}$ en fonction de $\frac{a_i}{a_{i+1}}$, de même que $\frac{a_t}{a_u}$ en fonction de $\frac{a_{u-1}}{a_u}$.

On obtiendra donc un développement exprimant $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ en fonction de $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et dans lequel, seuls, les termes intermédiaires a_j, a_k, a_l, a_m, $\ldots$, a_s, a_t auront été envisagés.

Cette formule sera très utile dans le cas où il existera une relation simple entre ces différents termes, car on pourra grouper, en quelque sorte, un certain nombre de fractions partielles successives dans le développement général de la fraction continue considérée.

17. Les formules établies précédemment vont nous permettre de démontrer un théorème de la théorie des nombres.

Considérons les formules récurrentes dans lesquelles nous supposons que les ρ_i, λ_i, μ_i sont des entiers quelconques :

$$\begin{aligned}
\rho_{i+n} Q^i_{i+n+1} &= \lambda_{i+n} Q^i_{i+n} - \mu_{i+n} Q^i_{i+n-1},\\
\rho_{i+n-1} Q^i_{i+n} &= \lambda_{i+n-1} Q^i_{i+n-1} - \mu_{i+n-1} Q^i_{i+n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho_{i+2} Q^i_{i+3} &= \lambda_{i+2} Q^i_{i+2} - \mu_{i+2} Q^i_{i+1},\\
\rho_{i+1} Q^i_{i+2} &= \lambda_{i+1} Q^i_{i+1}.
\end{aligned}$$

Soient de même les relations

$$\begin{aligned}
\rho_k Q^k_{k+n+1} &= \lambda_{k+1} Q^{k+1}_{k+n+1} - \mu_{k+2} Q^{k+2}_{k+n+1},\\
\rho_{k+1} Q^{k+1}_{k+n+1} &= \lambda_{k+2} Q^{k+2}_{k+n+1} - \mu_{k+3} Q^{k+3}_{k+n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho_{k+n-2} Q^{k+n-2}_{k+n+1} &= \lambda_{k+n-1} Q^{k+n-1}_{k+n+1} - \mu_{k+n} Q^{k+n}_{k+n+1},\\
\rho_{k+n-1} Q^{k+n-1}_{k+n+1} &= \lambda_{k+n} Q^{k+n}_{k+n+1}.
\end{aligned}$$

Si nous avons les égalités

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha &= \rho_\beta &&\text{avec}\quad \alpha + \beta = i + n + k = \sigma - 1,\\
\lambda_{\alpha'} &= \lambda_{\beta'} &&\text{avec}\quad \alpha' + \beta' = i + n + k + 1 = \sigma,\\
\mu_{\alpha''} &= \mu_{\beta''} &&\text{avec}\quad \alpha'' + \beta'' = i + n + k + 2 = \sigma + 1,
\end{aligned}$$

il est clair que l'on aura

$$\frac{Q_{i+n+1}^{i}}{Q_{i+1}^{i}} = \frac{Q_{k+n+1}^{k}}{Q_{k+n+1}^{k+n}}$$

ou

$$\rho_i Q_{i+n+1}^{i} = \rho_{k+n} Q_{k+n+1}^{k},$$

ou, plus simplement,

$$Q_{i+n+1}^{i} = Q_{k+n+1}^{k},$$

puisque, par hypothèse,

$$\rho_i = \rho_{k+n}.$$

Plus généralement, on verrait que

$$Q_{\delta}^{\gamma} = Q_{\delta'}^{\gamma'}$$

si

$$\gamma + \delta' = \gamma' + \delta = i + n + k + 1 = \sigma.$$

En particulier, la formule (8) deviendra

$$Q_{i+2n+1}^{i} = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^{i} Q_{i+2n+1}^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^{i} Q_{i+2n+1}^{i+n},$$

et, si dans les relations précédentes on suppose

$$k = i + n,$$

d'où

$$\sigma = 2i + 2n + 1,$$

on aura

$$Q_{i+n}^{i} = Q_{i+2n+1}^{i+n+1}, \qquad Q_{i+n+1}^{i} = Q_{i+2n+1}^{i+n}$$

et, par suite,

$$Q_{i+2n+1}^{i} = \mu_{i+n+1} (Q_{i+n}^{i})^2 - \rho_{i+n} (Q_{i+n+1}^{i})^2.$$

En reproduisant le raisonnement indiqué par Serret dans son article du Tome 13 du *Journal de Liouville*, on arrivera à démontrer que tout diviseur d'un nombre de la forme $a^2 - \rho b^2$ est, sous certaines restrictions, également de cette forme.

La formule (8) peut s'écrire également

$$Q_{i+2n}^{i} = \mu_{i+n+1} Q_{i+n}^{i} Q_{i+2n}^{i+n+1} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^{i} Q_{i+2n}^{i+n}.$$

Si dans les relations ci-dessus on suppose

$$k = i + n - 1,$$

d'où

$$\sigma = 2i + 2n,$$

on aura

$$Q_{i+n}^{i} = Q_{i+2n}^{i+n}, \qquad Q_{i+2n}^{i+n+1} = Q_{i+n-1}^{i},$$

d'où

$$Q_{i+2n}^{i} = Q_{i+n}^{i}(\mu_{i+n+1} Q_{i+n-1}^{i} - \rho_{i+n} Q_{i+n+1}^{i});$$

d'où cette conséquence que Q_{i+n}^{i} est un diviseur de Q_{i+2n}^{i}.

CHAPITRE II.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE CONVERGENCE.

18. Nous allons examiner en détail le cas où le reste a_n ne devient jamais identiquement nul et nous étudierons les conditions de convergence de la fraction continue illimitée ainsi obtenue.

Dans un paragraphe précédent nous avons établi la formule (17) qui, pour $i = 0$, devient

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{Q_n^0}{Q_n^1} \qquad \text{avec} \qquad a_n = 0 \qquad (n \text{ fini}).$$

Nous allons chercher tout d'abord si cette relation subsiste lorsque, la fraction continue étant illimitée, a_n tend vers zéro pour $n = \infty$; il nous faut pour cela déterminer les conditions de convergence de la fraction $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ ou réduite pour $n = \infty$.

La relation (12) nous donne

$$Q_{n-1}^0 Q_n^1 - Q_n^0 Q_{n-1}^1 = \frac{M_1^{n-1}}{\rho_0 \rho_{n-1}} = \frac{M_0^n}{\mu_1 \mu_n},$$

d'où, en divisant par $Q'_{n-1}Q'_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{Q^0_{n-1}}{Q^1_{n-1}} - \frac{Q^0_n}{Q^1_n} &= \frac{M_1^{n-1}}{\rho_0\rho_{n-1}Q^1_{n-1}Q^1_n},\\
\frac{Q^0_{n-2}}{Q^1_{n-2}} - \frac{Q^0_{n-1}}{Q^1_{n-1}} &= \frac{M_1^{n-2}}{\rho_0\rho_{n-2}Q^1_{n-2}Q^1_{n-1}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\frac{Q^0_2}{Q^1_2} - \frac{Q^0_3}{Q^1_3} &= \frac{M_1^2}{\rho_0\rho_2 Q^1_2 Q^1_3},\\
\frac{Q^0_2}{Q^1_2} &= \frac{\lambda_1}{\rho_0},
\end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces égalités,

$$(21)\qquad -\rho_0\frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \lambda_1 + \frac{M_1^2}{\rho_2 Q^1_2 Q^1_3} + \frac{M_1^3}{\rho_3 Q^1_3 Q^1_4} + \dots + \frac{M_1^{n-2}}{\rho_{n-2}Q^1_{n-2}Q^1_{n-1}} + \frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1}Q^1_{n-1}Q^1_n}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, le polynome du second membre devient une série et, d'après un théorème bien connu de Cauchy, cette série sera convergente si la limite supérieure, pour $n=\infty$, de

$$\sqrt[n]{\frac{|M_1^n|}{|\rho_n Q^1_n Q^1_{n+1}|}}$$

est inférieure à l'unité.

En particulier, cette condition sera évidemment remplie si, $\overline{m}^{-2}$ étant la limite supérieure de $\left|\frac{\mu_n}{\rho_{n-1}}\right|$ pour $n=\infty$, nous avons l'inégalité

$$\text{lim. inf.}\sqrt[n]{|Q^1_n|} > \overline{m}.$$

C'est là un résultat simple dont on pourra souvent faire usage.

Il est, d'ailleurs, possible de généraliser cette condition, car la relation (11) donne

$$Q^0_{(n-1)k+i}Q^1_{nk+i} - Q^1_{(n-1)k+i}Q^0_{nk+i} = \frac{M_1^{nk+i}}{\rho_0}Q^{nk+i}_{(n-1)k+i},$$

d'où

$$\frac{Q^0_{(n-1)k+i}}{Q^1_{(n-1)k+i}} - \frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+i}} = \frac{M_1^{nk+i}Q^{nk+i}_{(n-1)k+i}}{\rho_0 Q^1_{(n-1)k+i}Q^1_{nk+i}}$$

et l'on voit aisément que la série représentative de $\frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+i}}$ pour $n=\infty$ sera convergente si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\frac{|M_1^{nk+i}Q^{nk+i}_{(n-1)k+i}|}{|\rho_0 Q^1_{(n-1)k+i}Q^1_{nk+i}|}}$ est inférieure à l'unité. En particulier, cette condition sera évidemment remplie si, pour $n=\infty$, la limite inférieure de $\sqrt[nk]{|Q^1_{nk+i}|}$ est supérieure à $\overline{m}$.

Il est clair, d'ailleurs, que dans ce cas nous aurons seulement démontré la convergence de $\frac{Q^0_{nk+i}}{Q^1_{nk+i}}$ pour $n=\infty$; la limite de $\frac{Q^0_{nk+j}}{Q^1_{nk+j}}$ avec $j \not\equiv i \pmod{k}$ pourra ne pas exister ou avoir une valeur différente de celle trouvée précédemment.

Mais, même dans le cas où $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ aurait, pour $n=\infty$, une limite unique et bien déterminée, celle-ci ne serait pas nécessairement égale à $\frac{a_0}{a_1}$, comme une généralisation hâtive de la formule (17) permettrait de le supposer. En effet, la relation (10) donne

$$a_0 Q^1_n - a_1 Q^0_n = \frac{1}{\rho_0} M^n_1 a_n,$$

d'où

$$\frac{a_0}{a_1} - \frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \Delta_n = \frac{1}{\rho_0}\frac{M^n_1 a_n}{a_1 Q^1_n} = -\frac{a_n}{\rho_0 a_1 Q^n_1} \tag{22}$$

et l'on voit immédiatement que Δ_n ne tend vers zéro que si a_n est infiniment petit par rapport à Q^n_1. Or nous savons que $\frac{a_0}{a_1}$ et $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ (pour $n=\infty$) ont le même développement *illimité* en fraction continue; nous avons donc ici un premier exemple de deux quantités pouvant différer entre elles et donnant cependant naissance au même développement illimité; ce fait ne doit, d'ailleurs, pas nous surprendre, car les deux racines (x', x''), en principe différentes, de l'équation du second degré $x^2 - ax + b = 0$ donnent évidemment naissance au même développement

$$(x', x'') = a \mathbin{\dot{-}} \frac{b}{a} \mathbin{\dot{-}} \frac{b}{a} \mathbin{\dot{-}} \frac{b}{a} \mathbin{\dot{-}} \cdots.$$

Quoi qu'il en soit, si, en outre de la condition ci-dessus admise

$$\text{lim. inf. } \sqrt[n]{|Q_n^1|} > \overline{m},$$

nous avons également

$$\text{lim. inf. } \sqrt{\left|\frac{a_1}{a_n}\right|} > \overline{m},$$

il est clair que nous aurons $\lim \Delta_n = 0$ et $\frac{a_0}{a_1} = \lim \frac{Q_n^0}{Q_n^1}$.

Au lieu de considérer le critère de convergence de Cauchy, nous aurions pu faire intervenir celui de d'Alembert relatif au quotient de deux termes successifs : soit

$$\frac{M_1^{k-1}}{\rho_{k-1} Q_{k-1}^1 Q_k^1} : \frac{M_1^k}{\rho_k Q_k^1 Q_{k+1}^1} = \frac{\rho_k Q_{k+1}^1}{\mu_k Q_{k-1}^1}.$$

Si la limite inférieure, pour $k = \infty$, du module de cette expression est supérieure à l'unité, il est clair que $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura une limite, mais celle-ci ne sera égale à $\frac{a_0}{a_1}$ que dans certaines conditions, par exemple si la limite supérieure de $\left|\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}\right|$, pour $k = \infty$, est inférieure à l'unité.

Posons, en effet, suivant que k est pair ou impair,

$$Q_\alpha^0 = Q_1^0 = -\frac{1}{\rho_0} \qquad \text{et} \qquad a_\alpha = a_1,$$

ou

$$Q_\alpha^0 = Q_2^0 = -\frac{\lambda_1}{\rho_0 \rho_1} \qquad \text{et} \qquad a_\alpha = a_2 \qquad \text{avec} \qquad |a_2| < \left|\frac{\rho_0 a_0}{\mu_2}\right|.$$

On aura, en vertu des hypothèses faites,

$$|Q_{k+1}^1| > (1+\varepsilon)^{\frac{k+1-\alpha}{2}} \left| \frac{\mu_k}{\rho_k} \frac{\mu_{k-2}}{\rho_{k-2}} \frac{\mu_{k-4}}{\rho_{k-4}} \cdots \frac{\mu_{\alpha+1}}{\rho_{\alpha+1}} Q_\alpha^1 \right|,$$

$$|a_{k+1}| < \frac{|a_\alpha|}{(1+\varepsilon)^{\frac{k+1-\alpha}{2}} \left| \frac{\mu_{k+1}}{\rho_{k-1}} \frac{\mu_{k-1}}{\rho_{k-3}} \cdots \frac{\mu_{\alpha+2}}{\rho_\alpha} \right|},$$

d'où

$$\left|\frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{k+1-\alpha}} \left|\frac{a_\alpha}{M_\alpha^{k+1} Q_\alpha^1}\right|.$$

Pour $\alpha = 1$, on a

$$\left|\frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^k}\left|\frac{\rho_0 a_1}{M_1^{k+1}}\right|.$$

Pour $\alpha = 2$, il vient également

$$\left|\frac{a_{k+1}}{Q_{k+1}^1}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{k-1}}\left|\frac{\rho_0\rho_1 a_2}{\lambda_1 M_2^{k+1}}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^k}\left|\frac{\rho_0^2 a_0}{\lambda_1 M_1^{k+1}}\right|;$$

dans les deux cas on voit, d'après (22), que Δ_n tend vers zéro.

La formule (21) peut également s'écrire

$$-\rho_0\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1}Q_{n-1}^1 Q_n^1} + \frac{M_1^{n-2}}{\rho_{n-2}Q_{n-2}^1 Q_{n-1}^1} + \ldots + \frac{M_1^2}{\rho_2 Q_2^1 Q_3^1} + \lambda_1.$$

Le second membre devient une série, lorsque n augmente indéfiniment et en divisant par le premier terme tous les termes de cette série, on obtiendra comme terme général,

$$\frac{\rho_{n-1}Q_{n-1}^1 Q_n^1}{\rho_{n-k}M_{n-k}^{n-1}Q_{n-k}^1 Q_{n-k+1}^1}.$$

On pourra, comme précédemment, étudier les conditions de convergence de cette série S. En particulier, si $\underline{m}^2$ est la limite inférieure de $\left|\frac{\mu_n}{\rho_{n-1}}\right|$, pour $n=\infty$, et si $\sqrt[n]{|Q_n^1|}$ tend régulièrement vers sa limite $|u|$, il est clair que la série S sera convergente si $|u| < \underline{m}$.

On arriverait à une conclusion analogue par la considération du critère de d'Alembert; le rapport de deux termes est ici égal à $\frac{\mu_k Q_{k-1}^1}{\rho_k Q_{k+1}^1}$, soit à l'inverse de celui trouvé précédemment : si, pour $k=\infty$, la limite inférieure du module de ce rapport est supérieure à l'unité, la série S sera évidemment convergente.

Dans ce cas, on pourra écrire

$$\lim\left(-\rho_0\frac{Q_n^0}{Q_n^1}\right) = \lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_{n-1}Q_{n-1}^1 Q_n^1}\right)\times \mathrm{S};$$

d'où

$$\lim(-Q_n^0 Q_{n-1}^1) = \mathrm{S}\times\lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_0\rho_{n-1}}\right).$$

Or, nous avons

$$\lim(Q^0_{n-1}Q^1_n - Q^0_n Q^1_{n-1}) = \lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_0\rho_{n-1}}\right),$$

d'où, par soustraction,

$$\lim(Q^0_{n-1}Q^1_n) = (1 - S)\lim\left(\frac{M_1^{n-1}}{\rho_0\rho_{n-1}}\right),$$

et, par suite,

$$\lim\frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \frac{S}{S-1}\lim\frac{Q^0_{n-1}}{Q^1_{n-1}} \quad \text{ou} \quad \lim\frac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}} = \frac{S}{S-1}\lim\frac{Q^1_n}{Q^1_{n-1}};$$

d'où l'on tire

$$(23) \qquad \lim\sqrt[n]{\frac{Q^0_n}{Q^1_n}} = \lim\sqrt[n]{\frac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}}} = \frac{S}{S-1}.$$

19. Dans le paragraphe **16**, nous avons établi la formule

$$(18) \qquad \mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n} \qquad \text{avec} \quad a_1 = 0.$$

Nous allons également chercher si cette relation subsiste lorsque $\frac{a_1}{a_n}$ diminue indéfiniment pour $n=\infty$ et dans ce but nous allons étudier les conditions de convergence de $\rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n}$ pour $n=\infty$.

La relation (12) donne

$$Q^1_n Q^2_{n+1} - Q^1_{n+1}Q^2_n = \frac{M_2^n}{\rho_1\rho_n},$$

d'où, en divisant par $Q^1_n Q^2_n$,

$$\frac{Q^2_{n+1}}{Q^2_n} - \frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n} = \frac{M_2^n}{\rho_1\rho_n Q^1_n Q^2_n},$$

et, par suite,

$$\frac{Q^3_{n+1}}{Q^3_n} - \frac{Q^2_{n+1}}{Q^2_n} = \frac{M_3^n}{\rho_2\rho_n Q^2_n Q^3_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{Q^{n-1}_{n+1}}{Q^{n-1}_n} - \frac{Q^{n-2}_{n+1}}{Q^{n-2}_n} = \frac{M^n_{n-1}}{\rho_{n-2}\rho_n Q^{n-2}_n Q^{n-1}_n},$$

$$\frac{Q^{n-1}_{n+1}}{Q^{n-1}_n} = \frac{\lambda_n}{\rho_n};$$

d'où, en additionnant,

$$(24) \qquad -\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \lambda_n + \frac{M_{n-1}^n}{\rho_{n-2} Q_n^{n-2} Q_n^{n-1}} + \ldots + \frac{M_3^n}{\rho_2 Q_n^2 Q_n^3} + \frac{M_2^n}{\rho_1 Q_n^1 Q_n^2},$$

et nous pouvons, comme précédemment, rechercher les conditions de convergence de la série que le second membre devient pour $n = \infty$.

Nous aurons à considérer la limite supérieure pour k et n infinis de $\sqrt[k]{\left|\frac{M_{n+1}^{n+k}}{\rho_n Q_{n+k}^n Q_{n+k}^{n+1}}\right|}$; si cette limite est inférieure à l'unité, la série sera convergente et $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ aura une limite; mais cette limite ne sera pas nécessairement égale à celle de $\mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, comme une généralisation hâtive de la formule (18) permettrait de le supposer : nous avons, en effet, d'après (4),

$$a_1 = \mu_{n+1} Q_n^1 a_{n+1} - \rho_n Q_{n+1}^1 a_n,$$

d'où

$$(25) \qquad \mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \delta_n = \frac{a_1}{a_n Q_n^1}$$

et δ_n ne tend vers zéro que si $\left|\frac{a_n Q_n^1}{a_1}\right|$ augmente indéfiniment avec n.

Or, nous savons que $\mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ ont, pour $n = \infty$, le même développement illimité en fraction continue; nous avons donc un nouvel exemple de deux quantités pouvant être différentes et donnant cependant naissance au même développement illimité.

Quoi qu'il en soit, la série (24) sera convergente si l'on a

$$\text{lim. inf.}(k = \infty) \sqrt[k]{|Q_{n+k}^n|} > \overline{m};$$

il en sera de même si le module du rapport d'un terme quelconque $\frac{M_{k+1}^n}{\rho_k Q_n^k Q_n^{k+1}}$ au suivant $\frac{M_k^n}{\rho_{k-1} Q_n^{k-1} Q_n^k}$ soit $\left|\frac{\rho_{k-1} Q_n^{k-1}}{\mu_{k+1} Q_n^{k+1}}\right|$ a, pour $k = \infty$, une limite inférieure supérieure à l'unité; le rapport $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ aura, pour $n = \infty$, une limite, mais celle-ci ne sera égale à celle de $\mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ que dans certaines conditions si, par exemple, le module de $\frac{\mu_{k+1}a_{k+1}}{\rho_{k-1}a_{k-1}}$ a, pour $k=\infty$, une limite inférieure plus grande que l'unité, comme un calcul élémentaire permettrait de le démontrer.

La relation (24) peut également s'écrire

$$-\rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n}=\frac{M^n_2}{\rho_1 Q^1_n Q^2_n}+\frac{M^n_3}{\rho_2 Q^2_n Q^3_n}+\ldots+\frac{M^n_{n-1}}{\rho_{n-2}Q^{n-2}_n Q^{n-1}_n}+\lambda_n.$$

Le rapport d'un terme au suivant est égal à $\frac{\mu_{k+1}Q^{k+1}_n}{\rho_{k-1}Q^{k-1}_n}$, soit l'inverse de celui trouvé précédemment; si, pour $k=\infty$, le module de ce rapport a une limite inférieure plus grande que l'unité, le second membre sera, à la limite, égal au produit du premier terme par une série convergente S'. On aura donc

$$\lim\left(-\rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n}\right)=S'\times\lim\left(\frac{M^n_2}{\rho_1 Q^1_n Q^2_n}\right),$$

et, en tenant compte de

$$\lim(Q^1_n Q^2_{n+1}-Q^1_{n+1}Q^2_n)=\lim\left(\frac{M^n_2}{\rho_1\rho_n}\right),$$

il vient

$$\lim(-Q^1_{n+1}Q^2_n)=S'\times\lim\left(\frac{M^n_2}{\rho_1\rho_n}\right),$$

d'où l'on tire, comme précédemment,

$$\lim\sqrt[n]{\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n}}=\lim\sqrt{\frac{Q^1_n}{Q^2_n}}=\frac{S'}{S'-1},$$

relation tout à fait analogue à la formule (23).

Rappelons enfin la formule (20), qui résume en quelque sorte les résultats que nous venons d'obtenir :

$$\left(\frac{a_0}{a_1}-\frac{Q^0_n}{Q^1_n}\right)\left(\mu_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho_n\frac{Q^1_{n+1}}{Q^1_n}\right)=\Delta_n\delta_n=\frac{M^n_1}{\rho_0(Q^1_n)^2}.$$

Nous voyons immédiatement que, si

$$\lim\inf.\sqrt[n]{|Q^1_n|}>\overline{m},$$

l'un au moins des deux facteurs Δ_n ou δ_n tendra vers zéro; si, au contraire, l'on a

$$\lim\sup.\sqrt[n]{|Q_n^1|} < \overline{m},$$

l'un au moins de ces deux facteurs augmentera indéfiniment.

20. Jusqu'à présent nous avons étudié exclusivement les conditions de convergence de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ et de $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ pour $n = \infty$; mais nous arriverons à des résultats plus précis par la considération des restes a_i.

Rappelons la formule (10),

$$a_1 = \rho_n M_1^{n+1}(Q_1^{n+1} a_n - Q_1^n a_{n+1}),$$

$$\frac{1}{\rho_n M_1^{n+1}} \frac{a_1}{a_n a_{n+1}} = \frac{Q_1^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{Q_1^n}{a_n},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho_{n-1} M_1^n} \frac{a_1}{a_{n-1} a_n} = \frac{Q_1^n}{a_n} - \frac{Q_1^{n-1}}{a_{n-1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{\rho_2 M_1^3} \frac{a_1}{a_2 a_3} = \frac{Q_1^3}{a_3} - \frac{Q_1^2}{a_2},$$

$$\frac{1}{\rho_1 M_1^2} \frac{a_1}{a_1 a_2} = \frac{Q_1^2}{a_2},$$

et en additionnant

$$(26)\quad \frac{Q_1^{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{M_1^{n+1}}\left[\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}} + \frac{M_n^{n+1}}{\rho_{n-1} a_{n-1} a_n} + \frac{M_{n-1}^{n+1}}{\rho_{n-2} a_{n-2} a_{n-1}} + \dots + \frac{M_2^{n+1}}{\rho_1 a_1 a_2}\right].$$

Lorsque n augmente indéfiniment, la parenthèse du second membre devient une série et, d'après le critère de Cauchy, cette série sera convergente si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\left|\frac{M_{k+1}^{n+k+1} a_{n+k} a_{n+k+1}}{\rho_k a_k a_{k+1}}\right|}$ est inférieure à l'unité.

En particulier, cette condition sera remplie si l'on a

$$\lim.\inf.(n = \infty)\sqrt[n]{\left|\frac{a_k}{a_{n+k}}\right|} > \overline{m}.$$

Considérons de même le rapport d'un terme au suivant, soit $\frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}$, et admettons que le module de cette expression ait pour limite inférieure un nombre $\sigma > 1$; il est clair que le second membre sera dans ce cas le produit du premier terme par une série convergente Σ.

On aura donc, en chassant les dénominateurs,

$$\lim(\rho_n M_1^{n+1} a_n Q_1^{n+1}) = \lim(-\rho_n Q_{n+1}^1 a_n) = a_1 \Sigma.$$

En retranchant de la relation (10), rappelée plus haut, il vient

$$\lim(\rho_n M_1^{n+1} Q_1^n a_{n+1}) = \lim(-\mu_{n+1} Q_n^1 a_{n+1}) = a_1(\Sigma - 1).$$

La formule (22) donne d'ailleurs

$$\Delta_{n+1} = \frac{M_1^{n+1} a_{n+1}}{\rho_0 a_1 Q_{n+1}^1};$$

d'où, en tenant compte de l'égalité ci-dessus,

$$\lim \Delta_{n+1} = \lim\left(-\frac{\rho_n M_1^{n+1} a_n a_{n+1}}{\rho_0 a_1^2 \Sigma}\right).$$

Or, de l'hypothèse

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sigma}\left|\frac{\rho_{k-1}}{\mu_{k+1}}\right|,$$

on tire immédiatement

$$\left|\frac{a_n a_{n+1}}{a_0 a_1}\right| < \frac{1}{\sigma^n}\left|\frac{\mu_1}{\rho_n M_1^{n+1}}\right|;$$

d'où, en substituant,

$$\lim|\Delta_{n+1}| < \frac{1}{\sigma^n}\left|\frac{\mu_1 a_0}{\rho_0 a_1 \Sigma}\right|,$$

ce qui prouve que, en général, sauf le cas exceptionnel où $\Sigma = 0$, la différence $|\Delta_{n+1}|$ décroît au moins aussi vite que le terme de rang n d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{\sigma} < 1$; donc Δ_n a pour limite zéro et $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a pour limite $\frac{a_0}{a_1}$.

Nous allons démontrer que dans ce même cas δ_n aura également une limite, mais en général $\neq 0$.

La formule (25) donne en effet

$$\delta_n = \frac{a_1}{a_n Q_n^1}$$

et, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$\lim \delta_n = \lim \frac{\mu_{n+1} a_{n+1} Q_n^1}{(1-\Sigma) a_n Q_n^1} = \lim \frac{1}{1-\Sigma} \frac{\mu_{n+1} a_{n+1}}{a_n};$$

d'où, en remplaçant δ_n par sa valeur,

$$\lim \rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} = \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} \lim \frac{\mu_{n+1} a_{n+1}}{a_n},$$

ce qui démontre bien la propriété annoncée.

21. Admettons maintenant que le module de $\frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}$ ait pour $k = \infty$ une limite inférieure supérieure à un nombre $\sigma > 2$.

Dans ces conditions, il est clair que le module de la série entre parenthèses (26) sera supérieur à

$$\left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right| \left(1 - \frac{\frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}}\right) = \frac{\sigma - 2}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right|$$

et inférieur à

$$\left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right| \left(\frac{\frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}}\right) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right|.$$

On aura donc

$$\frac{\sigma - 2}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right| < \left|\frac{M_1^{n+1} Q_1^{n+1}}{a_1 a_{n+1}}\right| = \left|\frac{Q_{n+1}^1}{a_1 a_{n+1}}\right| < \frac{\sigma}{\sigma - 1} \left|\frac{1}{\rho_n a_n a_{n+1}}\right|,$$

d'où en chassant les dénominateurs

$$(27) \qquad \frac{\sigma - 2}{\sigma - 1} |a_1| < |\rho_n a_n Q_{n+1}^1| < \frac{\sigma}{\sigma - 1} |a_1|.$$

D'ailleurs, en vertu de l'hypothèse admise

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{\sigma}\left|\frac{\rho_n a_n}{\mu_{n+2}}\right|,$$

d'où en multipliant

$$|a_{n+1} Q^1_{n+1}| < \frac{1}{\sigma - 1}\left|\frac{a_1}{\mu_{n+2}}\right|.$$

Or nous avons

$$\Delta_n = \frac{M_1^n a_n}{\rho_0 a_1 Q_n^1}, \qquad \Delta_{n+1} = \frac{M_1^{n+1} a_n}{\rho_0 a_1 Q_{n+1}^1},$$

d'où

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{\rho_n a_n Q^1_{n+1}}{\mu_{n+1} a_{n+1} Q_n^1},$$

et, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$(28) \qquad \left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| > \sigma - 2;$$

c'est là une propriété caractéristique de l'approximation obtenue avec les réduites successives.

Il existe deux cas généraux dans lesquels la condition ci-dessus

$$\text{lim. inf.}\left|\frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{\mu_{k+1} a_{k+1}}\right| > \sigma > 2$$

se trouve réalisée.

En premier lieu, si l'on réduit selon le procédé ordinaire un nombre incommensurable en fraction continue en posant $\rho_n = \mu_n = 1$ et en prenant pour λ_n l'entier réel ou complexe le plus rapproché de la fraction $\frac{a_{n-1}}{a_n}$, on aura (¹) :

$$\sigma > 5 \quad \text{dans le domaine réel,}$$
$$\sigma > 3 \quad \text{dans le domaine complexe.}$$

Dès lors, dans ce cas, les réduites ont toujours une limite précisément égale au nombre incommensurable donné.

En second lieu, si l'on considère une fraction continue de la forme

---

(¹) *Voir* AURIC, Note précitée, p. 399 et 426.

normale (C) (§ 3), les restes successifs a_k ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable auront leur degré maximum qui ira constamment en diminuant. Si, par exemple, a_{k-1} est de degré maximum δ, a_{k+1} sera de degré $\delta - 2i$ et, comme $\rho_k = 1$, $\mu_k = x^{2i-m-1}$, il en résulte que le rapport $\frac{\rho_{k-1}a_{k-1}}{\mu_{k+1}a_{k+1}}$ sera, en général, de degré $m+1\,(m \geqq 0)$. On pourra donc déterminer une valeur de la variable x, soit x_0, telle que, pour $|x| > |x_0|$, le rapport ci-dessus ait un module supérieur à un nombre positif quelconque fixé d'avance.

Dès lors la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura, pour $n = \infty$, une limite égale à $\frac{a_0}{a_1}$; en d'autres termes, la fraction continue (C) est, en général, toujours convergente pour $|x|$ suffisamment grand.

La conclusion précédente tombe en défaut lorsque le module de λ_n tend vers zéro; nous verrons, en effet, que dans ce cas la fraction continue possède, sur tout le plan complexe, deux déterminations dont nous donnerons l'expression algébrique.

22. Considérons la formule (26); on peut l'écrire

$$\frac{Q_1^{n+1}}{a_1 a_{n+1}} = \frac{1}{\mu_2 a_1 a_2} + \frac{1}{M_1^3 \rho_2 a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{M_1^{n+1} \rho_n a_n a_{n+1}}.$$

Pour étudier les conditions de convergence de la série que devient le second membre pour $n = \infty$, nous aurons à considérer la limite inférieure de $\sqrt[n]{|M_1^{n+1} \rho_n a_n a_{n+1}|}$ et la série sera convergente si cette limite est > 1.

En particulier, cette condition sera remplie si l'on a

$$\liminf. \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{m}.$$

De même le rapport d'un terme au suivant est égal à $\frac{\mu_{k+1}a_{k+1}}{\rho_{k-1}a_{k-1}}$, c'est-à-dire l'inverse de celui considéré précédemment; si le module de ce rapport a une limite inférieure > 1, il est clair que le second membre sera une série convergente Σ'. On aura donc

$$\lim(Q_1^{n+1}) = a_1 \Sigma' \lim(a_{n+1}).$$

Or,

$$\Delta_{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{\rho_0 a_1 Q_1^{n+1}},$$

d'où en substituant

$$\lim \Delta_{n+1} = -\frac{1}{\rho_0 a_1^2 \Sigma'}.$$

Il en résulte immédiatement que la limite de Δ_{n+1} est, en général, $\neq 0$, et, par conséquent, que la limite de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ est, en général, différente de $\frac{a_0}{a_1}$.

Nous allons démontrer que dans cette même hypothèse δ_n tend vers zéro.

Nous avons, en effet,

$$\lim \delta_n = \lim \frac{a_1}{a_n Q_n^1} \frac{Q_1^{n+1}}{a_1 \Sigma' a_{n+1}} = \lim\left(-\frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \frac{1}{M_1^{n+1} a_n a_{n+1} \Sigma'}\right).$$

En vertu de l'hypothèse admise nous avons

$$\left|\frac{1}{M_1^{n+1} a_n a_{n+1}}\right| < \frac{1}{\sigma^n}\left|\frac{\rho_n}{\rho_0 a_0 a_1}\right|, \qquad \sigma > 1,$$

d'où

$$\lim |\delta_n| < \frac{1}{\sigma^n}\left|\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1} \frac{1}{\rho_0 a_0 a_1 \Sigma'}\right|,$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

Nous allons résumer sommairement les résultats ci-dessus :

(A) $$\lim.\sup.\left|\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}\right| < 1.$$

Dans ce cas la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a une limite qui est, en général, égale à $\frac{a_0}{a_1}$; par contre, $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ a une limite généralement différente de celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(B) $$\lim.\inf.\left|\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}\right| > 1.$$

Dans ce cas la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ a une limite qui est, en général, différente de $\frac{a_0}{a_1}$; par contre, $\rho_n \frac{Q_{n+1}^1}{Q_n^1}$ a une limite généralement égale à celle de $\mu_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Il en résulte que la fraction continue $\left(\frac{a_0}{a_1}\right)$ ou la fraction continue renversée $\left(\frac{\mu_{n+1} a_{n+1}}{a_n}\right)$ est, en général, susceptible de deux déterminations distinctes.

(C) Dans les cas intermédiaires, les séries considérées ci-dessus deviennent, en général, divergentes et l'étude de la fraction continue devra être faite au moyen des méthodes développées dans les Chapitres suivants.

Nous pouvons toutefois obtenir un résultat intéressant dans le cas où le rapport $\frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{\rho_{k-1} a_{k-1}}$ tend régulièrement pour $k = \infty$ vers sa limite $e^{2\theta i}$, si, en outre, l'on admet que $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ tend régulièrement vers sa limite.

Posons, en effet,

$$\lim \frac{\mu_{k+1}}{\rho_{k-1}} = m^2,$$

d'où

$$\lim \frac{a_{k-1}}{a_k} = m e^{-\theta i}.$$

Or, la relation

$$\rho_{k-1} a_{k-1} = \lambda_k a_k - \mu_{k+1} a_{k+1}$$

donne

$$\lambda_k = \frac{\rho_{k-1} a_{k-1}}{a_k} + \frac{\mu_{k+1} a_{k+1}}{a_k},$$

et, par suite,

$$\lim \lambda_k = m \rho_{k-1} (e^{-\theta i} + e^{\theta i}) = 2\sqrt{\mu_{k+1} \rho_{k-1}} \cos\theta.$$

Nous voyons donc que, dans ces conditions, le rapport $\frac{\lambda_k}{\sqrt{\rho_{k-1} \mu_{k+1}}}$ a pour limite, pour $k = \infty$, un nombre réel compris entre -2 et $+2$.

23. Nous pouvons, dans un cas particulier, établir une proposition qui est, en quelque sorte, la réciproque de la précédente.

Considérons la relation récurrente

$$Q^0_{n+1} = \lambda_n Q^0_n - Q^0_{n-1},$$

dans laquelle nous avons posé

$$\rho_n = \mu_n = 1.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n} = \lambda_n - \frac{1}{\dfrac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}}}.$$

Admettons que l'on ait

$$|\lambda_n| > 2(1+\varepsilon), \qquad \left|\frac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}}\right| > 1+\varepsilon,$$

on en conclura immédiatement

$$\left|\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n}\right| > 1+\varepsilon.$$

Or, nous avons

$$\left|\frac{Q^0_2}{Q^0_1}\right| = |\lambda_1| > 2(1+\varepsilon).$$

La proposition étant vraie pour $n = 1$ se trouve dès lors démontrée d'une manière générale.

Nous pouvons donc écrire

$$\liminf \sqrt[n]{|Q^0_n|} > 1+\varepsilon,$$

et, en vertu des résultats établis au paragraphe **18**, nous sommes assuré de la convergence de la réduite $\dfrac{Q^0_n}{Q^1_n}$ pour $n = \infty$.

Posons maintenant

$$\lambda_n = a_n + ib_n, \qquad \frac{Q^0_n}{Q^0_{n-1}} = c_n + id_n.$$

Il viendra

$$\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n} = c_{n+1} + id_{n+1} = a_n + ib_n - \frac{1}{c_n + id_n} = a_n + ib_n - \frac{c_n - id_n}{c_n^2 + d_n^2},$$

d'où

$$d_{n+1} = b_n + \frac{d_n}{c_n^2 + d_n^2}.$$

Il résulte de cette relation que, si tous les b_n ont le même signe et si d_n possède ce signe, il en sera de même de d_{n+1} et l'on aura, en outre,

$$|d_{n+1}| > |b_n|.$$

En posant

$$c_n^2 + d_n^2 = \tau_n^2,$$

nous aurons la formule

$$d_{n+1} = b_n + \frac{b_{n-1}}{\tau_n^2} + \frac{b_{n-2}}{\tau_n^2 \tau_{n-1}^2} + \frac{b_{n-3}}{\tau_n^2 \tau_{n-1}^2 \tau_{n-2}^2} + \ldots.$$

Je dis que, si la série $\Sigma |b_n|$ a une somme $S > 1$, il est impossible d'avoir

$$\text{lim. sup. } \tau_n \leqq 1,$$

car on aurait évidemment

$$|d_{n+1}| \geqq \Sigma |b_n| = S > 1,$$

et, par suite,

$$\tau_{n+1} > |d_{n+1}| > 1,$$

ce qui implique contradiction.

En admettant donc que τ_n tende régulièrement vers sa limite nous pourrons écrire

$$\text{lim. inf. } \sqrt[n]{|Q_n^0|} > 1,$$

et, dès lors, la convergence de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ pour $n = \infty$ est assurée sous les conditions énoncées précédemment.

En combinant les deux résultats que nous venons d'obtenir et en remarquant que les k premiers termes (k fini) d'une fraction continue sont sans influence sur la convergence de celle-ci, nous pouvons établir la proposition suivante :

Si dans une région du plan complexe les λ_n sont tels qu'ils satis-

fassent, pour $n > k$, à l'une des deux conditions suivantes :

$$(a) \qquad |\lambda_n| > 2,$$

$$(b) \qquad \lambda_n = \alpha_n + i\varepsilon_n \qquad (\alpha_n \text{ réel}),$$

ε_n *pouvant être très petit, mais ayant un signe constant avec* $|\Sigma\varepsilon_n| > 1$, *la réduite* $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ *sera convergente dans cette région.*

Par conséquent, si λ_n tend régulièrement vers sa limite, il est aisé d'en conclure que la réduite sera partout convergente, sauf sur les points pour lesquels on aura

$$\lim \lambda_n = \beta,$$

β étant un nombre réel, compris entre -2 et $+2$.

C'est, dans un cas particulier ($\rho_n = \mu_n = 1$), la réciproque de la propriété démontrée à la fin du paragraphe précédent. Nous arrivons ainsi d'une manière élémentaire à la notion de coupure qui sera étudiée plus en détail dans les Chapitres suivants.

Remarquons en terminant que le développement général (15)

$$\frac{\rho_0 a_0}{a_1} = \lambda_1 \dot{-} \frac{\rho_1 \mu_2}{\lambda_2} \dot{-} \frac{\rho_2 \mu_3}{\lambda_3} \dot{-} \frac{\rho_3 \mu_4}{\mu_4} \dot{-} \cdots$$

se ramène dans deux cas particuliers à la forme de développement étudiée ci-dessus.

1° Si $\rho_{i-1} = \mu_{i+1}$, on obtient

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_0} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\rho_1}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_3}{\rho_3}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\rho_3}} \dot{-} \cdots,$$

ce qui était évident *a priori*.

2° Si $\rho_i = \mu_i$, on aura

$$\frac{\rho_0 a_0}{\rho_1 a_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_1} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\rho_2}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_3}{\rho_3}} \dot{-} \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\rho_4}} \dot{-} \cdots,$$

et les conclusions précédentes s'appliquent immédiatement.

CHAPITRE III.

LES FRACTIONS CONTINUES MÉROMORPHES ET QUASI-MÉROMORPHES.

24. Considérons, comme dans le paragraphe **5**, la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_4} - \ldots,$$

dans laquelle les λ_n sont :

a. Ou des polynomes en x de la forme

$$\lambda_n = \alpha_n x^j + \beta_n x^{j-1} + \ldots + \nu_n y^{1-j};$$

b. Ou des polynomes en $y = \sqrt{x}$ de la forme

$$\lambda_n = \alpha_n y^{2j+1} + \beta_n y^{2j-1} + \ldots + \nu_n y^{1-2j}.$$

Nous admettrons que la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ est uniformément convergente dans un certain domaine et nous allons étudier les conditions de convergence de $\frac{S_0}{S_1}$.

Rappelons la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0,$$

et considérons les symboles $\mathfrak{Q}_n^0$ définis par la relation

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = |\lambda_n| \mathfrak{Q}_n^0 + \mathfrak{Q}_{n-1}^0 \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{Q}_0^0 = 0, \quad \mathfrak{Q}_1^0 = 1.$$

Il est clair que $\mathfrak{Q}_n^0$ sera une fonction majorante de Q_n^0 et l'on pourra écrire avec M. Poincaré (¹)

$$|Q_n^0| \ll \mathfrak{Q}_n^0.$$

(¹) La fonction majorante est réalisée effectivement lorsque tous les λ_n sont réels et alternativement de signe contraire.

Or, les conditions de convergence de $\mathfrak{Q}_n^0$ (pour $n=\infty$) sont faciles à établir [1] : nous avons, en effet,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0+\mathfrak{Q}_n^0<(1+|\lambda_n|)(\mathfrak{Q}_n^0+\mathfrak{Q}_{n-1}^0),$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0<\mathfrak{Q}_{n+1}^0+\mathfrak{Q}_n^0<\prod_1^n(1+|\lambda_i|).$$

En posant

$$\sum_1^\infty|\lambda_i|=\mathrm{S},$$

on aura évidemment

$$(29)\qquad \lim|\mathrm{Q}_n^0|<\lim\mathfrak{Q}_n^0<e^{\mathrm{S}}.$$

D'autre part, la formule récurrente

$$\mathrm{Q}_{n+1}^0+\mathrm{Q}_{n-1}^0=\lambda_n\mathrm{Q}_n^0$$

donne par l'addition de k égalités successives

$$\mathrm{Q}_{n-1}^0-(-1)^k\mathrm{Q}_{n-1+2k}^0=\sum_1^{k-1}(-1)^i\lambda_{n+2i}\mathrm{Q}_{n+2i}^0.$$

Grâce à la convergence de la série $\sum_1^\infty|\lambda_n|$ et à la limitation du module de Q_{n+2i}^0, cette égalité permet de démontrer la convergence uniforme dans le domaine considéré de $(-1)^n\mathrm{Q}_{2n}^0$ [de même que celle de $(-1)^n\mathrm{Q}_{2n+1}^0$].

Posons [2]

$$\mathrm{P}_0=\lim(-1)^n\mathrm{Q}_{2n}^0,\qquad \mathrm{I}_0=\lim(-1)^n\mathrm{Q}_{2n+1}^0,$$

ces deux fonctions seront, selon l'expression de M. Maillet, des fonc-

(1) STERN, *Journal de Crelle*, t. 37. — STIELTJES, *Op. cit.*, p. 39.

(2) P (initiale de pair), I (initiale de impair) pour indiquer la parité de l'indice inférieur qui croît indéfiniment.

tions quasi-entières aux deux points essentiels o et ∞ et, comme λ_n est de degré maximum j en x (ou $2j+1$ en y) et $j-1$ en $\frac{1}{x}\Big($ou $2j-1$ en $\frac{1}{y}\Big)$, on verra directement, en appliquant le théorème de M. Hadamard, que l'ordre apparent et, par suite, le genre de P_0 et de I_0 sont, au plus, égaux aux degrés maxima ci-dessus.

On démontrera de même que les symboles $(-1)^n Q^1_{2n}$ et $(-1)^n Q^1_{2n+1}$ ont, comme limites pour $n=\infty$, deux fonctions quasi-entières P_1 et I_1.

La relation

$$Q^0_{2n} Q^1_{2n+1} - Q^0_{2n+1} Q^1_{2n} = M_1^{2n} = 1$$

donnera à la limite

$$P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

ce qui prouve que les fonctions P_0, P_1 (comme P_0, I_0) ne peuvent avoir aucun diviseur commun.

Les réduites $\frac{Q^0_{2n}}{Q^1_{2n}}$, $\frac{Q^0_{2n+1}}{Q^1_{2n+1}}$ ont donc comme limites deux fonctions quasi-méromorphes, $\frac{P_0}{P_1}$, $\frac{I_0}{I_1}$, lesquelles sont essentiellement distinctes sur tout le plan complexe, car

$$\left|\frac{Q^0_{2n}}{Q^1_{2n}} - \frac{Q^0_{2n+1}}{Q^1_{2n+1}}\right| = \left|\frac{1}{Q^1_{2n} Q^1_{2n+1}}\right| > \frac{1}{\mathfrak{Q}^1_{2n}\mathfrak{Q}^1_{2n+1}} > 4e^{-2S},$$

puisque

$$\mathfrak{Q}^1_{2n} + \mathfrak{Q}^1_{2n+1} < e^S$$

et cette inégalité subsiste évidemment à la limite.

Dans ce cas, on dit communément que la fraction continue est *oscillante* (1), expression qui, à notre avis, n'est pas exacte, car nous avons seulement démontré que les réduites de même parité tendent vers une limite bien déterminée; nous allons voir qu'en faisant une restriction, d'ailleurs bien naturelle, on peut dire que la fraction continue possède, en général, deux valeurs bien déterminées.

---

(1) STIELTJES, *op. cit.*, p. 39 et 40.

D'après la formule (4),

$$S_0 = Q_n^0 S_{n+1} - Q_{n+1}^0 S_n, \qquad S_1 = Q_n^1 S_{n+1} - Q_{n+1}^1 S_n,$$

d'où

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{Q_n^0 - Q_{n+1}^0 \dfrac{S_n}{S_{n+1}}}{Q_n^1 - Q_{n+1}^1 \dfrac{S_n}{S_{n+1}}},$$

on peut considérer la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ comme la limite d'une suite de fractions continues périodiques mixtes dont les n premiers termes sont les mêmes que ceux de $\frac{S_0}{S_1}$, le $n^{\text{ième}}$ se répétant uniformément à l'infini et formant à lui seul la période; il est clair qu'à la limite on pourra écrire

$$\lim \frac{S_n}{S_{n+1}} = \lambda_n - \frac{1}{\lim \dfrac{S_n}{S_{n+1}}} \qquad \text{avec} \qquad \lim \lambda_n = 0,$$

d'où

$$\lim \frac{S_n}{S_{n+1}} = \pm i, \qquad i = \sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$(30) \qquad \frac{S_0}{S_1} = \frac{P_0 \pm i I_0}{P_1 \pm i I_1} \quad (^1).$$

La fraction continue $Y = \frac{S_0}{S_1}$ satisfait donc à une équation du second degré

$$(31) \qquad (P_1^2 + I_1^2) Y^2 - 2(P_0 P_1 + I_0 I_1) Y + P_0^2 + I_0^2 = 0.$$

On peut dire également qu'à la fraction continue correspond une substitution modulaire dans toute la région du plan complexe définie plus haut

$$Y = \frac{P_0 - I_0 Z}{P_1 - I_1 Z} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - I_0 P_1 = 1.$$

---

(1) L'application du théorème de M. Poincaré dont il sera question au Chapitre suivant conduirait au même résultat.

On aurait obtenu de la même manière

$$S_m = Q_n^m S_{n+1} - Q_{n+1}^m S_n$$

et

$$\frac{S_0}{P_0 \pm i I_0} = \frac{S_1}{P_1 \pm i I_1} = \ldots = \frac{S_m}{P_m \pm i I_m},$$

P_m, I_m étant, comme P_0, I_0, des fonctions quasi-entières satisfaisant à la relation

$$(32) \qquad P_0 I_m - P_m I_0 = -Q_m^0.$$

25. Maintenant admettons, comme précédemment, que $\lim |\lambda_n| = 0$ et soit m l'exposant de convergence de la série $\sum_1 |\lambda_n|$; par hypothèse, $\sum_1^\infty |\lambda_n|^{m+\varepsilon}$ converge et $\sum_1^\infty |\lambda_n|^{m-\varepsilon}$ diverge et, selon que $\sum_1^\infty |\lambda_n|^m$ converge ou diverge, m est appelé l'*exposant de convergence par excès ou par défaut.*

Nous avons toujours l'inégalité fondamentale

$$|Q_{n+1}^0| < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \prod_1^n (1 + |\lambda_i|) < e^{\sum_1^n L(1+|\lambda_i|)}.$$

Soit ρ le plus petit entier tel que la série $\sum_1 |\lambda_n|^{\rho+1}$ converge, nous pourrons écrire, avec M. Lindelöf (¹),

$$|L(1 + |\lambda_i|)| < \frac{|\lambda_i|}{1} - \frac{|\lambda_i|^2}{2} + \ldots + (-1)^{\rho-1} \frac{|\lambda_i|^\rho}{\rho} + A |\lambda_i|^\tau,$$

τ étant un nombre quelconque compris entre ρ et $\rho + 1$ et A une constante qui se détermine aisément quand τ est donné.

En posant

$$P_{n+1}^0 = Q_{n+1}^0 e^{-\sum_1^n \frac{|\lambda_i|}{1} - \frac{|\lambda_i|^2}{2} + \ldots + (-1)^{\rho-1} \frac{|\lambda_i|^\rho}{\rho}} = Q_{n+1}^0 \prod_1^n u_i,$$

(¹) BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 52.

on aura

$$|P_{n+1}^0| < e^{A\sum_1^n |\lambda_i|^\tau},$$

d'où, en passant à la limite et en faisant $\tau = m + \varepsilon$ ou $\tau = m$ si ce dernier est l'exposant par excès, on aura

$$\lim |P_n^0| < e^{A\sum_1^\infty |\lambda_i|^{m+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon = 0 \text{ dans la dernière hypothèse}).$$

Cette inégalité limite supérieurement l'ordre apparent et, par suite, le genre de $P_n^0 (n = \infty)$, dont nous allons démontrer la convergence uniforme pour des valeurs de n de même parité, augmentant indéfiniment.

En remplaçant, dans $Q_{n+1}^0 = \lambda_n Q_n^0 - Q_{n-1}^0$, Q_n^0 par son expression en valeur de P_n^0, il vient

$$P_{n+1}^0 = \lambda_n u_n P_n^0 - u_{n-1} u_n P_{n-1}^0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} |P_{n+1}^0| + |u_n P_n^0| &< |u_n|(1 + |\lambda_n|)(|P_n^0| + |u_{n-1} P_{n-1}^0|) \\ &< \prod_1^n |u_i|(1 + |\lambda_i|). \end{aligned}$$

Je dis que la série $\sum_1^\infty \big| |u_n|(1 + |\lambda_n|) - 1 \big|$ est convergente, car on a, à partir d'une valeur finie de n,

$$|u_n|(1 + |\lambda_n|) < e^{A|\lambda_n|^\tau} < 1 + KA|\lambda_n|^\tau.$$

En conséquence, nous nous trouvons dans le cas examiné plus haut et l'on démontrera que, selon la parité de n, P_n^0 tend uniformément vers deux limites $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{Z}_0$, qui sont deux fonctions quasi-entières dont l'ordre apparent et le genre sont au plus égaux aux degrés maxima des λ_n multipliés par m, exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$;

dans le cas où cet exposant est inférieur à l'unité, nous obtenons un résultat plus précis que celui établi dans le paragraphe précédent.

De même on démontrera que P_n^1 tend uniformément pour $n=\infty$ et selon la parité de n vers deux fonctions quasi-entières $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{I}_1$ de même nature que $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{I}_0$.

En remplaçant les Q_n^0 par leur valeur dans

$$\frac{S_0}{S_1}=\frac{Q_n^0-Q_{n+1}^0\dfrac{S_n}{S_{n+1}}}{Q_n^1-Q_{n+1}^1\dfrac{S_n}{S_{n+1}}},$$

il vient

$$\frac{S_0}{S_1}=\frac{1}{u_1}\,\frac{P_n^0u_n-P_{n-1}^0\dfrac{S_n}{S_{n+1}}}{P_n^1u_n-P_{n+1}^1\dfrac{S_n}{S_{n+1}}},$$

d'où, en passant à la limite et observant que

$$\lim u_n=1,\qquad \lim\frac{S_n}{S_{n+1}}=\pm i,$$

on aura

$$\frac{S_0}{S_1}=\frac{1}{u_1}\,\frac{\mathfrak{P}_0\pm i\mathfrak{I}_0}{\mathfrak{P}_1\pm i\mathfrak{I}_1}.$$

De la relation

$$Q_n^0Q_{n+1}^1-Q_{n+1}^0Q_n^1=1$$

on tire, en passant à la limite,

$$\mathfrak{P}_0\mathfrak{I}_1-\mathfrak{I}_0\mathfrak{P}_1=e^{\varphi},$$

φ étant un polynome en x et $\frac{1}{x}$ dont les degrés maxima sont au plus égaux aux genres de $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, ... Dès lors, en faisant rentrer cette exponentielle, de même que le facteur u_1, dans la composition de ces fonctions quasi-entières, on pourra écrire comme précédemment

$$\frac{S_0}{S_1}=\frac{P_0\pm iI_0}{P_1\pm iI_1}\qquad\text{avec}\qquad P_0I_1-I_0P_1=1.$$

Cette proposition pourrait d'ailleurs se généraliser dans le cas où m ne serait pas un nombre fini; on serait alors conduit à des fonctions quasi-entières, d'ordre apparent infiniment grand ou infiniment petit, auxquelles on pourrait faire application des résultats obtenus par MM. Borel, Maillet, Boutroux, etc. Nous n'insisterons pas sur cet ordre de recherches, notre but étant simplement d'établir ce théorème fondamental que, lorsque $|\lambda_n|$ tend uniformément vers zéro pour $n=\infty$, la fraction continue représente formellement deux fonctions quasi-méromorphes dont l'ordre apparent a une limite supérieure égale au produit de l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\lambda_n|$ par le degré maximum de λ_n.

25bis. Considérons deux polynomes entiers U, V, premiers entre eux; on sait qu'il est possible de déterminer deux autres polynomes de degrés inférieurs aux précédents et tels que l'on ait

$$SU - RV = 1.$$

Peut-on étendre ce théorème aux fonctions entières ou quasi-entières? Nous allons voir par les résultats précédents que cette généralisation n'est possible que dans les cas où sont réalisées les conditions d'exception de M. Picard dans son théorème sur les fonctions méromorphes.

Considérons donc deux fonctions quasi-entières P, Q aux points essentiels o et ∞; en réduisant en fraction continue la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$, il est clair que nous aurons

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1\omega - p_2}{q_1\omega - q_2},$$

p_1, p_2, q_1, q_2 étant des fonctions quasi-entières satisfaisant à la relation

$$p_2q_1 - p_1q_2 = 1.$$

A. Dans le cas général, ω est une fonction quasi-méromorphe $\frac{F}{G}$; par suite, l'on pourra écrire

$$P = p_1F - p_2G, \qquad Q = q_1F - q_2G,$$

d'où l'on tire aussi

$$F = q_2 P - p_2 Q, \qquad G = p_1 Q - q_1 P;$$

par conséquent, en général, F et G auront des ordres apparents non inférieurs à ceux de P et de Q.

B. Admettons que ω soit une fonction quasi-entière F : nous nous trouvons dans le premier cas d'exception signalé par M. Picard; la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$ est équivalente (au sens de Dedekind) à la fonction quasi-entière F; on aura donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 F - p_2}{q_1 F - q_2} \qquad \text{et} \qquad q_1 P - p_1 Q = 1.$$

Il est clair que $\frac{P}{Q}$ ne peut jamais devenir égal à $\frac{p_1}{q_1}$.

De même, si ω est égal à l'inverse d'une fonction quasi-entière $\frac{1}{G}$, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_1 - p_2 G}{q_1 - q_2 G} \qquad \text{et} \qquad q_2 P - p_2 Q = 1.$$

$\frac{P}{Q}$ ne pourra jamais devenir égal à $\frac{p_2}{q_2}$.

C. Admettons enfin que ω soit une exponentielle e^φ; nous nous trouvons dans le second cas d'exception de M. Picard, puisque la fonction quasi-méromorphe $\frac{P}{Q}$ peut se mettre sous la forme $\frac{p_1 e^\varphi - p_2}{q_1 e^\varphi - q_2}$. On en tire

$$q_1 P - p_1 Q = -1, \qquad q_2 P - p_2 Q = e^\varphi$$

et, par suite, la fonction $\frac{P}{Q}$ ne devient jamais égale ni à $\frac{p_1}{q_1}$ ni à $\frac{p_2}{q_2}$.

On en conclut d'une manière générale que les équations exceptionnelles de M. Picard $\left(\frac{P}{Q} = \psi\right)$, si elles existent, seront obtenues par le développement de $\frac{P}{Q}$ en fraction continue; ce sont les solutions de ces équations qui permettront de généraliser le théorème sur les polynomes entiers rappelé au début.

26. Considérons la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \dot{-} \frac{\mu_2}{1} \dot{-} \frac{\mu_3}{1} \dot{-} \frac{\mu_4}{1} \dot{-} \cdots$$

et admettons que la série $\sum_2^\infty |\mu_n|$ soit uniformément convergente dans un certain domaine.

Posons

$$\sum_2^\infty |\mu_n| = S.$$

La relation récurrente

$$Q^0_{n+1} = Q^0_n - \mu_n Q^0_{n-1}$$

conduit à la fonction majorante $\mathfrak{Q}^0_n$ définie par $\mathfrak{Q}^0_{n+1} = \mathfrak{Q}^0_n + |\mu_n| \mathfrak{Q}^0_{n-1}$ avec les conditions initiales $\mathfrak{Q}^0_0 = 0$, $\mathfrak{Q}^0_1 = 1$; d'où l'on tire

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} + |\mu_{n+1}| \mathfrak{Q}^0_n < (1 + |\mu_{n+1}|)(\mathfrak{Q}^0_n + |\mu_n| \mathfrak{Q}^0_{n-1})$$

et, par suite,

$$|Q^0_{n+1}| < \mathfrak{Q}^0_{n+1} < \prod_2^{n+1} (1 + |\mu_i|) < e^S.$$

Donc nos raisonnements restent les mêmes que ci-dessus et nous pouvons démontrer, grâce à la convergence uniforme de $\sum_2 |\mu_i|$ et à la limitation du module de Q^0_n, que Q^0_n tend uniformément, pour $n = \infty$ (¹), vers une fonction quasi-entière q_0 dont l'ordre apparent dépend du degré de μ_i et de l'exposant de convergence de $\sum_2^\infty |\mu_i|$.

On démontrera de même que Q^1_n tend vers une fonction quasi-

(¹) On a, en effet, quelle que soit la parité de k,

$$Q^0_{n+k} - Q^0_n = -\sum_0^{k-1} \mu_{n+i} Q^0_{n+i-1}.$$

entière q_1 et, par suite, la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ aura pour limite une fonction quasi-méromorphe $\frac{q_0}{q_1}$.

Le résultat que nous venons d'obtenir se complète immédiatement dans le cas où l'exposant de convergence de la série n'est plus un nombre fini, mais une quantité infiniment grande ou infiniment petite.

Considérons de même la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = \lambda_1 \dot{-} \frac{1}{\lambda_2} \dot{-} \frac{1}{\lambda_3} \dot{-} \frac{1}{\lambda_4} \dot{-} \dots \qquad (\lim |\lambda_n| = \infty)$$

et admettons que la série $\sum^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| = S$ soit uniformément convergente dans un certain domaine.

La fraction continue peut s'écrire

$$\frac{S_0}{\lambda_1 S_1} = 1 \dot{-} \frac{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}}{1} \dot{-} \frac{\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}}{1} \dot{-} \frac{\frac{1}{\lambda_3\lambda_4}}{1} \dot{-} \dots$$

et nous sommes ramené au cas précédent.

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \frac{1}{\lambda_{n-1}\lambda_n} Q_{n-1}^0$$

conduit à une fonction majorante $\mathfrak{Q}_n^0$ pour laquelle on a

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \mathfrak{Q}_n^0 < \left(1 + \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|\right)\left(\mathfrak{Q}_n^0 + \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \mathfrak{Q}_{n-1}^0\right) < \prod^{n}\left(1 + \left|\frac{1}{\lambda_i}\right|\right),$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 < \mathfrak{Q}_{n+1}^0 + \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \mathfrak{Q}_n^0 < e^{S}.$$

Par suite, en observant que

$$Q_{n+k}^0 - Q_n^0 = -\sum_{1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{n+i-1}\lambda_{n+i}} Q_{n+i-1}^0,$$

et que la convergence uniforme de la série $\sum\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$ entraîne celle de $\sum\left|\frac{1}{\lambda_{n-1}\lambda_n}\right|$, on pourra reproduire presque identiquement les raisonnements ci-dessus et l'on arrivera à démontrer, si $\frac{1}{\lambda_i}$ est un polynome entier en x et $\frac{1}{x}$, que la fraction continue a pour limite une fonction quasi-méromorphe dont l'ordre apparent et, par conséquent, le genre ont une limite supérieure facile à déterminer.

Enfin, supposons que, dans la fraction continue

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \,\dot{-}\, \frac{\mu_2}{1} \,\dot{-}\, \frac{\mu_3}{1} \,\dot{-} \ldots,$$

on ait

$$\lim \mu_n = \infty,$$

on pourra écrire cette fraction sous la forme

$$\frac{S_0}{S_1} = 1 \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{1}{\mu_2}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_2}{\mu_3}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_3}{\mu_2\mu_4}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_2\mu_4}{\mu_3\mu_5}} \,\dot{-}\, \frac{1}{\frac{\mu_3\mu_5}{\mu_2\mu_4\mu_6}} \,\dot{-} \ldots.$$

Le produit de deux dénominateurs partiels successifs est égal à $\frac{1}{\mu_n}$ et tend vers zéro; donc l'un au moins de ces deux dénominateurs tend également vers zéro. Si tous ces dénominateurs tendent vers zéro, nous retombons sur le cas examiné précédemment; si un certain nombre de dénominateurs successifs tendent, les uns vers zéro, les autres vers une limite finie ou infinie, en groupant ces dénominateurs suivant la formule donnée au paragraphe **17**, on obtiendra une nouvelle fraction continue dont le dénominateur tendra, en général, vers une limite bien déterminée. L'étude de la convergence de ces fractions fera l'objet du Chapitre suivant.

27. Nous allons appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à l'étude des fractions continues de Stieltjes.

Soit $\dfrac{S_0}{S_1} = \dfrac{\psi_0\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\psi_1\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ une fraction dont les termes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable x.

En posant $x = y^2$ nous avons la formule (F)

$$\frac{S_0}{y^{2i-1}S_1} = \alpha_1 y \dot{-} \frac{1}{\alpha_2 y} \dot{-} \frac{1}{\alpha_3 y} \dot{-} \frac{1}{\alpha_4 y} \dot{-} \cdots$$

1° Supposons que $\lim \alpha_n = 0$; nous déterminerons comme précédemment des fonctions P_0, I_0, P_1, I_1 qui seront des fonctions entières de y de la forme

$$P_0 = y\,Q_0(y^2), \qquad P_1 = R_1(y^2),$$
$$I_0 = T_0(y^2), \qquad I_1 = y\,T_1(y^2)$$

avec

$$P_0 I_1 - I_0 P_1 = x R_0(x) T_1(x) - R_1(x) T_0(x) = 1.$$

La fraction $\dfrac{S_0}{S_1}$ sera égale à la fonction méromorphe

$$(\sqrt{x})^{2i-1} \frac{\sqrt{x}\,R_0(x) \pm i\,R_1(x)}{T_0(x) \pm i\sqrt{x}\,T_1(x)} = x^{i-1} \frac{x R_0 \pm i\sqrt{x}\,R_1}{T_0 \pm i\sqrt{x}\,T_1}.$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement que la fraction continue représente formellement les deux racines d'une équation du second degré, l'origine étant précisément le point critique autour duquel se permutent les deux racines.

Si m est l'exposant de convergence de la série $\sum\limits_1^\infty |\alpha_n|$, l'ordre apparent de R_0, R_1, T_0, T_1, en y sera au plus égal à m et, par suite, l'ordre apparent en x sera au plus égal à $\dfrac{m}{2}$.

En particulier, si $m < 2$, ces fonctions seront de genre zéro en x.

2° Supposons maintenant que $\lim \alpha_n = \infty$.

La fraction continue pourra s'écrire

$$\frac{S_0}{\alpha_1 S_1} = 1 \dot{-} \frac{\dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2}\,\dfrac{1}{x}}{1} \dot{-} \frac{\dfrac{1}{\alpha_2\alpha_3}\,\dfrac{1}{x}}{1} \dot{-} \cdots,$$

Si m est l'exposant de convergence de la série $\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha_n \alpha_{n+1}}\right|$, nous savons que la fraction continue représentera une fonction méromorphe $\frac{q_0}{q_1}$ en $\frac{1}{x}$ dont l'ordre apparent sera au plus égal à m.

La fraction $\frac{S_0}{S_1}$ est donc égale à la fonction $\frac{q_0}{q_1}$ sur tout le plan complexe, sauf peut-être à l'origine qui est un point essentiel pour chacune des deux fonctions.

CHAPITRE IV.

LES FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES ET ASYMPTOTIQUEMENT PÉRIODIQUES.

28. Considérons tout d'abord la fraction périodique simple

$$Y = \lambda \dot{-} \frac{\mu^2}{\lambda} \dot{-} \frac{\mu^2}{\lambda} \dot{-} \frac{\mu^2}{\lambda} \dot{-} \ldots,$$

et posons

$$\lambda = z + \frac{\mu^2}{z},$$

Y satisfait visiblement à l'équation du deuxième degré

$$Y^2 = \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) Y - \mu^2,$$

dont les racines sont z et $\frac{\mu^2}{z}$.

Nous allons démontrer que $Y = z$ si $|z| > |\mu|$ et $Y = \frac{\mu^2}{z}$ si $|z| < |\mu|$; en d'autres termes, que la fraction continue représente toujours la racine de plus grand module.

Pour $|z| = |\mu|$ les deux racines ont le même module et la fraction continue n'est pas convergente.

Dans le cas actuel la détermination explicite des symboles Q_n^0 se fait sans aucune difficulté.

La relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) Q_n^0 - \mu^2 Q_{n-1}^0$$

a pour solution générale

$$Q_n^0 = A z^n + B \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n.$$

On a bien en effet

$$\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right)\left[A z^n + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n\right]$$
$$= A z^{n+1} + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n+1} + \mu^2\left[A z^{n-1} + B\left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}\right],$$

ce qui est la vérification de la propriété annoncée.

Pour déterminer A et B nous poserons

$$Q_0^0 = 0 = A + B, \qquad \text{d'où} \qquad B = -A,$$
$$Q_1^0 = -1 = A z + B\frac{\mu^2}{z} = A\left(z - \frac{\mu^2}{z}\right),$$

d'où

$$A = -\frac{1}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

et, par suite,

$$(33) \qquad Q_n^0 = -\frac{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

formule qu'on peut d'ailleurs vérifier directement ([1]).

([1]) D'une manière générale, si l'on a la fraction continue

$$Y = \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \ldots,$$

on aura

$$Q_n^0 = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

et l'on établira la formule générale de récurrence

$$Q_{n+k}^0 = (\alpha^k + \beta^k) Q_n^0 - \alpha^k \beta^k Q_{n-k}^0.$$

D'autre part, il est clair que

$$Q_n^1 = Q_{n-1}^0 = -\frac{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}}{z - \frac{\mu^2}{z}},$$

d'où il vient

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \frac{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n}{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}} = \mu \frac{\left(\frac{z}{\mu}\right)^n - \left(\frac{\mu}{z}\right)^n}{\left(\frac{z}{\mu}\right)^{n-1} - \left(\frac{\mu}{z}\right)^{n-1}}.$$

Lorsque $\left|\frac{z}{\mu}\right| > 1$, cette expression a évidemment pour limite $\mu\frac{z}{\mu} = z$; si, au contraire, on a $\left|\frac{z}{\mu}\right| < 1$, la valeur limite sera $\mu\frac{\mu}{z} = \frac{\mu^2}{z}$.

Dans le cas intermédiaire, si l'on pose $z = \mu e^{\theta i}$, il viendra

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = \mu \frac{e^{n\theta i} - e^{-n\theta i}}{e^{(n-1)\theta i} - e^{-(n-1)\theta i}} = \mu \frac{\sin n\theta}{\sin(n-1)\theta},$$

expression qui, en général, n'a pas de limite bien déterminée pour $n = \infty$.

29. En appelant Y′ la racine conjuguée de Y on aura

$$Y' = \frac{\mu^2}{Y} = \left(\frac{\mu^2 Q_n^1}{Q_n^0}\right)_{n=\infty}.$$

Il viendra donc

$$Y' = \mu^2 \frac{z^{n-1} - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^{n-1}}{z^n - \left(\frac{\mu^2}{z}\right)^n} = \mu^2 \frac{z^{2n-1} - \mu^{2n-2} z}{z^{2n} - \mu^{2n}}.$$

Les racines du dénominateur sont

$$a_k = \mu e^{\frac{2k\pi i}{2n}} = \mu e^{\frac{k\pi i}{n}} = \mu e^{\theta_k i}.$$

Nous allons décomposer Y′ en une somme de fractions simples

$$Y' = \mu^2 \sum_1^{2n} \frac{M_k}{z - a_k}.$$

En utilisant le théorème de Lagrange on trouve facilement

$$Y' = \mu^2 \sum_{1}^{2n} \frac{1 - \mu^{2n-2} a_k^{2-2n}}{2n(z - a_k)} = \sum_{1}^{2n} \frac{\mu^2(1 - e^{2\theta_k i})}{2n(z - \mu e^{\theta_k i})}.$$

Si nous remarquons que $\frac{1}{2n} = \frac{\Delta\theta_k}{2\pi}$, il viendra

$$Y' = \sum_{1}^{2n} \frac{\mu^2(1 - e^{2\theta_k i})\Delta\theta_k}{2\pi(z - \mu e^{\theta_k i})},$$

d'où, en passant à la limite,

$$(34) \qquad Y' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu^2(1 - e^{2\theta i})}{2\pi(z - \mu e^{\theta i})} d\theta.$$

Telle est la formule fondamentale qui permet de mettre une fraction continue périodique simple sous la forme d'une intégrale définie à coupure.

Dans le cas actuel, la coupure est représentée par l'équation

$$z - \mu e^{\theta i} = 0,$$

dans laquelle θ varie de 0 à 2π.

A cette équation correspondent, en posant $z = x + yi$, une ou plusieurs courbes ou portions de courbes le long desquelles Y' est indéterminée : sur ces courbes également les deux racines que la fraction continue peut représenter ont même module ; partout ailleurs la fraction continue est convergente.

La formule (34) devient, en posant $e^{\theta i} = u$,

$$Y' = \int_0^{2\pi} \frac{\mu^2(e^{-\theta i} - e^{\theta i})e^{\theta i} d\theta}{2\pi(z - \mu e^{\theta i})} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mu^2\left(\frac{1}{u} - u\right)}{z - \mu u} du$$

ou

$$Y' = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mu\left(\frac{1}{u} - u\right)}{\frac{z}{\mu} - u} du,$$

et sous cette forme on reconnaît immédiatement l'analogie avec les intégrales de Stieltjes.

30. Comme premier exemple considérons le cas simple $\mu = 1$. Il résulte de ce qui précède que la fraction continue Y représente $\frac{1}{z}$ à l'intérieur du cercle de rayon *un*, décrit de l'origine comme centre et z à l'extérieur de ce même cercle.

Nous sommes en présence d'une ligne singulière fermée et de deux domaines distincts de représentation à chacun desquels correspond l'intégrale

$$Y' = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{u} - u}{z - u}\,du,$$

C est ici le cercle de rayon *un*.

La formule ci-dessus met en évidence une remarque bien connue et rappelée par M. Borel (¹).

Si, sur un contour fermé, on se donne au hasard une succession de valeurs, soit $p(s) + iq(s)$, en prenant l'arc s du contour comme variable indépendante, p et q admettant pour période la longueur totale du contour, l'intégrale

$$J = \int_C \frac{1}{2\pi i}\,\frac{p + iq}{z - x}\,dz.$$

ne prendra pas sur C la succession des valeurs de $p + iq$.

J définit, en dedans et en dehors du contour C, deux fonctions holomorphes qui tendent uniformément sur C vers deux variétés infinies de valeurs et la différence de ces valeurs, en chaque point du contour, est précisément égale à $p + iq$.

La vérification de ce théorème sur l'exemple qui précède se fait immédiatement.

La formule (33)

$$Q_n^0 = \frac{1}{z^{n-1}}\,\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1},$$

(¹) *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 3.

nous montre que les zéros de Q_n^0 sont également répartis sur la circonférence de rayon *un* à l'exception des points $z = \pm 1$ pour lesquels on a $Q_n^0 = \pm n$. Il en sera de même à la limite, ce qui montre que la coupure est une ligne continue de zéros de : $\lim Q_n^0 = 0$.

31. Nous allons poser maintenant $z = e^{\alpha i}$.

Dans ce cas la fraction continue Y devient

$$Y = 2\cos\alpha \,\dot{-}\, \frac{1}{2\cos\alpha} \,\dot{-}\, \frac{1}{2\cos\alpha} \,\dot{-}\, \ldots,$$

ce qui donne

$$Y^2 = 2\cos\alpha\, Y - 1,$$

dont les racines sont

$$e^{\alpha i} \quad \text{et} \quad e^{-\alpha i}.$$

Pour $|z| = 1$, α est une quantité réelle quelconque : la ligne singulière est donc ici l'axe des abscisses. Au-dessus de cet axe $\alpha = \beta + \gamma i$, $\gamma > 0$, d'où

$$e^{\alpha i} = e^{-\gamma} e^{\beta i}, \qquad e^{-\alpha i} = e^{\gamma} e^{-\beta i},$$

et, comme Y représente la racine du plus grand module, nous aurons

$$Y = e^{-\alpha i} \quad \text{au-dessus de l'axe des abscisses}$$

et

$$Y = e^{\alpha i} \quad \text{au-dessous de ce même axe.}$$

La formule (34) devient ici

$$Y' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{2\theta i}}{e^{\alpha i} - e^{\theta i}}\, d\theta$$

ou

$$Y' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\frac{\theta - \alpha}{2}} \sin\theta}{\sin\frac{\theta - \alpha}{2}}\, d\theta.$$

Les zéros de $Q_n^0 = 0$ sont également répartis sur l'axe des x à l'exception des points $x = \pm k\pi$.

Posons maintenant

$$\cos\alpha = x,$$

d'où

$$Y = 2x \dot{-} \frac{1}{2x} \dot{-} \frac{1}{2x} \dot{-} \frac{1}{2x} \dot{-} \ldots,$$

d'où

$$Y^2 = 2xY - 1,$$

dont les racines sont

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}.$$

D'après ce qui précède on voit aisément que la coupure se réduit ici au segment de l'axe des abscisses compris entre -1 et $+1$.

Il est clair également qu'au-dessus de la coupure, il faudra prendre le signe $+$ devant le radical et le signe $-$ au-dessous.

Les zéros de $Q_n^0 = 0$ qui, précédemment, étaient également répartis sur la circonférence se projettent sur le diamètre formant coupure avec une densité inversement proportionnelle à l'ordonnée du point représentatif; en d'autres termes, il y a infiniment plus de zéros près des extrémités du segment que près du milieu.

Nous savons qu'en dehors de la coupure, Y ne possède aucun point singulier; nous pouvons donc appliquer l'intégrale de Cauchy à un contour infiniment mince entourant le segment $-1\ldots+1$ et parcouru dans le sens inverse (sens des aiguilles d'une montre) puisque le domaine de représentation est à l'extérieur du contour.

Nous aurons donc

$$Y = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{2i\sqrt{1-x^2}}{x-z}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-z}\,dx.$$

En adoptant le langage de Stieltjes on peut dire qu'à la fraction Y correspond une répartition continue de masse sur le segment $-1\ldots+1$, la densité en chaque point étant proportionnelle à l'ordonnée de la circonférence décrite sur ce segment comme diamètre.

Considérons enfin la fraction continue

$$Y = 2\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \dot{-} \frac{1}{2\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \dot{-} \frac{1}{2\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \dot{-} \ldots,$$

dans laquelle $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ est une fraction rationnelle quelconque que nous mettrons, en posant $z = x + yi$, sous la forme

$$\frac{A + Bi}{C + Di} = \frac{AC + BD - i(AD - BC)}{C^2 + D^2}.$$

Il résulte de ce qui précède que Y sera partout convergente et bien déterminée sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles on aura $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = t$, t étant une quantité réelle comprise entre -1 et $+1$; on aura pour déterminer ces courbes

$$AD - BC = 0, \quad AC + BD = t(C^2 + D^2),$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = t = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

L'équation analytique de la coupure est

$$AD - BC = 0,$$

mais une ou plusieurs parties de cette courbe seulement constituent les coupures proprement dites; ce sont celles rencontrées par les courbes

$$A - tC = 0, \qquad B - Dt = 0, \qquad -1 \leqq t \leqq +1,$$

et c'est le long de ces courbes qu'il y aura lieu de prendre les intégrales définies ci-dessus.

Sur ces courbes la densité des zéros de $Q_n^0 = 0$ sera inversement proportionnelle à

$$\sin \operatorname{arc} \cos t = \sqrt{1 - t^2}.$$

D'une manière générale, si l'on considère la fraction continue

$$F = \lambda - \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} - \ldots,$$

on établira aisément qu'elle représente toujours la racine de plus grand module de l'équation

$$Y = \lambda - \frac{\mu}{Y}.$$

La fraction continue sera partout convergente sauf sur les courbes d'égal module pour lesquelles on aura

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = \theta,$$

θ étant une quantité réelle quelconque comprise entre o et $+4$; les racines Y_1, Y_2 prennent alors la forme

$$(Y_1, Y_2) = \frac{\lambda}{2}\left(1 \pm i\sqrt{\frac{4}{\theta} - 1}\right),$$

et elles ont évidemment même module.

En posant $\lambda^2 = A + Bi$, $\mu = C + Di$, l'équation analytique de la coupure est $AD - BC = 0$; mais la coupure proprement dite comprend seulement les parties réellement rencontrées par les courbes orthogonales

$$A - \theta C = 0, \qquad B - \theta D = 0,$$

θ étant compris entre o et $+4$ (¹).

32. Considérons maintenant le cas d'une fraction périodique mixte, k étant le nombre de dénominateurs partiels qui précèdent la période. On a, d'après (8),

$$Q^0_{k+n} = \mu_{k+1} Q^0_k Q^{k+1}_{k+n} - Q^0_{k+1} Q^k_{k+n},$$
$$Q^1_{k+n} = \mu_{k+1} Q^1_k Q^{k+1}_{k+n} - Q^1_{k+1} Q^k_{k+n},$$

d'où

$$\frac{Q^0_{k+n}}{Q^1_{k+n}} = \frac{\mu_{k+1} Q^0_k - Q^0_{k+1} \dfrac{Q^k_{k+n}}{Q^{k+1}_{k+n}}}{\mu_{k+1} Q^1_k - Q^1_{k+1} \dfrac{Q^k_{k+n}}{Q^{k+1}_{k+n}}}.$$

Par hypothèse, Q^k_{k+n}, Q^{k+1}_{k+n} peuvent être calculées au moyen des formules du paragraphe **28** et, si (z) est la racine de plus grand mo-

(¹) Si les deux racines ont partout le même module on peut dire que la fraction continue représente les deux racines sur tout le plan complexe.

dule à laquelle correspond la fraction périodique simple, nous savons que

$$\lim(n=\infty)\frac{Q^{k}_{k+n}}{Q^{k+1}_{k+n}}=(z);$$

par suite,

$$\lim(n=\infty)\frac{Q^0_n}{Q^1_n}=\frac{\mu_{k+i}Q^0_k-(z)Q^0_{k+1}}{\mu_{k+i}Q^1_k-(z)Q^1_{k+1}}.$$

Nous voyons, en conséquence, que les conditions de convergence de la fraction mixte sont les mêmes que celles de la fraction simple correspondante et que l'on passe de l'une à l'autre de ces fractions par une substitution linéaire.

En particulier, si $\mu_i=1$, cette substitution devient modulaire et les deux fractions sont équivalentes au sens de Dedekind, c'est-à-dire que

$$Q^0_k Q^1_{k+1}-Q^0_{k+1}Q^1_k=1.$$

33. Lorsque les dénominateurs (ou numérateurs) partiels tendent, pour $n=\infty$, vers une limite bien déterminée, nous dirons que la fraction continue est asymptotiquement périodique. Les résultats obtenus, tant au paragraphe précédent qu'au paragraphe **23**, nous permettent d'inférer que les conditions de convergence d'une semblable fraction seront les mêmes que celles de la fraction périodique limite correspondante.

Mais, avant d'examiner le cas général, nous allons examiner un cas particulier qui nous conduira à la notion de fraction semi-périodique simple.

Considérons la fraction continue

$$Y_1=z+\frac{\rho_1}{z}\,\dot{-}\,\frac{\rho_2}{z+\frac{\rho_2}{z}}\,\dot{-}\,\frac{\rho_3}{z+\frac{\rho_3}{z}}\,\dot{-}\,\frac{\rho_4}{z+\frac{\rho_4}{z}}\,\dot{-}\,\cdots$$

et admettons que $\lim\rho_n=R$.

Nous avons la relation récurrente

$$Q^0_{n+1}=\left(z+\frac{\rho_n}{z}\right)Q^0_n-\rho_n Q^0_{n-1}\ (^1)$$

(1) Cette formule donne

$$Q^0_{n+1}-zQ^0_n=\frac{\rho_n}{z}(Q^0_n-zQ^0_{n-1})=\frac{\rho_n\rho_{n-1}}{z^2}(Q^0_{n-1}-zQ^0_{n-2})=-\frac{\rho_n\rho_{n-1}\cdots\rho_2\rho_1}{z^n}.$$

et, par suite,

$$Q_0^0 = 0, \qquad -Q_1^0 = 1, \qquad -Q_2^0 = \left(z + \frac{\rho_1}{z}\right),$$

$$-Q_3^0 = \left(z + \frac{\rho_2}{z}\right)\left(z + \frac{\rho_1}{z}\right) - \rho_2 = z^2 + \rho_1 + \frac{\rho_1\rho_2}{z^2}\Big),$$

$$-Q_4^0 = z^3 + \rho_1 z + \frac{\rho_1\rho_2}{z} + \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{z^3}.$$

Les formules ci-dessus permettent de poser par induction la formule générale

$$-Q_n^0 = z^{n-1} + \sum_1^{n-1} \rho_1\rho_2\ldots\rho_j z^{n-1-2j},$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude.

Nous avons donc

$$-Q_{n+1}^0 = z^n \quad + \rho_1 z^{n-2} + \rho_1\rho_2 z^{n-4} + \ldots + \rho_1\rho_2\ldots\rho_n z^{-n},$$

$$-Q_{n+1}^1 = z^{n-1} + \rho_2 z^{n-3} + \rho_2\rho_3 z^{n-5} + \ldots + \rho_2\rho_3\ldots\rho_n z^{-n+1}$$

et, par conséquent,

$$-Q_{n+1}^0 = z^n + \frac{\rho_1}{z}(-Q_{n+1}^1),$$

d'où

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = \frac{\rho_1}{z} - \frac{z^n}{Q_{n+1}^1}.$$

Mettons $-Q_{n+1}^1$ sous la forme

$$-Q_{n+1}^1 = z^{n-1}\left(1 + \frac{\rho_2}{z^2} + \frac{\rho_2\rho_3}{z^4} + \frac{\rho_2\rho_3\rho_4}{z^6} + \ldots\right).$$

Le polynome entre parenthèses devient une série quand n augmente indéfiniment; le rapport d'un terme au suivant est $\frac{z^2}{\rho_k}$; admettons que, pour $k > k_0$, le module de ce rapport soit constamment supérieur à 1; nous obtiendrons une série convergente S et l'on pourra écrire

$$\lim \frac{Q_{n+1}^0}{Q_{n+1}^1} = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z}{S}.$$

Écrivons, au contraire, $-Q'_{n+1}$ sous la forme

$$-Q'_{n+1} = \rho_2\rho_3\ldots\rho_n z^{-n+1}\left(1 + \frac{z^2}{\rho_n} + \frac{z^4}{\rho_n\rho_{n-1}} + \ldots\right).$$

Dans le polynome entre parenthèses qui devient une série pour $n=\infty$, le rapport d'un terme au suivant est $\frac{\rho_k}{z^2}$, soit l'inverse du rapport précédent; si, pour $k > k_0$, le module de ce rapport est constamment supérieur à 1, nous aurons une série convergente S' et l'on pourra écrire

$$\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^1_{n+1}} = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z^{2n-1}}{\rho_2\rho_3\ldots\rho_n S'},$$

mais, d'après l'hypothèse pour $k > k_0$,

$$\left|\frac{z^2}{\rho_k}\right| < 1,$$

d'où il vient

$$\left|\frac{z^{2n-1}}{\rho_2\rho_3\ldots\rho_n S'}\right| < (1-\varepsilon)^{n-k_0}\left|\frac{Az}{S'}\right|$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^1_{n+1}} = \frac{\rho_1}{z}.$$

On conclut donc de ce qui précède :

Pour $|z| > \sqrt{R}$, on a

$$Y_1 = \frac{\rho_1}{z} + \frac{z}{S}$$

et, pour $|z| < \sqrt{R}$,

$$Y_1 = \frac{\rho_1}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1}{Y_1} = z.$$

Dans le cas où ρ_n ne tendrait pas régulièrement vers sa limite R, on aurait à considérer les deux limites

$$\lim\inf. \sqrt[p]{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p} \quad \text{et} \quad \lim\sup. \sqrt[p]{\rho_n\rho_{n-1}\ldots\rho_{n-p+1}}$$

qui peuvent être égales ou inégales. Le premier cas se présentera en particulier si le nombre des ρ ne tendant pas vers R est infiniment petit par rapport à ceux qui y tendent effectivement.

Considérons en second lieu la fraction

$$Y_2 = z + \frac{\rho_1}{z} \div \frac{\rho_1}{z + \frac{\rho_2}{z}} \div \frac{\rho_2}{z + \frac{\rho_3}{z}} \div \frac{\rho_3}{z + \frac{\rho_4}{z}} \div \cdots$$

Nous aurons la formule récurrente

$$Q^0_{n+1} = \left(z + \frac{\rho_n}{z}\right) Q^0_n - \rho_{n-1} Q^0_{n-1} \ (^1)$$

et l'on obtient, comme précédemment, par voie d'induction, la formule générale

$$-Q^0_n = z^{n-1} + \sum_1^{n-1} \rho_{n-1}\rho_{n-2}\cdots\rho_{n-1-j}\, z^{n-1-2j}$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude.

On en tire aisément

$$\frac{Q^0_{n+1}}{Q^1_{n+1}} = z + \frac{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n z^{-n}}{-Q^1_{n+1}}.$$

Mettons $-Q^1_{n+1}$ sous la forme

$$-Q^1_{n+1} = \rho_2\rho_3\cdots\rho_n z^{-n+1}\left(1 + \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{z^4}{\rho_2\rho_3} + \cdots\right).$$

Le rapport d'un terme au suivant est $\frac{\rho_k}{z^2}$; si, pour $k > k_0$, le module de ce rapport est constamment supérieur à 1, nous aurons, pour $n = \infty$, une série convergente Σ et il viendra

$$\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^1_{n+1}} = z + \frac{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n z^{-n}}{\rho_2\rho_3\cdots\rho_n z^{-n+1}\Sigma} = z + \frac{\rho_1}{z\Sigma}.$$

---

(1) Cette formule donne

$$Q^0_{n+1} - \frac{\rho_n}{z} Q^0_n = z\left(Q^0_n - \frac{\rho_{n-1}}{z} Q^0_{n-1}\right) = z^2\left(Q^0_{n-1} - \frac{\rho_{n-2}}{z} Q^0_{n-2}\right) = -z.$$

Au contraire, on peut écrire

$$-Q_{n+1}^{1} = z^{n-1}\left(1 + \frac{\rho_n}{z^2} + \frac{\rho_n \rho_{n-1}}{z^4} + \ldots\right)$$

et si, pour $k > k_0$, le rapport $\left|\frac{z^2}{\rho_k}\right|$ est supérieur à 1, la série Σ' entre parenthèses sera convergente. On aura donc

$$\lim \frac{Q_{n+1}^{0}}{Q_{n+1}^{1}} = z + \frac{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n}{z^{2n-1}\Sigma'}$$

et, d'après l'hypothèse $\left|\frac{\rho_k}{z^2}\right| < 1$, on voit que le terme complémentaire peut devenir plus petit qu'une quantité quelconque donnée *a priori;* on a donc finalement

$$\lim \frac{Q_{n+1}^{0}}{Q_{n+1}^{1}} = z.$$

Si nous considérons la fraction simple limite

$$y = z + \cfrac{R}{z} - \cfrac{R}{z + \cfrac{R}{z}} - \cfrac{R}{z + \cfrac{R}{z}} - \ldots,$$

dont les valeurs sont z et $\frac{R}{z}$ selon que $|z| \gtrless \left|\frac{R}{z}\right|$, nous voyons que :

Pour $|z| < |\sqrt{R}|$,

$$\frac{\rho_1}{Y_1} = \frac{R}{y};$$

Pour $|z| > |\sqrt{R}|$,

$$Y_2 = y.$$

On peut donc dire que Y_1 et Y_2 sont égales à leur fraction simple limite, mais d'un côté seulement de la coupure; c'est cette considération qui nous a conduit à leur donner l'appellation de *fractions semi-périodiques simples.*

En appliquant le théorème de Cauchy au domaine extérieur aux coupures, nous obtenons les formules

$$Y_1 = \int_C \frac{z\,dz}{S(z-x)}, \qquad Y_2 = \int_{C'} \frac{\rho_1\,dz}{z\,\Sigma(z-x)}$$

qui constituent une généralisation des formules obtenues précédemment.

34. Considérons maintenant la fraction continue asymptotiquement périodique

$$Y = \lambda + \varepsilon_1 - \frac{1}{\lambda + \varepsilon_2} - \frac{1}{\lambda + \varepsilon_3} - \frac{1}{\lambda + \varepsilon_4} - \ldots$$

dans laquelle nous avons mis en évidence la limite commune des dénominateurs partiels.

Posons $\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, α étant, par hypothèse, la racine de plus grand module qui satisfait à cette équation; nous avons vu précédemment que α est bien déterminée en tout point du plan complexe, sauf sur les courbes ou portions de courbes pour lesquelles λ aurait une valeur réelle comprise entre -2 et $+2$.

Nous savons également, d'après ce qui a été démontré au paragraphe **23**, que la réduite $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ de la fraction continue tend, pour $n = \infty$, vers une limite bien déterminée en tout point de ce même domaine.

Les symboles Q_n^0 satisfont à la relation récurrente

$$Q_{n+1}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n\right) Q_n^0 - Q_{n-1}^0$$

et nous introduirons les symboles $\mathfrak{Q}_n^0$ définis par

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^0 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \mathfrak{Q}_n^0 - \mathfrak{Q}_{n-1}^0.$$

Nous rappellerons un Mémoire de M. Poincaré (¹) dans lequel le théorème suivant est établi :

Si l'on a l'équation de récurrence

$$u_n + R_1 u_{n-1} + R_2 u_{n-2} + \ldots + R_k u_{n-k} = 0,$$

(¹) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal of Mathematics*, 1885, p. 237). — *Voir* également (VAN VLECK, *Transactions of the american Mathematical Society*, juillet et octobre 1901, juillet 1903 et juillet 1904) une série d'articles sur la convergence des fractions continues.

$R_1, R_2, \ldots, R_k$ *étant des fonctions* quelconques *de n qui tendent vers leurs limites $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ lorsque n croît indéfiniment, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite une racine de l'équation*

$$z^k + \rho_1 z^{k-1} + \ldots + \rho_{k-1} z + \rho_k = 0$$

et, en général, la racine de plus grand module.

En appliquant ce théorème au cas actuel, nous en concluons que $\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n}$ doit avoir, en général, pour limite α et exceptionnellement, dans certains cas particuliers, $\frac{1}{\alpha}$.

Cette dernière hypothèse est d'ailleurs à écarter; en effet, le rapport $\frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n}$ est une fonction continue des ε_i qui, en vertu des résultats obtenus au paragraphe **28**, devient toujours égale à α lorsque ceux-ci s'annulent; il n'est dès lors pas possible que ce rapport devienne égal à $\frac{1}{\alpha}$ tant que l'on reste, bien entendu, dans le domaine considéré où, par hypothèse, $|\alpha| > \left|\frac{1}{\alpha}\right|$.

Admettons donc que l'on ait $\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n} = \alpha$.

Des relations récurrentes ci-dessus nous tirons

$$Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} Q^0_n = \alpha\left(Q^0_n - \frac{1}{\alpha} Q^0_{n-1}\right) + \varepsilon_n Q^0_n,$$

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_n = \alpha\left(\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_{n+1}\right);$$

d'où

$$\frac{Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} Q^0_n}{\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_n} = \frac{Q^0_n - \frac{1}{\alpha} Q^0_{n-1}}{\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_{n-1}} + \frac{\varepsilon_n Q^0_n}{\alpha\left(\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}^0_{n-1}\right)}.$$

Nous déterminerons γ_n de manière à avoir

$$\varepsilon_n Q^0_n = \alpha \gamma_n \left(Q^0_n - \frac{1}{\alpha} Q^0_{n-1}\right),$$

ce qui donne

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{Q_n^0}{\alpha\left(Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0\right)} = \varepsilon_n \frac{\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0}}{\alpha\left(\frac{Q_n^0}{Q_{n-1}^0} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

et à la limite, pour $n = \infty$,

$$\gamma_n = \varepsilon_n \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}},$$

d'où l'on aura

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} Q_n^0}{\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0} = (1 + \gamma_n) \frac{Q_n^0 - \frac{1}{\alpha} Q_{n-1}^0}{\mathfrak{Q}_n^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_{n-1}^0}$$

et, par récurrence,

$$\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} Q_n^0}{\mathfrak{Q}_{n+1}^0 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^0} = \prod_1^n (1 + \gamma_i).$$

Nous verrions, en reproduisant les raisonnements du Chapitre précédent, que le second membre tend, pour $n = \infty$ et sous certaines restrictions, vers une fonction entière ou quasi-entière q_0 dont l'ordre apparent dépend essentiellement de l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\gamma_n|$, lequel est évidemment le même que celui de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

En partant de la relation récurrente

$$Q_{n+1}^1 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n\right) Q_n^1 - Q_{n-1}^1,$$

nous aurions trouvé, par le même procédé,

$$\frac{Q_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} Q_n^1}{\mathfrak{Q}_{n+1}^1 - \frac{1}{\alpha} \mathfrak{Q}_n^1} = \prod_2^n (1 + \delta_i)$$

et nous verrions que le second membre tend, pour $n = \infty$, vers une fonction entière ou quasi-entière q_1 de même nature que q_0.

La relation

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n = \alpha\left(\mathfrak{Q}^0_n - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_{n-1}\right)$$

donne, d'ailleurs, par récurrence,

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n = -\alpha^n,$$

de même

$$\mathfrak{Q}^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^1_n = -\alpha^{n-1},$$

d'où l'on tire

$$\lim\frac{Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}Q^0_n}{Q^1_{n+1} - \frac{1}{\alpha}Q^1_n} = \lim\frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \lim\frac{\alpha\prod\limits_1^n(1+\gamma_i)}{\prod\limits_2^n(1+\delta_i)} = \frac{\alpha q_0}{q_1},$$

et nous voyons que la réduite $\frac{Q^0_n}{Q^1_n}$ a pour limite une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe dont l'ordre apparent a une limite supérieure facile à déterminer.

Il nous reste à mettre en évidence α dans les deux termes de la fraction ainsi obtenue.

Nous avons

$$Q^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}Q^0_n = \left(\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n\right)q^0_n \qquad \text{avec} \qquad \lim q^0_n = q_0,$$

d'où

$$\alpha Q^0_{n+1} - Q^0_n = \left(\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n\right)\alpha q^0_n.$$

Posons

$$\alpha q^0_n = p^0_n - \alpha i^0_n,$$

p^0_n et i^0_n étant fonctions de λ seulement.

On aura

$$\alpha Q^0_{n+1} - Q^0_n = \left(\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}^0_n\right)(p^0_n - \alpha i^0_n).$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on change α en $\frac{1}{\alpha}$ et il vient

$$\frac{1}{\alpha}Q^0_{n+1} - Q^0_n = (\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \alpha\mathfrak{Q}^0_n)\left(p^0_n - \frac{1}{\alpha}i^0_n\right),$$

d'où l'on tire en résolvant

$$\begin{aligned} Q^0_{n+1} &= \mathfrak{Q}^0_n p^0_n - \mathfrak{Q}^0_{n+1} i^0_n, \\ Q^0_n &= \mathfrak{Q}^0_{n-1} p^0_n - \mathfrak{Q}^0_n i^0_n \end{aligned}$$

et, en observant que

$$(\mathfrak{Q}^0_n)^2 - \mathfrak{Q}^0_{n-1}\mathfrak{Q}^0_{n+1} = 1,$$

il vient

$$\begin{aligned} p^0_n &= \mathfrak{Q}^0_n Q^0_{n+1} - \mathfrak{Q}^0_{n+1} Q^0_n, \\ i^0_n &= \mathfrak{Q}^0_{n-1} Q^0_{n+1} - \mathfrak{Q}^0_n Q^0_n. \end{aligned}$$

Nous avons de même, en posant $q'_n = p'_n - \alpha i'_n$ avec $\lim q'_n = q_1$,

$$Q'_{n+1} - \frac{1}{\alpha} Q'_n = \left(\mathfrak{Q}'_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}'_n\right) q'_n = \left(\mathfrak{Q}'_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\mathfrak{Q}'_n\right)(p'_n - \alpha i'_n),$$

p'_n et q'_n étant fonctions de λ seulement, et l'on trouvera, par le même procédé,

$$\begin{aligned} p'_n &= \mathfrak{Q}'_{n+1} Q'_{n+1} - \mathfrak{Q}'_{n+2} Q'_n, \\ i'_n &= \mathfrak{Q}'_n Q'_{n+1} - \mathfrak{Q}'_{n+1} Q'_n, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, après réduction,

$$p^0_n i'_n - i^0_n p'_n = Q^0_n Q'_{n+1} - Q^0_{n+1} Q'_n = 1.$$

Cette relation aura encore lieu à la limite et l'on pourra finalement écrire

$$Y = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

P_0, P_1, I_0, I_1 étant des fonctions entières ou quasi-entières de $\lambda = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ dont l'ordre apparent est évidemment le même que celui de q_0 et de q_1.

Nous arrivons ainsi à une formule que le résultat du paragraphe **32** permettait de prévoir et qui constitue une généralisation importante de la formule (30) du Chapitre précédent; en particulier, pour $\lambda = 0$, $\alpha = \pm i$ et l'on retombe sur cette formule.

Soient α', α'' les deux racines en un point de la coupure.

D'un côté de celle-ci nous avons à la limite

$$Y' = \frac{P_0 - \alpha' I_0}{P_1 - \alpha' I_1}.$$

De l'autre côté, c'est l'autre racine qui aura le plus grand module et l'on aura également à la limite

$$Y'' = \frac{P_0 - \alpha'' I_0}{P_1 - \alpha'' I_1},$$

d'où il viendra

$$Y' - Y'' = \frac{\alpha' - \alpha''}{P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2}.$$

On aura donc, en appliquant le théorème de Cauchy et en prenant l'intégrale suivant la coupure,

$$Y = \int_C \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{P_1^2 + I_1^2 - \lambda P_1 I_1} \frac{dz}{z - x}.$$

Nous voyons également que les deux déterminations de Y sont racines de l'équation

$$\begin{aligned} &Y^2 (P_0^2 - \lambda P_0 I_0 + I_0^2) \\ &\quad - 2Y\left[(P_0 P_1 + I_0 I_1) - \frac{\lambda}{2}(P_0 I_1 + P_1 I_0)\right] + P_1^2 - \lambda P_1 I_1 + I_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$, on retombe sur l'équation (31).

Nous avons donc établi d'une manière générale qu'une fraction continue asymptotiquement périodique satisfait à une équation du deuxième degré dont les coefficients sont des fonctions entières ou quasi-entières.

Considérons en dernier lieu la fraction continue

$$Y = \alpha + \beta + \varepsilon_1 \dot{-} \frac{\alpha\beta + \eta_2}{\alpha + \beta + \varepsilon_2} \dot{-} \frac{\alpha\beta + \eta_3}{\alpha + \beta + \varepsilon_3} \dot{-} \ldots,$$

dans laquelle nous avons mis en évidence la limite commune des numérateurs et dénominateurs partiels ($\lim \varepsilon_n = \lim \eta_n = 0$) et les valeurs ($Y' = \alpha$, $Y'' = \beta$) de la fraction périodique simple limite.

Dans ce cas, nous avons vu que la coupure sera constituée par les courbes sur lesquelles on a $|\alpha| = |\beta|$.

Nous avons la relation récurrente

$$Q^0_{n+1} = (\alpha + \beta + \varepsilon_n) Q^0_n - (\alpha\beta + \eta_n) Q^0_{n-1}.$$

Considérons le symbole $\mathfrak{Q}^0_n$ défini par

$$\mathfrak{Q}^0_{n+1} = (\alpha + \beta)\mathfrak{Q}^0_n - \alpha\beta\,\mathfrak{Q}^0_{n-1}.$$

Nous savons que

$$\mathfrak{Q}^0_n = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

et si α est la racine de plus grand module nous aurons

$$\lim \frac{\mathfrak{Q}^0_{n+1}}{\mathfrak{Q}^0_n} = \alpha.$$

De même l'application du théorème de M. Poincaré nous conduit à poser

$$\lim \frac{Q^0_{n+1}}{Q^0_n} = \alpha.$$

Dès lors nous avons

$$Q^0_{n+1} - \beta Q^0_n = \alpha(Q^0_n - \beta Q^0_{n-1}) + \varepsilon_n Q^0_n - \eta_n Q^0_{n-1}.$$

Déterminons γ_n par l'égalité

$$\varepsilon_n Q^0_n - \eta_n Q^0_{n-1} = \alpha\gamma_n(Q^0_n - \beta Q^0_{n-1}),$$

d'où

$$\gamma_n = \frac{\varepsilon_n Q^0_n - \eta_n Q^0_{n-1}}{\alpha(Q^0_n - \beta Q^0_{n-1})},$$

et à la limite

$$\lim \gamma_n = \frac{\varepsilon_n \alpha - \eta_n}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

d'où

$$\frac{Q^0_{n+1} - \beta Q^0_n}{\mathfrak{Q}^0_{n+1} - \beta \mathfrak{Q}^0_n} = (1 + \gamma_n)\frac{Q^0_n - \beta Q^0_{n-1}}{\mathfrak{Q}^0_n - \beta \mathfrak{Q}^0_n} = \prod_1^n (1 + \gamma_i),$$

et les calculs pourront se poursuivre comme précédemment. Nous arriverons à démontrer le théorème général à savoir que

$$Y = \lim \frac{Q^0_n}{Q^1_n} = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R,$$

P_0, I_0, P_1, I_1, R étant des fonctions entières ou quasi-entières dont l'ordre apparent aura une limite supérieure déterminée par la considération des exposants de convergence des séries $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$, $\sum_2^\infty |\eta_n|$. En ce qui concerne R son ordre apparent aura une limite supérieure qui dépendra seulement de l'exposant de cette dernière série ([1]).

Dans le cas particulier où α et β ont partout le même module, on pourrait reprendre les calculs qui précèdent et, en reproduisant les raisonnements du paragraphe **24**, on arriverait à démontrer que la fraction continue représente sur tout le plan complexe deux fonctions ainsi définies

$$Y_1 = \frac{P_0 - \alpha I_0}{P_1 - \alpha I_1}, \qquad Y_2 = \frac{P_0 - \beta I_0}{P_1 - \beta I_1}$$

avec $P_0 I_1 - P_1 I_0 = R$.

35. Les considérations qui précèdent s'appliquent immédiatement aux fractions continues de Stieltjes.

Nous avons mis celles-ci sous la forme

$$\frac{S_0}{y^{2i-1} S_1} = Y = \alpha_1 y - \frac{1}{\alpha_2 y} - \frac{1}{\alpha_3 y} - \frac{1}{\alpha_4 y} - \dots .$$

Admettons que $\alpha_n = A + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

Nous savons que les conditions de convergence de cette fraction seront les mêmes que pour la fraction simple limite

$$u = Ay - \frac{1}{u},$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{1}{2}(Ay \pm \sqrt{A^2 y^2 - 4}).$$

La coupure est formée par la ligne droite reliant les deux points $-\frac{2}{A}$,

---

([1]) R est égal, en effet, à $\prod_2^\infty \left(1 + \frac{\eta_i}{\alpha\beta}\right)$ sous réserve des facteurs primaires qu'il est nécessaire d'introduire pour rendre ce produit convergent.

$+\frac{2}{A}$; comme d'ailleurs, pour $y = 0$, les deux valeurs de u ont même module 1, il en résulte que l'origine se trouve sur la coupure et que celle-ci va du point $-\frac{2}{A}$ au point $+\frac{2}{A}$ en passant par l'origine; c'est un segment de longueur $\left|\frac{4}{A}\right|$.

La fraction sera égale à

$$Y = \frac{P_0 - uI_0}{P_1 - uI_1} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1,$$

P_0, I_0, P_1, I_1 ayant un ordre apparent en y au plus égal à l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

Si l'on considère Y comme fonction de $x = y^2$ le binome sous le radical devient $A^2x - 4$ et l'on voit immédiatement que la coupure est une droite qui s'étend depuis le point $x = \frac{4}{A^2}$ jusqu'à l'infini en passant par l'origine.

La fraction de Stieljes peut aussi s'écrire

$$Y = 1 \dot{-} \frac{\beta_1 \frac{1}{x}}{1} \dot{-} \frac{\beta_2 \frac{1}{x}}{1} \dot{-} \frac{\beta_3 \frac{1}{x}}{1} \dot{-} \ldots,$$

avec

$$\beta_n = B + \varepsilon_n, \qquad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Posons $\frac{1}{x} = z$. Cette fraction aura les mêmes conditions de convergence que la fraction simple limite

$$u = 1 - \frac{Bz}{u},$$

d'où

$$u = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4Bz}).$$

La coupure s'étend depuis le point $z = \frac{1}{4B}$ jusqu'à l'infini suivant la droite issue de l'origine; mais elle ne renferme pas celle-ci, car, pour $z = 0$, u a deux valeurs distinctes : 1 et 0.

Comme précédemment on pourra écrire

$$Y = \frac{P_0 - uI_0}{P_1 - uI_1} \quad \text{avec} \quad P_0 I_1 - P_1 I_0 = R,$$

P_0, I_0, P_1, I_1, R ayant un ordre apparent en z au plus égal à l'exposant de convergence de la série $\sum_1^\infty |\varepsilon_n|$.

En utilisant la formule du paragraphe **17** il sera facile de ramener au cas étudié ci-dessus le cas d'une fraction asymptotiquement périodique dont les dénominateurs et numérateurs partiels tendent respectivement pour $n = \infty$ vers k limites distinctes $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$, M_1, $M_2, \ldots, M_k$ avec

$$\lim \lambda_{nk+i} = \Lambda_i, \qquad \lim \mu_{nk+i} = M_i.$$

CHAPITRE V.

A. GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS DE STIELTJES.

56. Considérons la fraction continue

$$F = \lambda_1 x \pm \mu_1 - \frac{\rho_2}{\lambda_2 x \pm \mu_2} - \frac{\rho_3}{\lambda_3 x \pm \mu_3} - \frac{\rho_4}{\lambda_4 x \pm \mu_4} \cdots,$$

dans laquelle nous supposons explicitement λ_i, μ_i, ρ_i, réels et positifs.

Nous avons la relation récurrente

$$Q^0_{n+1} = (\lambda_n x \pm \mu_n) Q^0_n - \rho_n Q^0_{n-1},$$

avec les valeurs particulières

$$-Q^0_1 = 1, \qquad -Q^0_2 = \lambda_1 x \pm \mu_1,$$
$$-Q^0_3 = (\lambda_2 x \pm \mu_2)(\lambda_1 x \pm \mu_1) - \rho_2.$$

De ces formules il résulte immédiatement que $-Q^0_{n+1}$ est un polynome entier en x à coefficients réels, de degré n et que le coefficient de x^n est $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, c'est-à-dire positif.

Considérons la suite des polynomes

$$-Q_{n+1}^0, \quad -Q_n^0, \quad \ldots, \quad -Q_2^0, \quad -Q_1^0 = 1.$$

Je dis que c'est une suite de Sturm.

En effet :

1° Deux polynomes consécutifs $-Q_{i+1}^0$, $-Q_i^0$ ne peuvent pas s'annuler simultanément pour une valeur de la variable, car, en vertu de la relation récurrente (6), il en serait de même de $-Q_{i-2}^0$, $-Q_{i-3}^0$, ..., $-Q_2^0$ et $-Q_1^0 = 1$, ce qui est impossible.

2° Si un polynome $-Q_i^0$ s'annule, il résulte de la relation ci-dessus que les polynomes contigus $-Q_{i+1}^0$ et $-Q_{i-1}^0$ sont de signe contraire.

3° Enfin, pour $x = -\infty$, la suite n'offre que des variations; pour $x = +\infty$ elle n'offre que des permanences; donc, toutes les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont réelles et séparées par celles, également toutes réelles, de $Q_n^0 = 0$. En outre, si x_0 annule Q_{n+1}^0, $Q_n^0(x_0)$ aura le même signe que la dérivée $(Q_{n+1}^0)'_{x_0}$.

On démontrerait exactement de la même manière que la suite

$$-Q_{n+1}^0, \quad -Q_{n+1}^1, \quad \ldots, \quad -Q_{n+1}^{n-2}, \quad -Q_{n+1}^{n-1}, \quad -Q_{n+1}^n = 1$$

est une suite de Sturm.

Les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont séparées par celles toutes réelles de $Q_{n+1}^1 = 0$ et, si x_0 annule Q_{n+1}^0, $Q_{n+1}^1(x_0)$ a le même signe que $(Q_{n+1}^0)'_{x_0}$ et par conséquent que $Q_n^0(x_0)$.

De ce qui précède il résulte immédiatement que toutes les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont distinctes; si, en effet, cette équation avait une racine multiple, celle-ci serait également racine de $Q_n^0 = 0$ et $Q_{n+1}^1 = 0$, ce qui est évidemment incompatible avec la relation

$$Q_n^0 Q_{n+1}^1 - Q_{n+1}^0 Q_n^1 = \prod_2^n \rho_j \neq 0.$$

57. Nous allons généraliser la proposition qui précède et démontrer que les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont séparées par celles de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$

$$0 < j < n+1.$$

Pour $j = 1, j = n$ on retrouve la proposition ci-dessus.

Nous avons, en effet, d'après (8),

$$Q_{n+1}^0 = \rho_j Q_{j-1}^0 Q_{n+1}^j - Q_j^0 Q_{n+1}^{j-1},$$

et, en remplaçant, d'après (7), Q_{n+1}^{j-1} par sa valeur

$$(\lambda_j x \pm \mu_j) Q_{n+1}^j - \rho_{j+1} Q_{n+1}^{j+1},$$

il viendra

$$Q_{n+1}^0 = \rho_j Q_{j-1}^0 Q_{n+1}^j + \rho_{j+1} Q_j^0 Q_{n+1}^{j+1} - (\lambda_j x \pm \mu_j) Q_j^0 Q_{n+1}^j,$$

d'où, en divisant par $Q_j^0 Q_{n+1}^j$,

$$\frac{Q_{n+1}^0}{Q_j^0 Q_{n+1}^j} = -(\lambda_j x \pm \mu_j) + \rho_j \frac{Q_{j-1}^0}{Q_j^0} + \rho_{j+1} \frac{Q_{n+1}^{j+1}}{Q_{n+1}^j}.$$

D'après ce qui précède nous savons que, si α est une racine de $Q_j^0 = 0$, l'expression $\frac{Q_{j-1}^0}{Q_j^0}$ passe du négatif au positif quand x passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$; de même, si β est une racine de $Q_{n+1}^j = 0$, l'expression $\frac{Q_{n+1}^{j+1}}{Q_{n+1}^j}$ passe comme la précédente de $-\infty$ à $+\infty$ quand x varie de $\beta - \varepsilon$ à $\beta + \varepsilon$. Supposons maintenant que γ, δ, $(\gamma < \delta)$, soient deux racines consécutives de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$.

Durant l'intervalle $\gamma + \varepsilon$, $\delta - \varepsilon$ le dénominateur $Q_j^0 Q_{n+1}^j$ conserve le même signe; pour $x = \gamma + \varepsilon$ le second membre tend vers $+\infty$; pour $x = \delta - \varepsilon$ il tend vers $-\infty$; le numérateur Q_{n+1}^0 s'annule donc bien au moins une fois dans cet intervalle. En outre, pour $x = -\infty$ le second membre tend vers $+\infty$ et pour $x = +\infty$ il tend vers $-\infty$; donc les racines de $Q_{n+1}^0 = 0$ sont séparées par celles de $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$ et par le point à l'infini.

Remarquons d'ailleurs que, si $Q_j^0 = 0$ et $Q_{n+1}^j = 0$ ont une ou plusieurs racines communes, ces racines satisferont également à $Q_{n+1}^0 = 0$ en vertu de la relation ci-dessus; et il est clair que ces racines ne dépendront ni de λ_j ni de μ_j qui ne figurent pas dans $Q_j^0 Q_{n+1}^j = 0$.

De la relation (8) nous tirons

$$\frac{\partial Q_{n+1}^0}{\partial \mu_j} = -Q_j^0 Q_{n+1}^j.$$

Si nous considérons une racine x_0 de $Q^0_{n+1} = 0$ comme fonction de μ_j il viendra en différentiant

$$(Q^0_{n+1})'_{x_0} \frac{dx_0}{d\mu_j} - Q^0_j Q^j_{n+1} = 0,$$

d'où

$$\frac{dx_0}{d\mu_j} = \frac{Q^0_j Q^j_{n+1}}{(Q^0_{n+1})'_{x_0}}.$$

Or, d'après ce qui précède, on voit facilement que $Q^0_j Q^j_{n+1}$ a toujours le signe de $(Q^0_{n+1})'_{x_0}$; la dérivée $\frac{dx_0}{d\mu_j}$ est donc toujours positive et x_0 croît en même temps que μ_j.

38. Considérons la fraction

$$\frac{Q^1_{n+1}}{Q^0_{n+1}} = \sum \frac{A_i}{x - a_i},$$

nous savons que tous les a_i sont distincts; d'autre part,

$$A_j = \frac{Q^1_{n+1}(a_j)}{(Q^0_{n+1})'a_j},$$

et ce coefficient sera toujours positif.

Nous avons d'ailleurs

$$-Q^1_{n+1} = \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n x^{n-1} + \ldots,$$
$$-Q^0_{n+1} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n x^n \quad + \ldots,$$

d'où, en vertu d'un théorème connu,

$$\sum A_i = \frac{1}{\lambda_1}.$$

On peut donc poser avec Stieltjes

$$\lim \frac{Q^1_{n+1}}{Q^0_{n+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(z)}{z - x}.$$

φ étant une fonction constamment croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et dont la croissance totale dans cet intervalle est égale à $\frac{1}{\lambda_1}$.

Les considérations de Stieljes peuvent donc être reproduites sans aucun autre changement que la coupure s'étend ici de $-\infty$ à $+\infty$ tandis que dans le Mémoire de Stieljes elle était limitée à la partie négative de cet axe; nous ne pouvons dès lors que renvoyer à ce remarquable Mémoire. Nous ferons seulement la remarque suivante :

Si l'on effectue la transformation

$$x = e^{-\theta i} z,$$

on remplacera l'axe des x par un nouvel axe incliné de l'angle θ sur l'horizontale.

En posant

$$z = e^{\theta i} \frac{y - \alpha}{y - \beta},$$

le nouvel axe deviendra une circonférence passant par les points α et β et capable de l'angle θ. Dans ces conditions, le dénominateur partiel devient

$$\lambda_n \frac{y - \alpha}{y - \beta} \pm \mu_n, \qquad \lambda_n,\ \mu_n \text{ positifs.}$$

Si donc une fraction continue affecte cette forme, nous saurons déterminer complètement la circonférence formant coupure.

Les résultats de Stieltjes s'appliquent intégralement, sauf le changement d'une droite en une circonférence; on pourrait d'ailleurs adopter une transformation plus compliquée, mais celle que nous venons d'indiquer est la transformation linéaire la plus générale.

B. GÉNÉRALISATION DES FRACTIONS CONTINUES.

39. Nous avons indiqué ailleurs (1) la possibilité de généraliser la théorie des fractions continues; nous allons en faire une application sommaire aux principaux résultats que nous avons obtenus précédemment.

Considérons k polynomes ou séries S_1, S_2, ..., S_k, ordonnés par

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* séances des 1er décembre 1902 et 11 septembre 1905.

rapport aux puissances décroissantes de la variable x et de degrés maxima respectifs $n-1$, $n-2$, ..., $n-k$.

En divisant S_1 par S_k nous obtiendrons comme quotient un polynome entier de degré $k-1$ et un reste de degré maximum $n-k-1$. Nous pouvons donc écrire

$$S_1 = \lambda_k S_k + (-1)^{k-1} S_{k+1}.$$

Nous pourrons de même diviser S_2 par S_{k+1}; le quotient λ_{k+1} sera, en général, de degré $k-1$ et le reste $(-1)^{k-1} S_{k+2}$ de degré maximum $n-k-2$. Nous aurons donc

$$S_2 = \lambda_{k+1} S_{k+1} + (-1)^{k-1} S_{k+2}$$

et ainsi de suite.

On obtiendra de cette manière une suite limitée ou illimitée

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_k, \quad S_{k+1}, \quad S_{k+2}, \quad \ldots,$$

qui sera entièrement déterminée par la connaissance des k premiers termes et qui constitue la généralisation naturelle de la forme normale (A) (*voir* Introduction, p. 2).

Pour plus de concision nous ne parlerons pas ici des formes normales généralisées (C).

Nous introduirons comme précédemment des symboles Q_n^i qui satisfont à de nombreuses relations, généralisations de celles établies dans le Chapitre I et notamment aux suivantes

$$(6') \qquad Q_{n+k}^i = \lambda_{n+k-1} Q_{n+1}^i + (-1)^{k-1} Q_n^i,$$

$$(7') \qquad Q_n^i = \lambda_{i+k-1} Q_n^{i+k-1} + (-1)^{k-1} Q_n^{i+k},$$

$$(12') \qquad \begin{vmatrix} Q_n^i & Q_n^{i+1} & Q_n^{i+2} & \ldots & Q_n^{i+k-1} \\ Q_{n+1}^i & Q_{n+1}^{i+1} & Q_{n+1}^{i+2} & \ldots & Q_{n+1}^{i+k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{n+k-1}^i & Q_{n+k-1}^{i+1} & Q_{n+k-1}^{i+2} & \ldots & Q_{n+k-1}^{i+k-1} \end{vmatrix} = 1,$$

et qui permettent d'établir la relation générale (4')

$$S_i = Q_{n+1}^i S_n + Q_{n+2}^i S_{n+1} + \ldots + Q_{n+k-1}^i S_{n+k-2} + (-1)^{k-1} Q_n^i S_{n+k-1}.$$

On pourra étudier ce que deviennent à la limite, pour $n=\infty$, les rapports

$$Q_n^1 : Q_n^2 : \ldots : Q_n^k \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1}^i : Q_{n+2}^i : \ldots : Q_{n+k}^i.$$

En particulier, si les λ_n décroissent indéfiniment et si la série $\sum\limits_2^\infty |\lambda_n|$ est uniformément convergente, on introduira les fonctions majorantes $\mathfrak{Q}_n^1$ ainsi définies

$$\mathfrak{Q}_{n+k}^1 = |\lambda_{n+k-1}|\,\mathfrak{Q}_{n+1}^1 + \mathfrak{Q}_n^1,$$

d'où

$$\mathfrak{Q}_{n+k}^1 + \mathfrak{Q}_{n+k-1}^1 + \ldots + \mathfrak{Q}_{n+1}^1 < (1+|\lambda_{n+k+1}|)(\mathfrak{Q}_{n+k-1}^1 + \mathfrak{Q}_{n+k-2}^1 + \ldots + \mathfrak{Q}_n^1),$$

et, par suite,

$$\mathfrak{Q}_{n+1}^1 < \mathfrak{Q}_{n+k}^1 + \mathfrak{Q}_{n+k-1}^1 + \ldots + \mathfrak{Q}_{n+1}^1 < \prod_1^n (1+|\lambda_{n+k+1}|).$$

En reproduisant les raisonnements du Chapitre III on démontrera donc que les Q_n^i tendent uniformément selon le reste minimum de $n \pmod{k}$ vers k fonctions entières ou quasi-entières lorsque n augmente indéfiniment.

En appelant $j, j^2, j^3, \ldots, j^k$ les k racines de l'équation

$$x^k = (-1)^{k-1}$$

et

$$\begin{matrix} P_1^1, & P_2^1, & \ldots, & P_k^1, \\ P_1^2, & P_2^2, & \ldots, & P_k^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ P_1^k, & P_2^k, & \ldots, & P_k^k \end{matrix}$$

un système de k^2 fonctions entières obtenues comme précédemment et dont le déterminant est égal à $+1$, on aura

$$\frac{S_1}{jP_1^1 + j^2P_1^2 + \ldots + j^kP_1^k} = \frac{S_2}{jP_2^1 + j^2P_2^2 + \ldots + j^kP_2^k} = \ldots$$
$$= \frac{S_k}{jP_k^1 + j^2P_k^2 + \ldots + j^kP_k^k},$$

c'est la généralisation de la formule (30).

Si, au contraire, les λ_n tendent pour $n=\infty$ vers une limite bien déterminée Λ on verra que les rapports

$$Q_n^1 : Q_n^2 : \ldots : Q_n^k \qquad \text{et} \qquad Q_{n+1}^i : Q_{n+2}^i : \ldots : Q_{n+k}^i$$

tendent vers des limites bien déterminées sur tout le plan complexe, sauf sur les courbes pour lesquelles l'équation de M. Poincaré

$$z^k = \Lambda z + (-1)^{k-1}$$

possède deux ou plusieurs racines de même module maximum.

En dehors de ces courbes, en appelant α la racine de module maximum, qui est ainsi bien déterminée, on établira que l'on a la relation générale

$$\frac{S_1}{\alpha P_1^1 + \alpha^2 P_1^2 + \ldots + \alpha^k P_1^k} = \ldots = \frac{S_k}{\alpha P_k^1 + \alpha^2 P_k^2 + \ldots + \alpha^k P_k^k},$$

le déterminant des k^2 fonctions P_n^m étant toujours égal à l'unité.

Si la limite Λ est telle que l'équation de M. Poincaré ait deux ou plusieurs racines de même module maximum, on démontrera que la fraction continue représente sur tout le plan deux ou plusieurs fonctions convergentes et distinctes.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS.

40. Considérons les polynomes

$$S_0 = 1, \qquad S_1 = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

et réduisons la fraction $\frac{S_0}{S_1}$ en fraction continue en adoptant la forme normale (A).

Il viendra

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{a_1}{x} + b_1 \dot{-} \frac{1}{\frac{a_2}{x} + b_2} \dot{-} \frac{1}{\frac{a_3}{x} + b_3} \dot{-} \ldots.$$

Il s'agit en premier lieu d'exprimer les a_i, b_i en fonction des c_i [1].

L'établissement de ces formules ne présente aucune difficulté, car il s'agit d'un simple calcul formel; la formule générale s'établit facilement par voie d'induction et l'on démontre ensuite qu'en la supposant vraie pour le rang n elle est également vraie pour le rang $n+1$.

Toutefois nous arriverons plus rapidement au résultat en utilisant les formules connues pour la transformation de $\frac{S_0}{S_1}$ en une fraction continue de Stieltjes.

Si nous posons

$$S_1 = \frac{x}{A_1} \dotplus \frac{x}{A_2} \dotplus \frac{x}{A_3} \dotplus \frac{x}{A_4} \dotplus \ldots$$

nous avons les formules connues

$$A_{2p-1} = \frac{(D_2^{p-1})^2}{D_1^{p-1} D_1^p}, \qquad A_{2p} = -\frac{(D_1^p)^2}{D_2^{p-1} D_2^p},$$

dans lesquelles

$$D_i^p = \begin{vmatrix} c_i & c_{i+1} & \ldots & c_{i+p-1} \\ c_{i+1} & c_{i+2} & \ldots & c_{i+p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i+p-1} & c_{i+p} & \ldots & c_{i+2p-2} \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad D_i^0 = 1.$$

Or, en posant

$$g_n = \frac{1}{A_n A_{n+1}}, \qquad g_0 = \frac{1}{A_1},$$

nous avons identiquement

$$S_1 = \frac{g_0}{\frac{1}{x}} \dotplus \frac{g_1}{1} \dotplus \frac{g_2}{\frac{1}{x}} \dotplus \frac{g_3}{1} \dotplus \frac{g_4}{\frac{1}{x}} \dotplus \frac{g_5}{1} \dotplus \ldots,$$

---

[1] STIELTJES, *Op. cit.*, p. 31. — AURIC, *Les équations linéaires et leurs applications*, p. 55.

c'est la forme étudiée par Stieltjes et elle est manifestement égale à

$$\mathrm{S}_1 = \frac{g_0}{\dfrac{1}{x}+g_1} \,\dot{-}\, \frac{g_1 g_2}{\dfrac{1}{x}+g_2+g_3} \,\dot{-}\, \frac{g_3 g_4}{\dfrac{1}{x}+g_4+g_5} \,\dot{-}\, \frac{g_5 g_6}{\dfrac{1}{x}+g_6+g_7} \,\dot{-}\, \ldots$$

Dès lors, si nous posons

$$\rho_n = g_{2n} + g_{2n+1} = -\frac{1}{\mathrm{D}_2^n}\,\frac{\mathrm{D}_2^{n-1}(\mathrm{D}_1^{n+1})^2 + \mathrm{D}_2^{n+1}(\mathrm{D}_1^n)^2}{\mathrm{D}_1^n \mathrm{D}_1^{n+1}},$$

$$\sigma_n = g_{2n-1}\, g_{2n} = \frac{\mathrm{D}_1^{n-1}\mathrm{D}_1^{n+1}}{(\mathrm{D}_1^n)^2}$$

avec

$$\rho_0 = g_1 = \frac{1}{\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2} = -\frac{\mathrm{D}_2^1}{\mathrm{D}_1^1}, \qquad \sigma_0 = g_0 = \frac{1}{\mathrm{A}_1} = \mathrm{D}_1^1,$$

il viendra

$$\mathrm{S}_1 = \frac{\sigma_0}{\dfrac{1}{x}+\rho_0} \,\dot{-}\, \frac{\sigma_1}{\dfrac{1}{x}+\rho_1} \,\dot{-}\, \frac{\sigma_2}{\dfrac{1}{x}+\rho_2} \,\dot{-}\, \ldots$$

Il est d'ailleurs possible de simplifier la formule ci-dessus.

Appelons $\underset{i}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p+k}$ le déterminant D_i^p dans lequel les indices de tous les éléments de la dernière colonne ont été augmentés de k unités.

D'après une propriété bien connue des déterminants mineurs, nous avons les relations

$$\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}\;\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p+1} - \underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}\;\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p+1} = \underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1},$$

$$\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1}\,\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p+1} - \underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+2}\,\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p} = \underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}\;\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1}.$$

Multiplions la première égalité par $\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1}$, la seconde par $-\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}$, il vient en ajoutant

$$\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p-1}^{p-1}\Big(\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1}\Big)^2 + \underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1}\Big(\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}\Big)^2 = \underset{2}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}\Big(\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+2} - \underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p+1}^{p+1}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{p}^{p+1}\Big),$$

dès lors, en remplaçant dans ρ_n, on a

$$\rho_n = \frac{\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n}\Big(\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n+1}^{n+1}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n+1} - \underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n+1}^{n+2}\Big)}{\underset{2}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n}\,\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n+1}^{n+1}} = \frac{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n+1}}{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n}^{n}} - \frac{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n+1}^{n+2}}{\underset{1}{\mathrm{D}}{}_{n+1}^{n+1}}.$$

On peut donc, sans inconvénient, faire disparaître l'indice ı devenu inutile et l'on obtient

$$(35) \qquad \rho_n = \frac{D_n^{n+1}}{D_n^n} - \frac{D_{n+1}^{n+2}}{D_{n+1}^{n+1}}, \qquad \sigma_n = \frac{D_{n-1}^{n-1} D_{n+1}^{n+1}}{(D_n^n)^2}.$$

Telles sont les formules qui permettent de passer d'une série de Taylor à une fraction continue de la forme normale (A).

41. Posons $\frac{1}{x} = z$ et admettons que

$$\lim \rho_n = R, \qquad \lim \sigma_n = S, \qquad (n = \infty).$$

Les conditions de convergence de la fraction continue seront les mêmes que celles de la fraction périodique simple limite

$$Y = z + R - \frac{S}{Y},$$

d'où

$$Y = \frac{1}{2}(z + R) \pm \sqrt{(z + R)^2 - 4S}.$$

Les deux points critiques extrêmes sont

$$z', z'' = -R \pm 2\sqrt{S},$$

et la coupure est formée par la ligne droite qui joint ces deux points en passant par $z = -R$.

La formule qui donne ρ_n nous montre immédiatement que, si $\Sigma \rho_n$ est convergente et a une limite, le rapport $\frac{D_n^{n+1}}{D_n^n}$ tend également vers cette limite et réciproquement; si, au contraire, comme nous l'avons admis ci-dessus, ρ_n tend vers R, on voit que $\frac{1}{n} \frac{D_n^{n+1}}{D_n^n}$ tend vers cette même limite.

En ce qui concerne σ_n nous pouvons écrire

$$\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n} = \sigma_n \frac{D_n^n}{D_{n-1}^{n-1}},$$

d'où par récurrence

$$\frac{D_n^n}{D_{n-1}^{n-1}} = \sigma_{n-1}\frac{D_{n-1}^{n-1}}{D_{n-2}^{n-2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{D_2^2}{D_1^1} = \sigma_1, \quad \frac{D_0^1}{D_0^0} = \sigma_1\sigma_0,$$

et en multipliant

$$\frac{D_{n+1}^{n+1}}{D_n^n} = \sigma_0\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n,$$

et par le même procédé

$$D_{n+1}^{n+1} = \sigma_0^{n+1}\sigma_1^n\sigma_2^{n-1}\ldots\sigma_{n-1}^2\sigma_n;$$

à la limite on aura donc, si $\lim\sigma_n = S$,

$$\lim D_{n+1}^{n+1} = AS^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Nous savons que, si les σ_n sont tous positifs (ρ_n et σ_n étant réels par hypothèse), les équations $Q_n^0 = 0$ ont toutes leurs racines réelles.

Cette simple remarque constitue en somme la démonstration d'un théorème de M. Hurwitz (¹) que nous énoncerons comme il suit :

Pour que les racines de $Q_n^0 = 0$ *soient toutes réelles et séparées par celles de* $Q_n^1 = 0$, *il faut que, si l'on a*

$$\frac{Q_n^0}{Q_n^1} = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots,$$

les déterminants D_n^n *soient tous de même signe* (*et positifs puisque* $D_0^0 = 1$) *ou alternativement positifs ou négatifs* (*cas qui se ramène au précédent par le changement de z en* $-z$).

42. Considérons la fraction

$$\frac{\sigma_0}{S_1} = \frac{c_1}{c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots} = \frac{1}{x} + \rho_0 - \frac{\sigma_1}{\dfrac{1}{x} + \rho_1} - \frac{\sigma_2}{\dfrac{1}{x} + \rho_2} - \ldots.$$

(¹) WEBER, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 338.

Soit $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ la réduite de rang n et posons $\frac{1}{x} = z$,

$$Q_n^0 = z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \alpha_2 z^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2} z + \alpha_{n-1},$$
$$Q_n^1 = z^{n-2} + \beta_1 z^{n-3} + \beta_2 z^{n-4} + \ldots + \beta_{n-3} z + \beta_{n-2}.$$

En écrivant que les développements de $\frac{\sigma_0}{S_1}$ et de $\frac{Q_n^0}{Q_n^1}$ ont le plus grand nombre de termes communs, on a

$$\begin{array}{lllllll}
c_1 & = c_1, & & & & & \\
c_1\beta_1 & = c_2 & + c_1\alpha_1, & & & & \\
c_1\beta_2 & = c_3 & + c_2\alpha_1 & + c_1\alpha_2, & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
c_1\beta_{n-2} & = c_{n-1} & + c_{n-2}\alpha_1 & + c_{n-3}\alpha_2 & + \ldots + c_1\alpha_{n-2}, & & \\
0 & = c_n & + c_{n-1}\alpha_1 & + c_{n-2}\alpha_2 & + \ldots + c_2\alpha_{n-2} & + c_1\alpha_{n-1}, & \\
0 & = c_{n+1} & + c_n\alpha_1 & + c_{n-1}\alpha_2 & + \ldots + c_3\alpha_{n-2} & + c_2\alpha_{n-1}, & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 & = c_{2n-2} & + c_{2n-3}\alpha_1 & + c_{2n-4}\alpha_2 & + \ldots + c_n\alpha_{n-2} & + c_{n-1}\alpha_{n-1}. &
\end{array}$$

Si aux égalités ci-dessus nous ajoutons

$$Q_n^0 = z^{n-1} + z^{n-2}\alpha_1 + z^{n-3}\alpha_2 + \ldots + z\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1},$$

on aura en résolvant

$$Q_n^0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^{n-2} & z^{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_n & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-3} & c_{2n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}}.$$

Si nous posons, d'autre part,

$$\begin{aligned}
P_1 &= c_1,\\
P_2 &= c_1 z + c_2,\\
P_3 &= c_1 z^2 + c_2 z + c_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_{n-1} &= c_1 z^{n-2} + c_2 z^{n-3} + \ldots + c_{n-2} z + c_{n-1},
\end{aligned}$$

on aura également

$$c_1 Q'_n = \frac{\begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \ldots & P_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}}.$$

La formule récurrente

$$Q_n^0 = (z + \rho_{n-1}) Q_{n-1}^0 - \sigma_{n-1} Q_{n-2}^0$$

montre immédiatement que, dans le développement de Q_n^0, le coefficient de z^{n-2} est égal à $-\sum_1^{n-1} \rho_i$; nous avons donc, en tenant compte des relations ci-dessus,

$$\sum \rho_i = -\frac{D_{n-1}^n}{D_{n-1}^{n-1}},$$

ce qui est une vérification de la formule établie précédemment (35).

43. Nous allons donner diverses applications des résultats ci-dessus. Considérons, en premier lieu, le développement

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{x^2}{(a+\lambda)(a+2\lambda)} + \frac{x^3}{(a+\lambda)(a+2\lambda)(a+3\lambda)} + \ldots,$$

qui est en quelque sorte une exponentielle généralisée.

On trouve facilement

$$\rho_n = -\frac{a}{(a+2n\lambda)[a+2(n+1)\lambda]},$$

$$\sigma_n = -\frac{n\lambda(a+n\lambda)}{[a+(2n-1)\lambda](a+2n\lambda)[a+(2n+1)\lambda]}.$$

Nous avons donc

$$\lim \rho_n = -\frac{a}{4n^2\lambda^2} = 0, \qquad \lim \sigma_n = -\frac{n^2}{16n^4\lambda^2} = -\frac{1}{16n^2\lambda^2} = 0.$$

En posant $\frac{1}{x} = z$, le point $z = 0$ est un point essentiel et la coupure se réduit à ce seul point; le développement est donc toujours convergent.

En particulier, faisons $a = 0$, $\lambda = 1$, on aura

$$\rho_n = 0, \qquad \sigma_n = -\frac{1}{4(4n^2-1)} = -\frac{1}{4(2n+1)(2n-1)},$$

d'où

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{1}{4.3}}{\frac{1}{x}} - \cfrac{\frac{1}{4.15}}{\frac{1}{x}} - \cfrac{\frac{1}{4.35}}{\frac{1}{x}} - \ldots,$$

$$1 + \frac{2}{e^x-1} = \frac{2}{x} + \cfrac{1}{\frac{6}{x}} + \cfrac{1}{\frac{10}{x}} + \cfrac{1}{\frac{14}{x}} + \ldots$$

et, en posant $\frac{2}{x} = z$,

$$\frac{e^{\frac{2}{z}}+1}{e^{\frac{2}{z}}-1} = z + \frac{1}{3z} + \frac{1}{5z} + \frac{1}{7z} + \ldots,$$

développement qui ne diffère pas au fond de la formule bien connue de Lambert

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \operatorname{tang\,hyp.} x = -i \operatorname{tang} ix = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{7} + \frac{x^2}{9} + \ldots$$

44. Considérons comme second exemple

$$\frac{x}{(a+\lambda)(a+2\lambda)\ldots[a+(k+1)\lambda]}+\frac{x^2}{(a+2\lambda)(a+3\lambda)\ldots[a+(k+2)\lambda]}+\ldots$$

qui est, en quelque sorte, une logarithmique généralisée.

Par l'application des formules on trouve

$$\rho_n=-\frac{(a+k\lambda)[a+(2n+1)\lambda]+2n(n+1)\lambda^2}{[a+(k+2n)\lambda][a+(k+2n+2)\lambda]},$$

$$\sigma_n=\frac{n(k+n)\lambda^2(a+n\lambda)[a+(k+n)\lambda]}{[a+(k+2n-1)\lambda][a+(k+2n)\lambda]^2[a+(k+2n+1)\lambda]}.$$

Par suite

$$\lim\rho_n=-\frac{2n^2\lambda^2}{4n^2\lambda^2}=-\frac{1}{2},\qquad \lim\sigma_n=\frac{n^4\lambda^4}{16n^4\lambda^4}=\frac{1}{16}.$$

En posant $\frac{1}{x}=z$ on voit que les conditions de convergence sont les mêmes que pour

$$Y=z-\frac{1}{2}-\frac{1}{16Y},$$

d'où

$$Y=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{z^2-z}.$$

Les points critiques sont $z=0$, $z=+1$, et la coupure est formée par le segment qui les réunit.

En particulier, si $a=0$, $\lambda=1$, $k=0$, ce qui donne

$$-L(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots,$$

$$\rho_n=-\frac{2n(n+1)}{4n(n+1)}=\frac{1}{2},\qquad \sigma_n=\frac{n^4}{(2n-1)4n^2(2n+1)}=\frac{n^2}{4(4n^2-1)},$$

d'où

$$-\frac{1}{L(1-x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\cfrac{\frac{1}{4.3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\cfrac{\frac{4}{4.15}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\cfrac{\frac{9}{4.35}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\cfrac{\frac{16}{4.63}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\ldots}}}}$$

En posant $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = y$, on a la formule connue

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{y} - \frac{1}{3y} - \frac{4}{5y} - \frac{9}{7y} - \frac{16}{9y} - \frac{25}{11y} - \frac{36}{13y} - \cdots$$

qui est convergente sur tout le plan, sauf sur la coupure $-1 \ldots +1$.

En appliquant le théorème de Cauchy dans les conditions définies précédemment, on a

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{y+z}.$$

Dans le langage de Stieltjes cela signifie que l'on a une répartition continue de masse avec la densité $\frac{1}{2}$ sur le segment $-1 \ldots +1$.

Le développement

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots$$

donne, par le même procédé,

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z} + \frac{4}{5z} + \frac{9}{7z} + \cdots,$$

qui ne diffère du précédent que par le changement de signe; cette analogie, que le développement taylorien ne permettait pas de soupçonner, résulte de la formule bien connue

$$\operatorname{arc\,tang} y = i L\sqrt{\frac{1-yi}{1+yi}}.$$

Si, dans la formule

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3z} + \frac{4}{5z} + \frac{9}{7z} + \frac{16}{9z} + \frac{25}{11z} + \cdots,$$

nous ramenons tous les numérateurs partiels à l'unité, les dénominateurs partiels seront de la forme

$$\left(\frac{3.5.7\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots(2n-2)2n}\right)^2 (4n+1)z$$

et

$$\left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}\right)^2(4n+3)z,$$

et, d'après la formule de Wallis, ils ont respectivement comme limite, pour $n=\infty$,

$$\pi z \quad \text{et} \quad \frac{4z}{\pi}.$$

Or nous avons le développement périodique

$$\frac{\pi}{2}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right) = \pi z + \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} + \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} + \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\frac{4z}{\pi}} + \ldots,$$

et, d'après les propriétés établies au Chapitre IV, on pourra écrire

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{z} = \frac{P_0 - I_0\frac{\pi}{2}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)}{P_1 - I_1\frac{\pi}{2}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)} \qquad \text{avec} \qquad P_0 I_1 - P_1 I_0 = 1.$$

On aurait de même

$$L\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} = \frac{P_0 - I_0\frac{\pi}{2}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}{P_1 - I_1\frac{\pi}{2}\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}.$$

Considérons de même le développement (¹)

$$\frac{x}{1+\lambda} + \frac{x^2}{1+2\lambda} + \frac{x^3}{1+3\lambda} + \ldots.$$

Il suffit de poser, dans le cas général, $a=1$, $k=0$, d'où

$$\rho_n = -\frac{1+(2n+1)\lambda+2n(n+1)\lambda^2}{(1+2n\lambda)[1+(2n+2)\lambda]},$$

$$\sigma_n = \frac{n^2\lambda^2(1+n\lambda)^2}{[1+(2n-1)\lambda](1+2n\lambda)^2[1+(2n+1)\lambda]}$$

(¹) POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. II, p. 3.

et, en posant $\frac{1}{x} = z$, on voit que la coupure sera le segment qui va de l'origine au point $+1$.

45. Comme troisième exemple, soit le développement

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

on trouve

$$\rho_n = \frac{m+n}{2(2n+1)} - \frac{m-n-1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_n = -\frac{m^2-n^2}{4(4n^2-1)}.$$

Les conditions de convergence sont les mêmes que pour

$$\mathrm{Y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16\mathrm{Y}}.$$

Les points critiques sont ici 0 et -1 et la coupure est formée par le segment qui les réunit. Une transformation facile donne la formule connue (¹)

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m = 1 \dotplus \frac{2m}{z} \dotplus \frac{\frac{m^2-1}{3}}{z} \dotplus \frac{\frac{m^2-4}{15}}{z} \dotplus \frac{\frac{m^2-9}{35}}{z} \dotplus \ldots,$$

et la coupure est ici le segment $-1 \ldots +1$.

En appliquant le théorème de Cauchy on voit que, d'un côté de la coupure, la fraction est égale à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m e^{2m\pi i}$$

et, de l'autre, à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m e^{-2m\pi i}$$

et l'on obtient l'intégrale de Stieltjes

$$\mathrm{F} = \frac{\sin 2m\pi}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m \frac{dz}{z+u}.$$

(¹) LAGUERRE, t. I, p. 344.

En considérant l'expression $\dfrac{\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^m - 1}{m}$ et en faisant tendre m vers zéro, on trouve que la valeur limite est $L\dfrac{z+1}{z-1}$, et l'on retombe sur la formule du paragraphe précédent.

De même en posant $z = \dfrac{y}{m}$ et en faisant tendre m vers l'infini on retrouve la formule du paragraphe **43**.

Donnons encore deux développements indiqués par Laguerre ([1]).

Le premier est celui qui a servi de base aux recherches de Stieltjes

$$e^x \int_x^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u} = \frac{1}{x+1} \dot{-} \frac{1}{x+3} \dot{-} \frac{\overline{2}^2}{x+5} \dot{-} \frac{\overline{3}^2}{x+7} \dot{-} \frac{\overline{4}^2}{x+9} \dot{-} \frac{\overline{5}^2}{x+11} \dot{-} \cdots$$

Nous avons ici

$$\lim \rho_n = 2n, \qquad \lim \sigma_n = n^2.$$

La fraction simple limite

$$Y = x + 2n - \frac{n^2}{Y}$$

donne

$$Y = \frac{1}{2}\left[x + 2n \pm \sqrt{x(x+4n)}\right]$$

dont les points critiques sont 0 et $-\infty$.

La coupure s'étend donc sur toute la partie négative de l'axe des x.

De même la fraction continue

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}} = 1 \dot{-} \frac{1}{\frac{1}{2} - x} \dot{+} \frac{1 + \frac{1}{4}}{-3x} \dot{+} \frac{4 + \frac{1}{4}}{-5x} \dot{+} \frac{9 + \frac{1}{4}}{-7x} \dot{+} \cdots$$

([1]) *Œuvres complètes*, t. I, p. 431 et 294.

donne par une transformation facile

$$\frac{1}{2}\frac{e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}+1}{e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}}-1} = x \dotplus \frac{1+\frac{1}{4}}{3x} \dotplus \frac{4+\frac{1}{4}}{5x} \dotplus \frac{9+\frac{1}{4}}{7x} \dotplus \ldots,$$

et sous cette forme on reconnaît que la coupure s'étend du point $x = -1$ au point $x = +1$ et que la fraction continue est convergente sur tout le plan complexe, sauf sur ce segment.