JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. ZAREMBA

Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 395-444.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__395_0>

Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes;

PAR M. S. ZAREMBA,

Professeur à l'Université de Cracovie.

I. — Introduction.

1. Dans les nombreux travaux provoqués par le célèbre Mémoire de M. Poincaré : *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (¹), on s'est borné, presque exclusivement, à l'étude du cas où les angles formés avec des droites fixes par la normale à la frontière sont des fonctions continues des coordonnées du pied de la normale. A notre connaissance, M. Korn (²) seul s'est affranchi de cette restriction dans le cas de deux variables indépendantes où il a considéré une frontière affectant la forme d'un polygone curviligne. Mais M. Korn s'est borné strictement à étendre à ce cas la solution du problème de Dirichlet par la méthode de Neumann, sans chercher à effectuer l'extension correspondante de la théorie des fonctions fondamentales.

Ajoutons que M. Korn est conduit à faire, au sujet des valeurs périphériques de la fonction demandée dans le problème de Dirichlet, une hypothèse bien plus particulière que celle de la simple continuité. Il y

(¹) *Acta Mathematica*, 1896.

(²) KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*. Dümmler, Berlin.

a donc intérêt à reprendre l'étude de toute la théorie dans le cas où, dans le voisinage de certains points de la frontière, la direction de la normale éprouve des variations brusques; tel est précisément le but de ce travail.

En principe, la même méthode est applicable au plan et à l'espace; il existe cependant entre ces deux cas des différences assez marquées pour que chacun d'eux exige une étude spéciale. Nous n'envisagerons ici que le cas du plan.

Après avoir défini certains termes et certaines notations dont nous nous servirons constamment, et rappelé certains faits analytiques, nous énoncerons, à la fin de l'Introduction, les résultats principaux que nous avons obtenus.

2. Les problèmes dont nous aurons à nous occuper concernent un domaine déterminé dans le plan par sa frontière (S). Il faut donc, tout d'abord, préciser la notion de ces éléments. A cet effet, considérons dans le plan n lignes fermées, soit

$$(S_1),\quad (S_2),\quad (S_3),\quad \ldots,\quad (S_n), \tag{1}$$

et supposons : 1° que chacune d'elles, considérée isolément, partage le plan précisément en deux régions connexes dont elle serait la frontière commune; 2° qu'aucune des lignes précédentes n'ait un point commun avec une autre d'entre elles. Le plan sera évidemment partagé par l'ensemble des lignes (1) en $n+1$ régions.

Aucune des lignes (1) n'ayant de points situés à l'infini, il n'y aura, parmi les régions précédentes, qu'une seule région (R_0) s'étendant à l'infini. Nous l'appellerons la *région infinie* et nous diviserons les n autres régions en catégories de la manière suivante : toute région contiguë à la région (R_0) sera dite *de première catégorie*, toute région autre que (R_0) et contiguë à une région de première catégorie sera dite *de seconde catégorie;* enfin, d'une manière générale, toute région contiguë à une région de catégorie k sans être elle-même une région de catégorie $k-1$ sera dite *de catégorie* $k+1$.

Cela posé, nous dirons que les lignes fermées (1) sont des *branches différentes d'une même ligne fermée non connexe;* convenons une fois pour toutes de désigner cette ligne non connexe par le symbole (S).

Nous dirons, en outre, que l'ensemble des régions de catégories impaires constitue le domaine intérieur (D), et que l'ensemble des autres régions, y compris la région infinie (R_0), constitue le domaine extérieur (D′). D'après cela, la ligne (S) sera la frontière commune des domaines (D) et (D′). Le sens que nous venons de donner aux symboles (S), (D) et (D′) leur sera conservé dans toute l'étendue de ce Mémoire.

Il va sans dire que nous ferons certaines hypothèses restrictives au sujet de la ligne (S).

Nous supposerons que chaque branche de la ligne (S) est formée d'un nombre fini d'arcs que nous appellerons ***côtés de la ligne*** (S); et nous dirons que les points de concours des côtés sont les *sommets* de cette ligne.

Voici les hypothèses que nous ferons au sujet des arcs précédents :

1° Chacun de ces arcs admet une tangente déterminée en chacun de ses points.

2° Si l'on désigne par ζ l'angle positif non supérieur à $\frac{\pi}{2}$ formé par les normales élevées en deux points quelconques A et B situés sur un même *côté* de la ligne (S), on a

$$\zeta < C.\overline{AB},$$

où C désigne un nombre positif, le même pour chacun des *côtés* de la ligne (S).

3° Il existe une certaine longueur constante δ, la même pour tous les *côtés* de la ligne (S), telle que si l'on décrit d'un point quelconque O, pris sur la ligne (S), comme centre un cercle (Σ) de rayon $\delta_1 \leqq \delta$, mais d'ailleurs quelconque, la circonférence de ce cercle ne rencontrera le *côté* (C) de la ligne (S), *sur lequel ce point est situé,* qu'en deux points ou en un seul point, suivant que la distance du point O à l'extrémité la plus proche du côté C ne sera pas ou sera inférieure à δ_1, et toute parallèle à la normale en O à la ligne (S) ne pourra rencontrer la portion du côté (C) située à l'intérieur du cercle (Σ) qu'en un seul point au plus.

4° Tout angle θ de la ligne (S), c'est-à-dire l'angle formé par les deux côtés issus d'un même sommet et compté à l'intérieur du domaine D vérifiera les inégalités suivantes :

$$0 < \theta < 2\pi.$$

3. De même que dans nos autres travaux sur la méthode de Neumann, nous envisagerons, en même temps que l'équation de Laplace, l'équation plus générale

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \tag{2}$$

où l'on a désigné par μ un nombre réel non négatif, et par Δu, suivant l'usage, l'expression

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Convenons, une fois pour toutes, de représenter par $f(z)$ la fonction définie par l'équation suivante :

$$f(z) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{z^2+t^2}}}{\sqrt{z^2+t^2}}\,dt,$$

où, pour les valeurs réelles de z, les seules que nous aurons à considérer, le radical doit être pris avec le signe positif.

Posons ensuite

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

en convenant de prendre la détermination positive du radical et considérons la fonction $f(r\mu)$. Cette fonction, regardée comme fonction des variables x et y, est, comme on le sait ([1]), et comme on le vérifierait immédiatement, une intégrale dont le rôle, par rapport à cette équation, est absolument analogue à celui de la fonction $\log r$ dans la théorie de l'équation de Laplace. On trouvera une étude détaillée de la fonction $f(z)$ et de fonctions analogues dans l'Ouvrage de M. Poin-

([1]) Poincaré, *Sur les équations de la Physique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894).

caré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Mais, pour les applications que nous avons en vue, il suffira de savoir que l'on a ([1])

$$(3)\quad \begin{cases} f(z) = (\log z + c)\left[1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2^k k!)^2}\right] \\ \qquad\qquad - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2^k . k!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right), \end{cases}$$

où c représente une constante qu'il ne nous importe pas de connaître.

Si, dans l'expression d'un potentiel logarithmique, de simple couche ou de double couche, on remplace la fonction $\log r$ par la fonction $f(\mu r)$, on obtient une nouvelle fonction que nous appellerons un *potentiel logarithmique généralisé* de nombre caractéristique μ de simple couche dans le premier cas et de double couche dans le second. Il est évident que tout potentiel logarithmique généralisé représente une intégrale de l'équation (1).

La terminologie que nous avons adoptée pourrait faire croire que, pour $\mu = 0$, les potentiels logarithmiques généralisés se réduisent aux potentiels logarithmiques ordinaires. C'est bien ce qui a lieu pour les potentiels de double couche, mais la même circonstance ne se présente pas, *en général*, pour les potentiels de simple couche : pour qu'elle se présente, il est nécessaire et suffisant que la densité σ de la simple couche vérifie la condition suivante :

$$(4)\qquad \int \sigma\, ds = 0,$$

où l'intégration doit être étendue à toute la ligne portant la simple couche. Rien d'analogue n'a lieu dans l'espace et c'est ce qui empêche de considérer le cas du plan comme un simple cas particulier compris dans le cas de l'espace.

4. Il résulte des recherches récentes sur la théorie de la méthode de

---

(1) Serret, *Calcul intégral*, 2e édition, p. 581 et 582.

Neumann et sur celle de la méthode de Robin, théories qui, en réalité, ne sont que deux aspects d'une même théorie, que ces théories sont comprises dans celles des deux problèmes suivants :

Convenons de représenter par $(F)_i$ et $(\Phi)_e$ les valeurs limites sur la ligne (S) des fonctions F et Φ définies, la première dans le domaine intérieur (D) et la seconde dans le domaine extérieur (D'); désignons en outre par $\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e$ les dérivées normales d'une fonction ψ calculées, la première pour le côté intérieur de la ligne (S) et la seconde pour le côté extérieur, la normale elle-même étant, dans les deux cas, dirigée vers l'intérieur du domaine (D); cela posé, on donne deux fonctions σ_0 et h_0 définies sur la ligne (S) et l'on propose :

1° *D'établir l'existence d'un potentiel de simple couche u et celle d'un potentiel de double couche v, potentiels qui peuvent être des potentiels logarithmiques ordinaires ou des potentiels généralisés de nombre caractéristique donné, vérifiant les équations suivantes :*

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma_0, \tag{5}$$

et

$$(v)_e - (v)_i = \lambda[(v)_e + (v)_i] + 2h_0, \tag{6}$$

où λ représente un paramètre variable;

2° *D'étudier les propriétés des fonctions u et v considérées comme fonctions de la variable complexe λ.*

Nous allons étudier ces problèmes en supposant que les fonctions σ_0 et h_0 vérifient les hypothèses suivantes :

1° Chacune d'elles ne peut cesser d'être continue qu'en un nombre limité de points;

2° Chacune des intégrales

$$\int_{(S)} |\sigma_0|\, ds \quad \text{et} \quad \int_{(S)} |h_0|\, ds$$

a un sens.

3° Lorsqu'un point A situé sur la ligne (S) tend suivant une loi quelconque vers un sommet M de cette ligne, le produit

$$|\sigma_0(A)|\,\overline{AM}^p,$$

où p représente un nombre positif constant *inférieur* à l'unité, reste, pour des valeurs assez petites de $\overline{AM}$, inférieur à une constante finie;

4° La fonction h_0 reste finie dans le voisinage de chaque sommet.

Cela posé, désignons par θ un des angles de la ligne (S), par R la plus petite des valeurs que prend le rapport

$$\frac{\pi}{|\pi - \theta|}$$

quand on envisage successivement tous les sommets de la ligne (S), et par (T) le domaine limité dans le plan de la variable complexe λ par un cercle de rayon R ayant l'origine des coordonnées pour centre. Les théorèmes suivants résumeront alors les principaux résultats que nous avons établis dans ce travail :

THÉORÈME FONDAMENTAL I. — *L'équation* (5) *admet, par rapport à l'inconnue u, une solution* $u(\lambda)$ (¹), *fonction analytique du paramètre* λ. *Cette fonction du paramètre* λ *existe dans toute l'étendue du domaine* (T) *et n'admet, à l'intérieur de ce domaine, d'autres singularités que des pôles simples et réels faisant partie d'une suite de nombres réels et inégaux :*

$$(7) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots,$$

suite qui ne dépend que de la ligne (S) *dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, mais qui, dans le cas des potentiels logarithmiques généralisés, dépend encore du nombre caractéristique de ces potentiels. D'ailleurs la suite en question ne dépend en au-*

(¹) Nous entendons par *solution de l'équation* (5) un potentiel de simple couche qui la vérifie en chaque point de la ligne (s) avec *exclusion,* cela va sans dire, des sommets et des points où la fonction σ_0 cesse d'être continue; nous supposons de plus que ce potentiel dérive d'une simple couche dont la densité σ satisfait aux conditions générales imposées à la fonction σ_0.

cune façon de la fonction σ_0 et l'on a

$$(8) \qquad |\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3| \leqq \ldots < R.$$

A chaque terme λ_k de la suite (7), on peut faire correspondre un nombre fini, soit j_k, de potentiels de simple couche

$$(9) \qquad U_{k,1}, \quad U_{k,2}, \quad \ldots, \quad U_{k,j_k}$$

qui formeront ce que nous appellerons un *système complet* de fonctions fondamentales de M. Poincaré relatif au nombre λ_k et qui jouiront des propriétés suivantes :

1° Ces potentiels sont des potentiels logarithmiques ordinaires s'il en est ainsi du potentiel u; si, au contraire, u est un potentiel généralisé de nombre caractéristique μ, il en est de même des potentiels (9);

2° Les fonctions (9) sont linéairement indépendantes; en d'autres termes, aucune combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de ces fonctions ne peut conserver une valeur constante dans toute l'étendue du plan.

3° On a, en chaque point de la ligne (S) distinct d'un sommet,

$$(10) \quad \left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_e = \lambda_k\left[\left(\frac{dU_{k,t}}{dN}\right)_i + \left(\frac{dU_{kt}}{dN}\right)_e\right] \quad (t = 1, 2, \ldots, j_k).$$

4° La valeur commune des deux membres de l'égalité (10) est une fonction qui ne peut devenir discontinue qu'aux sommets de la ligne (s) et, si l'on désigne par $\sigma_{kt}(A)$ la valeur de cette fonction en un point variable A situé sur la ligne (s) et par M l'un quelconque des sommets de cette ligne, le produit

$$(11) \qquad \overline{MA}^{p_k}\sigma_{kt}(A),$$

où p_k représente un nombre positif inférieur à l'unité, reste fini lorsque le point A tend vers le point M suivant une loi quelconque.

5° Lorsqu'un potentiel de simple couche U (bien entendu de la même nature que les autres potentiels considérés) satisfait à la relation

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU}{dN}\right)_e = \lambda'\left[\left(\frac{dU}{dN}\right)_i + \left(\frac{dU}{dN}\right)_e\right],$$

où λ' représente une constante vérifiant l'inégalité

$$|\lambda'| < R,$$

et lorsque de plus la valeur commune des deux membres de l'équation précédente est une fonction qui vérifie les hypothèses générales faites au sujet de la fonction σ_0, le nombre λ' sera égal à l'un des nombres de la suite (7), soit à λ_k, et la fonction U sera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (9).

6° Lorsque la fonction $u(\lambda)$ admet le nombre λ_k pour pôle, le résidu correspondant est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (9).

7° Dans le cas des potentiels logarithmiques généralisés, on a toujours

$$|\lambda_1| > 1, \tag{12}$$

tandis que, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, on a

$$|\lambda_1| = 1.$$

En dehors de la solution analytique par rapport à λ dans le domaine (T), laquelle est unique, l'équation (5) peut admettre une solution non analytique dans ce domaine. La solution non analytique n'existera que dans le cas où tous les termes de la suite (7) ne seraient pas tous des pôles de la solution analytique, et alors les deux solutions ne différeront entre elles que pour des valeurs de λ égales à ceux des termes de la suite (7) qui ne sont pas des pôles de la solution analytique.

Théorème fondamental II. — *L'équation* (6) *admet, par rapport à l'inconnue* v, *une solution* [1] $v(\lambda)$, *fonction analytique du paramètre* λ *dans toute l'étendue du domaine* (T).

[1] Nous entendons par solution de l'équation (6) tout potentiel de double couche la vérifiant en chaque point de la ligne (S) où la fonction h_0 ne cesse pas d'être continue *sans exclusion des sommets* et dérivant, en outre, d'une double couche dont la densité h satisfait aux conditions générales imposées à la fonction h_0.

Cette fonction ne possède, à l'intérieur du domaine (T), d'autres singularités que des pôles simples et réels faisant partie de la suite (7). Le résidu relatif à un pôle quelconque λ_k sera un potentiel de double couche V_k, vérifiant l'équation

$$(V_k)_e - (V_k)_i = \lambda_k[(V_k)_e + (V_k)_i]$$

et dérivant d'une double couche dont la densité sera égale à la fonction à laquelle se réduit sur (S) une certaine fonction U_k, combinaison linéaire et homogène [1] à coefficients constants des fonctions (9); on aura à l'intérieur du domaine (D)

$$V_k = \frac{1-\lambda_k}{2\lambda_k} U_k,$$

et à l'intérieur du domaine (D')

$$V_k = \frac{1+\lambda_k}{2\lambda_k} U_k.$$

Enfin, en dehors de la solution analytique par rapport à λ dans le domaine (T), l'équation (6) pourra admettre une solution non analytique dans ce domaine. La solution non analytique n'existera que dans le cas où tous les termes de la suite (7) ne seraient pas tous des pôles de la solution analytique et alors les deux solutions ne différeront entre elles que pour les valeurs de λ égales à ceux des termes de la suite (7) qui ne sont pas des pôles de la solution analytique [2].

Il va sans dire que notre théorie comprend comme cas particulier le cas où la ligne (S) serait dépourvue de sommets. Le domaine (T) considéré dans l'énoncé des théorèmes précédents coïnciderait alors avec toute l'étendue du plan de la variable complexe λ.

---

(1) Il existe un cas exceptionnel où le mot *homogène* doit être supprimé dans l'énoncé précédent : c'est celui où, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, on envisage le pôle, $\lambda_1 = -1$ et où la ligne (S) est telle que parmi les fonctions U_{1j} il en existe une irrégulière à l'infini et nulle sur (S).

(2) J'ai résumé sommairement les résultats précédents dans une Note insérée aux *Comptes rendus* le 6 juillet 1903.

II. — Propriétés fondamentales des potentiels.

5. Rapportons le plan à un système de coordonnées rectangulaires x, y et désignons : par r la distance du point courant $P(x, y)$ à un point B situé sur la ligne (S); par ds l'élément de cette ligne relatif au point B; par γ l'angle formé par le rayon $\overline{BP}$ avec la normale intérieure à la ligne (S) en B; par h et σ les valeurs en B de deux fonctions définies sur (S), fonctions que nous supposerons vérifier les conditions générales imposées (nº 4) aux fonctions σ_0 et h_0. Cela posé, considérons les potentiels logarithmiques généralisés de simple couche u et de double couche v définis par les équations

$$(1) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma f(\mu r)\, ds$$

et

$$(2) \qquad v = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} h \frac{df(\mu r)}{dr} \cos\gamma\, ds.$$

On établira aisément les faits analytiques suivants :

1° La fonction u reste finie en chaque point de la ligne (S) et cela sans exclusion des sommets.

2° Lorsqu'un point A situé sur la ligne (S) n'est ni un sommet ni un point de discontinuité de la fonction σ, les quantités $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ sont continues en ce point et l'on a

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \sigma,$$

ainsi que

$$(4) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \sigma';$$

où σ' représente la fonction définie par l'équation suivante :

$$(5) \qquad \sigma' = \frac{-1}{\pi}\int_{(S)_A} \sigma \frac{df(r'\mu)}{dr'} \cos\alpha\, ds,$$

en désignant par r' la distance du point A à l'origine B de l'élément d'arc ds et par α l'angle formé par le vecteur AB avec la normale intérieure à la ligne (S) en A. J'ajoute que la fonction σ' définie par l'équation (5) ne peut avoir, en dehors des sommets de la ligne (S), aucun autre point de discontinuité.

3° Pourvu que la fonction h soit continue en un point A situé sur la ligne (S), ce point fût-il un sommet, les fonctions $(v)_i$ et $(v)_e$ seront continues en A et l'on aura en ce point

$$(v)_i - (v)_e = h; \tag{6}$$

si, en outre, le point A n'est pas un sommet de la ligne (S), on aura encore

$$(v)_i + (v)_e = h',$$

en désignant par h' la fonction définie par l'équation suivante :

$$h' = \frac{1}{\pi}\int_{(S)} h \frac{df(r'\mu)}{dr'} \cos\beta\, ds, \tag{7}$$

où β représente l'angle formé par la normale intérieure élevée à la ligne (S) au point B, origine de l'élément d'arc ds avec le vecteur $\overline{BA}$, de longueur r'.

4° La fonction h' n'admet, en dehors des sommets de la ligne (S), aucun autre point de discontinuité; en outre, elle est limitée, même dans le voisinage des sommets.

5° Désignons par $\varphi(x, y)$ un potentiel logarithmique généralisé dérivant d'une couche simple ou double portée par la ligne (S). Le produit

$$\varphi(x, y)(x^2 + y^2)^m, \tag{8}$$

où m représente un nombre positif quelconque, tendra vers zéro en même temps que l'expression

$$\frac{1}{x^2 + y^2},$$

et il en sera de même de tout produit que l'on obtiendrait en remplaçant la fonction $\varphi(x, y)$ par une de ses dérivées partielles d'ordre quelconque.

6. Considérons dans le plan trois points $A(x, y)$, $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x, y)$, et posons

$$r_1 = \overline{AA_1}, \qquad r_2 = \overline{AA_2}, \qquad r = \overline{A_1 A_2}.$$

Une application facile du théorème de Green permettra d'établir la relation suivante :

$$(9) \quad (m^2 - \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r_2 m) f(r_1 \mu)\, dx\, dy = 2\pi [f(rm) - f(r\mu)]$$

où, cela va sans dire, m et μ représentent deux nombres positifs. Cela posé, considérons quatre potentiels logarithmiques généralisés $\varphi(x, y)$, $u(x, y)$, $\psi(x, y)$ et $v(x, y)$ et supposons :

1° Que les potentiels φ et u de nombres caractéristiques m et μ dérivent d'une *même simple couche;*

2° Que les potentiels ψ et v aient pour nombres caractéristiques respectifs les nombres caractéristiques m et μ des potentiels φ et u et dérivent d'une *même double couche*. On déduira aisément de la relation (9) les relations suivantes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &(m^2 - \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, u(x', y')\, dx'\, dy' \\ &\quad = 2\pi [\varphi(x, y) - u(x, y)] \end{aligned} \right.$$

et

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(m^2 - \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, v(x', y')\, dx'\, dy' \\ &\quad = 2\pi [\psi(x, y) - v(x, y)], \end{aligned} \right.$$

où r représente la distance des points (x, y) et (x', y').

J'ajoute que, dans les relations précédentes, il est permis de regarder u et v comme des potentiels logarithmiques ordinaires à condition de remplacer dans les premiers membres le facteur $m^2 - \mu^2$ par m^2. C'est ce que l'on vérifiera aisément au moyen d'une relation analogue à la relation (9).

Les fonctions de x et y formant les premiers membres des équations (10) et (11) rentrent dans la catégorie des fonctions $F(x, y)$ que l'on peut définir au moyen de la formule suivante :

$$(12) \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, g(x', y')\, dx'\, dy',$$

où $g(x', y')$ représente une fonction donnée. Lorsque la fonction $g(x', y')$, continue en général, ne cesse de l'être que sur certaines lignes (L) et lorsqu'en outre elle est limitée, la fonction $F(x, y)$ jouit des propriétés suivantes :

1° Les dérivées premières sont finies et continues en chaque point du plan et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(rm)}{\partial x} g(x', y')\, dx'\, dy',$$

avec une formule analogue pour $\frac{\partial F}{\partial y}$.

2° Si l'on désigne par $\mathcal{G}$ une limite supérieure des valeurs absolues de la fonction $g(x', y')$ et par DF l'une quelconque des dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}$, on a, en chaque point du plan :

$$(13) \qquad |F| < 2\pi \frac{\mathcal{G}}{m^2},$$

$$(14) \qquad |DF| < 4\pi \frac{\mathcal{G}}{m}.$$

7. Voici, sous forme de théorèmes, une série de propriétés des fonctions σ' et h' définies par les formules (5) et (7), propriétés qui nous seront indispensables dans la suite et que, avec un peu d'attention, on n'éprouvera pas de difficulté à établir.

Théorème I. — *Soient* M *un des sommets de la ligne* (S) *et* A *un autre point quelconque situé sur cette ligne.*

Supposons qu'il existe deux constantes positives δ_0 *et* E *telles que l'inégalité*

$$(15) \qquad \overline{MA} \leqq \delta_0$$

entraîne l'inégalité suivante :

$$|(\sigma')_A| < \frac{E}{\overline{MA}^p}$$

où p représente un nombre positif inférieur à l'unité.

Si l'on impose à la constante δ_0 *la condition de ne pas dépasser une certaine limite* δ *dépendant uniquement des propriétés géométriques de la ligne* (S), *on pourra déterminer deux constantes positives* C_1 *et* C_2 *ne dépendant, comme* δ, *que des propriétés de la ligne* (S), *telles que l'inégalité* (15) *entraîne l'inégalité suivante :*

$$(16) \qquad |(\sigma')_A| < \frac{E}{\overline{MA}^p}\left[\frac{C_1}{1-p}\delta_0^{1-p} + \varphi(p)\right] + \frac{C_2}{\delta_0}\int_{(S)}|\sigma|\,ds,$$

en désignant par $\varphi(p)$ *la fonction définie par l'équation suivante :*

$$(17) \qquad \varphi(p) = \frac{|\sin\theta|}{\pi}\int_0^1 \frac{z^{1-p} + z^{p-1}}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\,dz$$

où θ *représente l'angle de la ligne* (S) *en* M.

J'ajoute que le théorème précédent subsiste sans aucun changement quand on remplace dans l'équation (5), servant de définition à la fonction σ', la fonction $f(\mu r)$ par la fonction $\log r$.

THÉORÈME II. — *Désignons par l la distance d'un point* A *situé sur la ligne* (S) *au sommet le plus voisin. On aura, même dans le cas où l'on remplacerait la fonction* $f(\mu r)$ *par la fonction* $\log r$, *l'inégalité suivante :*

$$(18) \qquad |(\sigma')_A| < \frac{C_3}{l}\int_{(S)}|\sigma|\,ds,$$

où C_3 *représente une constante positive dépendant* uniquement *de la ligne* (S).

THÉORÈME III. — *Lorsque la valeur absolue de la fonction h entrant dans la formule* (7) *a une limite supérieure* H, *on a, en chaque* *point de la ligne* (S), *à la fois les deux inégalités suivantes :*

$$(19)\qquad |h'| < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{\mu}\right) H$$

et

$$(20)\qquad |h'| < C_5 H$$

où l'on a désigné par R *le même nombre que page* 401 *et par* C_4 *et* C_5 *deux nombres positifs ne dépendant que de la ligne* (S). *Au surplus, l'inégalité* (20) *subsiste même dans le cas où, dans la formule* (7), *on remplacerait la fonction* $f(\mu, r)$ *par la fonction* $\log r$.

Théorème IV. — *On a à la fois les deux inégalités suivantes :*

$$(21)\qquad \int_{(S)} |\sigma'| ds < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{\mu}\right) \int_{(S)} |\sigma| ds$$

et

$$(22)\qquad \int_{(S)} |\sigma'| ds < C_5 \int_{(S)} |\sigma| ds$$

où les lettres R, C_4 *et* C_5 *représentent les mêmes nombres que dans les inégalités* (19) *et* (20). *Ajoutons que l'inégalité* (22) *subsiste même quand on remplace, dans la formule* (5), *la fonction* $f(\mu r')$ *par la fonction* $\log r'$.

Théorème V. — *Soit* δ' *une longueur au plus égale à une certaine longueur* δ *dépendant uniquement de la ligne* (S), *mais d'ailleurs quelconque. Décrivons de chaque sommet de la ligne* (S) *comme centre un cercle de rayon* δ'; *désignons ensuite par* (S″) *l'ensemble des points de la ligne* (S) *situés à l'extérieur de tous ces cercles et par* (S′) *l'ensemble de tous les autres points de cette ligne. Cela posé, si* h' *est la fonction définie par la formule* (7) *ou par celle qui s'en déduit en remplaçant la fonction* $f(\mu r')$ *par la fonction* $\log r'$ *et si* H_1 *et* H_2 *sont les limites supérieures des valeurs absolues de la fonction* h *sur les portions* (S′) *et* (S″) *de la ligne* (S), *on aura, en chaque point de la portion* (S′) *de la ligne* (S), *l'iné-*

galité suivante :

$$(23) \qquad |h'| < \left(\frac{1}{R} + C_6\delta'\right)H_1 + \frac{C_7}{\delta'}H_2$$

où R *a la même signification que dans les théorèmes précédents, les lettres* C_6 *et* C_7 *désignant de nouvelles constantes positives ne dépendant que de la ligne* (S).

III. — Problème de Robin.

8. Nous entendons par *problème de Robin* le problème qui consiste à déterminer un potentiel de simple couche u vérifiant l'équation suivante :

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e + \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma_0,$$

où σ_0 est une fonction donnée sur la ligne (S).

Nous supposerons d'abord que la fonction σ_0 ne peut cesser d'être continue qu'aux sommets de la ligne (S) et que l'on a

$$(2) \qquad |\sigma_0| < \frac{E_0}{l^{p'}},$$

où E_0 est une constante positive, p' un nombre positif inférieur à l'unité et l la distance du point auquel correspond la valeur considérée de σ_0 au sommet le plus voisin. Ce n'est qu'à la fin de ce Chapitre que nous nous placerons, en ce qui concerne la fonction σ_0, dans les conditions plus générales énoncées dans l'Introduction.

Il y a évidemment deux cas à distinguer suivant que u est un potentiel logarithmique généralisé ou un potentiel logarithmique ordinaire. Mais, dans ce numéro, nous n'établirons que des propositions où l'on n'a pas à distinguer ces deux cas.

Désignons par $\frac{\sigma}{\pi}$ la densité de la simple couche dont dérive le potentiel u. Nous aurons

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i - \left(\frac{du}{dN}\right)_e = 2\sigma.$$

Cherchons à développer la fonction σ suivant les puissances de λ. Le terme indépendant de λ se réduira évidemment à σ_0. Nous pourrons donc poser

$$(4)\qquad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k.$$

Désignons par u_k le potentiel dérivant d'une simple couche de densité $\frac{\sigma_k}{\pi}$. Nous aurons

$$(5)\qquad \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e = 2\sigma_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

et

$$(6)\qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k.$$

Cela posé, les équations (1), (5) et (6) donneront

$$(7)\qquad 2\sigma_{k+1} = \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Tous ces calculs reposent sur l'hypothèse que les développements en série que nous avons employés sont légitimes. Il faut donc s'assurer dans quelles conditions il en est bien ainsi. Il résulte immédiatement du théorème I du n° **7** que l'on pourra calculer, sans rencontrer aucun obstacle, autant de coefficients que l'on voudra dans les séries (4) et (6). Cette remarque faite, considérons la série suivante :

$$(8)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{(s)} |\sigma_k|\, ds.$$

Le théorème IV du n° **7** nous apprend que le rayon de convergence ρ de cette série vérifiera l'inégalité suivante :

$$(9)\qquad \rho \geqq \frac{1}{C_5}.$$

Voici, d'autre part, ce qui résulte du théorème II du n° **7** : si l'on désigne par (S'') l'ensemble des points de la ligne (S) situés à l'*extérieur* des cercles de rayon commun η décrits des sommets de la ligne (S) comme centres, la série (4) convergera absolument et uniformément sur (S'') pour toute valeur de λ de module inférieur à ρ, et cela si petite que soit la longueur η. Donc, exception faite des sommets, la série (4) est absolument convergente (sans l'être uniformément) sur toute la ligne (S) pourvu que l'on ait

$$|\lambda| < \rho \tag{10}$$

où, comme cela résulte de l'inégalité (9), ρ représente un nombre positif *non nul.*

Comment se comporte la valeur $(\sigma)_A$ de la somme σ de la série (4) en un point A situé sur la ligne (S) lorsque le point A tend vers un sommet de cette ligne, le paramètre λ ayant, bien entendu, une valeur vérifiant l'inégalité (10)?

Nous répondrons à cette question en supposant que le paramètre λ vérifie, en même temps que l'inégalité (10), encore l'inégalité suivante :

$$|\lambda| < R, \tag{11}$$

où R représente le nombre considéré dans les théorèmes III et IV du n° **7**.

Le nombre λ ayant une valeur vérifiant à la fois les inégalités (10) et (11), désignons par R_1 un nombre quelconque vérifiant à la fois les trois inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 > |\lambda|, \\ R_1 < \rho, \\ R_1 < R. \end{array}\right. \tag{12}$$

Cela posé, considérons l'inégalité (16) du n° **7**. Il est aisé de voir qu'il est possible de donner au nombre p une valeur au moins égale à p' et assez voisine de l'unité, et au nombre δ_0 une valeur assez petite que nous supposerons être inférieure à l'unité, pour que l'inégalité suivante :

$$\frac{C_1}{1-p}\delta_0^{1-p}+\varphi(p)\leqq\frac{1}{R_1}$$

soit vérifiée pour chacun des sommets de la ligne (S). Les nombres p et δ_0 étant choisis de cette façon, l'inégalité

$$\overline{MA}\leqq\delta_0,$$

où M est un des sommets de la ligne (S) et A un point quelconque situé sur elle, entraînera, en vertu de l'inégalité (2), l'inégalité

$$|(\sigma_0)_A|<\frac{E_0}{\overline{MA}^p},$$

laquelle, eu égard au choix des nombres p et δ_0 et au théorème I du n° **7**, entraînera à son tour les inégalités que voici :

$$|(\sigma_k)_A|<\frac{E_k}{\overline{MA}^p}\qquad(k=1,2,3,\ldots),$$

en posant

$$E_k=\frac{E_{k-1}}{R_1}+\frac{C_2}{\delta_0^{1-p}}\int_{(S)}|\sigma_{k-1}|\,ds\qquad(k=1,2,3,\ldots).$$

On conclura aisément de ces inégalités que la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty}t^k E_k,$$

entière en t, a R_1 pour rayon de convergence, et que, par conséquent, elle est absolument convergente pour $t=\lambda$. Cela étant, voici, on le reconnaîtra, avec un peu d'attention, la réponse que nous pouvons donner à la question que nous nous étions posée : *il est possible de faire correspondre à toute valeur de λ vérifiant à la fois les inégalités* (10) *et* (11) *un nombre positif p inférieur à l'unité, mais d'autant plus voisin de ce nombre que la différence* $R-|\lambda|$ *sera plus petite, tel que le produit* $(\sigma)_A l^p$, *où l représente la distance du point* A *au sommet le plus voisin de la ligne* (S), *reste inférieur en valeur absolue à un nombre fini indépendant de l.*

Voici les autres conséquences les plus importantes qui résultent de l'étude précédente de la série (4) :

1° Bien que cette série ne soit pas uniformément convergente sur la ligne (S), elle est cependant intégrable terme à terme pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité

$$|\lambda| < R', \tag{13}$$

où R' représente le plus petit des nombres R et ρ, lesquels, rappelons-le, sont l'un et l'autre différents de zéro;

2° Pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité précédente, la série (6) est absolument et uniformément convergente sur la ligne (S) et même dans toute région finie du plan [1] et la somme u de cette série représente le potentiel dérivant d'une simple couche de densité σ portée par la ligne (S);

3° Sous la même condition, on a

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e,$$

en chaque point de la ligne (S), pourvu que ce point ne soit pas un sommet, ce qui prouve que la fonction u, somme de la série (6), est une solution de l'équation (1) pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité (13).

9. Considérons, pour un moment, le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires. On s'assurera aisément que, *dans ce cas*, les relations suivantes seront vérifiées :

$$\int_{(S)} \sigma_{k+1}\, ds + \int_{(S)} \sigma_k\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

on sait d'autre part que, pour qu'un potentiel logarithmique ordinaire dérivant d'une simple couche de densité ρ représente une fonction

(1) On verra plus bas que, sauf un cas exceptionnel que nous indiquerons, l'inégalité (13) assure en réalité la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan.

harmonique régulière à l'infini, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\int_{(S)} \varphi \, ds = 0;$$

en outre, lorsque cette condition est vérifiée, le potentiel considéré est nul à l'infini; enfin, lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée, le potentiel en question est infini à l'infini. Voici ce que l'on peut conclure de tout cela en ce qui concerne la série (6) dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires.

1° Lorsque la condition

$$(14) \qquad \int \sigma_0 \, ds = 0$$

n'est pas vérifiée, cette série n'est uniformément convergente dans tout le plan pour aucune valeur de λ différente de zéro.

2° Lorsqu'au contraire la condition (14) est vérifiée l'inégalité (13) assure la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan et la somme u de cette série représente une fonction harmonique régulière à l'infini. Pour établir ce point il n'y a qu'à tenir compte des deux faits suivants : d'une part les valeurs absolues des fonctions u_k atteindront leurs maxima en certains points situés sur la ligne (S) et d'autre part l'inégalité (13) assure la convergence absolue et uniforme de la série (6) sur la ligne (S) dans tous les cas.

Considérons maintenant le cas des potentiels généralisés. On sait qu'une fonction ψ vérifiant à l'intérieur d'un certain domaine l'équation suivante :

$$\Delta\psi - \mu^2\psi = 0,$$

où μ représente un nombre réel, ne peut avoir, à l'intérieur de ce domaine, ni un maximum positif ni un minimum négatif. On en conclura aisément que, dans le cas des potentiels généralisés, les valeurs absolues des fonctions u_k atteindront leurs maxima sur la ligne (S). Donc, dans ce cas encore, l'inégalité (13) assurera la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan.

Supposons que les conditions pour que le rayon de convergence absolue et uniforme R″ de la série (6) dans tout le plan soit différent de zéro soient vérifiées et désignons par R_0 le plus petit des nombres R'' et R. D'après ce qui a été établi plus haut on aura

$$R_0 \geqq R'. \tag{15}$$

Je dis que l'on a

$$R_0 = R'.$$

Rien d'essentiel ne distingue, dans la démonstration, le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires.

Nous pourrons donc nous borner à considérer le cas des potentiels généralisés.

Désignons par Φ_k le potentiel généralisé de simple couche défini par l'équation suivante :

$$\left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_e = 2\sigma_k$$

et posons

$$w_k = \frac{m^2-\mu^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(rm)\, u_k(x',y')\,dx'\,dy', \tag{16}$$

en désignant par r la distance des points (x, y) et (x', y').

On aura (n° **6**) :

$$u_k = \Phi_k - w_k,$$

ce qui donne :

$$\int_{(S)} |\sigma_{k+1}|\, ds \leqq \frac{1}{2}\int_{(S)} \left|\left[\left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\Phi_k}{dN}\right)_c\right]\right| ds + \int_{(S)} \left|\frac{dw_k}{dN}\right| ds. \tag{17}$$

Désignons par S la longueur totale de la ligne (S) et par H_k le maximum du module de la fonction u_k ; soit en outre

$$m > \mu.$$

L'inégalité (14) du Chapitre précédent d'une part et le théorème IV du même Chapitre d'autre part permettront de déduire de l'inégalité (17) l'inégalité suivante :

$$\int_{(S)} |\sigma_{k+1}|\, ds < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_1}{m}\right)\int_{(S)} |\sigma_k|\, ds + 2 S m H_k.$$

Le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k$$

étant évidemment égal à R'', l'inégalité que nous venons d'obtenir prouve que le rayon de convergence de la série (8) est au moins égal au plus petit des nombres

$$\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{C_1}{m}} \quad \text{et} \quad R''.$$

Mais on peut prendre m aussi grand que l'on voudra. Donc le rayon de convergence de la série (8) est au moins égal au plus petit des nombres R'' et R.

Par conséquent

$$R' \geqq R_0.$$

Cette inégalité entraîne, à cause de l'inégalité (15), la relation (16) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

10. Considérons maintenant les intégrales de M. Poincaré (¹):

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} W'_{j+k} &= \int\int_{(D')} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\frac{\partial u_j}{\partial y}\frac{\partial u_k}{\partial y}+\mu^2 u_j u_k\right) dx\,dy, \\ W_{j+k} &= \int\int_{(D)} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\frac{\partial u_j}{\partial y}\frac{\partial u_k}{\partial y}+\mu^2 u_j u_k\right) dx\,dy, \end{aligned} \right.$$

où, comme l'indiquent les indices, les intégrations doivent être étendues : dans la première au domaine extérieur (D′) et dans la seconde au domaine intérieur (D) de la ligne (S); dans le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires on devra faire $\mu = 0$ et admettre en outre que la condition (14) est vérifiée, sans quoi les intégrales W'_{i+k} cesseraient d'avoir un sens.

(¹) Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, 1896). *Voir* aussi mon Mémoire : *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1902).

Cela posé, on justifiera la notation adoptée en prouvant que les intégrales considérées ne dépendent que de la somme des indices j et k, on établira en même temps la relation suivante :

$$W_n + W'_n = W_{n-1} - W'_{n-1}, \tag{19}$$

et l'on en conclura que la suite infinie

$$\frac{W'_0 + W_0}{W'_2 + W_2}, \quad \frac{W'_2 + W_2}{W'_4 + W_4}, \quad \frac{W'_4 + W_4}{W'_6 + W_6}, \quad \dots, \tag{20}$$

évidemment à termes positifs, est convergente et décroissante (ou du moins non croissante) et que la limite de cette suite ne peut être inférieure à l'unité. Désignons par R‴ le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (20). On prouvera aisément que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (W'_k + W_k)$$

a R″ pour rayon de convergence. Or cette série est identique à la série suivante :

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{(S)} u_k \sigma_0 \, ds,$$

dont le rayon de convergence est au moins égal à R″.

On aura donc

$$R''' \geqq R''.$$

Par conséquent, si l'on désigne par R'_0 le plus petit des nombres R‴ et R; on aura

$$R'_0 \geqq R_0. \tag{21}$$

Je dis que l'on a

$$R'_0 = R_0. \tag{22}$$

Dans le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires, on doit évidemment admettre que la fonction σ_0 satisfait à l'équation (14);

nous supposerons en outre que, dans ce cas, l'on a

$$R''' > 1; \tag{23}$$

on verra que cette restriction ne nous gênera en rien. D'ailleurs la démonstration, dans le cas des potentiels généralisés, ne se distingue de celle où l'on considère les potentiels ordinaires que par des modifications faciles à apercevoir, modifications qui sont en même temps des simplifications sensibles liées à ce fait que, dans le cas des potentiels généralisés, les hypothèses exprimées par les relations (14) et (23) deviennent superflues. Cela nous permettra de n'envisager que le cas des potentiels logarithmiques ordinaires.

Considérons sur la ligne (S) deux points A et B; soit r' leur distance, et β l'angle formé par la direction BA avec la normale intérieure en B à la ligne (S).

Le point A étant fixe, l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\cos\beta}{r'} - \frac{1}{S}\right)$$

représentera une fonction déterminée du point B. Soit P le potentiel logarithmique ordinaire dérivant d'une simple couche dont la densité serait égale à la fonction précédente [1]; nous aurons

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_i - \left(\frac{dP}{dN}\right)_e = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\beta}{r'} - \frac{1}{S}. \tag{24}$$

Posons

$$K(A) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \tag{25}$$

La fonction K(A) du point A ne pourra cesser d'être continue qu'aux sommets de la ligne (S).

---

[1] L'idée d'introduire la fonction P nous a été suggérée par le Mémoire de M. E.-R. Neumann : *Neue Integraleigenschaften successiver Potentiele* (*Göttinger Nachrichten*, 1902).

Moyennant la relation

$$(26)\qquad (u_k)_A = \frac{-1}{\pi}\int_{(S)} u_{k-1}\frac{\cos\beta}{r'}\,ds,$$

facile à établir, l'équation (24) donne

$$(u_k)_A + \frac{1}{S}I_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

en posant

$$I_{k-1} = \int_{(S)} u_{k-1}\,ds.$$

On déduit immédiatement de la relation précédente les inégalités suivantes :

$$(27)\qquad \left|u_k + \frac{1}{S}I_{k-1}\right| < \sqrt{K(A)}\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}}\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Considérons maintenant deux potentiels logarithmiques de simple couche Φ_0 et Φ, définis au moyen des équations suivantes :

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_e = 1,\\ &\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = -\left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_e - 1. \end{aligned}$$

Le potentiel Φ représentera une fonction harmonique régulière à l'infini. Cela posé, multiplions l'équation (28) par $u_{k-1}\,ds$ et intégrons l'équation obtenue en étendant l'intégration à toute la ligne (S); il viendra

$$(29)\qquad I_k + I_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

en s'appuyant d'une part sur (26) et, d'autre part, sur l'expression connue de la somme

$$\left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\Phi_0}{dN}\right)_e.$$

En s'appuyant sur l'inégalité de Schwarz, on déduira de (29) l'inégalité suivante :

$$(30)\qquad |I_k + I_{k-1}| < B\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

où l'on a désigné par B le nombre positif défini au moyen de l'équation

$$B^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Les inégalités (27) et (30) donnent

$$(31)\qquad |u'_k| < \left[2\sqrt{K(A)} + \frac{B}{S}\right]\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

en posant

$$(32)\qquad u'_k = u_{k+1} + u_k,$$

et en tenant compte de ce que l'on a

$$W'_{2k} + W_{2k} \leqq W'_{2k-2} + W_{2k-2}.$$

Posons encore

$$(33)\qquad \sigma'_k = \sigma_{k+1} + \sigma_k,$$

et faisons la remarque suivante : si l'on remplace dans l'équation (1) les fonctions σ_0 et u par les fonctions σ'_0 et u', les séries (4) et (6) deviendront identiques aux séries suivantes :

$$(34)\qquad \sigma' = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma'_k \lambda^k,$$

$$(35)\qquad u' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k \lambda^k.$$

Reportons-nous maintenant au théorème V du Chapitre précédent, et désignons par $H_1^{(k)}$ et $H_2^{(k)}$ les maxima des valeurs absolues de la fonction u'_k sur les portions (S′) et (S″) de la ligne (S); nous aurons

$$(36)\qquad H_1^{(k+1)} < \left(\frac{1}{R} + C_6\delta'\right) H_1^{(k)} + \frac{C_7}{\delta'} H_2^{(k)}.$$

Désignons par $F(\delta')$ le maximum de l'expression

$$2\sqrt{K(A)} + \frac{B}{S}$$

lorsque le point A décrit la portion (S'') de la ligne (S). La quantité $F(\delta')$ représentera, pour toute valeur de δ' différente de zéro, un nombre positif fini d'autant plus grand que δ' sera plus petit, et l'inégalité (31) nous donnera

$$H_2^{(k)} < F(\delta')\sqrt{W'_{2k-2} + W_{2k-2}},$$

d'où

$$H_2^{(k)} < F(\delta')\frac{\sqrt{W'_0 + W_0}}{R_0'^{k-1}}, \tag{37}$$

Soit a le plus petit des nombres

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + C_6\delta'} \quad \text{et} \quad R'_0,$$

les inégalités (36) et (37) donneront

$$H_1^{(k+1)} < \frac{H_1^{(k)}}{a} + \frac{C_7 F(\delta')}{\delta'}\frac{\sqrt{W'_0 + W_0}}{a^{k-1}},$$

ce qui donne

$$H_1^{(k)} < \left[H_1^{(1)} + (k-1)\frac{C_7 F(\delta')}{\delta'} a\sqrt{W'_0 + W_0}\right]\frac{1}{a^{k-1}}. \tag{38}$$

Désignons par $F_1(\delta')$ le plus grand des deux nombres

$$F(\delta') \quad \text{et} \quad \frac{C_7 F(\delta')}{\delta'} R,$$

il résulte des inégalités (37) et (38) que l'on aura, en chaque point de la ligne (S),

$$|u'_k| < \left[H_1^{(1)} + (k-1)F_1(\delta')\sqrt{W'_0 + W_0}\right]\frac{1}{a^{k-1}} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{39}$$

Cela prouve que, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité

$$|\lambda| < a,$$

la série (35) est absolument et uniformément convergente dans tout le plan. D'ailleurs, la différence $R'_0 - a$ peut être rendue égale à zéro lorsque $R'_0 < R$ et aussi petite que l'on voudra lorsque $R'_0 = R$: il n'y a qu'à attribuer à δ' une valeur assez petite.

Il résulte de là que l'inégalité

$$(40) \qquad |\lambda| < R'_0$$

assure la convergence absolue et uniforme de la série (35) dans tout le plan. Il s'ensuit (n° **9**) que l'inégalité précédente assure aussi la convergence absolue de la série (34). Il résulte d'ailleurs de l'inégalité (23) que l'on a

$$R'_0 > 1.$$

Par conséquent, les séries (34) et (35) convergeront absolument pour $\lambda = -1$. On en conclura au moyen des relations (33) et (32) que l'on a

$$\lim \sigma_{2k} = -\lim \sigma_{2k+1} = \varphi,$$
$$\lim u_{2k} = -\lim u_{2k+1} = \psi,$$

en désignant par φ une fonction [définie sur la ligne (S)] vérifiant les hypothèses énoncées au sujet de la fonction σ_0 au début du n° **8**, et par ψ le potentiel de simple couche défini par l'équation

$$\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i - \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e = 2\varphi.$$

Cela posé, on s'assurera que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy = \lim_{k=\infty}(W'_{2k} + W_{2k}).$$

Or, en vertu de l'inégalité (23), on a

$$\lim_{k=\infty}(W'_{2k} + W_{2k}) = 0,$$

par conséquent, la fonction ψ, nulle à l'infini, sera nulle dans tout le plan. On aura donc

$$\lim_{k=\infty} \mathrm{I}_k = 0,$$

ce qui permet de déduire de l'inégalité (30) l'inégalité suivante :

$$|\mathrm{I}_{k-1}| < \mathrm{B} \sum_{j=k-1}^{\infty} \sqrt{\mathrm{W}'_{2j} + \mathrm{W}_{2j}},$$

mais

$$\sqrt{\mathrm{W}'_{2j+2} + \mathrm{W}_{2j+2}} < \frac{1}{\mathrm{R}'''} \sqrt{\mathrm{W}_{2j} + \mathrm{W}_{2j}},$$

on aura donc

$$|\mathrm{I}_{k-1}| < \frac{\mathrm{BR}'''}{\mathrm{R}''' - 1} \sqrt{\mathrm{W}'_{2k-2} + \mathrm{W}_{2k-2}},$$

et l'on conclura, au moyen de cette inégalité, de l'inégalité (27), l'inégalité suivante :

$$(41)\quad |(u_k)_{\mathrm{A}}| < \frac{\mathrm{BR}'''}{\mathrm{S}(\mathrm{R}''' - 1)} \sqrt{\mathrm{W}'_{2k-2} + \mathrm{W}_{2k-2}} + \sqrt{\mathrm{K}(\mathrm{A})} \sqrt{\mathrm{W}'_{2k-2} + \mathrm{W}_{2k-2}}.$$

Un raisonnement identique à celui qui nous a permis de déduire de l'inégalité (31) l'inégalité (39) permettra de déduire de l'inégalité (41) les inégalités suivantes :

$$(42)\quad |u_k| < \left[\mathrm{H}_1 + (k-1)\Omega(\delta')\sqrt{\mathrm{W}'_0 + \mathrm{W}_0}\right] \frac{1}{a^{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

où l'on a désigné par a, comme dans l'inégalité (39), le plus petit des nombres

$$\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R}} + c_0 \delta'} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}'_0,$$

par H_1 le maximum du module de la fonction u_1 et par $\Omega(\delta')$ une fonction de δ' ayant une valeur positive finie pour toute valeur de δ' différente de zéro, cette valeur étant d'autant plus grande que δ' est plus petit; j'ajoute que la forme de la fonction $\Omega(\delta')$ dépend uniquement de la ligne (S).

On conclura immédiatement de l'inégalité (42) que l'inégalité

$$|\lambda| < R'_0$$

assure la convergence absolue et uniforme de la série (6) dans tout le plan. On aura donc

$$R_0 \geqq R'_0,$$

inégalité qui, jointe à l'inégalité (21), entraîne la relation (22) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

11. Lorsque la fonction σ_0 satisfait aux hypothèses du n° **8** et lorsque, dans le cas particulier des potentiels logarithmiques ordinaires, elle vérifie encore la relation (14), la démonstration du théorème fondamental I de l'introduction n'exigerait plus maintenant que la reproduction, avec quelques modifications évidentes, des considérations développées dans les numéros de **9** à **14** inclusivement, de mon Mémoire *Sur l'intégration de l'équation*

$$\Delta u + \xi u = 0 \quad (^1).$$

Nous admettrons donc que, avec les restrictions que nous venons d'énoncer, le théorème en question est établi. Voyons comment on peut s'affranchir de ces restrictions.

Considérons le cas des potentiels logarithmiques ordinaires sans admettre que la relation (14) soit vérifiée. Posons alors

$$(43) \qquad u = \frac{\lambda u' + u_0}{1 + \lambda},$$

en désignant par u' un nouveau potentiel logarithmique ordinaire de simple couche. En portant cette valeur de u dans l'équation (1) on trouvera

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i - \left(\frac{du'}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{du'}{dN}\right)_i + \left(\frac{du'}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma',$$

(1) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1902.

en posant

$$\sigma' = \sigma'_0 + \sigma'_1.$$

La relation

$$\int \sigma' \, ds = 0$$

étant satisfaite dans tous les cas, la substitution (43) ramène le cas où la relation (14) n'est pas vérifiée à celui où elle a lieu.

Montrons enfin qu'il est aisé de s'affranchir de la restriction qui consiste à admettre que la fonction σ'_0 satisfait aux hypothèses du numéro **8**. En effet, supposons que cette fonction ne vérifie que les conditions spécifiées dans l'énoncé du théorème fondamental I et posons

$$u = u_0 + \lambda u'. \tag{44}$$

L'équation (1) nous donnera

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i - \left(\frac{du'}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{du'}{dN}\right)_i + \left(\frac{du'}{dN}\right)_e\right] + 2\sigma'_1.$$

Or la fonction σ'_1 satisfera, on le prouvera sans peine, aux hypothèses faites au numéro **8** au sujet de la fonction σ'_0. Par conséquent, la substitution (44) ramène le cas général au cas particulier où le théorème fondamental I est déjà démontré.

La discussion des pôles $+1$ et -1 que peut avoir la fonction u du paramètre λ dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires présente un intérêt évident; elle pourra être faite par une méthode analogue à celle dont je me suis servi, pour trois variables indépendantes, dans mon Mémoire *Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe* (¹).

12. Reportons-nous au théorème fondamental I de l'Introduction et considérons la suite

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots, \tag{45}$$

(¹) *Bulletin de l'Académie de Cracovie,* octobre 1902.

ainsi que le système complet de fonctions fondamentales

$$(46) \qquad U_{k,1}, \quad U_{k,2}, \quad \ldots, \quad U_{k,j_k}$$

correspondant au terme λ_k de cette suite. Nous nous proposons de faire au sujet des fonctions précédentes quelques remarques qui nous seront utiles au Chapitre suivant.

Posons

$$U'_{k,\alpha} = \sum_{\beta=1}^{j_k} a_{\alpha,\beta} U_{k,\beta},$$

en désignant par les $a_{\alpha,\beta}$ des constantes quelconques à cela près que le déterminant suivant

$$|a_{\alpha,\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, j_k)$$

soit différent de zéro. Il est évident que le système de fonctions

$$U'_{k,1}, \quad U'_{k,2}, \quad \ldots, \quad U'_{k,j_k}$$

pourra être considéré comme formant un système complet de fonctions fondamentales relatives au terme λ_k de la suite (45) au même titre que le système (46). Il est aisé de voir que, sauf une restriction que nous indiquerons tout à l'heure, il est possible de disposer des constantes $a_{\alpha\beta}$ de façon :

1° Que les relations suivantes :

$$\int_{(S)} \left(\frac{dU'_{kt}}{dN}\right)_i U'_{k't'} ds = \int_{(S)} \left(\frac{dU'_{k,t}}{dN}\right)_e U'_{k',t'} ds = 0,$$

lesquelles auront lieu dans tous les cas sous la condition $k \neq k'$, aient encore lieu toutes les fois que l'on a $t \neq t'$, même si l'on avait en même temps $k = k'$;

2° Que l'on ait

$$\int_{(S)} \left[\left(\frac{dU'_{kt}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU'_{kt}}{dN}\right)_e\right] U'_{kt} ds = -1.$$

Il est donc permis de supposer, comme nous allons le faire dorénavant, que le système (46) soit constitué de telle sorte que la relation

$$(47)\qquad \int_{(S)} \left[\left(\frac{dU_{kt}}{dN} \right)_i - \left(\frac{dU_{kt}}{dN} \right)_e \right] U_{kt} = -1$$

ait lieu pour toutes les valeurs des indices k et t et que l'on ait

$$(48)\qquad \int_{(S)} \left[\left(\frac{dU_{kt}}{dN} \right)_i U_{k',t'} ds = \int_{(S)} \left(\frac{dU_{k,t}}{dN} \right)_e U_{k',t'} ds = 0,$$

à moins d'avoir à la fois

$$k = k' \qquad \text{et} \qquad t = t'.$$

Cela posé, désignons par U_k le résidu relatif au pôle λ_k de la fonction u définie par l'équation (1).

D'après le théorème fondamental I, nous aurons

$$(49)\qquad U_k = \sum_{j=1}^{j_k} C_{kj} U_{kj}$$

et l'on prouvera aisément que l'on a

$$(50)\qquad C_{kj} = 2\lambda_k \int_{(S)} \sigma_0 U_{kj} ds.$$

Voici maintenant la restriction que l'on doit apporter à ce qui précède. Dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, il peut arriver que, parmi les fonctions fondamentales relatives au pôle $\lambda_1 = -1$, il en existe une, nécessairement irrégulière à l'infini, se réduisant à zéro sur la ligne (S); c'est ce qui se présente par exemple pour un cercle de rayon égal à l'unité. Dans ce cas, il sera impossible, on le prouvera sans peine, de faire en sorte que toutes les fonctions fondamentales relatives au pôle -1 satisfassent à la condition (47). Mais on pourra toujours s'arranger de façon qu'il n'y ait exception que pour une de ces fonctions, soit $U_{1,1}$, et que les autres soient, en outre, toutes régulières à l'infini. Nous admettrons que l'on ait réalisé ces conditions et nous assujettirons alors la fonction $U_{1,1}$ à la condition suivante :

$$(51) \qquad \int_{(S)} \left(\frac{dU_{1,1}}{dN}\right)_e ds = 1,$$

au lieu d'imposer à cette fonction la condition (47) à laquelle, comme nous venons de le voir, il peut n'être pas possible de satisfaire.

D'ailleurs aucune modification ne devra être apportée à ce que nous avons dit au sujet des relations (48).

Ces conventions admises, la formule (50) devra être remplacée, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires pour $k = j = 1$, par la formule suivante :

$$(52) \qquad C_{11} = -2\int_{(S)} \sigma_0 \, ds.$$

IV. — Problème de Neumann.

13. Nous entendons par *problème de Neumann*, le problème qui consiste à déterminer un potentiel logarithmique (généralisé ou ordinaire) de double couche portée par la ligne (S), tel que l'on ait

$$(1) \qquad (v)_e - (v)_i = \lambda[(v)_e + (v)_i] + 2h_0,$$

où h_0 est une fonction donnée sur la ligne (S) et λ une paramètre variable.

Nous n'envisagerons *dans ce numéro* que le cas *particulier* où h_0 peut être regardé comme la valeur périphérique d'une fontion φ qui jouit des propriétés suivantes : dans toute l'étendue du domaine (D) et même sur la frontière (S) de ce domaine, la fonction φ est finie et continue; la quantité $\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i$ satisfait aux conditions générales imposées à la fonction σ_0 au numéro **4**; enfin, la fonction F, définie par l'équation suivante :

$$F = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

est continue en chaque point situé à l'*intérieur* du domaine (D) et elle est limitée dans toute l'étendue de ce domaine.

Les hypothèses précédentes relatives à la fonction h_0 permettront d'appliquer au problème de Neumann la méthode que nous avons eu l'occasion d'appliquer au même problème dans le cas de trois variables indépendantes (¹).

Désignons par v_0 le potentiel de double couche défini par l'équation suivante :

$$(v_0)_e - (v_0)_i = 2h_0.$$

La fonction

$$\frac{dv_0}{dN} = \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_e = \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i$$

existera et, si l'on détermine la fonction σ_0 qui entre dans l'équation (1) du Chapitre précédent, au moyen de l'équation suivante :

$$\sigma_0 = \frac{dv_0}{dN}, \tag{2}$$

cette fonction satisfera aux conditions voulues pour que le théorème fondamental I de l'Introduction lui soit applicable.

La fonction σ_0 étant définie au moyen de l'équation (2), le potentiel de double couche v défini par la formule

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\left[\frac{\lambda u + (v_0)_i}{\lambda + 1} + \frac{\lambda u + (v_0)_e}{\lambda - 1}\right]\frac{df(r\mu)}{dr}\cos\gamma\, ds, \tag{3}$$

où, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, la fonction $f(r\mu)$ serait à remplacer par la fonction $\log r$, vérifiera l'équation (1). On en conclura de suite que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés en ce qui concerne la fonction h_0, l'équation (1) admet une solution analytique par rapport à λ, jouissant de toutes les propriétés spécifiées dans l'énoncé du théorème fondamental II de l'Introduction.

La remarque suivante nous sera utile plus tard : soit V_k le résidu relatif au pôle λ_k de la fonction v du paramètre λ, nous aurons

$$(V_k)_e + (V_k)_i = 2\sum_{j=1}^{j_k} C_{kj} U_{kj}, \tag{4}$$

(¹) Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, fasc. I, 1902, p. 103 et suivantes).

où les C_{kj} représentent des constantes déterminées au moyen des formules suivantes :

$$(5)\qquad C_{kj} = \int_{(S)} h_0\left[\left(\frac{dU_{kj}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU_{kj}}{dN}\right)_e\right] ds \qquad (j = 1, 2, \ldots, j_k),$$

pourvu que, dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires, on convienne de remplacer, dans la formule (4), pour $k = 1$, le symbole $U_{1,1}$ par l'unité.

14. Revenons au problème de Neumann, mais excluons maintenant le cas des potentiels logarithmiques ordinaires en ne faisant, en revanche, au sujet de la fonction h_0, que les hypothèses générales énoncées au n° **4**.

En vue d'applications ultérieures, nous désignerons dans ce numéro le potentiel cherché par w, et par m le nombre caractéristique de ce potentiel, au lieu de désigner ces éléments, comme dans les autres parties du travail, par v et μ.

Nous aurons

$$(6)\qquad (w)_e - (w)_i = \lambda[(w)_e + (w)_i] + 2h_0.$$

Désignons par h l'expression qui forme le second membre de cette équation et voyons s'il est possible de développer la fonction h, suivant les puissances de λ, en une série de la forme

$$(7)\qquad h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \lambda^k.$$

Cela donnerait

$$(8)\qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \lambda^k,$$

les w_k étant les potentiels de double couche définis par les équations suivantes :

$$(9)\qquad (w_k)_e - (w_k)_i = 2h_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

L'équation (6) donnerait

$$(9) \qquad (w_k)_e + (w_k)_i = 2h_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(10) \qquad h_{k+1} = -\frac{1}{\pi}\int_{(S)} h_k \frac{df(r'm)}{dr'} \cos\beta \, ds \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où r' et β ont la même signification que dans la formule (7) du n° 5.

Désignons par H_k une limite supérieure du module de h_k; nous aurons

$$(11) \qquad H_{k+1} < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_1}{m}\right) H_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

en vertu du théorème III du Chapitre II. Cela prouve que, sous la condition

$$(12) \qquad |\lambda| < \frac{R}{1 + \dfrac{RC_1}{m}},$$

tous les développements en série que nous venons de considérer seront absolument et uniformément convergents dans les domaines où l'on a à les envisager. Ces développements sont par conséquent légitimes, et le problème de Neumann est résolu au moyen de la série (8) pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité (12).

15. Nous avons établi, au n° **13**, que le problème de Neumann admet une solution analytique par rapport au paramètre λ, jouissant des propriétés spécifiées dans le théorème fondamental II de l'Introduction, lorsque la fonction h_0 satisfait à certaines conditions particulières. Proposons-nous maintenant d'étendre ce résultat au cas où cette fonction ne vérifie que les hypothèses beaucoup plus générales dans lesquelles nous nous sommes placés au numéro précédent.

J'observe d'abord que, sans nuire à la généralité, nous pouvons admettre que la fonction h_0 est limitée. En effet, soit toujours v_0 le potentiel de double couche défini par l'équation

$$(v_0)_e - (v_0)_i = 2h_0.$$

Posons

$$v = v_0 + \lambda v'. \tag{13}$$

La fonction v' représentera un potentiel de double couche vérifiant l'équation suivante :

$$(v')_e - (v')_i = \lambda[(v')_e + (v')_i] + 2h_1$$

où

$$2h_1 = (v_0)_e + (v_0)_i.$$

La fonction h_1 étant limitée (n° 5), on voit que la substitution (13) ramène le cas général à celui où la fonction h_0 est limitée. Nous supposerons donc dans la suite qu'elle satisfasse à cette condition.

Cherchons à résoudre l'équation (1) pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité suivante :

$$|\lambda| < a, \tag{14}$$

en désignant par a un nombre positif donné, tel cependant que l'on ait

$$1 < a < R. \tag{15}$$

Nous pourrons nous borner au cas des potentiels logarithmiques ordinaires, cas qui ne se distingue du cas général que par la complication un peu plus grande du raisonnement.

Considérons le potentiel généralisé w vérifiant l'équation (6) et donnons au nombre caractéristique m de ce potentiel une valeur telle que l'on ait

$$\frac{R}{1 + \frac{c_4 R}{m}} = a. \tag{16}$$

La chose sera possible puisque a est inférieur à R. Dans ces conditions la formule (8) fera connaître la fonction w pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14). Cela posé, désignons par φ le potentiel logarithmique ordinaire dérivant d'une double couche de *même den-*

sité que celle dont dérive le potentiel w et posons

$$\psi = \varphi - w. \tag{17}$$

La fonction ψ et ses dérivés premières, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, seront continues (n° **6**), même à la traversée de la ligne (S). Posons

$$v = \varphi + \lambda Q, \tag{18}$$

en désignant par Q un nouveau potentiel logarithmique ordinaire de double couche. L'équation (1) donnera

$$(Q)_e - (Q)_i = \lambda[(Q)_e + (Q)_i] + 2(\psi)_s, \tag{19}$$

en désignant par $(\psi)_s$ la fonction à laquelle se réduit sur (S) la fonction ψ et en tenant compte des équations (6) et (17).

16. Désignons par H_0 une limite supérieure du module de la fonction h_0. Nous aurons, en dehors des inégalités (11), encore l'inégalité suivante :

$$H_1 < \left(\frac{1}{R} + \frac{C_4}{m}\right) H_0 ;$$

on aura donc

$$|h_k| < \frac{H_0}{a^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

à cause de la relation (16).

Désignons par φ_k le potentiel logarithmique ordinaire de double couche défini par l'équation suivante :

$$(\varphi_k)_e - (\varphi_k)_i = 2 h_k.$$

Le théorème III du Chapitre II et les inégalités (20) nous donneront aisément

$$|\varphi_k| < (1 + C_5) \frac{H_0}{a^k}.$$

Cela prouve que, pour les valeurs de λ vérifiant l'inégalité (14), la fonction φ, introduite au numéro précédent, pourra être calculée au moyen de la série suivante :

$$(21) \qquad \varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\lambda^k.$$

On aura donc

$$(22) \qquad \psi=\sum_{k=0}\psi_k\lambda^k,$$

pour les mêmes valeurs de λ, en posant

$$\psi_k=\varphi_k-w_k.$$

On aura d'ailleurs

$$(23) \qquad |w_k|<(1+C_5)\frac{H_0}{a^k},$$

en vertu du théorème III du Chapitre II; par conséquent,

$$(24) \qquad |\psi_k|<2(1+C_5)\frac{H_0}{a^k}.$$

On verra, en se reportant au n° **6**, que la fonction ψ_k et ses dérivées du premier ordre, $\frac{\partial\psi_k}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi_k}{\partial y}$, seront continues même à la traversée de la ligne (S) et l'on s'assurera ensuite que l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

a un sens. Cherchons une limite supérieure de cette intégrale. L'équation

$$\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_k}{\partial y^2}+m^2 w_k=0,$$

que la fonction ψ_k vérifie en vertu de sa définition, donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=m^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k w_k\,dx\,dy,$$

d'où, à cause de (24),

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \\ \displaystyle\qquad < 2m^2(1+C_5)\frac{H_0}{a^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|w_k|\,dx\,dy. \end{array} \right.$$

Pour trouver une limite supérieure de l'intégrale qui figure au second membre de cette inégalité, décrivons dans le plan des (x, y) un cercle (Σ) de rayon L assez grand pour que la ligne (S) tout entière se trouve à l'intérieur de ce cercle. Cela posé, décomposons l'intégrale qui nous occupe en deux parties J et J' se rapportant respectivement à la partie du plan limitée par le cercle (Σ) et à la région du plan extérieure à ce cercle. Remplaçons dans l'intégrale J la quantité $|w_k|$ par la limite supérieure que lui assigne l'inégalité (23) et observons que, à l'extérieur du cercle (Σ), une limite supérieure de la fonction $|w_k|$ nous est fournie, comme on le prouvera avec un peu d'attention, par l'expression suivante :

$$\frac{f(rm)}{f(Lm)}(1+C_5)\frac{H_0}{a^k},$$

où r représente la distance du point où l'on considère la fonction $|w_k|$ au centre du cercle (Σ). Nous trouverons aisément

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|w_k|\,dx\,dy < B'\frac{H_0}{a^k},$$

en désignant par B' une quantité ne dépendant ni de l'indice k, ni de la fonction h_0. L'inégalité (25) donnera alors

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy < \left(B\frac{H_0}{a^k}\right)^2,$$

où B représente un nombre qui, comme le nombre B', ne dépend ni de l'indice k, ni de la fonction h_0.

17. Pour calculer le potentiel de double couche Q, portons dans l'équation (19) la valeur (22) de ψ et voyons s'il est possible de satisfaire à cette équation en posant

$$(27) \qquad Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \lambda^k,$$

les fonctions Q_k étant des potentiels logarithmiques ordinaires de double couche vérifiant les équations suivantes :

$$(28) \quad (Q_k)_e - (Q_k)_i = \lambda[(Q_k)_e + (Q_k)_i] + 2(\psi_k)_s \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $(\psi_k)_s$ représente la fonction à laquelle se réduit la fonction ψ_k sur la ligne (S).

Nous avons déjà eu l'occasion de faire remarquer que la fonction ψ_k et ses dérivées du premier ordre $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_k}{\partial y}$ sont continues, même à la traversée de la surface (S) et que l'on a

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} + m^2 \varpi_k = 0.$$

Il résulte de là que la théorie du n° **15** est applicable à l'équation (28). Cela posé, désignons par n le nombre entier et positif, tel que l'on ait

$$(29) \qquad |\lambda_n| \leqq a < \lambda_{n+1}.$$

La fonction Q_k considérée comme fonction de la variable complexe λ n'aura dans le domaine défini par l'inégalité

$$(30) \qquad |\lambda| < \lambda_{n+1},$$

pour toutes singularités, que des pôles simples tous compris dans la suite

$$(31) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

Pour simplifier le langage, nous nous exprimerons comme si la fonction Q_k devait avoir tous ces nombres pour pôles, en convenant en même temps de dire que le résidu correspondant à un terme de la suite (31) est nul si ce terme n'est pas en réalité un pôle de la fonction Q_k. Désignons par $\Pi_{k\alpha}$ le résidu relatif au pôle λ_α et posons

$$(32) \qquad Q_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\Pi_{k\alpha}}{\lambda - \lambda_\alpha} + G_k.$$

La fonction G_k sera une fonction de λ holomorphe à l'intérieur du cercle défini par l'inégalité (30) dans le plan de la variable complexe λ et elle représentera un potentiel de double couche vérifiant l'équation suivante :

$$(33) \qquad (G_k)_e - (G_k)_i = \lambda[(G_k)_e + (G_k)_i] + 2\Phi_k$$

en posant

$$(34) \qquad 2\Phi_k = 2(\psi_k)_s + \sum_{\alpha=1}^{n} [(\Pi_{k\alpha})_e + (\Pi_{k\alpha})_i].$$

D'après ce qui a été établi au n° **13** on aura

$$(35) \qquad (\Pi_{k\alpha})_e + (\Pi_{k\alpha})_i = 2\sum_{j=1}^{j\alpha} C_{\alpha j}^{(k)} U_{\alpha j}$$

avec

$$(36) \qquad C_{\alpha j}^{(k)} = \int_{(S)} (\psi_k)_s \left[\left(\frac{dU_{\alpha j}}{dN}\right)_i - \left(\frac{dU_{\alpha j}}{dN}\right)_e\right] ds$$

en convenant en outre de remplacer dans la formule (35), pour $\alpha = 1$, le symbole $U_{1,1}$ par l'unité.

Cela posé on s'assurera aisément, en s'appuyant sur les inégalités (24) et (26) du numéro précédent, qu'il existe un nombre positif B_1, ne dépendant ni des indices k, α et j ni de la fonction h_0, tel que l'on ait

$$(37) \qquad |C_{\alpha j}^{(k)}| < B_1 \frac{H_0}{a^k}.$$

On conclura aisément de cette inégalité, en adjoignant à la formule (35) la relation suivante :

$$(\Pi_{k\alpha})_e - (\Pi_{k\alpha})_i = \lambda_k[(\Pi_{k\alpha})_e + (\Pi_{k\alpha})_i],$$

que la série

$$(38)\qquad \Pi_\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\alpha}\lambda^k$$

est absolument et uniformément convergente dans tout le plan, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14).

Montrons qu'il en est de même de la série suivante :

$$(39)\qquad G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k\lambda^k$$

dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions de λ.

Il résulte des formules (34) et (35) et de la remarque faite plus haut au sujet du symbole U_{11} que nous pouvons considérer la fonction Φ_k comme définie dans toute l'étendue du plan au moyen de la formule suivante :

$$(40)\qquad \Phi_k = C_{11}^{(k)} + \sum_{j=2}^{j_k} C_{1j}^{(k)} U_{1j} + \sum_{\alpha=2}^{n}\sum_{j=1}^{j_\alpha} C_{\alpha j}^{(k)} U_{\alpha j} + \psi_k.$$

Il résulte immédiatement de cette remarque que la théorie du n° **15** est applicable à l'équation (33). Désignons par P_k le potentiel logarithmique ordinaire de double couche défini au moyen de l'équation suivante :

$$(41)\qquad (P_k)_e - (P_k)_i = 2\Phi_k$$

et considérons le potentiel de simple couche z_k vérifiant l'équation

$$\left(\frac{dz_k}{dN}\right)_i - \left(\frac{dz_k}{dN}\right)_e = \lambda\left[\left(\frac{dz_k}{dN}\right)_i + \left(\frac{dz_k}{dN}\right)_e\right] + 2\frac{dP_k}{dN},$$

la formule (3) nous donnera

$$(42)\qquad G_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)}\left[\frac{\lambda z_k + (P_k)_i}{\lambda+1} + \frac{\lambda z_k + (P_k)_e}{\lambda - 1}\right]\frac{\cos\gamma}{r}\,ds.$$

D'ailleurs la fonction z_k de λ sera holomorphe pour l'ensemble des valeurs de λ vérifiant l'inégalité (30).

Par conséquent, si la série

$$z_k = \sum_{t=0}^{\infty} z_{kt}\lambda^t$$

représente le développement de z_k suivant les puissances de λ, elle aura λ_{n+1} pour rayon de convergence. J'ajoute qu'elle convergera uniformément dans tout le plan pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (30) parce que les fonctions harmoniques z_{kt} sont manifestement toutes régulières à l'infini.

On établira aisément, au moyen de l'inégalité de Schwarz, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\
&<\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{P}_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\
&<\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, la formule (40) donne

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy-\sum_{j=2}^{j_k}(\mathrm{C}_{1j}^{(k)})^2-\sum_{\alpha=2}^{n}\sum_{j=1}^{j_\alpha}(\mathrm{C}_{\alpha j}^{k})^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (26) donnera

$$(43)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy<\left(\mathrm{B}\frac{\mathrm{H}_0}{a^k}\right)^2.$$

D'autre part, on conclura aisément des résultats déjà établis que l'on a

$$|\mathrm{P}_k| < \mathrm{B}_2\frac{\mathrm{H}_0}{a^k}$$

en désignant par B_2 un nombre positif ne dépendant ni de l'indice k ni de la fonction h_0. Il résulte de cette inégalité :

1° Que la série

$$P(\lambda) = \sum_{k=0} P_k \lambda^k \tag{44}$$

sera absolument et uniformément convergente dans tout le plan pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14);

2° Qu'il existe un nombre positif B_3, analogue aux nombres B, B_1 et B_2, tel que l'on ait à la fois

$$|z_{k0}| < B_3 \frac{H_0}{a^k} \quad \text{et} \quad |z_{k1}| < B_3 \frac{H_0}{a^k}. \tag{45}$$

En s'appuyant sur les inégalités (43) et (45), on déduira aisément de l'inégalité (42) du Chapitre précédent la conséquence suivante : il existe un nombre positif B_4, analogue aux nombres B, B_1, B_2 et B_3, tel que l'on ait

$$|z_{kj}| < B_4 \frac{H_0}{a^{k+j}}.$$

Cela prouve que la série

$$z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \lambda^k \tag{46}$$

sera absolument et uniformément convergente dans tout le plan, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14). Or la série (44) jouit aussi, comme nous venons de le voir, de la même propriété.

Il en résulte, à cause de la formule (42), que la série (39) jouira aussi de cette propriété parce que les fonctions G_k n'ont pas, comme semble l'indiquer la formule (42), les nombres -1 et $+1$ pour pôles. D'ailleurs, nous l'avons déjà établi, les séries (21) et (38) sont, comme les précédentes, absolument et uniformément convergentes dans tout le plan pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (14). Il résulte de tout cela, en tenant compte en outre des équations (18), (27) et (32), que l'expression suivante de v

$$v = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\lambda\, U_\alpha(\lambda)}{\lambda - \lambda_\alpha} + \lambda G(\lambda) + \varphi(\lambda) \tag{47}$$

sera valable dans tout l'intérieur du cercle (Σ) défini dans le plan du paramètre complexe λ par l'inégalité (14). On conclura immédiatement de la formule (47) qu'il existe une solution de l'équation (1) analytique par rapport au paramètre λ jouissant à l'intérieur du cercle (Σ) de toutes les propriétés spécifiées dans l'énoncé du théorème fondamental II de l'Introduction. Mais on peut donner au nombre a une valeur aussi voisine de R que l'on voudra; on peut donc, dans la conclusion que nous venons de formuler, remplacer le cercle (Σ) par le cercle que définit l'inégalité suivante :

$$|\lambda| < R.$$

Pour achever la démonstration du théorème fondamental II de l'Introduction il nous reste à établir que la solution de l'équation (1) analytique par rapport à λ est unique et à justifier ce qui a été dit au sujet des solutions non analytiques par rapport à ce paramètre. La démonstration de ces deux points se ramène, on le reconnaît sans peine, à celle de la proposition suivante : lorsqu'un potentiel de double couche V vérifie sur la ligne (S) l'équation suivante :

$$(48) \qquad (V)_e - (V)_i = \lambda'[(V)_e + (V)_i]$$

où λ' représente une constante et lorsque la valeur commune des deux membres de cette équation considérée comme fonction d'un point mobile sur (S) satisfait aux hypothèses générales faites dans ce travail au sujet de la fonction h_0, le nombre λ' doit être égal à l'un des termes de la suite

$$(49) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

et la fonction V doit s'exprimer au moyen des fonctions fondamentales correspondant à ce terme, soit λ_k, de la suite précédente, comme si cette fonction représentait le résidu relatif au pôle λ_k d'une solution analytique de l'équation (1).

Pour établir cette proposition faisons, dans l'équation (1),

$$2h_0 = (V)_e + (V)_i.$$

L'équation (1) admettra alors la solution

$$v = \frac{V}{\lambda - \lambda'}. \tag{50}$$

D'ailleurs, la constante λ' ne peut être nulle, sans quoi on aurait identiquement $V = 0$. Par conséquent l'équation (50) définit la même fonction analytique de λ que la formule (48) pour la valeur considérée de h_0.

Il en résulte que V doit bien jouir des propriétés annoncées.

J'ajoute que les formules (4) et (5), on le prouvera avec un peu d'attention, restent exactes dans les conditions générales où nous nous sommes placés ici en ce qui concerne la fonction h_0.

Il resterait encore à compléter ce qui précède par la discussion détaillée des pôles -1 et $+1$ dans le cas des potentiels logarithmiques ordinaires et à développer les applications de cette discussion au problème de Dirichlet. On le fera aisément par la méthode que j'ai suivie dans l'étude des mêmes questions dans le cas de l'espace [1].

---

[1] *Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe* (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, octobre 1902).