JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. DULAC

Sur les points dicritiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 381-402.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__381_0>

Sur les points dicritiques;

PAR M. H. DULAC,
Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Grenoble.

---

1. L'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$X(x, y)\frac{dx}{dy} = Y(x, y)$$

dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$ supposé point multiple des courbes $X = 0$, $Y = 0$ peut toujours être faite complètement, *dans le champ réel,* ainsi que l'a montré M. Bendixson. Mais l'étude de ces mêmes intégrales, *dans le champ complexe,* n'a donné jusqu'ici que peu de résultats précis, si l'on en excepte la recherche des intégrales algébroïdes pour $x = 0$, problème complètement résolu. Si j'ai pu montrer (¹) qu'il y a, dans la plupart des cas, une infinité d'intégrales pour lesquelles y tend vers o avec x, ces intégrales présentent des singularités très diverses, qu'il paraît difficile d'étudier. En général, étant données des conditions initiales, x_0, y_0, aussi voisines que l'on veut de $x = 0$, $y = 0$, on ne sait comment se comporte l'intégrale relative à ces valeurs initiales, lorsque x tend vers o. On ne sait si cette intégrale possède un nombre fini ou non de points critiques, dans le voisinage

(¹) *Journal de l'École Polytechnique,* IXᵉ Cahier, 1904; *Annales de l'Université de Grenoble,* t. XVII, 1905.

de $x = 0$. Dans le cas particulier où x est en facteur dans X, aucun théorème général ne permet d'affirmer que y tend vers une limite lorsque x tend vers 0, et, en effet, y peut ne tendre vers aucune limite.

La difficulté de résoudre ces diverses questions, dans les cas les plus généraux, me paraît donner quelque intérêt aux résultats particuliers, mais très précis, que j'ai obtenus dans le cas d'un *point dicritique*.

Considérons l'équation

$$(1)\quad [xA(x,y) + \varphi_n(x,y) + \ldots]\frac{dy}{dx} = yA(x,y) - \psi_n(x,y) + \ldots$$

où les parenthèses ainsi que le second membre sont des développements suivant les puissances de x et y. Nous n'écrivons que les termes de moindre degré : A, φ_n, ψ_n, qui sont des polynomes homogènes, le premier de degré $n-2$, les autres de degré n.

Supposons qu'il n'y ait pas de valeur de x et y annulant à la fois

$$(1')\qquad A(x,y) \qquad \text{et} \qquad y\varphi_n(x,y) + x\psi_n(x,y).$$

1° *On peut trouver un nombre ε tel que, si l'on a $|x_0| < \varepsilon$, $|y_0| < \varepsilon$, l'intégrale de* (1) *correspondant aux conditions initiales x_0, y_0 est, pour $|x| < |x_0|$, ou bien holomorphe et tend vers* 0 *avec x, ou bien algébroïde et alors une au moins de ses déterminations tend vers* 0 *avec x.*

2° *Toutes les déterminations de l'intégrale considérée tendent vers* 0 *avec x, si x est en facteur dans le premier membre de* (1); *pour toute intégrale passant dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, y tend vers* 0 *de quelque façon que x tende vers* 0.

Les seules intégrales pour lesquelles x et y tendent vers 0 sont les intégrales algébroïdes (holomorphes en général) pour $x = 0$; l'existence de ces intégrales en nombre infini est bien connue, mais on ne s'était pas, à ma connaissance, occupé d'examiner si elles étaient les seules pour lesquelles y tende vers 0 avec x. De plus, 2° nous donne des conditions suffisantes pour que y tende vers 0 avec x; nous avons là un des exemples assez rares où, l'existence d'une limite pour y ne résultant pas du théorème de M. Painlevé, l'existence de cette limite de y, lorsque x tend vers o, *en variant dans le champ complexe,* est établie sans que l'équation (1) soit intégrée.

Ces résultats peuvent subsister partiellement, même s'il y a des valeurs de x et y annulant les deux polynomes indiqués. Ainsi le résultat 2° subsiste, pourvu que $A(x, y)$ ne contienne pas x en facteur.

2. *Exemple des divers cas.* — Avant de démontrer les résultats énoncés, éclaircissons-les par quelques exemples. Considérons l'équation

$$(x + \ldots)\frac{dy}{dx} = ay + \ldots, \tag{2}$$

où a est un *nombre positif,* et les deux membres contenant des développements suivant les puissances de x et y, les termes de moindre degré étant seuls écrits. Faisons, à propos de cette équation, quelques remarques mettant en évidence les diverses particularités qui se présentent pour les intégrales d'une équation, dans le voisinage d'un point dicritique.

Si x est en facteur dans le premier membre de (2), cette équation, pour x et y suffisamment petits, peut s'écrire

$$x\frac{dy}{dx} = ay + \ldots.$$

L'intégrale générale est donnée, pour x et y suffisamment petits, par

$$y + \varphi(x, y) = Cx^a$$

où C est une constante et φ un développement suivant les puissances de x et y, les termes de degré minimum étant du second degré. On en conclut facilement que, si les valeurs initiales x_0, y_0 sont suffisamment petites, y tendra vers o avec x, de quelque façon que x tende vers o. Il en est ainsi, en particulier, pour $a = 1$, cas d'un point dicritique; nous verrons qu'il en est ainsi dans le cas d'un point dicritique quelconque.

Citons comme exemples les équations

$$x\frac{dy}{dx} = y + \frac{k(q+1)}{p} y^{p+1} x^q,$$

$$x(2y + x + x^2)\frac{dy}{dx} = y(2y + x),$$

dont les intégrales sont respectivement données par

$$y^p(C - kx^{p+q}) = x^p, \qquad y(y + x + x^2) = Cx^2.$$

Si x n'est pas en facteur dans le premier membre de (2), nous ne pouvons dire que y tend vers o, lorsque x tend vers o d'une façon quelconque. En effet, l'équation (2) possède toujours une intégrale qui, pour $x = 0$, prend une valeur y_0, aussi petite que l'on veut, mais différente de o. Considérant cette intégrale, on voit que y ne tend pas vers o avec x. Si, d'autre part, nous employons les développements de M. Picard donnant les valeurs de x et y satisfaisant à l'équation, sous la forme de développements suivant les puissances de t et de Ct^a, C étant une constante arbitraire, nous voyons, en faisant tendre t vers o, qu'on peut faire tendre x vers o de telle façon que y tende aussi vers o. De ce qui précède il résulte que la limite vers laquelle tend y, lorsque x tend vers o, dépend, dans une certaine mesure, de la façon dont x tend vers o. Cette circonstance tient à ce que les intégrales de l'équation possèdent des points critiques, qui varient avec la constante d'intégration et qui peuvent devenir aussi voisins que l'on veut de l'origine (dans le plan des x). En effet, nous pouvons toujours prendre des valeurs x_1 et y_1, aussi petites que l'on veut, annulant le premier membre de (2), l'intégrale qui admet pour valeurs initiales x_1, y_1 a pour point critique $x = x_1$. Nous pouvons même démontrer, en employant les développements de M. Picard, que, si a n'est pas rationnel, certaines, au moins, des intégrales $y(x)$ de l'équation admettent une infinité de points critiques dans le voisinage de l'origine. Si a est rationnel (1), on peut trouver un nombre ε, tel que

(1) Si a est un entier supérieur à 1, on sait que, pour que les développements

toute intégrale (relative a des valeurs initiales assez petites pour que les développements puissent être employés) n'ait pour $|x| < \varepsilon$ qu'un nombre fini de points critiques; autour de chacun de ces points se permutent un nombre fini de déterminations de y (en général 2 déterminations). Une telle intégrale de $y(x)$ est donc pour $|x| < \varepsilon$ une fonction algébroïde de x, dont une détermination au moins tend vers o avec x, ainsi que le montre une remarque précédente. C'est le théorème que nous avons énoncé pour un point dicritique.

Examinons, pour illustrer le cas dont nous venons de parler, un exemple très simple.

Prenons l'équation

$$(x+y^2)\frac{dy}{dx} = y,$$

dont l'intégrale générale est donnée par

$$x = 2Cy + y^2, \qquad y = -C \pm \sqrt{C^2+x}.$$

Chaque intégrale admet le point critique $x = -C^2$.

Si nous considérons l'intégrale qui admet pour valeurs initiales x_0, y_0, nous aurons

$$C = \frac{x_0 - y_0^2}{2y_0}.$$

Pour avoir $y = y_0$, pour $x = x_0$ nous devons prendre la détermination du radical qui, pour $x = x_0$, est égale à $\frac{x_0+y_0^2}{2y_0}$, soit α son argument. Pour que y tende vers o avec x, il faut prendre la détermination du radical qui, pour $x = 0$, est égale à $\frac{y_0^2 - x_0}{2y_0}$, soit β son argument. Nous pouvons toujours supposer α et β compris entre o et 2π. Si la différence $\alpha - \beta$ est inférieure à π en valeur absolue, nous devons, pour

---

de M. Picard existent, il faut qu'une condition soit vérifiée. On peut énoncer cette condition en disant qu'il faut qu'en recherchant une intégrale holomorphe de la forme $y = \varphi(x)$, on ne soit pas arrêté par une impossibilité dans le calcul du terme en x^a de $\varphi(x)$. Le théorème que nous énonçons n'est vrai que si les développements de M. Picard existent.

que y tende vers o avec x, faire tendre x vers o suivant un chemin partant de $x = x_0$ et tournant un nombre pair de fois autour du point critique $x = -C^2$; si la différence considérée est égale ou supérieure à π, en valeur absolue, nous devons tourner un nombre impair de fois autour du point critique. En particulier, si x_0 et y_0 sont réels, si l'on veut que y tende vers o, on devra tourner un nombre pair ou un nombre impair de fois autour du point critique suivant que $y_0^4 - x_0^2$ est positif ou négatif. Si x ne tend pas vers o de la façon indiquée, y ne tendra pas vers o (à moins que l'on ait $y_0^2 = x_0$).

On pourrait étudier de même l'équation dont l'intégrale générale est donnée par

$$(x+y)(x+y+y^2) = Cy^2.$$

Il est très facile de trouver des équations appartenant au type (2) et dont on ait l'intégrale générale.

Formons l'équation qui admet pour intégrale générale

$$[\varphi_1(x,y)]^{\lambda_1}[\varphi_2(x,y)]^{\lambda_2}\ldots[\varphi_n(x,y)]^{\lambda_n} = C,$$

où les φ sont des développements suivant les puissances de x et y contenant des termes du premier degré. Si la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ est nulle, l'équation obtenue sera de la forme considérée.

Supposons que dans (1) le premier et le second membre soient réduits aux termes écrits, explicitement, on vérifie immédiatement qu'en posant $y = tx$, on obtient une équation qu'on sait intégrer.

Je remarquerai toutefois que la vérification des théorèmes que nous avons énoncés sera parfois difficile à faire au moyen des intégrales générales que nous pouvons ainsi obtenir.

Ces exemples cités, abordons l'étude de l'équation (1).

3. *Directions singulières*. — Faisons le changement de variable

$$y = tx;$$

l'équation

$$(3)\quad [x\,A(x,y) + \varphi_n(x,y) + \ldots]\frac{dy}{dx} = x\,A(x,y) - \psi_n(x,y) - \ldots$$

devient

$$(4)\quad [A(1,t)+x\varphi_n(1,t)+\ldots]\,dt+[t\varphi_n(1,t)+\psi_n(1,t)+\ldots]\,dx=0,$$

les quantités entre crochets étant des développements suivant les puissances de x, dont les coefficients sont des polynomes en t. De même, si l'on fait le changement de variable

$$x = uy,$$

on obtient l'équation

$$(5)\quad [-A(u,1)+y\psi_n(u,1)+\ldots]\,du+[\varphi_n(u,1)+u\psi_n(u,1)+\ldots]\,dy=0.$$

Si les deux termes de l'équation (3) sont holomorphes pour $|x|<a$ et $|y|<b$, les deux termes de l'équation (4) seront des développements convergents pour tous les couples de valeurs de x et de t, tels que l'on ait à la fois $|x|<a$, $|tx|<b$. Une remarque analogue s'applique à (5).

Nous dirons que le point dicritique $x=0, y=0$, de l'équation (3), ne présente pas de *directions singulières,* s'il n'existe pas de valeurs de t annulant à la fois, dans (4),

$$A(1,t) \quad \text{et} \quad t\varphi_n(1,t)+\psi_n(1,t),$$

et si, de plus, on n'a pas, dans (5),

$$A(0,1)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_n(0,1)=0.$$

On voit que ceci revient à dire qu'il n'y a pas de valeurs de x et y annulant à la fois

$$A(x,y) \quad \text{et} \quad y\varphi_n(x,y)+x\psi_n(x,y).$$

4. *Indication du problème traité.* — S'il n'y a pas de directions singulières, ce qui est le cas général, il y a, étant donnée une direction quelconque $\frac{y}{x}=t_1$, une intégrale et une seule pour laquelle x et y tendent simultanément vers zéro, $\frac{y}{x}$ tendant vers t_1. Toutes ces intégrales $y(x)$ sont algébroïdes pour $x = 0$; elles sont holomorphes, pour $x = 0$, si l'on n'a pas $A(1, t_1) = 0$.

Nous allons montrer, toujours en supposant qu'il n'y ait pas de directions singulières, que ces intégrales sont les seules pour lesquelles x et y tendent à la fois vers zéro. Nous verrons aussi que ces intégrales sont les seules qui satisfont aux conditions initiales $y = y_0$, $x = x_0$, si x_0 et y_0 sont suffisamment petits. Pour étudier ces intégrales relatives aux conditions initiales y_0, x_0, nous aurons, en posant $t_0 = \frac{y_0}{x_0}$, à examiner successivement les trois cas suivants :

1° *t_0 est très grand;*

2° *t_0 est voisin d'une racine de $A(1, t) = 0$;*

3° *t_0 ne remplit aucune des conditions précédentes.*

Les démonstrations préciseront dans la suite le sens attaché aux mots : suffisamment petit, très grand, etc.

5. *Intégrales pour lesquelles t_0 est très grand* (*cas* 1°). — En posant

$$x = uy,$$

nous obtenons l'équation (5). L'examen du cas qui nous occupe sera subdivisé en trois cas différents :

a. Le coefficient de dy dans (5) *est nul pour $u = 0$, quel que soit y.* On voit immédiatement que cela revient à dire que dans (3) le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $x = 0$, quel que soit y. Dans ce cas a, on doit avoir $A(0, 1) \neq 0$, puisqu'il n'y a pas de direction singulière.

b. On a $A(0, 1) \neq 0$, mais u n'est pas en facteur dans le coefficient de dy.

c. On a $\varphi_n(0, 1) \neq 0$.

On est toujours dans l'un ou l'autre de ces trois cas, s'il n'y a pas de directions singulières. Le cas où l'on a à la fois $\varphi_n(0, 1) \neq 0$ et $A(0, 1) \neq 0$ rentrera à volonté dans le cas b ou le cas c.

6. *Intégrales pour lesquelles t_0 est très grand, $x = 0$ étant un pôle de $\frac{dy}{dx}$, quel que soit y* (*cas* 1°, *sous-cas a*). — L'équation (5)

peut s'écrire

$$\frac{du}{dy} = u^p \mathrm{H}(u, y). \tag{6}$$

p est un entier, en général égal à 1, mais pouvant être supérieur à 1. Il existe des nombres α_1 et ε_1, tels que $\mathrm{H}(u, y)$ soit une fonction holomorphe pour

$$|u| < \alpha_1, \qquad |y| < \varepsilon_1.$$

Si l'on considère $\mathrm{H}(u, y)$ comme un développement suivant les puissances de y, les coefficients de ce développement sont des fonctions rationnelles de u, où le degré du numérateur et du dénominateur peut croître indéfiniment avec le rang du terme.

Nous pouvons représenter l'intégrale $u(y)$ qui, pour $y = y_0$, se réduit à y_0, par le développement

$$u = u_0 + u_0^p [\mathrm{B}_1(y - y_0) + \mathrm{B}_2(y - y_0)^2 + \ldots]. \tag{7}$$

Il existe des nombres α_2, ε_2, tels que le second membre soit une fonction holomorphe de u_0, y_0, et de $y - y_0$, si l'on a

$$|u_0| < \alpha_2, \qquad |y_0| < \varepsilon_2, \qquad |y - y_0| < \varepsilon_2.$$

En remarquant que l'on a

$$x = uy, \qquad x_0 = u_0 y_0,$$

on obtient facilement

$$x = x_0 + u_0 [\mathrm{C}_1(y - y_0) + \mathrm{C}_2(y - y_0)^2 + \ldots]. \tag{7'}$$

Les C_1, C_2, ... sont de même que les B des fonctions de u_0 et de y_0 holomorphes dans les limites indiquées. On a

$$\mathrm{C}_1 = 1 + u_0^{p-1} y_0 \mathrm{B}_1.$$

C_1 n'est pas nul pour $u_0 = 0$, $y_0 = 0$. Désignons par c le minimum du module de C_1 lorsque u_0 et y_0 varient dans les limites indiquées. On peut supposer α_2 et ε_2 assez petits pour que c ne soit pas nul.

Nous pouvons écrire la relation (7′) sous la forme

$$u_0 C_1 (y - y_0)[1 + P + Q] = 0$$

avec

$$P = \frac{x_0 - x}{u_0 C_1 (y - y_0)}, \qquad Q = \frac{C_2 (y - y_0)}{C_1} + \frac{C_3 (y - y_0)^2}{C_1} + \ldots.$$

En reprenant un raisonnement connu, établissant l'existence d'une fonction implicite [1], nous voyons qu'on peut trouver un nombre ε_3 (au plus égal à ε_2), tel que l'on ait $|Q| < \frac{1}{2}$, si l'on a $|y - y_0| \leqq 2\varepsilon_3$.

En supposant ensuite que l'on considère les valeurs de x pour lesquelles on a

$$(8) \qquad |x - x_0| < c u_0 \varepsilon_3,$$

on a $|P| < \frac{1}{2}$, pour $|y - y_0| = 2\varepsilon_3$ et on montre que la relation (7′) définit une valeur de y et une seule satisfaisant à la condition

$$(9) \qquad |y - y_0| < 2\varepsilon_3.$$

Si l'on prend

$$|x_0| < \frac{c u_0 \varepsilon_3}{2}, \qquad |x| < \frac{c u_0 \varepsilon_3}{2}, \qquad |y_0| < \varepsilon_3,$$

la condition (8) étant satisfaite, l'unique valeur de y satisfaisant à la condition (9) sera une fonction holomorphe de x et pourra tendre vers o avec x. Elle tendra réellement vers o; en effet, lorsque y tend vers o, u tend, d'après (7), vers une limite finie (qui peut être nulle), et, comme on a $x = uy$, x tend aussi vers o.

Si nous désignons par ε' la plus petite des deux quantités ε_3 et $\frac{c\varepsilon_3}{2}$, et si nous posons $\alpha' = \alpha_2$, nous pourrons dire :

L'intégrale $y(x)$ de l'équation (3) qui, pour $x = x_0$, prend la

---

[1] *Voir*, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 262, 2e édition.

valeur y_0, est holomorphe et tend vers zéro avec x, si l'on a

$$\left|\frac{x_0}{y_0}\right| = u_0 < \alpha', \qquad |y_0| < \varepsilon', \qquad |x| \leqq |x_0|.$$

La dernière inégalité pourrait d'ailleurs être remplacée par $|x| < 2|x_0|$, à condition de remplacer ε' par $\frac{\varepsilon'}{2}$.

7. *t_0 est très grand et l'on a* $A(0, 1) \neq 0$, *sans que $x = 0$ soit un pôle de $\frac{dy}{dx}$, quel que soit y (cas 1°, sous-cas b).* — L'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{du}{dy} = H(u, y),$$

$H(u, y)$ désignant comme précédemment une fonction de u et de y, holomorphe pour u et y suffisamment petits. On peut considérer H comme un développement suivant les puissances de y, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de u.

Les premiers de ces coefficients peuvent être nuls pour $u = 0$ [le terme indépendant de y sera nul si l'on a $\varphi_n(0, 1) = 0$], mais tous les coefficients ne peuvent être nuls pour $u = 0$, dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Supposons que le coefficient de y^p ne soit pas nul pour $u = 0$, les coefficients précédents étant nuls pour $u = 0$.

L'intégrale qui, pour $y = y_0$, se réduit à u_0, peut être représentée par le développement

$$u = u_0 + B_1(y - y_0) + \ldots + B_p(y - y_0)^p + B_{p+1}(y - y_0)^{p+1} + \ldots.$$

Il existe des nombres α_1 et ε_1 tels que le second membre soit une fonction holomorphe de $u_0, y_0, y - y_0$, si l'on a

$$|u_0| < \alpha_1, \qquad |y_0| < \varepsilon_1, \qquad |y - y_0| < \varepsilon_1.$$

En particulier, les coefficients $B_1, B_2, \ldots$ sont des fonctions holomorphes de u_0 et de y_0, dans les limites indiquées.

Les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sont nuls pour $u_0 = 0$, $y_0 = 0$; le coefficient B_{p+1} n'est pas nul pour ces valeurs. On obtient comme précédemment

$$(10) \quad \begin{cases} x = (y_0 + y - y_0)[u_0 + B_1(y - y_0) + \ldots \\ \qquad\qquad + B_{p+1}(y - y_0)^{p+1} + \ldots], \end{cases}$$

$$(10') \quad \begin{cases} x = x_0 + C_1(y - y_0) + \ldots \\ \qquad + C_{p+1}(y - y_0)^{p+1} + C_{p+2}(y - y_0)^{p+2} + \ldots. \end{cases}$$

On a

$$C_{p+2} = B_{p+1} + y_0 B_{p+2}.$$

C_{p+2} n'est donc pas nul pour $u_0 = y_0 = 0$, tandis que les coefficients qui le précèdent sont nuls.

Il résulte de là, d'après le théorème d'existence des fonctions implicites, qu'il existe des nombres α_2, ε_2, η_2, tels que, si l'on a

$$|u_0| \leqq \alpha_2, \qquad |y_0| \leqq \varepsilon_2, \qquad |x - x_0| \leqq 2\eta_2,$$

les valeurs de y vérifiant la relation (10′) et satisfaisant à la condition

$$(11) \qquad |y - y_0| \leqq 2\varepsilon_2$$

soient en nombre égal à $p + 2$. Si nous prenons

$$|x_0| < \eta_2, \qquad |x| \leqq \eta_2,$$

nous avons $p + 2$ déterminations de y satisfaisant à la condition (11). Ces déterminations sont évidemment des fonctions algébroïdes pour $|x| < \eta$; elles peuvent tendre vers zéro avec x, puisque cela est compatible avec la condition (11), mais il n'en est pas nécessairement ainsi. Lorsque x tend vers zéro, les valeurs de y, satisfaisant à la relation (10) et à la condition (11), doivent tendre vers les valeurs de y, qui satisfont à la condition (11) et annulent un des deux facteurs du second membre de (10). Il en résulte qu'une des déterminations de y tend vers la valeur $y = 0$ qui annule le premier facteur, tandis que les $p + 1$ autres déterminations tendent vers les $p + 1$ valeurs de y, qui satisfont à la condition (11) et annulent le second facteur; exceptionnellement, quelques-unes de ces valeurs de y peuvent être nulles. Nous pouvons remarquer que les $p + 2$ déterminations de y que nous considérons satisfaisant à une équation entière en y de degré $p+2$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine $|x|<\eta_2$, les points critiques de ces déterminations sont en nombre fini dans le domaine considéré [1]. La position et peut-être le nombre de ces points critiques varient avec les valeurs des conditions initiales u_0, y_0, puisque les coefficients de l'équation entière considérée sont des fonctions de u_0 et y_0.

Rien, dans ce qui précède, ne nous permet d'affirmer que les $p+2$ déterminations de y que nous considérons se permutent entre elles autour des points critiques dont nous venons de parler. Il peut très bien se faire que certaines d'entre elles soient, au moins lorsque u_0 et y_0 varient dans certaines limites, des fonctions holomorphes pour $|x|<\eta_2$. Mais nous pouvons affirmer que, si l'on part de la détermination $y(x)$ qui pour x_0 est égale à y_0, on pourra toujours, en tournant, s'il y a lieu, autour de points critiques convenables, obtenir la détermination qui, pour $x=0$, se réduit à $y=0$. En effet, lorsque y tend vers zéro, le deuxième facteur du second membre de (10), c'est-à-dire u, tend vers une limite finie; x tend, par suite, vers o. Donc, x tendant vers o, suivant un chemin convenable, y tend vers o.

Cette restriction imposée à x de tendre vers o en suivant un chemin convenable se réduit, puisque y est une fonction algébroïde, à exiger que le chemin considéré tourne, s'il y a lieu, autour de certains points critiques, ou ne tourne pas autour de certains autres.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant : *Si l'on a*

$$u_0<\alpha_2, \qquad |y_0|<\varepsilon_2, \qquad |x_0|<\eta_2,$$

il existe une intégrale $y(x)$ satisfaisant à la condition initiale $y(x_0)=y_0$ et tendant vers zéro avec x. Cette intégrale est une branche d'une fonction algébroïde pour $|x|\leqq\eta_2$. Cette fonction algébroïde peut posséder dans le domaine considéré d'autres déterminations dont il est facile de déterminer le nombre maximum $(p+1)$;

---

(1) On peut sans difficulté montrer, dans ce cas comme dans les cas suivants, que le nombre maximum des points critiques est inférieur, au moins d'une unité, au nombre maximum des déterminations de y.

en général, aucune de ces autres déterminations ne tend vers zéro avec x.

8. *t_0 est très grand et l'on a $\varphi_n(0, 1) \neq 0$ (cas 1°, sous-cas c).* — L'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{dy}{du} = H(u, y),$$

$H(u, y)$ étant holomorphe, pour u et y suffisamment petits. Nous pouvons représenter l'intégrale $y(u)$ qui, pour $u = u_0$, se réduit à y_0 par le développement

$$y = y_0 + A_1(u - u_0) + \ldots + A_p(u - u_0)^p + A_{p+1}(u - u_0)^{p+1} + \ldots.$$

Il existe, comme précédemment, des nombres ε_3 et α_3 tels que le second membre soit une fonction holomorphe de u_0, y_0, $u - u_0$, si l'on a

$$|u_0| < \alpha_3, \qquad |y_0| < \varepsilon_3, \qquad |u - u_0| < \alpha_3.$$

Si nous supposons que $u = 0$ soit racine d'ordre p, mais non racine d'ordre $p + 1$ de $A(u, 1) = 0$ (en général, $p = 0$), on voit facilement que les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont nuls pour $y_0 = u_0 = 0$, tandis que A_{p+1} n'est pas nul pour ces valeurs.

Nous avons

$$x = uy, \qquad x_0 = u_0 y_0;$$

$$(12) \quad x = (u_0 + u - u_0)[y_0 + A_1(u - u_0) + \ldots + A_p(u - u_0)^p + A_{p+1}(u - u_0)^{p+1} + \ldots],$$

$$(12') \quad x = x_0 + B_1(u - u_0) + \ldots + B_{p+1}(u - u_0)^{p+1} + B_{p+2}(u - u_0)^{p+2} + \ldots.$$

Les B sont comme les A des fonctions holomorphes de u_0 et y_0.

$B_1, B_2, \ldots, B_{p+1}$ sont nuls pour $u_0 = y_0 = 0$, tandis que

$$B_{p+2} = u_0 A_{p+2} + A_{p+1}$$

n'est pas nul pour ces valeurs.

On conclut de l'égalité (12'), d'après le théorème d'existence des fonctions implicites, qu'il existe des nombres η_1 et α_1, tels que, si l'on a

$$(13)\qquad |u_0| < \alpha_1, \qquad |x_0| < \eta_1, \qquad |x| < \eta_1,$$

les valeurs de u vérifiant la relation (12′) et satisfaisant à

$$|u - u_0| < \alpha_1$$

soient en nombre égal à $p+2$. Ces $p+2$ déterminations de u sont racines d'une équation en u de degré $p+2$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de u_0, x_0, x, vérifiant les conditions (13). Cela revient à dire que les $p+2$ valeurs de y correspondantes sont des fonctions algébroïdes de u_0, x_0, x.

Voyons vers quelles limites tendent ces déterminations, soit de u, soit de y, lorsque x tend vers o. D'après (12), ces valeurs de u tendent vers les valeurs de u annulant l'un ou l'autre des facteurs du second membre, donc une des valeurs de u tend vers o annulant le premier facteur, tandis que les $p+1$ autres tendent vers les valeurs de u annulant le second facteur, c'est-à-dire y. Donc $p+1$ des déterminations de y tendent vers o, tandis que l'autre détermination de y tend vers une limite, en général différente de o, mais cependant très petite. Si nous ne pouvons affirmer que toutes ces $p+2$ déterminations se permutent entre elles, lorsque x varie dans le domaine considéré, nous pouvons cependant affirmer que, partant de la détermination $y(x)$, qui pour $x = x_0$ est égale à y_0, on obtiendra, en tournant, s'il y a lieu, autour de points critiques convenables, une des $p+1$ déterminations de y qui tendent vers o avec x. En effet, lorsque y tend vers o, u tend vers une des $p+1$ valeurs de u annulant le second facteur du second membre de (12), x tend donc aussi vers o, puisque l'on a $x = uy$. En raisonnant comme dans le cas précédent, nous voyons que cela suffit à montrer que y tend vers o avec x.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant, tout à fait analogue à celui du cas précédent, avec lequel il se confond, si l'on a $p = 0$: *Si l'on a*

$$|u_0| < \alpha_1, \qquad |y_0| < \varepsilon_3, \qquad |x_0| < \eta_1, \qquad |x| \leqq \eta_1,$$

il existe une intégrale $y(x)$, qui pour $x = x_0$ est égale à y_0, et qui *tend vers* o *avec* x. Cette intégrale est constituée par un certain nombre de branches d'une fonction algébroïde de x. (On peut déterminer le nombre maximum de ces branches.) Pour toutes ces branches, y tend vers o avec x. Cette fonction algébroïde peut, en outre, posséder une autre branche pour laquelle y ne tend pas vers o avec x.

9. *Intégrales pour lesquelles t_0 est très voisin d'une racine de* $A(1, t) = 0$ (*cas* 2°). — Posons $y = tx$, nous obtenons l'équation (4), qui peut s'écrire, puisqu'il n'y a pas de directions singulières,

$$\frac{dx}{dt} = H(x, t)$$

H étant une fonction holomorphe de x et de t, pour x suffisamment petit et pour t suffisamment voisin d'une racine t_i de $A(1, t)$. L'intégrale $x(t)$, qui pour $t = t_0$ se réduit à x_0, peut être représentée par

$$(14) \qquad x = x_0 + A_1(t - t_0) + \ldots + A_{p+1}(t - t_0)^{p-1} + \ldots$$

et il existe des nombres η_i, β_i, tels que le second membre soit une fonction holomorphe de t_0, x_0, $t - t_0$, si l'on a

$$|t_i - t_0| < \beta_i, \qquad |x_0| < \eta_i, \qquad |t - t_i| < \beta_i.$$

Si nous supposons que $t = t_i$ soit une racine d'ordre p de

$$A(1, t) = 0,$$

les coefficients A_1, A_2, $\ldots$, A_p seront nuls pour $t_0 = t_i$, $x = 0$; mais A_{p+1} n'est pas nul pour ces valeurs.

Il en résulte qu'il existe des nombres β'_i et η'_i tels que, si l'on a

$$|t_i - t_0| < \beta'_i, \qquad |x_0| < \eta'_i, \qquad |x| \leqq \eta'_i,$$

les valeurs de t vérifiant la relation (14) et satisfaisant à la condition

$$(15) \qquad |t - t_0| < \beta'_i$$

seront exactement en nombre égal à $p + 1$. A ces $p + 1$ déterminations de t correspondent, d'après $y = tx$, $p + 1$ déterminations de y, qui, comme les valeurs de t, sont des fonctions algébroïdes de x. Lorsque x tend vers o, les $p+1$ valeurs de t tendent vers des limites satisfaisant à la condition (15), donc les $p+1$ valeurs de y tendent vers o. Nous pouvons par suite énoncer le résultat suivant : *Si l'on a*

$$|t_i - t_0| < \beta_i, \qquad |x_0| < \eta_i, \qquad |x| \leqq \eta_i,$$

l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1), *qui pour $x = x_0$ est égale à y_0, est une fonction algébroïde de x dont on peut déterminer le nombre maximum des déterminations dans le domaine considéré. Toutes ces déterminations tendent vers* o *avec x.*

Pour chacune des racines t_i, il existera des nombres β_i et η_i; nous désignerons par β le plus petit des β_i et par η le plus petit des η_i.

10. *Intégrales pour lesquelles t_0 n'est ni très grand, ni voisin d'une racine de* $A(1, t) = 0$ (*cas* 3°). — D'une façon plus précise nous supposerons que l'on n'ait pas

$$(16) \qquad |t_0| > \frac{1}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad |t_0 - t_i| < \beta,$$

α étant le plus petit des nombres α', α_2, α_4 trouvés dans les divers cas de 1°. La seconde des inégalités (16) doit avoir lieu pour les diverses racines t_i de $A(1, t)$.

Soit D l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles on a

$$|t| < \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{2}, \qquad |t - t_i| > \frac{\beta}{2}.$$

On peut trouver un nombre η, tel que, si t appartient à l'ensemble D et si l'on a $|x| < \eta$, le coefficient de dt dans l'équation (4) ne s'annule pas, et cette équation peut s'écrire

$$\frac{dt}{dx} = H(x, t),$$

H étant une fonction holomorphe de x et de t pour les valeurs considérées. Pour ces valeurs, H restera inférieur en module à un certain nombre M. Il en résulte qu'il existe un nombre η', tel que l'intégrale $t(x)$, qui pour $x = x_0$ prend la valeur de t_0, soit une fonction holomorphe de x, si l'on a

$$|x_0| < \eta', \qquad |t_0| \leqq \frac{1}{\alpha}, \qquad |t_0 - t_i| > \beta, \qquad |x| \leqq \eta',$$

t tendra vers une limite finie, lorsque x tend vers o.

D'après la relation $y = tx$, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (3), qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0 ($y_0 = t_0 x_0$), sera une fonction holomorphe de x et tendra vers o avec x.

11. *Conclusions.* — Si nous désignons par ε le plus petit des nombres η et ε affectés d'indices que nous avons trouvés, nous pourrons résumer les divers résultats précédents en disant : *Il existe un nombre ε tel que, si l'on a*

$$|x_0| \leqq \varepsilon, \qquad |y_0| \leqq \varepsilon,$$

l'intégrale de l'équation (3) *qui répond à la condition $y(x_0) = y_0$ soit, pour $|x| \leqq \varepsilon$, une fonction algébroïde, dont une au moins des déterminations tend vers* o *avec x, en même temps que $\frac{y}{x}$ tend vers une limite finie ou infinie.*

Il en résulte que si, pour une de ces intégrales, on considère une des déterminations tendant vers o avec x, cette détermination sera fournie soit par l'intégrale de (4) qui pour $x =$ o prend une valeur $t = c$, convenablement choisie, soit par l'intégrale de (5) qui répond aux conditions initiales $x =$ o, $u =$ o.

Toutes les déterminations de y tendent vers o avec x dans les deux cas suivants : 1° *x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$*; 2° *on a $t_0 \leqq \frac{1}{\alpha}$*. Le premier de ces cas nous donne le théorème suivant : *Si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, toute intégrale $y(x)$ correspondant aux conditions initiales $|x_0| \leqq \varepsilon$, $|y_0| \leqq \varepsilon$ tend vers* o *avec x.*

Si nous appelons *direction critique* un système de valeurs de x

et y pour lesquelles $x\mathrm{A}(x, y)$ est nul, avec la restriction que $x = 0$ ne sera pas une direction critique, si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si x_0 et y_0 ne sont pas voisins d'une direction critique, l'intégrale relative aux valeurs initiales x_0, y_0 est holomorphe pour $|x| < |x_0|$.

Si nous ne voulons pas considérer exclusivement, comme dans ce qui précède, le cas où la variable indépendante x est donnée, mais si nous cherchons des systèmes de valeurs de x et y dépendant d'un paramètre z et satisfaisant à l'équation différentielle, nous dirons qu'on peut toujours obtenir les valeurs de x et y, correspondant à des conditions initiales x_0, y_0 suffisamment petites, au moyen de deux développements suivant les puissances d'un paramètre z. Ces développements convergent dans un certain cercle du plan de la variable complexe z. Lorsque z varie dans ce cercle, le développement représentant x ou celui représentant y (suivant le paramètre z choisi) prend toutes les valeurs inférieures en module à la valeur initiale correspondante; de plus, pour une valeur de z au moins, x et y sont nuls simultanément.

On voit enfin qu'à l'exception des intégrales pour lesquelles la tangente à l'origine satisfait à l'équation $\mathrm{A}(x, y) = 0$ et pour lesquelles l'origine est un point de rebroussement, l'origine est pour toutes les autres courbes intégrales voisines de l'origine un point ordinaire : une des variables x ou y est une fonction holomorphe de l'autre.

Tous ces énoncés résultent immédiatement des paragraphes précédents.

12. *Cas où il existe des directions singulières.* — Si le point dicritique considéré présente des directions singulières, les résultats précédents ne peuvent subsister intégralement. Supposons, par exemple, pour fixer les idées, que $\frac{y}{x} = 0$ soit une direction singulière; c'est-à-dire supposons que $\mathrm{A}(x, y)$ et $\psi_n(x, y)$ admettent l'un et l'autre y en facteur. L'équation (4) en x et t admettra le point singulier $x = 0$, $t = 0$. La plupart des singularités qui se présentent dans le voisinage d'un point singulier pourront se présenter : les coefficients des termes de moindre degré en t et x pourront en effet avoir des valeurs quelconques. Il pourra y avoir un nombre fini ou infini d'intégrales pour lesquelles t tend vers o, avec x; ces intégrales pourront admettre $x = 0$ comme point ordinaire ou comme point transcendant. Il faut cependant remarquer que $x = 0$ ne sera jamais un point essentiel; en effet, $A(1, t)$ n'étant jamais identiquement nul, le coefficient de dt dans (4) ne contient jamais x en facteur, t tend toujours vers une limite lorsque x tend vers o. Cette limite peut, bien entendu, dépendre de la façon dont x tend vers o, puisque plusieurs déterminations de t peuvent se permuter dans le voisinage de $x = 0$.

L'existence d'une direction singulière, $t = 0$ par exemple, ne changerait pourtant rien aux résultats énoncés précédemment, si toutes les intégrales relatives aux valeurs initiales suffisamment petites x_0, t_0 étaient algébroïdes pour $|x| < |x_0|$, et restaient finies lorsque x tend vers o. C'est ce qui se produit si $t = 0$, $x = 0$ est un point dicritique pour l'équation en t et x.

Un cas plus important à signaler est celui où la direction $x = 0$ n'est pas une direction singulière; c'est-à-dire le cas où $A(x, y)$ et $\varphi_n(x, y)$ ne contiennent pas l'un et l'autre x en facteur. Les résultats établis dans le cas 1° subsistent :

Si $|t_0| = \left|\frac{y_0}{x_0}\right|$ est suffisamment grand $\left(\text{d'une façon précise } |t_0| > \frac{1}{\alpha}\right)$ et si x_0 et y_0 sont suffisamment petits, l'intégrale répondant aux conditions initiales x_0, y_0 est, pour $|x| < |x_0|$, une fonction algébroïde, dont une au moins des déterminations tend vers o avec x. Dans le cas particulier où x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, cette intégrale est, pour $|x| < |x_0|$, une fonction holomorphe et tend vers o avec x.

Il résulte de là que, dans le cas où $x = 0$ n'est pas direction singulière, toute intégrale $y(x)$ dont les valeurs initiales x_0, y_0 sont suffisamment petites est une fonction qui peut ne pas être algébroïde, s'il y a des directions singulières, et peut, pour x voisin de o, admettre une infinité de déterminations; un nombre fini (¹) de ces détermina-

(¹) Si l'on a $|t_0| \leqq \frac{1}{\alpha}$ ou si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, ce nombre tions tendent vers une limite différente de o, lorsque x tend vers o, mais toutes les autres, en nombre au moins égal à un, tendent vers o. En particulier, si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ et si l'on n'a pas $A(0, y) = 0$, y tend toujours vers o avec x, si les valeurs initiales x_0, y_0 sont suffisamment petites. Ce théorème résulte en effet de l'examen des divers cas de 1°, si l'on considère les intégrales pour lesquelles on a $|t_0| > \frac{1}{\alpha}$. Si cette dernière condition n'est pas remplie, ou bien t ne devient pas supérieur à $\frac{1}{\alpha}$, lorsque x tend vers o, ou bien t prend, pour une valeur $x = x_1$, une valeur $t = t_1$ avec $|t_1| > \frac{1}{\alpha}$. Dans le premier cas, $y = tx$ tend évidemment vers o avec x. Dans le second cas, en considérant l'intégrale relative aux valeurs initiales x_1, t_1, on est dans le cas 1°.

Par exemple, si l'on considère l'équation

$$x(y + x^2)\frac{dy}{dx} = y(y + 2x^2),$$

le point dicritique $x = y = 0$ admet la direction singulière $y = 0$. En posant $y = tx$, l'équation devient

$$(t + x)\,dt = t\,dx.$$

Nous avons une infinité d'intégrales transcendantes pour lesquelles t tend vers o avec x. L'intégrale générale est donnée par

$$x = Ct + t\log t$$

ou

$$\frac{y}{x}e^{-\frac{x^2}{y}} = \text{const.}$$

---

fini est nul; si l'on a $|t_0| > \frac{1}{\alpha}$, ce nombre est le nombre déterminé dans le cas 1°, sous-cas b et c.

On vérifierait facilement que y tend vers o, de quelque façon que x tende vers o. Les théorèmes que nous avons démontrés n'établissaient ce fait que pour les intégrales prenant des valeurs x_0, y_0 suffisamment petites.