JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les fonctions abéliennes singulières d'invariants huit, douze et cinq

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 329-355.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__329_0>

Sur les fonctions abéliennes singulières d'invariants HUIT, DOUZE *et* CINQ;

PAR M. G. HUMBERT.

---

1. J'ai donné autrefois les *équations modulaires* pour les fonctions abéliennes singulières de deux variables, dont les invariants sont respectivement huit, douze et cinq : dans le présent travail, je voudrais introduire, au lieu des *modules* ordinaires de Richelot, les valeurs des dix thêtas normaux du premier ordre, d'arguments nuls. On arriverait évidemment au but en remplaçant les modules, dans les équations modulaires, par leurs valeurs en fonction des dix thêtas, mais les relations ainsi obtenues seraient décomposables en facteurs difficiles à mettre en évidence : c'est donc par d'autres méthodes que nous formerons les équations cherchées.

Elles conduisent, comme les relations classiques entre les thêtas elliptiques, à des conséquences arithmétiques : pour les invariants huit ou douze ces conséquences, à peu près évidentes *a priori*, concernent les décompositions des nombres du corps quadratique $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ en sommes de carrés de deux nombres appartenant au même corps; pour l'invariant cinq, j'arrive à des propositions, un peu plus cachées peut-être, sur les décompositions en sommes de trois carrés des nombres du type $M + \frac{1}{2}N(1+\sqrt{5})$, où M et N sont des entiers ordinaires.

Enfin, dans le cas de l'invariant douze, je comble une lacune de mes travaux précédents. Si l'on part de périodes vérifiant la relation $g = 3g'$, la transformation singulière de degré un, dont toutes les autres sont des puissances, change les fonctions abéliennes initiales en des fonctions *de modules différents,* et *douze* est le plus petit invariant donnant lieu à ce fait remarquable. Le problème se posait, dès lors, d'exprimer les modules nouveaux en fonction des anciens, ou, ce qui est identique, de traiter le même problème pour les dix thêtas d'arguments nuls : c'est la question qu'on trouvera résolue ici, et par des formules très simples.

Cas de l'invariant HUIT.

2. Les paires de périodes d'un système de fonctions abéliennes étant 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', nous emploierons, pour les thêtas du premier ordre, les notations de Weierstrass : comme il ne s'agira, jusqu'à nouvel avis, que des valeurs de ces thêtas pour les arguments nuls, nous écrirons $\vartheta_5(g, h, g')$, ou ϑ_5 pour la valeur de $\vartheta_5(u, v)$ au point $u = v = 0$.

Cherchons maintenant les relations qui lient les dix thêtas pairs lorsqu'on a, entre les périodes, la condition $g' = 2g$, à laquelle peut se ramener toute équation singulière d'invariant *huit*.

Soit posé

$$\Theta_5 = \vartheta_5(2g, 2h, 2g');$$

on a, d'une manière générale [1],

$$4\Theta_5^2 = \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2. \tag{1}$$

Or, si $g' = 2g$, on peut écrire, par définition,

$$\Theta_5 = \Sigma\, e^{\pi i (2gm^2 + 4hmn + 4gn^2)}, \tag{2}$$

la somme portant sur les valeurs entières de m, n, de $-\infty$ à $+\infty$; de

(1) Krause, *Transformation des fonctions hyperelliptiques* (Teubner, 1886), p. 160.

même

$$\vartheta_5 = \sum e^{\pi i (gm^2 + 2hmn + 2gn^2)},$$
$$\vartheta_{12} = \sum e^{\pi i (gm^2 + 2hmn + 2gn^2) + \pi i m}.$$

Dans la somme $\vartheta_5 + \vartheta_{12}$, les termes qui correspondent aux mêmes valeurs de m et de n se détruisent si m est impair, et s'ajoutent si m est pair ; on a donc

$$\vartheta_5 + \vartheta_{12} = 2\sum e^{\pi i (4g\mu^2 + 4h\mu n + 2gn^2)},$$

c'est-à-dire, par comparaison avec (2),

$$\vartheta_5 + \vartheta_{12} = 2\Theta_5.$$

En remplaçant $2\Theta_5$ par cette valeur dans (1), on trouve

$$\vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 = 2\vartheta_5\vartheta_{12}.$$

On obtient, d'une manière analogue, cinq autres relations du même type entre les dix thêtas; voici le Tableau complet de ces six équations :

$$(3)\ \left\{\begin{array}{lll} \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 = 2\vartheta_5\vartheta_{12}, & \vartheta_{01}^2 + \vartheta_{23}^2 = 2\vartheta_5\,\vartheta_4\,, & \vartheta_2^2 + \vartheta_{14}^2 = 2\vartheta_4\vartheta_{12}, \\ \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_4\vartheta_{03}, & \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{23}^2 = 2\vartheta_{12}\vartheta_{03}, & \vartheta_2^2 - \vartheta_{14}^2 = 2\vartheta_5\vartheta_{03}. \end{array}\right.$$

Enfin, si l'on tire de ces relations les quantités ϑ_{34}^2, ϑ_2^2, ϑ_{23}^2, ϑ_{01}^2, en fonction des seconds membres, et si l'on porte leurs valeurs dans l'équation $\vartheta_1^2\vartheta_{23}^2 + \vartheta_2^2\vartheta_{34}^2 = \vartheta_5^2\vartheta_{01}^2$, qui est une des équations biquadratiques générales entre les thêtas d'arguments nuls, on obtient, après suppression du facteur $\vartheta_4\vartheta_5$, évidemment différent de zéro, la relation nouvelle

$$(4)\qquad \vartheta_5^2 = \vartheta_4^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{03}^2.$$

On constate ensuite aisément que les équations biquadratiques ordinaires entre les dix thêtas sont, dans le cas de $g' = 2g$, des conséquences de (3) et de (4); on verrait également qu'une seule des relations (3) et (4), jointe aux équations biquadratiques ordinaires, entraîne les autres conditions (3) et (4); on déduirait, enfin, de tout cela la relation entre les *modules* qui caractérise les fonctions abéliennes singulières d'invariant *huit*.

3. *Corollaire I.* — Posons

$$(5)\qquad x=\frac{\vartheta_4(g,h,2g)}{\vartheta_5(g,h,2g)},\qquad y=\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_5},\qquad z=\frac{\vartheta_{03}}{\vartheta_5};$$

on a, par (4), $x^2+y^2+z^2=1$, et, par (3),

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt{xy+z}=\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_5}, & \sqrt{yz+x}=\dfrac{\vartheta_{01}}{\vartheta_5}, & \sqrt{xz+y}=\dfrac{\vartheta_{34}}{\vartheta_5}, \\ \sqrt{xy-z}=\dfrac{\vartheta_{14}}{\vartheta_5}. & \sqrt{yz-x}=i\dfrac{\vartheta_{23}}{\vartheta_5}, & \sqrt{xz-y}=i\dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_5}, \end{cases}$$

d'où cette conclusion : étant donnée la sphère $x^2+y^2+z^2=1$, on peut exprimer en fonction uniforme (hyperabélienne) de deux variables g et h, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface, ainsi que les six radicaux $\sqrt{xy\pm z}$, $\sqrt{yz\pm x}$, $\sqrt{xz\pm y}$, et cela par les équations (5) et (6).

4. *Corollaire II.* — En remplaçant dans (3) et (4) les thêtas par leurs développements en séries d'exponentielles et faisant $g'=2g$, on arriverait aisément, par des procédés qui seront appliqués plus tard au cas de l'invariant cinq, à des conséquences arithmétiques. Par exemple, l'équation (4) conduit à ce théorème : si M et N sont deux entiers quelconques, le nombre des décompositions de

$$4(2\mathrm{M}+1+2\mathrm{N}\sqrt{2})$$

en deux carrés selon la formule

$$(7)\qquad (2m_1+2n_1\sqrt{2})^2+(2m_2+2n_2\sqrt{2})^2,$$

(où les m_i, n_i sont entiers) est égal au nombre des décompositions de la même quantité en deux carrés selon la formule

$$(8)\qquad [2\mu_1+(2\nu_1+1)\sqrt{2}]^2+[2\mu_2+(2\nu_2+1)\sqrt{2}]^2.$$

Mais cette proposition se démontre directement sans difficulté; car, à une décomposition (8) correspond une décomposition (7), et inversement, par les formules

$$m_1 = \nu_1 + \nu_2 + 1, \quad n_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad m_2 = \nu_1 - \nu_2, \quad n_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}.$$

Les équations (3) ne donneraient de même que des conclusions à peu près évidentes *a priori*.

Cas de l'invariant DOUZE.

3. Nous supposerons que la relation singulière entre les périodes est $g = 3g'$; une méthode analogue à la précédente, et basée sur les formules de la transformation ordinaire du troisième ordre, conduit, sans grandes difficultés [1], aux relations quadratiques suivantes entre les dix thêtas :

$$\vartheta_5^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_4\,\vartheta_{01}, \tag{1}$$

$$\vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_2\,\vartheta_{03}, \tag{2}$$

$$\vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 + \vartheta_0^2 = 2\vartheta_{12}\vartheta_{34}, \tag{3}$$

qu'il est aisé de vérifier *a posteriori*.

Considérons, par exemple, l'équation (1), et remplaçons-y les ϑ par leurs développements en séries : pour simplifier, nous poserons, dans ces développements,

$$h = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad g' = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\xi - \eta), \qquad g = 3g' = \frac{3}{2\sqrt{3}}(\xi - \eta);$$

---

[1] La méthode la plus simple consiste à observer que, si $g = 3g'$, les fonctions abéliennes proposées admettent une transformation du troisième ordre en elles-mêmes (ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 334, n° 194) qui change respectivement, à un même facteur près, $\vartheta_5, \vartheta_{23}, \vartheta_{14}, \vartheta_0$; $\vartheta_4, \vartheta_{01}$; $\vartheta_2, \vartheta_{03}$; $\vartheta_{12}, \vartheta_{34}$ en $\vartheta_5, \vartheta_{23}, \vartheta_{14}, \vartheta_0$; $\vartheta_{01}, \vartheta_4$; $\vartheta_{03}, \vartheta_2$; $\vartheta_{14}, \vartheta_{12}$; dès lors, les relations classiques entre les thêtas initiaux et les thêtas transformés donnent de suite les équations (1), (2) et (3) : on prendra, par exemple, les relations indiquées par M. Krause [*loc. cit.*, p. 193, équations (1)].

il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_5 &= \Sigma\, e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(n+m\sqrt{3})^2-\eta(n-m\sqrt{3})^2\right]},\\
\mathfrak{S}_{23} &= \Sigma\, e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\frac{1}{2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}},\\
\mathfrak{S}_{14} &= \Sigma\, e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\frac{1}{2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}+\pi i(m+n+1)},\\
\mathfrak{S}_0 &= \Sigma\, e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(n+m\sqrt{3})^2-\eta(n-m\sqrt{3})^2\right]+\pi i(m+n)}.
\end{aligned}$$

Toutes les sommes portent sur les valeurs entières de m et de n, de $-\infty$ à $+\infty$.

On a de même

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_4 &= \Sigma\, e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi\left(n+\frac{1}{2}+m\sqrt{3}\right)^2-\eta\left(n+\frac{1}{2}-m\sqrt{3}\right)^2\right]},\\
\mathfrak{S}_{01} &= \Sigma\, e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}}.
\end{aligned}$$

Le premier membre de (1) est une somme de termes du type

$$(4)\qquad e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(M+N\sqrt{3})-\eta(M-N\sqrt{3})\right]},$$

M et N étant entiers. Le coefficient dans $\mathfrak{S}_5^2-\mathfrak{S}_0^2$, du terme (4), pour lequel M et N sont donnés, s'obtient comme il suit. On pose

$$(5)\qquad M+N\sqrt{3}=(n_1+m_1\sqrt{3})^2+(n_2+m_2\sqrt{3})^2,$$

et l'on détermine toutes les solutions en nombres entiers m_i, n_i, de cette équation; dans $\mathfrak{S}_5^2$, le coefficient du terme (4) est le nombre, $\mathfrak{N}$, de ces systèmes de solutions; dans $\mathfrak{S}_0^2$, c'est la somme $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$, étendue aux mêmes systèmes.

De même, si l'on pose

$$(6)\quad M+N\sqrt{3}=\left[\nu_1+\tfrac{1}{2}+\left(\mu_1+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2+\left[\nu_2+\tfrac{1}{2}+\left(\mu_2+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2,$$

le coefficient du terme (4), dans $\mathfrak{S}_{23}^2$, est le nombre, $\mathfrak{N}'$, des systèmes de solutions en nombres entiers, μ_i, ν_i, de cette équation; dans $\mathfrak{S}_{14}^2$, c'est la somme $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$.

Enfin, si l'on pose

$$(7)\qquad M + N\sqrt{3} = \left[\sigma_1 + (\rho_1 + \tfrac{1}{2})\sqrt{3}\right]^2 + (\sigma_2 + \tfrac{1}{2} + \rho_2\sqrt{3})^2,$$

le coefficient, dans $\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_{01}$, du terme (4), sera le nombre $\mathfrak{N}''$ des systèmes de solutions de l'équation (7) en nombres entiers ρ_i, σ_i.

On a donc, en vertu même de la relation (1),

$$(8)\qquad \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' + \Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2} - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2} = 2\,\mathfrak{N}''.$$

Or, l'équation (5) donne

$$(5\,bis)\qquad M \equiv m_1 + n_1 + m_2 + n_2, \qquad N \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2).$$

De même (6) et (7) donnent respectivement

$$(6\,bis)\qquad M \equiv 0, \qquad N \equiv \mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 + 1 \quad (\mathrm{mod}\ 2),$$

$$(7\,bis)\qquad M \equiv \rho_2 + \sigma_1 + 1, \qquad N \equiv \rho_2 + \sigma_1 \quad (\mathrm{mod}\ 2).$$

6. Il faut, dès lors, distinguer quatre cas, selon les parités de M et de N.

1° M *et* N *impairs*. — Les congruences (5 *bis*) et (6 *bis*) montrent que les décompositions (5) et (6) sont impossibles; la décomposition (7) l'est aussi, puisque, par (7 *bis*), M et N sont de parités contraires; donc, tous les termes de la relation (8) sont nuls, et celle-ci est vérifiée.

2° M *et* N *pairs*. — La décomposition (7) est impossible, de sorte que $\mathfrak{N}''$ est nul; par les congruences (5 *bis*) et (6 *bis*), $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$ est égal à $\Sigma(+1)$, c'est-à-dire à $\mathfrak{N}$; $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$ est égal à $-\mathfrak{N}'$, et la relation (8) est encore vérifiée.

3° M *impair et* N *pair*. — La décomposition (6) est impossible, $\mathfrak{N}'$ et $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$ sont donc nuls; $m_1 + n_1 + m_2 + n_2$ étant impair, par (5 *bis*), $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$ est égal à $-\mathfrak{N}$, et la relation (8) s'écrit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$.

Or, cette égalité s'établit aisément *a priori*. Soit, en effet, ρ_1, σ_1, ρ_2, σ_2 une solution quelconque de (7); $\rho_2 + \sigma_1$ est *pair* en vertu de (7 *bis*). D'ailleurs $-\rho_1 - 1$, σ_1, ρ_2, σ_2 est aussi une solution de (7), distincte de la première, de sorte que le nombre des solutions de (7) pour lesquelles $\rho_1 + \sigma_2$ est *impair* est égal à $\frac{1}{2}\mathfrak{N}''$.

Soit alors $\rho_1, \ldots, \sigma_2$ une de ces solutions; on a identiquement, par la formule de Lagrange,

$$(9)\quad \begin{cases} \left\{[\sigma_1 + (\rho_1 + \tfrac{1}{2})\sqrt{3}]^2 + (\sigma_2 + \tfrac{1}{2} + \rho_2\sqrt{3})^2\right\}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \\ \quad = \left(\dfrac{\sigma_1 + 3\rho_2}{2} + \dfrac{\rho_1 + \sigma_2 + 1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{3\rho_1 - \sigma_2 + 1}{2} + \dfrac{\sigma_1 - \rho_2}{2}\sqrt{3}\right)^2. \end{cases}$$

Si donc on pose

$$(10)\quad \begin{cases} n_i = \dfrac{\sigma_1 + 3\rho_2}{2}, & m_i = \dfrac{\rho_1 + \sigma_2 + 1}{2}, \\ n_j = \dfrac{3\rho_1 - \sigma_2 + 1}{2}, & m_j = \dfrac{\sigma_1 - \rho_2}{2}, \end{cases}$$

les m, n sont entiers, et l'on voit (en faisant successivement $i, j = 1, 2$ ou $2, 1$), qu'à une solution de (7), pour laquelle $\rho_1 + \sigma_2$ est impair, correspondent *deux* solutions de (5) et deux solutions *distinctes*, car, M étant impair, la congruence (5 *bis*) montre qu'on ne peut avoir à la fois $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

Inversement, si m_i, n_i, m_j, n_j est une solution quelconque de (5), on tire de (10)

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{n_i + 3m_j}{2}, & \rho_1 = \dfrac{n_j + m_i - 1}{2}, \\ \sigma_2 = \dfrac{3m_i - n_j - 1}{2}, & \rho_2 = \dfrac{n_i - m_j}{2}. \end{cases}$$

Or, $m_1 + n_1 + m_2 + n_2$ étant impair, par (5 *bis*), l'une des quantités $n_i + m_j$ et $n_j + m_i$ est paire, la première par exemple, l'autre est impaire : les valeurs (11) des ρ, σ sont donc entières, et $\rho_1 + \sigma_2$ est évidemment impair.

Donc enfin, en vertu de la correspondance ainsi établie entre les solutions des équations (5) et (7), on a bien $\mathfrak{N} = 2 \times \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}''$, et la relation (8) est encore vérifiée.

4° M *pair et* N *impair*. — La relation (8) se réduit alors à l'égalité $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}''$, qu'on vérifie d'une manière analogue.

Donc enfin, la relation (8) est établie directement dans tous les cas; et, par là même, la relation (1) se trouve vérifiée par des raisonnements élémentaires d'arithmétique. Des considérations semblables s'appliquent aux relations (2) et (3).

Le système des formules (1), (2) et (3), ou l'une quelconque d'entre elles, caractérise le cas singulier où $g = 3g'$, et peut servir à former l'équation (dite *modulaire*) qui lie les modules de Richelot; on retrouverait ainsi la relation, de forme assez compliquée, que nous avons fait connaître précédemment ([1]).

Sans insister davantage sur ce point, nous aborderons une question intéressante, relative à la *transformation singulière* du premier degré des fonctions abéliennes pour lesquelles $g = 3g'$.

7. *Formules relatives à la transformation singulière de degré un.* — Soit $f(u, v)$ une fonction abélienne aux périodes $1, 0$; $0, 1$; g, h; h, g', avec $g = 3g'$; si l et k sont deux entiers liés par $l^2 - 3k^2 = 1$, et si l'on pose

$$(12) \qquad U = lu + 3kv, \qquad V = ku + lv,$$

$f(u, v)$ devient une fonction abélienne $F(U, V)$, aux paires de périodes $1, 0$; $0, 1$; G, H; H, G', définies par

$$(13) \quad G = lg + 3kh, \quad H = lh + 3kg' = kg - lh, \quad G' = kg + lg'$$

et l'on a encore $G = 3G'$. Les deux fonctions $f(u, v)$ et $F(U, V)$ sont dites liées par une transformation singulière de degré un, d'indices l et k; d'ailleurs, toutes les transformations ainsi obtenues sont des puissances de l'une d'elles, T_1, pour laquelle les indices l et k correspondent à la plus petite solution positive de l'équation de Pell : $l^2 - 3k^2 = 1$ ([2]).

J'ai montré de plus ([3]) que, la forme $l^2 - 3k^2$ pouvant représenter le nombre -1, les fonctions abéliennes déduites des fonctions $f(u, v)$

([1]) *Comptes rendus*, 2e semestre 1899.

([2]) Ce Journal, 5e série, t. VI, p. 313-316.

([3]) *Ibid.*, p. 324.

par les transformations T_1^{2q} ont les mêmes modules que celles-ci; les fonctions déduites des $f(u, v)$ par les T_1^{2q+1} ont entre elles les mêmes modules, mais *n'ont pas les mêmes modules que les* $f(u, v)$. L'invariant *douze* est le plus petit invariant (non carré) pour lequel ce dernier fait se produise.

Dès lors, se pose le problème suivant. La plus petite solution positive de $l^2 - 3k^2 = 1$ étant $l = 2$, $k = 1$, les formules (13) deviennent, pour T_1,

$$(14)\quad G = 2g + 3g, \quad H = 2h + 3g' = g + 2h, \quad G' = h + 2g',$$

et l'on demande d'exprimer les fonctions abéliennes aux périodes 1, 0; 0, 1; G, H; H, G', à l'aide des modules des fonctions initiales, aux périodes 1, 0; 0, 1; g, h; h, g'; on suppose toujours $g = 3g'$. Au lieu des modules, on peut, ce qui revient au même, introduire les dix thêtas pairs d'arguments nuls, et c'est ce que nous allons faire.

Nous désignerons par ϑ les thêtas qui correspondent à g, h, g'; par ϑ' ceux qui correspondent à G, H, G'. On a, en faisant $g = 3g'$,

$$\vartheta_5 = \vartheta_5(g, h, g') = \Sigma\, e^{\pi i [g'(3\rho^2 + \sigma^2) + 2h\rho\sigma]}$$

(ρ, σ entiers, de $-\infty$ à $+\infty$).

$$\vartheta_0 = \vartheta_0(g, h, g') = \Sigma\, e^{\pi i [g'(3\rho^2 + \sigma^2) + 2h\rho\sigma] + \pi i (\rho + \sigma)}.$$

Posons

$$\Theta_5 = \vartheta_5(2G, 2H, 2G'),$$

on a de même, par (14),

$$\Theta_5 = \Sigma\, e^{\pi i g' [3(m+n)^2 + (3m+n)^2] + 2\pi i h (3m+n)(m+n)}$$

et de là résulte immédiatement, en observant que dans $\vartheta_5 + \vartheta_0$ les termes pour lesquels $\rho + \sigma$ est impair se détruisent, tandis que ceux pour lesquels $\rho + \sigma$ est pair s'ajoutent,

$$2\Theta_5 = \vartheta_5 + \vartheta_0.$$

Nous avons vu plus haut (n° 2) que

$$4\Theta_5^2 = \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2,$$

donc, on a

$$\vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2 = (\vartheta_5 + \vartheta_0)^2. \tag{15}$$

On trouverait de même

$$\left\{\begin{aligned} 4\Theta_{01}^2 &= \vartheta_5'^2 - \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 - \vartheta_0'^2 = (\vartheta_{23} + \vartheta_{14})^2, \\ 4\Theta_4^2 &= \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 - \vartheta_{34}'^2 - \vartheta_0'^2 = (\vartheta_{23} - \vartheta_{14})^2, \\ 4\Theta_{23}^2 &= \vartheta_5'^2 - \vartheta_{12}'^2 - \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2 = (\vartheta_5 - \vartheta_0)^2. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Partons maintenant des fonctions abéliennes aux paires de périodes $1, 0$; $0, 1$; $G, -H$; $-H, G'$, et effectuons sur elles la transformation T_1 : nous trouvons, par (14), pour les périodes transformées,

$$\mathcal{G} = 2G - 3H = g, \qquad \mathcal{H} = G - 2H = h, \qquad \mathcal{G}' = -H + 2G' = g'.$$

Le changement de H en $-H$ laisse les ϑ' invariables, sauf ϑ'_{14} qui est changé de signe; il résulte de là que les équations (15) et (16) entraînent les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_5 + \vartheta'_0)^2, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_{23} - \vartheta'_{14})^2, \\ \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_{23} + \vartheta'_{14})^2, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 &= (\vartheta'_5 - \vartheta'_0)^2. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Enfin, on a, par (1), (2) et (3), puisque $g = 3g'$ et $G = 3G'$,

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_5^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 &= 2\vartheta_4\,\vartheta_{01}, & \vartheta_5'^2 + \vartheta_{23}'^2 + \vartheta_{14}'^2 - \vartheta_0'^2 &= 2\vartheta'_4\,\vartheta'_{01}, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 &= 2\vartheta_2\,\vartheta_{03}, & \vartheta_5'^2 - \vartheta_{23}'^2 - \vartheta_{14}'^2 - \vartheta_0'^2 &= 2\vartheta'_2\,\vartheta'_{03}, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 + \vartheta_0^2 &= 2\vartheta_{12}\vartheta_{34}, & \vartheta_5'^2 - \vartheta_{23}'^2 + \vartheta_{14}'^2 + \vartheta_0'^2 &= 2\vartheta'_{12}\vartheta'_{34}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

De toutes ces relations, et des relations biquadratiques générales entre les dix thêtas, on déduit sans difficulté les ϑ' en fonction des ϑ, sous la forme :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} & & \vartheta'^2_{34} &= \vartheta_5\vartheta_0 + \vartheta_{23}\vartheta_{14},\\ 2\vartheta'^2_5 &= \vartheta_5^2 + \vartheta_0^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2, & \vartheta'^2_{12} &= \vartheta_5\vartheta_0 - \vartheta_{23}\vartheta_{14},\\ 2\vartheta'^2_0 &= \vartheta_5^2 + \vartheta_0^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2, & \vartheta'^2_{2} &= \vartheta_0\vartheta_{23} + \vartheta_5\vartheta_{14},\\ 2\vartheta'^2_{23} &= \vartheta_5^2 - \vartheta_0^2 + \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2, & \vartheta'^2_{03} &= \vartheta_0\vartheta_{23} - \vartheta_5\vartheta_{14},\\ 2\vartheta'^2_{14} &= \vartheta_5^2 - \vartheta_0^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2, & \vartheta'^2_{4} &= \vartheta_5\vartheta_{23} - \vartheta_0\vartheta_{14},\\ & & \vartheta'^2_{01} &= \vartheta_5\vartheta_{23} + \vartheta_0\vartheta_{14}. \end{aligned}\right.$$

Les expressions des ϑ en fonction des ϑ' seraient les mêmes ; il suffirait de permuter ϑ_i et ϑ'_i, sauf ϑ_{14} qui serait changé en $-\vartheta'_{14}$.

8. ***Relations entre les modules de Borchardt.*** — Les quantités

$$\rho = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_5}, \qquad \sigma = \frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_5}, \qquad \tau = \frac{\vartheta_{14}}{\vartheta_5}$$

forment un système de modules de Borchardt; elles sont liées par une équation qu'on obtient aisément. On a, d'une manière générale, entre les ϑ, la relation ordinaire

$$\vartheta_4^2\vartheta_{01}^2 = \vartheta_5^2\vartheta_{23}^2 - \vartheta_0^2\vartheta_{14}^2,$$

d'où, en substituant à $\vartheta_4\vartheta_{01}$ sa valeur (1),

$$(\vartheta_5^2 + \vartheta_{23}^2 - \vartheta_0^2 + \vartheta_{14}^2)^2 = 4(\vartheta_5^2\vartheta_{23}^2 - \vartheta_0^2\vartheta_{14}^2),$$

c'est-à-dire

$$(1 + \sigma^2 + \tau^2 - \rho^2)^2 = 4(\sigma^2 - \rho^2\tau^2),$$

ce qu'on écrit aussi

$$(20)\qquad (\tau^2 + \rho^2)^2 + 2(1 + \sigma^2)(\tau^2 - \rho^2) + (1 - \sigma^2)^2 = 0.$$

Telle est la relation, entre les modules de Borchardt considérés, qui caractérise le cas singulier où $g = 3g'$.

Pour les fonctions abéliennes liées aux précédentes par la transformation singulière (12), introduisons les modules analogues

$$\rho' = \frac{\mathfrak{S}'_0}{\mathfrak{S}'_5}, \qquad \sigma' = \frac{\mathfrak{S}'_{23}}{\mathfrak{S}'_5}, \qquad \tau' = \frac{\mathfrak{S}'_{14}}{\mathfrak{S}'_5},$$

nous aurons, en vertu de (19),

$$\rho'^2 = \frac{1+\rho^2-\sigma^2-\tau^2}{1+\rho^2+\sigma^2+\tau^2}, \qquad \sigma'^2 = \frac{1-\rho^2+\sigma^2-\tau^2}{1+\rho^2+\sigma^2+\tau^2}, \qquad \tau'^2 = \frac{1-\rho^2-\sigma^2+\tau^2}{1+\rho^2+\sigma^2+\tau^2},$$

et ρ', σ', τ' sont liées aussi par l'équation (20).

Cas de l'invariant CINQ.

9. La relation singulière entre les périodes peut être supposée de la forme

$$g' = h + g;$$

pour trouver les relations correspondantes, les plus simples possibles, entre les dix thêtas pairs d'arguments nuls, considérons les deux produits

$$(1) \quad \mathfrak{S}_0(u, v)\mathfrak{S}_{34}(u, v)\mathfrak{S}_{12}(u, v), \quad \mathfrak{S}_{23}(u, v)\mathfrak{S}_4(u, v)\mathfrak{S}_{01}(u, v).$$

Ce sont deux fonctions thêta du troisième ordre, paires et de caractéristique nulle; avec les notations que nous avons proposées pour les seize thêtas d'ordre un et les seize demi-périodes, on reconnaît immédiatement que chacune des deux fonctions ([1]) s'annule simplement pour les six demi-périodes

$$(24'), \quad (34'), \quad (41'), \quad (43'), \quad (14'), \quad (42'),$$

et doublement pour les trois demi-périodes

$$(44'), \quad (23'), \quad (32').$$

D'un autre côté, puisque $g' = h + g$, il existe une fonction inter-

---

([1]) Ce Journal, 4e série, t. IX, p. 58; 5e série, t. V, p. 287-288.

médiaire singulière, d'indices $l = 1$, $k = 1$, de caractéristique nulle, et une seule (à un facteur constant près) ([1]); le développement en série de cette fonction $\varphi_{1,1}(u, v)$ est ([2])

$$\varphi_{1,1} = \sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i(\rho+\sigma)u + 2\pi i(\rho+2\sigma)v + \pi i[G_0(\rho+\sigma)^2 + 2H_0(\rho+\sigma)(\rho+2\sigma) + G'_0(\rho+2\sigma)^2]},$$

étant posé $G_0 = 2g - h$; $H_0 = -g + h$; $G'_0 = g$; et ρ, σ variant, par valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. On peut écrire, en posant $\rho + \sigma = n$, $\sigma = m$,

$$(2) \qquad \varphi_{1,1} = \sum_{m,n} e^{2\pi i[nu + (m+n)v] + \pi i[g(m^2+n^2) + h(2mn+n^2)]}.$$

De même, il existe une et une seule fonction intermédiaire singulière d'indices $l = 2$, $k = -1$, et de caractéristique nulle, donnée par la formule

$$(3) \qquad \varphi_{2,-1} = \sum_{m,n} e^{2\pi i[(n-m)u + mv] + \pi i[g(m^2+n^2) + h(2mn+n^2)]}.$$

D'ailleurs $\varphi_{1,1}$ s'annule pour les six demi-périodes ([3])

$$(4) \qquad (24'), \quad (34'), \quad (41'), \quad (44'), \quad (23'), \quad (32');$$

$\varphi_{2,-1}$ s'annule pour les six demi-périodes

$$(43'), \quad (14'), \quad (42'), \quad (44'), \quad (23'), \quad (32');$$

et le produit $\varphi_{1,1}(u, v)\varphi_{2,-1}(u, v)$ est une fonction thêta normale, d'ordre trois et de caractéristique nulle.

Ce produit, par ce qui précède, s'annule simplement pour les six demi-périodes, et doublement pour les trois demi-périodes qui annulent simplement et doublement les deux fonctions (1); donc, ρ désignant une constante arbitraire, les deux thêtas d'ordre trois,

---

([1]) Ce Journal, 5e série, t. V, p. 271-277 et p. 318-319.
([2]) *Ibid.*, p. 274.
([3]) *Ibid.*, p. 293.

en u, v,

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_{1,1}(u, v)\,\varphi_{2,-1}(u, v) \\ \text{et} \\ \mathfrak{S}_0(u, v)\,\mathfrak{S}_{34}(u, v)\,\mathfrak{S}_{12}(u, v) + \rho\,\mathfrak{S}_{23}(u, v)\,\mathfrak{S}_4(u, v)\,\mathfrak{S}_{01}(u, v) \end{cases}$$

ont, pour ces demi-périodes, un nombre de zéros communs égal à $6 + 4 \times 3 = 18$, et l'on peut disposer de ρ de manière à leur donner un dix-neuvième zéro commun; mais deux thêtas d'ordre trois n'ayant que $2.3.3 = 18$ zéros communs, il faut alors que les deux fonctions (5) aient un facteur commun, et comme $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,-1}$ sont évidemment indécomposables, les deux fonctions (3), pour une valeur convenable de ρ, sont identiques, à un facteur constant près. On a donc, λ et μ désignant des constantes convenables,

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda\,\mathfrak{S}_0(u, v)\,\mathfrak{S}_{34}(u, v)\,\mathfrak{S}_{12}(u, v) + \mu\,\mathfrak{S}_{23}(u, v)\,\mathfrak{S}_4(u, v)\,\mathfrak{S}_{01}(u, v) \\ = \mathfrak{S}_5(0, 0)\,\varphi_{1,1}(u, v)\,\mathfrak{S}_{2,-1}(u, v). \end{cases}$$

Pour déterminer λ, faisons, dans cette relation, $u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ [ce qui correspond à la demi-période (12′), annulant $\mathfrak{S}_{23}(u, v)$ et $\mathfrak{S}_4(u, v)$]; il reste ainsi

$$(7)\quad \lambda\,\mathfrak{S}_0(0, \tfrac{1}{2})\,\mathfrak{S}_{34}(0, \tfrac{1}{2})\,\mathfrak{S}_{12}(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_5(0, 0)\,\varphi_{1,1}(0, \tfrac{1}{2})\,\varphi_{2,-1}(0, \tfrac{1}{2}).$$

Or, par les développements (2) et (3), on a, en tenant compte de $g' = h + g$,

$$\varphi_{1,1}\,(0, \tfrac{1}{2}) = \sum e^{\pi i(gm^2 + 2hmn + g'n^2) + \pi i(m+n)} = \mathfrak{S}_0(0, 0),$$

$$\varphi_{2,-1}(0, \tfrac{1}{2}) = \sum e^{\pi i(gm^2 + 2hmn + g'n^2) + \pi i m} = \mathfrak{S}_{12}(0, 0).$$

D'ailleurs,

$$\mathfrak{S}_0(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_{12}(0, 0); \qquad \mathfrak{S}_{34}(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_5(0, 0);$$
$$\mathfrak{S}_{12}(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_0(0, 0),$$

de sorte que l'équation (7) donne $\lambda = 1$. On trouverait de même, en faisant, dans (6), $u = \frac{h}{2}$, $v = \frac{g'}{2}$ [ce qui répond à la demi-période (13')], $\mu = 1$; de sorte qu'on a l'identité

$$
(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \vartheta_0(u, v)\, \vartheta_{34}(u, v)\, \vartheta_{12}(u, v) + \vartheta_{23}(u, v)\, \vartheta_4(u, v)\, \vartheta_{01}(u, v) \\ & = \vartheta_5(0, 0)\, \varphi_{1,1}(u, v)\, \varphi_{2,-1}(u, v). \end{aligned} \right.
$$

Si l'on y suppose $u = v = 0$, il vient, *entre les thêtas d'ordre un et d'arguments nuls, la relation*

$$
(9) \qquad \vartheta_0 \vartheta_{34} \vartheta_{12} + \vartheta_{23} \vartheta_4 \vartheta_{01} = \vartheta_5^3,
$$

car $\varphi_{1,1}(0, 0)$ et $\varphi_{2,-1}(0, 0)$ sont égaux à $\vartheta_5(0, 0)$, en vertu même de (2) et (3), et de $g' = h + g$.

En considérant les *neuf* caractéristiques paires, autres que (0, 0, 0, 0), on obtiendrait *neuf* relations du même type que (8). Par exemple,

$$
(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\vartheta_2(u, v)\, \vartheta_{12}(u, v)\, \vartheta_{14}(u, v) + \vartheta_5(u, v)\, \vartheta_{01}(u, v)\, \vartheta_{23}(u, v) \\ & = \quad \vartheta_4(0, 0)\, \psi_{1,1}(u, v)\, \psi_{2,-1}(u, v). \end{aligned} \right.
$$

Ici, les deux membres sont des thêtas de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, qui est celle de $\vartheta_4(u, v)$; $\psi_{1,1}$ est la fonction intermédiaire singulière d'indices $l = 1$, $k = 1$, et de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\psi_{2,-1}$ celle d'indices $l = 2$, $k = -1$, de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. On a

$$
(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{1,1}(u, v) &= \sum_{m,n} e^{2\pi i \left[(n+\frac{1}{2})u + (m+n+\frac{1}{2})v\right] + \pi i \left\{ g\left[m^2 + (n+\frac{1}{2})^2\right] + h\left[2m(n+\frac{1}{2}) + (n+\frac{1}{2})^2\right] \right\}}, \\ \psi_{2,-1}(u, v) &= \sum_{m,n} e^{2\pi i \left[(n+m+\frac{1}{2})u + mv\right] + \pi i \left\{ g\left[m^2 + (n+\frac{1}{2})^2\right] + h\left[2m(n+\frac{1}{2}) + (n+\frac{1}{2})^2\right] \right\}}. \end{aligned} \right.
$$

Si l'on fait $u = v = 0$ dans l'identité (10), on obtient, *entre les thêtas d'arguments nuls*, la relation

$$
(12) \qquad -\vartheta_2 \vartheta_{12} \vartheta_{14} + \vartheta_5 \vartheta_{01} \vartheta_{23} = \vartheta_4^3.
$$

10. Voici le Tableau complet des dix relations de cette espèce que donne l'application de la méthode [1] :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta_4^3 + \vartheta_2\,\vartheta_{12}\vartheta_{14} - \vartheta_5\,\vartheta_{01}\vartheta_{23} = 0,\\
&\vartheta_{03}^3 - \vartheta_2\,\vartheta_0\,\vartheta_{23} + \vartheta_{34}\vartheta_{14}\vartheta_{01} = 0,\\
&\vartheta_2^3 - \vartheta_0\,\vartheta_{23}\vartheta_{03} - \vartheta_4\,\vartheta_{12}\vartheta_{14} = 0,\\
&\vartheta_{01}^3 - \vartheta_{14}\vartheta_{03}\vartheta_{34} - \vartheta_5\,\vartheta_4\,\vartheta_{23} = 0,\\
&\vartheta_{14}^3 + \vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_{03} - \vartheta_{12}\vartheta_2\,\vartheta_4 = 0,\\
&\vartheta_{23}^3 - \vartheta_5\,\vartheta_4\,\vartheta_{01} + \vartheta_2\,\vartheta_0\,\vartheta_{03} = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta_5^3 - \vartheta_0\,\vartheta_{34}\vartheta_{12} - \vartheta_{23}\vartheta_4\,\vartheta_{01} = 0,\\
&\vartheta_{34}^3 - \vartheta_{12}\vartheta_5\,\vartheta_0 - \vartheta_{01}\vartheta_{14}\vartheta_{03} = 0,\\
&\vartheta_0^3 + \vartheta_2\,\vartheta_{03}\vartheta_{23} - \vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_5 = 0,\\
&\vartheta_{12}^3 + \vartheta_{14}\vartheta_4\,\vartheta_2 - \vartheta_0\,\vartheta_5\,\vartheta_{34} = 0.
\end{aligned}\right.$$

11. *Conséquences arithmétiques.* — On déduit de ces équations quelques conséquences arithmétiques intéressantes.

Dans la première équation (13) on a, pour ϑ_4, après remplacement de g' par $h+g$, la série

$$\vartheta_4 = \sum_{m,n} e^{\pi i g[m^2+(n+\frac{1}{2})^2]+\pi i h[2m(n+\frac{1}{2})-(n+\frac{1}{2})^2]}$$

qu'on peut mettre sous une forme plus commode. Posons

$$(15)\qquad \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\qquad \omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

ω et ω' sont les racines de l'équation $\omega^2-\omega-1=0$, et sont des unités du *corps quadratique* $\sqrt{5}$; si l'on fait ensuite

$$(16)\qquad g = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{5}},\qquad h = \frac{\omega\xi-\omega'\eta}{\sqrt{5}},$$

---

[1] *Voir* une autre démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 5 mars 1906. On pourrait aussi suivre une méthode analogue à celle indiquée en note au n° 5.

il vient

$$\vartheta_4 = \sum_{m,n} e^{\frac{\pi i}{\sqrt{5}} \left\{ \xi\left[m + (n+\frac{1}{2})\omega\right]^2 - \eta\left[m + (n+\frac{1}{2})\omega'\right]^2 \right\}}.$$

Dès lors, ϑ_4^3 est une somme de termes du type

$$(17) \qquad e^{\frac{\pi i}{\sqrt{5}} [\xi(M+N\omega) - \eta(M+N\omega')]},$$

M et N étant entiers ou fractionnaires; le coefficient, dans ϑ_4^3, du terme (17), pour lequel M et N sont donnés, s'obtiendra comme il suit. On posera

$$(18) \quad \begin{cases} M + N\omega = \quad [m_1 + (n_1 + \frac{1}{2})\omega]^2 \\ \qquad\qquad + [m_2 + (n_2 + \frac{1}{2})\omega]^2 + [m_3 + (n_3 + \frac{1}{2})\omega]^2, \end{cases}$$

et l'on déterminera toutes les solutions en nombres entiers, m_i, n_i, de cette équation : le coefficient cherché sera le nombre $\mathfrak{N}$ de ces systèmes de solutions.

De même, dans le produit $\vartheta_3\vartheta_{01}\vartheta_{23}$, le coefficient du terme (17) sera le nombre $\mathfrak{N}'$ des systèmes de solutions entières μ_i, ν_i, de l'équation

$$(19) \quad M + N\omega = (\mu_1 + \nu_1\omega)^2 + (\mu_2 + \tfrac{1}{2} + \nu_2\omega^2) + [\mu_3 + \tfrac{1}{2} + (\nu_3 + \tfrac{1}{2})\omega]^2;$$

enfin, dans le produit $\vartheta_2\vartheta_{12}\vartheta_{11}$, ce sera la somme

$$\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3+1}$$

étendue aux mêmes systèmes de solutions.

On a ainsi, en vertu même de la première équation (13), la relation

$$(20) \qquad \mathfrak{N} - \mathfrak{N}' + \Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3+1} = 0.$$

Or, les équations (18) et (19) donnent immédiatement

$$\begin{aligned} M &\equiv m_1 + m_2 + m_3 + \tfrac{3}{4} && (\mathrm{mod}\ 2), \\ N &\equiv m_1 + m_2 + m_3 + \tfrac{3}{4} && (\mathrm{mod}\ 2), \\ M &\equiv \mu_1 + \nu_1 + \nu_2 + \tfrac{3}{4} && (\mathrm{mod}\ 2), \\ N &\equiv \nu_1 + \mu_3 + \nu_3 + \tfrac{3}{4} && (\mathrm{mod}\ 2), \end{aligned}$$

ce qui montre que $M-\frac{3}{4}$ et $N-\frac{3}{4}$ sont des entiers de même parité, et que dès lors $\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3$ est pair; la relation (20) s'écrit par suite

$$\mathfrak{N} = 2\mathfrak{N}',$$

d'où ce théorème, *relatif aux décompositions d'un entier du corps quadratique* $\sqrt{5}$ *en sommes de carrés de trois entiers,* appartenant au même corps :

Si A *et* B *désignent des entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs, de même parité, le nombre des décompositions de*

$$4A+3+\omega(4B+3)$$

en somme de trois carrés selon la formule

$$(21)\qquad \begin{cases} [2m_1+(2n_1+1)\omega]^2+[2m_2+(2n_2+1)\omega]^2 \\ +[2m_3+(2n_3+1)\omega]^2 \end{cases}$$

est double du nombre des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(22)\quad (2\mu_1+2\nu_1\omega)^2+(2\mu_2+1+2\nu_2\omega)^2+[2\mu_3+1+(2\nu_3+1)\omega]^2.$$

Dans cet énoncé et dans les suivants, les m_i, n_i, μ_i, ν_i sont des entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs; deux décompositions (21) telles que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\beta^2+\alpha^2+\gamma^2$ sont regardées comme distinctes, à moins que β ne soit identique à α.

La seconde équation (13) conduit au même résultat; la troisième et la quatrième donnent cette proposition :

Si A *et* B *sont des entiers ordinaires quelconques, le nombre des décompositions de* $4A+3+8B\omega$ *selon la formule*

$$(2m_1+1+2n_1\omega)^2+(2m_2+1+2n_2\omega)^2+(2m_3+1+2n_3\omega)^2$$

est double de celui des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(2\mu_1+2\nu_1\omega)^2+[2\mu_2+(2\nu_2+1)\omega]^2+[2\mu_3+1+(2\nu_3+1)\omega]^2.$$

Des deux dernières équations (13), on déduit que :

Si A *et* B *sont des entiers ordinaires quelconques, le nombre des décompositions de* $8A + 6 + \omega(4B + 1)$ *selon la formule*

$$[2m_1 + 1 + (2n_1 + 1)\omega]^2 + [2m_2 + 1 + (2n_2 + 1)\omega]^2 + [2m_3 + 1 + (2n_3 + 1)\omega]^2$$

est double de celui des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\omega]^2 + (2\mu_3 + 1 + 2\nu_3\omega)^2.$$

12. Examinons maintenant, au point de vue des conséquences arithmétiques, les équations (14); il suffira de considérer la première. Elle donne immédiatement le résultat suivant :

Soient M et N deux entiers ordinaires quelconques; considérons les deux décompositions de $M + N\omega$,

$$(\mathrm{I}) \qquad M + N\omega = (m_1 + n_1\omega)^2 + (m_2 + n_2\omega)^2 + (m_3 + n_3\omega)^2,$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} M + N\omega = \; & [\mu_1 + (\nu_1 + \tfrac{1}{2}\omega)^2 + (\mu_2 + \tfrac{1}{2} + \nu_2\omega)^2 \\ & + [\mu_3 + \tfrac{1}{2} + (\nu_3 + \tfrac{1}{2})\omega]^2; \end{aligned} \right.$$

soient $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ les nombres respectifs de ces décompositions, on a, par la première équation (14),

$$(23) \qquad \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les systèmes entiers, m_i, n_i, qui satisfont à (I).

L'équation (23) donne un théorème facile à énoncer; mais on peut aller plus loin et obtenir une relation entre $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$. Supposons d'abord que, dans chacune des décompositions (I), les trois quantités $m_i + n_i\omega$ soient distinctes deux à deux, et *ne regardons pas comme différentes deux décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre* des trois quantités élevées au carré. D'après cela, une décomposition (I) compte pour six unités dans $\mathfrak{N}_1$; dans $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$, elle donne les six termes

$$(24)\qquad (-1)^\alpha + (-1)^\beta + (-1)^\gamma + (-1)^\delta + (-1)^\varepsilon + (-1)^\theta,$$

étant posé

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = m_1 + n_1 + n_2 + m_3, \qquad \gamma = m_2 + n_2 + n_1 + m_3, \\ \qquad\qquad \varepsilon = m_3 + n_3 + n_1 + m_2, \\ \beta = m_1 + n_1 + n_3 + m_2, \qquad \delta = m_2 + n_2 + n_3 + m_1, \\ \qquad\qquad \theta = m_3 + n_3 + n_2 + m_1. \end{array}\right.$$

Étudions maintenant la parité des six quantités $\alpha, \beta, \ldots, \theta$.
On déduit de (I)

$$(26)\qquad M \equiv m_1 + m_2 + m_3 + n_1 + n_2 + n_3 \quad N \equiv n_1 + n_2 + n_3 \pmod 2;$$

et, par (25),

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{ll} m_1 \equiv M + N + \beta + \gamma + \delta, \quad m_2 \equiv M + N + \alpha + \beta + \delta, & \\ \qquad\qquad m_3 \equiv M + N + \alpha + \gamma, & \\ n_1 \equiv N + \alpha + \gamma + \delta, \qquad n_2 \equiv N + \alpha + \beta + \gamma & \pmod 2, \\ \qquad\qquad n_3 \equiv N + \beta + \delta & \pmod 2, \\ \quad \varepsilon \equiv \alpha + \delta, \qquad \theta \equiv \beta + \gamma. & \end{array}\right.$$

De plus, l'équation (I) donne

$$M = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$
$$N = 2m_1n_1 + 2m_2n_2 + 2m_3n_3 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$

d'où, en utilisant (27),

$$M \equiv 3(M+N)^2 + 3N^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) \pmod 4,$$
$$N \equiv 3N^2 + 6N(M+N) + 2\alpha\beta + 2\beta\delta + 2\gamma\delta \pmod 4,$$

ce qu'on écrit

$$(28)\qquad \frac{M^2+M}{2} \equiv N(M+1) + \alpha\gamma + \beta\delta \qquad (\text{mod } 2),$$

$$(29)\qquad \frac{N^2+N}{2} \equiv MN + \alpha\beta + \beta\delta + \gamma\delta \qquad (\text{mod } 2).$$

13. Distinguons maintenant plusieurs cas.

Premier cas : *le nombre* $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ *est impair*. — La congruence (28) n'a alors, en α, β, γ, δ, que *six* solutions, d'après un résultat bien connu dans la théorie des caractéristiques des thêtas à deux variables; elles sont données par le Tableau suivant, complété par les valeurs de ε et θ, déduites de (27).

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1

Par suite, quatre des six quantités sont impaires et deux sont paires, dans tous les cas; donc, sans avoir besoin d'étudier la congruence (29), on est sûr que la somme des six unités (24) est égale à $-4+2=-2$, de sorte que, dans $\mathfrak{N}_1 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_2}$, chaque décomposition (I) donne $6+2=8$ unités et l'équation (23) montre que le nombre des décompositions (II) est *huit* fois celui des décompositions (I).

On a supposé, dans (I), les trois quantités $m_i + n_i\omega$ distinctes deux à deux. Si deux d'entre elles sont égales, c'est-à-dire si $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, la troisième étant différente, la décomposition (I) considérée donne, dans $\mathfrak{N}_1$, *trois* unités, et l'on reconnaît, par la méthode du cas général, qu'elle en donne *une* dans $-\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_2}$; on dira alors que le nombre des décompositions (II) est toujours égal à *huit* fois celui des décompositions (I), avec la restriction de compter seulement pour $\frac{1}{2}$ une décomposition (I) dans laquelle deux des quantités $m_i + n_i\omega$ coïncident.

Enfin, les trois quantités $m_i + n_i\omega$ d'une même décomposition (I) ne peuvent être égales entre elles ; car on aurait alors, par (I),

$$M = 3m^2 + 3n^2, \qquad N = 6mn + 3n^2,$$

et le nombre $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ serait pair, contrairement à l'hypothèse.

Deuxième cas : $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ *est pair,* $\frac{N^2+N}{2} + MN$ *est impair.* — La congruence (28) a alors *dix* solutions en α, β, γ, δ, mais *trois* seulement vérifient la congruence (29), ce sont les suivantes :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

Dès lors, quatre des six quantités sont impaires, deux sont paires, et l'on retombe exactement sur les conclusions du premier cas.

Troisième cas : $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ *et* $\frac{N^2-N}{2} + PN$ *sont pairs.* — Les congruences (28) et (29) admettent les *sept* solutions :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0

Si on laisse de côté la première solution, on voit que, dans chacune des autres, quatre des six quantités $\alpha, \ldots, \theta$ sont paires et deux impaires, de sorte que la somme (24) est égale à $4 - 2 = 2$. Donc une décomposition (I), dans laquelle les trois $m_i + n_i\omega$ sont distincts et les six quantités $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ non simultanément paires, donne, dans $\mathfrak{N}_1 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_2}$, $6 - 2 = 4$ unités.

Si, au contraire, α, β, ..., θ sont tous pairs, ou, ce qui revient au même par (27), si l'on a

$$m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv \mathrm{M} + \mathrm{N}, \qquad n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv \mathrm{N} \pmod 2,$$

la décomposition considérée donne $6 - 6 = 0$ unité, c'est-à-dire *ne compte pas.*

Donc, en admettant que, dans chaque décomposition (I), les trois $m_i + n_i\omega$ soient deux à deux distincts, on peut dire que, par (23), le nombre des décompositions (II) est *quatre* fois celui des décompositions (I), avec la restriction qu'une décomposition (I) dans laquelle les m_i ont la parité de $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ et les n_i celles de N, compte pour zéro.

14. Il est facile maintenant de traiter d'une manière analogue le cas où deux au moins des $m_i + n_i\omega$ d'une même décomposition seraient égaux, et voici le résultat final : les trois dernières équations (14) conduisent à la même conclusion.

Soient M *et* N *des entiers ordinaires quelconques; considérons les décompositions de* $4\mathrm{M} + 4\mathrm{N}\omega$ *en sommes de trois carrés selon les formules*

$$\text{(I)} \qquad (2m_1 + 2n_1\omega)^2 + (2m_2 + 2n_2\omega)^2 + (2m_3 + 2n_3\omega)^2,$$

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &[2\mu_1 + (2\nu_1 + 1)\omega]^2 + (2\mu_2 + 1 + 2\nu_2\omega)^2 \\ &+ [2\mu_3 + 1 + (2\nu_3 + 1)\omega]^2. \end{aligned} \right.$$

1° *Si l'un au moins des nombres*

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{M} + 1)(\mathrm{M} + 2\mathrm{N}) \qquad \textit{et} \qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{N}(\mathrm{N} - 1 + 2\mathrm{M})$$

est impair, le nombre des décompositions (II) *est huit fois celui des décompositions* (I) : *les décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre des trois quantités* $2m_i + 2n_i\omega$ *ne comptent que pour une seule; une décomposition* (I) *dans laquelle deux de ces trois quantités sont égales ne compte que pour* $\frac{1}{2}$; *enfin les trois quantités ne peuvent être égales entre elles.*

2° *Si les deux nombres* $\frac{1}{2}(\mathrm{M} + 1)(\mathrm{M} + 2\mathrm{N})$ *et* $\frac{1}{2}\mathrm{N}(\mathrm{N} - 1 + 2\mathrm{M})$ *sont pairs, le nombre des décompositions* (II) *est quatre fois celui* *des décompositions* (I) : *les décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre des trois quantités* $2m_i + 2n_i\omega$ *ne comptent que pour une ; celles où deux au moins de ces trois quantités sont égales comptent pour zéro; enfin une décomposition* (I) *où tous les* m_i *ont la parité de* $M + N$ *et tous les* n_i *celle de* N *compte également pour zéro.*

15. *Extension des résultats arithmétiques.* — Nous n'avons fait appel, jusqu'ici, qu'aux relations (13) et (14), sans utiliser les identités plus générales, telles que (8) et (10), dont elles dérivent.

Partons cette fois de l'identité (10), regardons-y g et h, c'est-à-dire ξ et η [équations (16)], comme les variables indépendantes, u et v comme des paramètres : en égalant, dans les deux membres de (10), les coefficients de l'exponentielle (17), on arrive au résultat qui suit.

Reprenons les décompositions (I) et (II) ci-dessus de $4M + 4M\omega$; regardons cette fois comme distinctes deux décompositions (I) qui diffèrent par l'ordre des trois quantités élevées au carré ; posons

$$\mathcal{A} = \Sigma'(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}\, e^{2\pi i(m_1+m_2+m_3)u+2\pi i(n_1+n_2+n_3)v},$$

$$\mathcal{C} = \Sigma' e^{2\pi i(n_1+n_2-m_2)u+2\pi i(m_1+n_1+m_2)v},$$

les deux sommes Σ' s'étendant à toutes les décompositions (I) du nombre donné $4M + 4N\omega$,

$$\mathcal{B} = \Sigma'' e^{2\pi i(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)u+2\pi i(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)v},$$

la somme Σ'' s'étendant à toutes les décompositions (II) du même nombre ; on a, quels que soient u et v,

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

On en conclut, en développant les exponentielles suivant les puissances croissantes de u, v, et identifiant les développements des deux membres,

$$\begin{aligned}\Sigma''(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 1)^p (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 1)^q \\ = \quad \Sigma'(n_1 + n_2 - m_2)^p (m_1 + n_1 + m_2)^q \\ - \Sigma'(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}(m_1 + m_2 + m_3)^p (n_1 + n_2 + n_3)^q,\end{aligned}$$

p et q désignant des entiers ordinaires quelconques, non négatifs; la somme Σ'' s'étend à toutes les décompositions (II); les sommes Σ' à toutes les décompositions (I), deux de ces décompositions qui diffèrent par l'ordre des trois quantités élevées au carré *étant regardées comme distinctes*.

Supposons maintenant, pour fixer les idées, qu'une au moins des deux quantités $\frac{1}{2}M(M+2N)$ et $\frac{1}{2}N(N-1+2M)$ soit impaire; nous avons vu que, parmi les six quantités $m_i+n_i+n_j+m_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$ et deux à deux distincts), quatre sont impaires et deux paires; dès lors, si Σ désigne une somme étendue aux décompositions (I), deux de ces décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre des termes élevés au carré *n'étant pas regardées comme distinctes* (et c'est ce que nous admettrons dans les énoncés suivants), on a

$$\begin{aligned}
&\Sigma''(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)^p(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)^q\\
&\quad= \Sigma'(n_1+n_2-m_2)^p(m_1+n_1+m_2)^q\\
&\qquad+2\Sigma(m_1+m_2+m_3)^p(n_1+n_2+n_3)^q.
\end{aligned}$$

Par suite, évidemment, si, pour chaque décomposition (I), on écrit les *six* quantités $n_1+n_2-m_2$; $n_1+n_2-m_1$; $n_1+n_3-m_3$; $n_1+n_3-m_1$; $n_2+n_3-m_3$; $n_2+n_3-m_2$, et *deux* fois la quantité $m_1+m_2+m_3$, le Tableau ainsi obtenu est identique à celui que forment les quantités $\mu_1+\mu_2+\mu_3+1$, pour toutes les décompositions (II). Si deux des quantités $2m_i+2n_i\omega$ d'une même décomposition (I) sont égales, par exemple si $m_1=m_2$, $n_1=n_2$, on écrira, pour cette décomposition, les *trois* quantités $2n_1+m_1$, $n_1+n_3-m_3$, $n_1+n_3-m_1$, et *une* fois la quantité $2m_1+m_3$, et la proposition subsistera.

On a un théorème pareil en remplaçant $n_1+n_2-m_2$, ... par $m_1+n_1+m_2$, ...; $m_1+n_2+m_3$ par $n_1+n_2+n_3$, et $\mu_1+\mu_2+\mu_3+1$ par $\nu_1+\nu_2+\nu_3+1$.

Ces propositions, qui s'étendent aisément au cas où les deux quantités $\frac{1}{2}M(M+2N)$ et $\frac{1}{2}N(N-1+2M)$ sont paires, mettent sur la voie d'une démonstration directe de nos résultats arithmétiques; nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

16. *Remarque.* — On peut observer que les relations biquadratiques classiques entre les dix thêtas d'arguments nuls donnent des propositions simples sur les décompositions en sommes de quatre carrés des nombres du corps quadratique $\sqrt{D}$; par exemple, de l'équation $\vartheta_4^4 - \vartheta_{01}^4 = \vartheta_{03}^4 - \vartheta_2^4$, on déduit que :

Si M et N sont des entiers ordinaires quelconques, dont le second est impair, les nombres de décompositions de $4M + 4N\sqrt{D}$ en quatre carrés selon les deux formules

$$(2m_1 + 1 + 2n_1\sqrt{D})^2 + (2m_2 + 1 + 2n_2\sqrt{D})^2 + (2m_3 + 1 + 2n_3\sqrt{D})^2 \\ + (2m_4 + 1 + 2n_4\sqrt{D})^2$$

et

$$[2\mu_1 + (2\nu_1 + 1)\sqrt{D}]^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\sqrt{D}]^2 \\ + [2\mu_3 + (2\nu_3 + 1)\sqrt{D}]^2 + [2\mu_4 + (2\nu_4 + 1)\sqrt{D}]^2$$

sont égaux.