JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 10 (1904), p. 209-273.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1904_5_10__209_0>

Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques (1);

PAR M. G. HUMBERT.

Dans ce travail, qui forme la troisième et dernière Partie du Mémoire, nous étudions, au point de vue de leurs propriétés arithmétiques, les fonctions abéliennes *triplement* singulières, c'est-à-dire celles dont les périodes g, h, g' vérifient trois relations singulières, $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

L'invariant de la relation $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$ est, en x, y, z, une forme quadratique ternaire positive; mais ce n'est pas une forme positive quelconque; nous la caractérisons en mettant en évidence ses propriétés fondamentales. Pour simplifier l'écriture nous affectons aux formes de ce type la lettre $\mathfrak{f}$.

Si l'on opère sur le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ une transformation ordinaire du premier degré, ou si on le remplace par un système arithmétiquement équivalent, la forme $\mathfrak{f}$ associée reste équivalente à elle-même; c'est-à-dire qu'à un système correspond une *classe* de formes $\mathfrak{f}$.

Inversement, à une classe de formes $\mathfrak{f}$ correspondent, en général, *plusieurs* systèmes non réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré *un;* leur recherche est ramenée à l'étude des

(1) Ce *Journal,* 5e série, t. IX, p. 43.

représentations du discriminant de la classe par une forme quadratique ternaire indéfinie, dont certaines substitutions semblables sont mises en évidence au cours du calcul.

Un système triplement singulier $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ donne, pour g, h, g', deux systèmes de valeurs et, par suite, en général, deux systèmes de fonctions abéliennes : appelons *point modulaire* de l'un d'eux le point de l'espace qui a pour coordonnées cartésiennes les trois invariants absolus de la forme binaire algébrique d'ordre 6, liée aux fonctions abéliennes considérées; nous faisons ainsi correspondre, à une classe de formes $\mathfrak{F}$, plusieurs points modulaires en nombre limité.

Cette représentation géométrique est la suite naturelle de celle que nous avons donnée dans la deuxième Partie du Mémoire : rappelons en effet qu'à un nombre positif Δ, de l'un des types $4N$ et $4N+1$, nous faisions correspondre la *surface* algébrique hyperabélienne d'invariant Δ; à une classe φ de formes binaires positives, équivalentes à une forme du type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2),$$

ou du type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2,$$

nous faisions correspondre une ou plusieurs *courbes* gauches algébriques que nous avons appelées *courbes hyperabéliennes;* ici enfin, à une classe de formes $\mathfrak{F}$, nous lions un groupe de *points* défini algébriquement.

Notre représentation possède des propriétés importantes et simples. Ainsi, pour qu'une classe de formes ternaires $\mathfrak{F}$, ou une classe de formes binaires φ, représente proprement un nombre Δ, il faut et il suffit que la surface associée au nombre contienne les points, ou les courbes gauches, liés à la classe $\mathfrak{F}$ ou à la classe φ considérée.

De même, pour qu'une classe $\mathfrak{F}$ représente proprement une classe φ, il faut et il suffit que les points liés à la classe $\mathfrak{F}$ soient sur l'ensemble des courbes liées à la classe φ.

L'étude de l'intersection de deux surfaces ou de deux courbes hyperabéliennes donne aussi d'intéressantes conséquences.

Enfin les ordres de multiplicité, sur une surface hyperabélienne, d'une courbe hyperabélienne ou d'un groupe de points sont liés aux propriétés arithmétiques des formes; par exemple, si une classe binaire φ représente proprement de n manières un nombre Δ, chacune des courbes hyperabéliennes associées à la classe est multiple d'ordre n sur la surface associée au nombre.

On voit par là combien notre représentation géométrique est profondément liée aux propriétés des formes quadratiques et quel intérêt il y aurait à en développer l'étude ([1]).

Les numéros de ce Travail font suite à ceux de la Partie déjà publiée; pour indiquer un renvoi à un numéro de cette Partie, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I.

ERRATA

des deux premières Parties (*ce* Journal, 5e *série, t. IX*).

Pages.		Au lieu de :	Lire :
47	ligne 1 de la note	$n+1$	$n=+1$.
57	dernière ligne,	après ε, mettre un crochet [	
60	quatre dernières équations (31)	$+\varepsilon E a_0$	$-E a_0$
		$+\varepsilon E a_1$	$-E a_1$
		$+\varepsilon E a_2$	$-E a_2$
		$+\varepsilon E a_3$	$-E a_3$
65	dernière équation (36)	$-\varepsilon A_1 c_3$	$-\varepsilon A_1 c_2$
67	ligne 9	*la relation*	*une relation*
87	ligne 2	$-\Omega P a_2$	$\Omega P a_2$
108	ligne 14	$-pX^2$	$+pX^2$
129	ligne 6 (en remontant)	F	$\mathfrak{F}$
130	ligne 6 (»)	elle est associée	4ψ est associée

([1]) Il serait fort utile, en particulier, d'obtenir explicitement les équations des courbes et groupes de points qui correspondent aux formes φ et $\mathfrak{F}$ des discriminants les plus simples.

TROISIÈME PARTIE.

Fonctions abéliennes triplement singulières.

Généralités.

80. Les périodes d'une fonction abélienne de deux variables étant ramenées à la forme normale $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), la fonction sera dite *triplement* singulière s'il existe, entre g, h, g', trois relations *singulières,* c'est-à-dire de la forme

$$(1) \qquad A_0 g + B_0 h + C_0 g' + D_0(h^2 - gg') + E_0 = 0,$$

$$(2) \qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

$$(3) \qquad A_2 g + B_2 h + C_2 g' + D_2(h^2 - gg') + E_2 = 0,$$

les A_0, B_0, ..., E_0 et de même les A_1, B_1, ..., E_1 et les A_2, B_2, ..., E_2 étant des entiers premiers entre eux.

On a aussi le droit de supposer sans diviseur commun tous les déterminants tels que $(A_0 B_1 C_2)$, $(A_0 B_1 D_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$, formés avec neuf coefficients homologues des équations (1), (2), (3) : car, s'il en était autrement, en combinant linéairement ces équations d'une manière convenable, on obtiendrait une ou deux relations analogues, où les cinq coefficients auraient un facteur commun; par suppression de celui-ci, on formerait évidemment un système de trois équations, équivalent au système initial, et jouissant de la propriété voulue.

Si les dix déterminants $(A_0 B_1 C_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$ sont sans diviseur commun, nous dirons que le système (1), (2), (3) est *propre.*

Désignons par F_0, F_1, F_2 les premiers membres de (1), (2), (3), par x, y, z des entiers quelconques; l'invariant de la relation singulière

$$xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0,$$

qui est une conséquence de (1), (2), (3), est la forme *quadratique ternaire* en x, y, z

$$(4)\quad \begin{cases} (B_0 x + B_1 y + B_2 z)^2 \\ -4(A_0 x + A_1 y + A_2 z)(C_0 x + C_1 y + C_2 z) \\ -4(D_0 x + D_1 y + D_2 z)(E_0 x + E_1 y + E_2 z), \end{cases}$$

que nous appellerons la *forme associée* au système initial.

L'invariant de toute relation singulière est essentiellement positif (ce *Journal*, 5ᵉ série, t. V, p. 246); la forme (4) doit donc être définie et positive. Or si l'on pose

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta_i = B_i^2 - 4A_iC_i - 4D_iE_i, \\ \delta_{ij} = B_iB_j - 2A_iC_j - 2A_jC_i - 2D_iE_j - 2D_jE_i, \end{cases}$$

la forme ternaire (4) s'écrit

$$(6)\quad \Delta_0 x^2 + \Delta_1 y^2 + \Delta_2 z^2 + 2\delta_{01} xy + 2\delta_{02} xz + 2\delta_{12} yz;$$

pour qu'elle soit définie et positive, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions classiques

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta_i > 0, \quad \Delta_i\Delta_j - \delta_{ij}^2 > 0, \\ \Delta_0\Delta_1\Delta_2 + 2\delta_{01}\delta_{02}\delta_{12} - \Delta_0\delta_{12}^2 - \Delta_1\delta_{02}^2 - \Delta_2\delta_{01}^2 > 0. \end{cases}$$

81. *Réciproquement*, si la forme ternaire associée au système proposé est positive, ou encore si les conditions (7) sont satisfaites, les périodes g, h, g', que déterminent les trois équations (1), (2) et (3), définissent un système de fonctions abéliennes; c'est-à-dire que g, h, g' sont imaginaires, et que leurs parties purement imaginaires, g_1, h_1, g'_1, vérifient l'inégalité fondamentale

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0.$$

Observons d'abord que les équations (1), (2), (3) donnent, pour g, h, g', *deux* systèmes de valeurs; si donc on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes cartésiennes, les trois *quadriques* représentées par les équations (1) (2) et (3) se coupent en *deux* points, M et M', à distance finie. D'ailleurs toute relation singulière

$$\mathrm{A}g + \mathrm{B}h + \mathrm{C}g' + \mathrm{D}(h^2 - gg') + \mathrm{E} = 0$$

représente une quadrique *réelle*, passant par la conique à l'infini *réelle* située sur le cône $h^2 - gg' = 0$; la quantité $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} - 4\mathrm{DE}$, invariant de cette relation, étant positive, la quadrique est un *hyperboloïde à une nappe*. Donc, les inégalités (7) expriment que toutes les quadriques du réseau $x\mathrm{F}_0 + y\mathrm{F}_1 + z\mathrm{F}_2 = 0$ sont des hyperboloïdes à une nappe.

Il s'agit maintenant d'établir : 1° que les deux points M et M', à distance finie, communs à toutes ces quadriques, sont imaginaires et, par suite, conjugués; 2° que si g_1, h_1, g'_1 sont les parties imaginaires des coordonnées de l'un d'eux, on a

$$(8) \qquad h_1^2 - g_1 g'_1 < 0.$$

Or, 1° M et M' sont imaginaires; sinon, il existerait une quadrique *réelle* Q, passant par la conique à l'infini du cône $h^2 - gg' = 0$, par les points M' et M, et touchant en M un plan *réel* quelconque. Mais ce plan peut être choisi de manière à n'être parallèle à aucune génératrice réelle du cône $h^2 - gg' = 0$; il couperait donc Q suivant deux droites imaginaires, et Q, qui appartient au réseau

$$x\mathrm{F}_0 + y\mathrm{F}_1 + z\mathrm{F}_2 = 0,$$

ne serait pas un hyperboloïde à une nappe, résultat contraire aux conditions (7).

2° M et M' étant imaginaires, et dès lors conjugués, le point milieu de MM' est réel; transportons-y l'origine des coordonnées, sans changer la direction des axes; nous ne changerons pas non plus les parties *imaginaires*, g_1, h_1, g'_1, des coordonnées de M et M'. Une des quadriques du réseau $x\mathrm{F}_0 + y\mathrm{F}_1 + z\mathrm{F}_2 = 0$ a pour centre la nouvelle origine et a dès lors une équation de la forme

$$(9) \qquad h^2 - gg' = \mathrm{E},$$

E étant > 0, puisque la surface (9) est un hyperboloïde à une nappe. La droite MM′ étant réelle et passant par l'origine a des équations du type

$$\frac{g}{\alpha} = \frac{h}{\beta} = \frac{g'}{\gamma}, \tag{10}$$

et l'on a

$$\beta^2 - \alpha\gamma < 0,$$

puisque la droite (10) coupe la quadrique (9) en deux points imaginaires (M et M′). Les équations (9) et (10) fournissent alors les coordonnées de M et de M′ et donnent, pour g_1, h_1, g'_1,

$$g_1 = \alpha \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}, \qquad h_1 = \beta \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}, \qquad g'_1 = \gamma \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}},$$

d'où l'on tire

$$h_1^2 - g_1 g'_1 = -E,$$

et, puisque E est négatif, on a bien

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

82. *Invariants.* — On reconnaît, comme dans la deuxième Partie de ce travail (I, n° **16**) qu'une transformation ordinaire du premier degré change les trois relations singulières $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ en $F'_0 = 0$, $F'_1 = 0$, $F'_2 = 0$, qui forment également un système propre. De plus, la forme associée au système initial demeure inaltérée, c'est-à-dire que les coefficients Δ_i et δ_{ij} de cette forme sont des *invariants*, vis-à-vis de toute transformation ordinaire de degré *un*.

De même, remplaçons le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ par un système *arithmétiquement équivalent* :

$$\begin{aligned} \lambda\, F_0 + \mu\, F_1 + \nu\, F_2 &= 0, \\ \lambda' F_0 + \mu' F_1 + \nu' F_2 &= 0, \\ \lambda'' F_0 + \mu'' F_1 + \nu'' F_2 &= 0, \end{aligned}$$

les λ, μ, ν désignant des entiers, dont le déterminant $(\lambda\mu'\nu'')$ est égal à ± 1. La forme ternaire associée à ce nouveau système est, par définition, l'invariant de la relation

$$\begin{aligned} x'(\lambda F_0 + \mu F_1 + \nu F_2) + y'(\lambda' F_0 + \mu' F_1 + \nu' F_2) \\ + z'(\lambda'' F_0 + \mu'' F_1 + \nu'' F_2) = 0, \end{aligned}$$

qui s'écrit

$$\begin{aligned} (\lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z')F_0 + (\mu x' + \mu' y' + \mu'' z')F_1 \\ + (\nu x' + \nu' y' + \nu'' z')F_2 = 0; \end{aligned}$$

on l'obtient donc en remplaçant, dans la forme (4), x, y, z par $\lambda x' + \lambda' y' + \lambda'' z'$, $\mu x' + \ldots$, $\nu x' + \ldots$. En d'autres termes, puisque le déterminant $(\lambda\mu'\nu'')$ est égal à ± 1, la forme ainsi obtenue en x', y', z', est *équivalente* à la forme (4), associée au système initial.

De ces remarques résulte cette proposition :

83. Théorème. — *A tout système propre de trois relations singulières,* $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, *correspond une forme quadratique ternaire positive en* x, y, z, *qui est l'invariant de la relation* $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$; *cette forme se change en une forme équivalente quand on remplace le système initial par un système arithmétiquement équivalent, ou quand on opère sur lui une transformation ordinaire du premier degré.*

Ainsi, à tout système propre est associée, en réalité, une *classe* de formes quadratiques ternaires positives.

Il résulte également de là que le système considéré possède un *invariant absolu,* à savoir le discriminant de la classe associée, quantité toujours positive d'après (7).

84. La forme (4), associée à un système propre, n'est pas une forme ternaire positive quelconque; en effet, en vertu même de son expression (4), elle est représentable par la forme à cinq variables

$$X^2 - 4YZ - 4TU,$$

et la représentation est *propre*, puisque, le système étant propre, les dix déterminants $(A_0 B_1 C_2)$, ..., $(C_0 D_1 E_2)$ n'ont aucun facteur commun.

Or, il est clair, *a priori*, qu'une forme ternaire n'est pas toujours représentable par la forme à cinq variables; il est *nécessaire* pour cela qu'elle puisse représenter un carré, propriété qui n'appartient évidemment pas à toutes les formes ternaires et sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Ainsi, les seules formes ternaires positives qui puissent être associées à un système propre de trois relations singulières sont les formes représentables proprement par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$; cette condition nécessaire est également suffisante, car la forme

$$(11)\quad \begin{cases} (\beta_0 x+\beta_1 y+\beta_2 z)^2 - 4(\alpha_0 x+\alpha_1 y+\alpha_2 z)(\gamma_0 x+\gamma_1 y+\gamma_2 z) \\ \qquad - 4(\delta_0 x+\delta_1 y+\delta_2 z)(\varepsilon_0 x+\varepsilon_1 y+\varepsilon_2 z) \end{cases}$$

est associée au système

$$\begin{aligned} \alpha_0 g+\beta_0 h+\gamma_0 g'+\delta_0(h^2-gg')+\varepsilon_0 &= 0, \\ \alpha_1 g+\beta_1 h+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0, \\ \alpha_2 g+\beta_2 h+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0, \end{aligned}$$

qui est propre, puisque, la représentation de la forme (11) par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$ étant propre, les dix déterminants

$$(\alpha_0 \beta_1 \gamma_2), \quad \ldots, \quad (\gamma_0 \delta_1 \varepsilon_2)$$

sont premiers entre eux.

Étant donnée une forme ternaire positive, les méthodes générales classiques permettent de reconnaître si elle est représentable proprement par $X^2 - 4YZ - 4TU$; dans tout ce qui suit nous désignerons une forme ainsi représentable par la lettre $\mathfrak{F}$.

Propriétés des formes $\mathfrak{F}$.

85. Il y a deux espèces de formes $\mathfrak{F}$.

Si, dans les trois équations (1), (2), (3) d'un système singulier propre, les coefficients de h, à savoir B_0, B_1, B_2, sont pairs, cette propriété se conserve, comme on sait, dans toute transformation ordinaire de degré *un;* en ce cas, la forme $\mathfrak{f}$, associée au système et donnée par (4), a tous ses coefficients divisibles par 4, de sorte qu'on peut écrire

$$(12) \qquad \mathfrak{f}(x, y, z) = 4f(x, y, z).$$

Si, dans les équations (1), (2), (3), un des coefficients B_i, le premier B_0, par exemple, est impair, on aura le droit de supposer les deux autres pairs : car si B_1 était impair, il suffirait de remplacer $F_1 = 0$ par l'équation équivalente $F_1 + F_0 = 0$. Dès lors, B_1 et B_2 étant pairs, la forme $\mathfrak{f}$ associée au système est du type

$$(13) \qquad \mathfrak{f}(x, y, z) = x^2 + 4f(x, y, z).$$

Les formes $\mathfrak{f}$ sont donc, soit du type (12), soit réductibles au type (13) par une substitution linéaire de déterminant 1.

86. Une forme $\mathfrak{f}$ ne peut admettre d'autre diviseur que 4, c'est-à-dire que, si elle est du type (13), elle est proprement primitive, et que, si elle est du type (12), les coefficients de f n'ont aucun facteur commun.

Nous pouvons toujours en effet, par une transformation ordinaire de degré *un*, ramener une des équations singulières (1), (2), (3), ou une de leurs combinaisons linéaires, au type $h^2 - gg' = D$; dès lors, les deux autres équations du système, si l'on tient compte de celle-ci, prendront la forme

$$a\,g + b\,h + c\,g' + d = 0,$$
$$a'g + b'h + c'g' + d' = 0.$$

Par des combinaisons linéaires des deux dernières, on obtiendra deux relations arithmétiquement équivalentes dans l'une desquelles le coefficient de g sera nul, c'est-à-dire qu'on a le droit de supposer $a' = 0$; la forme associée au système est par suite

$$\mathfrak{f} = 4Dx^2 + (b^2 - 4ac)y^2 + b'^2z^2 + 2(bb' - 2ac')yz - 4dxy - 4d'zx.$$

Or : 1° lorsque b et b' sont pairs, $\mathfrak{f}$ ne peut admettre d'autre diviseur que 4 : car, si les coefficients D, $\frac{1}{2}b'$, $\frac{1}{4}b^2 - ac$, $\frac{b'}{2}b - ac'$, d, d' avaient un facteur premier commun, ρ, impair ou pair, ce facteur diviserait a ou c'. S'il divisait a, il diviserait aussi $\frac{1}{2}b$, et dès lors le système des deux relations

$$ag + bh + cg' + d = 0, \qquad b'h + c'g' + d' = 0,$$

ne serait pas *propre*, puisque a, $\frac{1}{2}b$, d, $\frac{1}{2}b'$, d' admettant le facteur ρ, les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{matrix} a & b & c & d, \\ 0 & b' & c' & d', \end{matrix}$$

l'admettraient également, contrairement à l'hypothèse initiale. Si ρ divisait c', la relation $b'h + c'g' + d' = 0$ aurait tous ses coefficients divisibles par ρ, et, là encore, le système considéré ne serait pas *propre*.

2° Lorsque b et b' ne sont pas tous deux pairs, $\mathfrak{I}$ ne peut admettre aucun diviseur : car, si les coefficients D, b', $b^2 - 4ac$, $bb' - 2ac'$, d, d' avaient un facteur premier *impair* commun, ce facteur diviserait a ou c', et l'on reconnaîtrait comme plus haut que le système considéré ne serait pas *propre*, contrairement à l'hypothèse.

87. Reprenons le cas où, dans les trois équations initiales (1), (2), (3), du système, les trois coefficients B_0, B_1, B_2 sont pairs; comme nous venons de le voir, la forme associée est du type $4f(x, y, z)$, les coefficients de la forme f n'ayant aucun facteur commun. Je dis de plus que cette forme f ne peut être proprement primitive, c'est-à-dire que les coefficients des rectangles xy, xz, yz ne peuvent y être simultanément pairs.

Ces coefficients, en effet, sont, d'après (4), les quantités

$$2\frac{B_i}{2}\frac{B_j}{2} - A_iC_j - A_jC_i - D_iE_j - D_jE_i;$$

si elles étaient paires, il en serait de même des trois nombres α_0, α_1, α_2

donnés par

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= A_1C_2 - A_2C_1 + D_1E_2 - D_2E_1,\\
\alpha_1 &= A_2C_0 - A_0C_2 + D_2E_0 - D_0E_2,\\
\alpha_2 &= A_0C_1 - A_1C_0 + D_0E_1 - D_1E_0;
\end{aligned}$$

dès lors les déterminants $(A_0C_1D_2)$, $(A_0C_1E_2)$, $(A_0D_1E_2)$, $(C_0D_1E_2)$ seraient pairs, car, le premier, par exemple, est égal à

$$\alpha_0D_0 + \alpha_1D_1 + \alpha_2D_2.$$

Donc, puisque les B_i sont pairs, les dix déterminants $(A_0B_1C_2)$, ..., $(C_0D_1E_2)$ seraient pairs, et le système initial, (1), (2), (3), ne serait pas *propre*, contrairement à l'hypothèse.

88. On peut résumer ainsi tous ces résultats :

Les formes $\mathcal{F}$ sont de deux espèces. Les formes de la première espèce sont divisibles par 4 et sont du type $4f(x, y, z)$, la forme $2f$ étant improprement primitive.

Les formes de la seconde espèce sont proprement primitives et sont équivalentes à des formes du type $x^2 + 4f'(x, y, z)$.

Dans tout ce travail, afin de simplifier les démonstrations et les formules, nous nous bornerons à l'étude des formes de la première espèce, en indiquant, s'il y a lieu, les résultats relatifs aux formes de la seconde.

89. *Formes canoniques d'un système et de la forme associée.* — Soit un système propre (1), (2), (3), où les B_i sont tous pairs; on pourra, par une transformation ordinaire du premier degré et par des combinaisons linéaires d'équations, le ramener (n° **86**) au type

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
&h^2 - gg' - D = 0,\\
&\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' + \delta_1 = 0,\\
&\alpha'_1 g + 2\beta'_1 h + \gamma'_1 g' + \delta'_1 = 0.
\end{aligned}\right.$$

On a le droit de supposer α_1 et α'_1 premiers entre eux : car, s'ils ne l'étaient pas, une transformation de degré *un*, n'altérant pas la relation $h^2-gg'=\mathrm{D}$, remplacerait α_1 par la quantité α_0, dont l'expression a été donnée (I, nº **26**), dans la deuxième Partie du Mémoire, et α'_1 par une quantité analogue, α'_0 : or, on reconnaît sans difficulté, en s'appuyant sur ce que le système (14) est propre, qu'on peut toujours choisir les entiers caractéristiques de la transformation de manière que α_0 et α'_0 soient premiers entre eux.

Il en résulte qu'en combinant linéairement les deux dernières relations (13), on obtiendra deux relations de même forme, dans l'une desquelles le coefficient de g sera 1, et qui seront arithmétiquement équivalentes aux précédentes; le système initial sera dès lors remplacé par le système *propre* équivalent :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} h^2-gg'-\mathrm{D}&=0,\\ g+2\beta h+\gamma g'+\delta&=0,\\ \alpha' g+2\beta' h+\gamma' g'+\delta'&=0.\end{aligned}\right.$$

Je dis qu'on peut supposer $\beta=0$: car, si $\beta\gtrless 0$, la transformation du premier degré définie par les entiers

$$\begin{array}{llll} a_0=1, & a_1=0, & a_2=0, & a_3=0,\\ b_0=\beta, & b_1=1, & b_2=0, & b_3=0,\\ c_0=0, & c_1=0, & c_2=1, & c_3=0,\\ d_0=0, & d_1=0, & d_2=-\beta, & d_3=1 \end{array}$$

n'altère pas la relation $h^2-gg'-\mathrm{D}=0$ (I, nº **10**) ; en vertu des formules (27), (I, nº **26**), elle remplace la relation $g+2\beta h+\gamma g'+\delta=0$ par une relation analogue où le coefficient de h a disparu, et où celui de g est encore $+1$.

En ajoutant à la troisième relation (15) la deuxième multipliée par $-\alpha'$, on obtient une équation privée de terme en g, qui peut remplacer cette troisième, de sorte que le système initial est devenu

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} h^2-gg'-\mathrm{D}&=0,\\ g-pg'-q&=0,\\ 2\beta h+\gamma g'+\delta&=0.\end{aligned}\right.$$

On peut aller plus loin et faire disparaître g' de la dernière relation : il suffit d'opérer, sur ce système, la transformation du premier degré définie par les entiers

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = \mu', & b_2 = -\lambda', & b_3 = 0, \\ c_0 = 0, & c_1 = -\mu, & c_2 = \lambda, & c_3 = 0, \\ d_0 = p\mu\mu' + D\lambda\lambda' + q\mu\lambda', & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 1; \end{array}$$

où λ, μ, λ', μ' sont des entiers uniquement liés par l'équation

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1.$$

En vertu de cette transformation, les périodes anciennes et nouvelles satisfont aux relations

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} G &= \frac{1}{\lambda + \lambda' g'}[-\lambda d_0 + \lambda g - \lambda' d_0 g' - \lambda'(h^2 - gg')], \\ H &= \frac{h}{\lambda + \lambda' g'}, \\ G' &= \frac{\mu + \mu' g'}{\lambda + \lambda' g'}, \\ H^2 - GG' &= \frac{1}{\lambda + \lambda' g'}[\mu d_0 - \mu g + \mu' d_0 g' + \mu'(h^2 - gg')]. \end{aligned} \right.$$

Or, le système (16), où l'on écrit G, H, G' à la place de g, h, g', est arithmétiquement équivalent au système

$$\begin{aligned} \lambda(H^2 - GG' - D) + \mu(G - pG' - q) &= 0, \\ \lambda'(H^2 - GG' - D) + \mu'(G - pG' - q) &= 0, \\ 2\beta h + \gamma g' + \delta &= 0, \end{aligned}$$

puisque $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$. Par les formules (17), ce système se change en

$$\begin{aligned} h^2 - gg' - (D\lambda^2 + q\lambda\mu + p\mu^2) &= 0, \\ g - (D\lambda'^2 + q\lambda'\mu' + p\mu'^2)g' - [2D\lambda\lambda' + q(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + 2p\mu\mu'] &= 0, \\ 2\beta h + (\gamma\mu' + \delta\lambda')g' + \gamma\mu + \delta\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Si donc on choisit λ' et μ' *premiers entre eux*, de manière à annuler $\gamma\mu' + \delta\lambda'$, et si l'on détermine ensuite λ et μ par $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$, le terme en g' disparaîtra dans la troisième équation, et le système final, équivalent au système initial, sera du type

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h^2 - gg' - \mathrm{M} = 0, \\ g \;\; - mg' - n \;\; = 0, \\ \qquad 2\beta h - \varepsilon \;\; = 0; \end{array} \right.$$

ε étant nécessairement impair, puisque le système transformé est *propre*.

Remarque I. — Dans le cas d'un système singulier où les coefficients de h ne sont pas tous pairs, on trouverait une forme canonique semblable; 2β serait seulement remplacé par $2\beta + 1$ dans la troisième équation.

Remarque II. — La forme associée au système (18) est

$$(19) \qquad 4(\mathrm{M}x^2 + my^2 + \beta^2 z^2 + nxy + \varepsilon xz),$$

le coefficient de z^2 est un carré et le terme en xy manque. Toute forme $\mathcal{F}$, divisible par 4, peut donc être ramenée à ce type par une substitution linéaire.

90. *Propriétés caractéristiques des formes* $\mathcal{F}$. — D'après cela, et l'on aurait pu le reconnaître directement sur la forme (4), une forme $\mathcal{F}$ quelconque peut représenter proprement un carré : ici, le carré $4\beta^2$. Or, c'est là une propriété qui caractérise les formes $\mathcal{F}$, ainsi que le montre le théorème suivant, relatif aux formes de la première espèce :

THÉORÈME. — *Soit ψ une forme quadratique ternaire positive et improprement primitive; désignons par Ω le plus grand commun diviseur, nécessairement impair, des coefficients de son adjointe : pour que 2ψ soit une forme $\mathcal{F}$, c'est-à-dire soit représentable proprement par la forme à cinq variables* $\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{YZ} - 4\mathrm{TU}$, *il faut et il suffit que 2ψ représente un carré premier à Ω.*

La condition est nécessaire, car la forme (19) représente le carré $4\beta^2$, que je dis être premier à Ω. En effet Ω est, par définition, le plus grand commun diviseur de

$$4mM - n^2,\quad 4M\beta^2 - \varepsilon^2,\quad 4m\beta^2,\quad 2m\varepsilon,\quad 2n\beta^2,\quad n\varepsilon;$$

s'il avait un facteur premier commun avec 2β, ce facteur diviserait ε^2, donc ε; et le système (18) ne serait pas propre, puisque 2β et ε auraient un diviseur commun.

91. Je dis maintenant que la condition est suffisante.

Soit, en effet, une forme ternaire positive

$$(20)\qquad 2\psi = 4(B^2z^2 + Mzx + Nzy + Px^2 + Qxy + Ry^2),$$

telle que ψ soit improprement primitive, et qui représente le carré $4B^2$, premier à Ω; pour établir que c'est une forme $\mathcal{F}$, je distinguerai trois cas.

Premier cas. — Les quantités $2B$, M, N n'ont pas de diviseur commun. Alors le système

$$\begin{aligned} h^2 - gg' - P &= 0,\\ g - Rg' - Q &= 0,\\ 2Bh - Ng' - M &= 0 \end{aligned}$$

donne naissance à la forme

$$\mathcal{F} = 4B^2z^2 + 4y(Ry + Nz) + 4x(Px + Qy + Mz),$$

qui est identique à la forme proposée, 2ψ; ce système est *propre*, ainsi qu'on le reconnaît de suite en s'appuyant sur ce que 2β, M, N sont sans facteur commun. La forme 2ψ considérée est donc une forme $\mathcal{F}$.

Deuxième cas. — Les quantités $2B$, M, N ont un diviseur commun *impair*. Soient ρ ce plus grand commun diviseur, et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ses facteurs premiers distincts. Aucun d'eux ne divise $4PR - Q^2$, sinon, contrairement à l'hypothèse initiale, $2B$ et Ω admettraient ce même facteur, ainsi qu'on le reconnaît de suite en écrivant les coefficients de la forme adjointe à ψ. Il en résulte que la forme binaire

$$Px^2 + Qxy + Ry^2$$

peut représenter proprement une infinité de nombres, dont chacun est résidu quadratique de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et est premier à ces facteurs. On a le droit de supposer que R est un de ces nombres; car il suffit pour cela d'effectuer, sur x et y dans la forme ternaire (20), une substitution linéaire convenable, de déterminant 1, en laissant z inaltéré : cette opération ne change ni B, ni le plus grand commun diviseur de 2B, M, N, ni Ω qui est un invariant de la forme ternaire.

Cela posé, divisons N par un nombre α, tel que 2B, M et $\frac{1}{\alpha}$N n'aient pas de diviseur commun : on peut évidemment supposer que α ne contient pas d'autres facteurs premiers que $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considérons maintenant le système singulier

$$(21)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - P = 0, \\ \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - Q = 0, \\ 2Bh - \dfrac{N}{\alpha} g' - M = 0; \end{cases}$$

la forme associée est

$$(22)\qquad 4[B^2 z^2 + Mzx + Nzy + Px^2 + Qxy + (\beta^2 - \alpha\gamma)y^2];$$

elle coïncide avec la forme proposée (20) si l'on peut choisir β et γ de manière que $R = \beta^2 - \alpha\gamma$: il faut et il suffit pour cela que R soit résidu quadratique de α, c'est-à-dire des facteurs premiers, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de α, condition qui est réalisée en vertu d'une hypothèse légitime faite tout à l'heure. Donc la forme (20) est associée au système (21).

Tout revient ainsi à établir que ce système (21) est propre, c'est-à-dire que les nombres

$$(23)\qquad 2B\alpha,\quad N,\quad M\alpha,\quad 2\left(B\gamma + \frac{1}{\alpha}N\beta\right),\quad 2(M\beta - BQ),\quad M\gamma + \frac{1}{\alpha}NQ$$

n'ont aucun diviseur premier commun. Or $2B$, $\frac{1}{\alpha}N$ et M étant premiers entre eux, ce diviseur diviserait α, et serait dès lors un des facteurs p_1, p_2, ... p_n. Mais p_i, premier à R par hypothèse, ne peut diviser β, puisque $R = \beta^2 - \alpha\gamma$; comme il divise B, il ne peut diviser $2\left(B\gamma + \frac{1}{\alpha}N\beta\right)$, car $\frac{N}{\alpha}$, en vertu même de la définition de α, n'admet aucun des facteurs p_i. Il résulte de là que le système (21) est propre; et la forme 2ψ, définie par (20), est bien encore une forme $\mathfrak{F}$.

Troisième cas. — Les quantités $2B$, M, N ont un diviseur commun *pair*, dont les facteurs premiers sont $2, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

En ce cas, M et N sont pairs et Q est impair, puisque, par hypothèse, la forme ψ est improprement primitive.

Soit encore α un nombre formé avec les facteurs $2, p_1, \ldots, p_n$, et tel que $2B$, M et $\frac{N}{\alpha}$ soient premiers entre eux. Le système (21) donne naissance à la forme (22), qui est identique à (19) si R est résidu quadratique de α : il en sera évidemment ainsi si R est résidu quadratique de 8, de p_1, de p_2, ..., de p_n; c'est-à-dire si la forme

$$(24) \qquad Px^2 + Qxy + Ry^2$$

peut représenter proprement un nombre de la forme $8h + 1$, qui soit résidu quadratique de chacun des p_i, et premier à ces facteurs.

Or, la quantité $4PR - Q^2$ étant première à $p_1, \ldots, p_n$, comme on l'a vu plus haut (deuxième cas), la forme (24) représente proprement des nombres résidus quadratiques des p_i; soit x_0, y_0 une solution : si ϖ est le produit $p_1 p_2 \ldots p_n$, une autre solution sera $x = 8x_0 + \lambda\varpi$, $y = 8y_0 + \mu\varpi$, λ et μ étant des entiers quelconques. Cherchons à les déterminer de manière que, pour ces valeurs de x et de y, la forme (24) représente un nombre $8h + 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\varpi^2(P\lambda^2 + Q\lambda\mu + R\mu^2) \equiv 1 \pmod{8},$$

ou, puisque ϖ^2, carré d'un nombre impair, est $\equiv 1 \pmod{8}$,

$$(25) \qquad P\lambda^2 + Q\lambda\mu + R\mu^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Or, Q étant impair, on peut supposer P et R simultanément pairs ou impairs, car si, par exemple, P est pair et R impair, le changement de variable $\lambda = \lambda' + \mu$ rendra R pair.

Il résulte maintenant d'un beau travail de M. Jordan (ce *Journal*, 2e série, t. XVII, p. 376 et suivantes) que la congruence (25) est alors réductible à l'une ou l'autre de celles-ci :

$$\lambda'\mu' \equiv 1 \pmod 8,$$
$$\lambda'^2 + \lambda'\mu' + \mu'^2 \equiv 1 \pmod 8,$$

qui ont manifestement des solutions et donnent, dès lors, des solutions correspondantes de (25).

Donc, β et γ étant déterminés d'après ces indications, la forme proposée (20) sera associée au système (21), et il ne reste plus qu'à montrer que ce système est propre. On reconnaît, comme dans le *deuxième cas*, que les six quantités (23) ne sauraient avoir, comme facteur premier commun, que l'un des nombres $2, p_1, p_2, \ldots, p_n$, et que p_i ne peut les diviser toutes. Quant au facteur 2, il ne les divise pas non plus, car la dernière, $M\gamma + \frac{1}{\alpha}NQ$, est impaire, puisque M est pair, Q et $\frac{N}{\alpha}$ impairs.

Par suite encore, la forme 2ψ, donnée par (20), est une forme $\mathfrak{F}$, et le théorème énoncé au n° **90** est complètement établi.

92. On peut lui donner une autre forme :

THÉORÈME. — *Soit ψ une forme quadratique ternaire positive, improprement primitive; soit Ω le plus grand commun diviseur, nécessairement impair, des coefficients de l'adjointe : pour que 2ψ soit une forme $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit qu'elle puisse représenter un carré et que ses caractères quadratiques par rapport aux facteurs premiers $\omega_1, \omega_2, \ldots,$ de Ω, soient tous égaux à $+1$, c'est-à-dire qu'on ait*

$$\left(\frac{2\psi}{\omega_1}\right) = \left(\frac{2\psi}{\omega_2}\right) = \ldots = +1.$$

Pour ramener cette proposition au théorème précédent, observons que, d'après ce théorème, toute forme $\mathcal{F}$ du type ψ, pouvant représenter un carré premier à Ω, les caractères quadratiques $\left(\frac{2\psi}{\omega_\alpha}\right)$ sont nécessairement égaux à $+1$. Il reste donc seulement à montrer que, si 2ψ représente un carré *non premier à* Ω, et si tous les caractères $\left(\frac{2\psi}{\omega_\alpha}\right)$ sont égaux à $+1$, 2ψ est encore une forme $\mathcal{F}$.

Soit alors $4B^2$ le carré dont il s'agit, 2ψ peut s'écrire

$$(20)\qquad 2\psi = 4(B^2z^2 + Mzx + Nzy + Px^2 + Qxy + Ry^2);$$

par hypothèse, $2B$ et Ω ne sont pas premiers entre eux, c'est-à-dire que les nombres

$$2B,\quad 4B^2P - M^2,\quad 4B^2R - N^2,\quad 2B^2Q - MN,\quad 4PR - Q^2,$$
$$2MR - NQ,\quad 2NP - MQ,$$

ont un diviseur commun : il en résulte que $2B$, M, N ont aussi un diviseur commun ρ, et que certains des facteurs premiers de ρ entrent dans $4PR - Q^2$. Soient ω', ω'', ..., ces facteurs; ils figurent nécessairement parmi ceux ω_1, ω_2, ..., de Ω.

Cela posé, si ρ est impair, le raisonnement du n° **91** sera encore applicable, pourvu que la forme binaire $Px^2 + Qxy + Ry^2$ puisse représenter un résidu quadratique de tous les facteurs premiers de ρ. Il n'y a de difficulté que pour ceux de ces facteurs ω', ω'', ..., qui entrent dans $4PR - Q^2$; la représentation considérée n'est possible que si le caractère quadrique de la forme binaire par rapport à chacun des nombres ω', ω'', ..., est égal à $+1$. Mais cette condition se trouve satisfaite; car, par hypothèse, le caractère quadratique de 2ψ par rapport à ω_1, ω_2, ... est $+1$: d'ailleurs, ω', ω'' ... sont des diviseurs de $2B$, M, N et figurent parmi les ω_1, ω_2, ...; donc, en vertu de l'expression (20) de 2ψ, les caractères quadratiques de $Px^2 + Qxy + Ry^2$ par rapport à ω', ω'', ... sont égaux à ceux de 2ψ, c'est-à-dire à $+1$.

La démonstration serait la même si ρ était pair.

Remarque I. — Le théorème précédent permet de reconnaître, sans ambiguïté possible, si une forme 2ψ, telle que ψ soit positive et improprement primitive, est une forme $\mathfrak{F}$: Arn. Meyer (¹) et M. Minkowski (²) ont en effet donné des règles pour reconnaître si une forme ternaire peut représenter un carré, ou, ce qui est plus général, si une forme quaternaire peut représenter *zéro*.

Remarque II. — On verrait de même que, pour qu'une forme ternaire positive, primitive, équivalente à une forme du type

$$4f'(x,y,z)+x^2,$$

soit une forme $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit qu'elle puisse représenter un carré et que ses caractères quadratiques, par rapport aux diviseurs premiers de Ω, soient tous égaux à $+1$.

Transformations d'un système singulier en lui-même.

93. Soit S un système de trois relations singulières, que nous désignerons par $f_0=0$, $f_1=0$, $f_2=0$; soit 2ψ la forme ternaire associée à S. Existe-t-il des transformations ordinaires de degré 1 qui n'altèrent pas le système S?

Une telle transformation T changera respectivement f_0, f_1, f_2, après l'expulsion des dénominateurs, en des fonctions linéaires de f_0, f_1, f_2 à coefficients entiers, soit

$$lf_0+l'f_1+l''f_2,\quad mf_0+m'f_1+m''f_2,\quad nf_0+n'f_1+n''f_2;$$

par suite (n° **82**), les invariants des deux expressions singulières

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &xf_0+yf_1+zf_2,\\ &\text{et}\\ &(lx+my+nz)f_0+(l'x+m'y+n'z)f_1\\ &\qquad+(l''x+m''y+n''z)f_2 \end{aligned}\right.$$

(¹) *Züricher naturf. Gesell.*, 1884, p. 218.

(²) CRELLE, t. **106**. — *Voir* aussi BACHMANN, *Zahlentheorie*, IVᵉ Partie, p. 551.

seront les mêmes, c'est-à-dire qu'on aura identiquement, quels que soient x, y, z,

$$(2)\left\{\begin{aligned} &2\psi(x, y, z)\\ &\quad = 2\psi(lx+my+nz,\ l'x+m'y+n'z,\ l''x+m''y+n''z).\end{aligned}\right.$$

Donc, la substitution Σ (à coefficients entiers)

$$(3)\quad \Sigma = |x, y, z;\ lx+my+nz,\ l'x+m'y+n'z,\ l''x+m''y+n''z|$$

est une ***substitution semblable*** de la forme associée 2ψ, c'est-à-dire une de celles qui changent la forme ψ en elle-même.

On peut indiquer avec plus de précision la nature de la substitution Σ. En effet, la transformation T change l'une dans l'autre, après expulsion du dénominateur, les expressions (1), non seulement lorsque x, y, z sont des entiers, mais lorsque ce sont des constantes quelconques; cherchons à déterminer ces constantes de manière que la seconde expression soit égale à la première multipliée par un facteur constant s. On trouve, par un calcul classique, que s doit être une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} l-s & m & n \\ l' & m'-s & n' \\ l'' & m'' & n''-s \end{vmatrix} = 0,$$

qui est l'*équation caractéristique* de la substitution Σ. Soit s_1 une de ces racines; il existe dès lors des quantités x_1, y_1, z_1, telles que $x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2$ soit changé par T en $s_1(x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2)$. Or si l'on nomme invariant d'une expression du type

$$(4)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E,$$

même lorsque A, B, ..., E ne sont pas entiers, la quantité

$$B^2 - 4AC - 4DE,$$

on reconnaît qu'une transformation ordinaire du premier ordre quelconque change (après suppression du dénominateur tel qu'il se présente dans les formules de la transformation) l'expression (4) en une expression analogue de même invariant. Donc, en appliquant ce résultat aux deux expressions

$$x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2 \quad \text{et} \quad s_1(x_1 f_0 + y_1 f_1 + z_1 f_2),$$

on trouve

$$2\psi(x_1, y_1, z_1) = 2 s_1^2 \psi(x_1, y_1, z_1),$$

ce qui exige, puisque la forme ψ est positive, qu'on ait $s_1^2 = 1$ ou $s_1 = \pm 1$.

Donc, si une transformation ordinaire de degré 1, T, n'altère pas le système S, *il est nécessaire* que la substitution semblable de ψ correspondante n'admette, comme racines de son équation caractéristique, que les quantités ± 1.

Dès lors deux cas sont à distinguer.

94. Premier cas. — L'équation caractéristique de la substitution Σ admet la racine triple $s = \varepsilon$, ε désignant ± 1.

En ce cas, on sait que Σ peut se ramener, par un changement linéaire de variables, de déterminant 1, à la forme Σ_1 :

$$\Sigma_1 = |x, y, z;\ \varepsilon x,\ \varepsilon y + \lambda x,\ \varepsilon z + \mu x + \nu y|.$$

Je dis que les entiers λ, μ, ν sont nuls. Il existe en effet une forme ψ_1, équivalente à ψ, qui demeure inaltérée par Σ_1 ; soit

$$\psi_1 = 2Ax^2 + 2A'y^2 + 2A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

On aura dès lors

$$\begin{aligned} 2Ax^2 + 2A'(\varepsilon y + \lambda x)^2 + 2A''(\varepsilon z + \mu x + \nu y)^2 + \ldots \\ = 2Ax^2 + 2A'y^2 + 2A''z^2 + \ldots; \end{aligned}$$

d'où, en égalant dans les deux membres les coefficients de yz, $A''\varepsilon\nu = 0$. Comme A'' ne peut être nul, puisque la forme ψ_1 est positive, on a

$\nu = 0$. Égalons maintenant les coefficients de xz et de xy, il vient

$$(2A''\mu + B\lambda)\varepsilon = 0,$$
$$(B\mu + 2A'\lambda)\varepsilon = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\lambda = \mu = 0,$$

car le déterminant $4A'A'' - B^2$ doit être positif pour que ψ_1 soit positive.

Donc, enfin, Σ_1 n'est autre chose que la *substitution* $(+1)$

$$|x, y, z;\ x, y, z|,$$

ou la *substitution* (-1)

$$|x, y, z;\ -x, -y, -z|,$$

selon que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

Il en résulte que la substitution Σ, dont Σ_1 se déduisait par un changement de variables linéaire, doit être également *l'une des substitutions* $+1$ *ou* -1.

La question est donc de reconnaître s'il existe une transformation ordinaire de degré 1, T, changeant respectivement f_0, f_1, f_2 en εf_0, εf_1, εf_2, c'est-à-dire changeant, quels que soient x, y, z, l'expression $xf_0 + yf_1 + zf_2$ en $\varepsilon(xf_0 + yf_1 + zf_2)$.

Les formules établies dans la première Partie de ce Mémoire (I, n° **7**) permettent de traiter aisément cette question, en partant de la forme canonique (n° **89**) du système proposé; on arrive aux résultats suivants que nous nous bornerons à énoncer :

1° *En dehors de la transformation unité, il n'existe pas de transformation ordinaire d'ordre* $+1$ *changeant* f_0, f_1, f_2 *respectivement en* $\varepsilon f_0, \varepsilon f_1, \varepsilon f_2$, *la quantité* ε *étant* ± 1;

2° *Il* peut *exister, si certaines conditions sont vérifiées par les coefficients du système, une transformation ordinaire d'ordre* -1 *changeant* f_0, f_1, f_2 *en* $\varepsilon f_0, \varepsilon f_1, \varepsilon f_2$, *la quantité* ε *étant* $+1$.

95. Deuxième cas. — L'équation caractéristique de la substitution Σ admet comme racine double ε, et, comme racine simple, $-\varepsilon$.

On reconnaît alors sans difficulté que la forme ψ initiale est équivalente à une forme de l'un des deux types

$$\psi_2 = 2(Ax^2 + A'y^2 + B''xy + A''z^2),$$
$$\psi_3 = 2[Ax^2 + A'y^2 + A''(z^2 - \varepsilon yz) + B''xy];$$

ψ_2 admet la substitution semblable $|x, y, z;\ \varepsilon x,\ \varepsilon y,\ -\varepsilon z|$, et ψ_3 la substitution $|x, y, z;\ \varepsilon x,\ \varepsilon y,\ -\varepsilon z + y|$, qui correspond à Σ. Dans la première hypothèse, on pourra remplacer le système initial par un autre, arithmétiquement équivalent, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, de telle sorte que l'invariant de $xf_0 + yf_1 + zf_2$ soit identiquement égal à la forme $2\psi_2$: le problème est alors de rechercher si ce système admet en lui-même une transformation de degré 1, correspondant à la substitution semblable de $2\psi_2$

$$|x, y, z;\ \varepsilon x,\ \varepsilon y,\ -\varepsilon z|,$$

c'est-à-dire (n° **93**) changeant f_0, f_1, f_2, après suppression du dénominateur, en εf_0, εf_1, $-\varepsilon f_2$. Dans la seconde hypothèse, le problème se pose d'une manière analogue.

Les formules de la première Partie donnent le moyen de le résoudre; on aura soin de ramener d'abord, pour simplifier, la relation $f_0 = 0$ au type $h^2 - gg' - A = 0$. Les résultats obtenus se résument ainsi :

1° *Pour qu'il y ait des transformations ordinaires* (¹) *d'ordre* $+1$ *n'altérant pas le système proposé, il faut et il suffit que la forme* $\mathfrak{F}$ *associée puisse représenter le nombre* 4; *il y aura autant de ces transformations qu'il y a de représentations propres de* 4 *par la forme, les représentations* x, y, z *et* $-x$, $-y$, $-z$ *n'étant pas regardées comme distinctes;*

2° *Il* peut *exister des transformations ordinaires d'ordre* -1 *n'altérant pas le système; il faut et il suffit pour cela que les coefficients du système vérifient certaines conditions.*

Ces conditions sont, dans tous les cas, qu'une certaine forme quadratique binaire, dont les coefficients sont fonctions de ceux du système, puisse représenter $+1$; elles ne dépendent pas uniquement de

(¹) Autres que la transformation unité.

la classe à laquelle appartient la forme $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que, vérifiées pour un système, elles ne le sont pas nécessairement pour un autre donnant naissance à une forme équivalente à celle qui est associée au premier.

96. *Points modulaires d'un système.* — Comme dans la deuxième Partie (I, n° **36**), faisons correspondre à un système de périodes abéliennes le point de l'espace qui a pour coordonnées les trois invariants de la forme binaire du sixième ordre dont dérivent les fonctions abéliennes possédant ces périodes. Appelons-le *point modulaire*. Un système de trois relations singulières, définissant *deux* systèmes de périodes g, h, g' et G, H, G', donnera dès lors *deux* points modulaires.

Ces deux points seront généralement distincts : pour qu'ils soient confondus, il faut et il suffit qu'on puisse passer de g, h, g' à G, H, G' par une transformation ordinaire de degré 1. Or G, H, G' sont respectivement imaginaires conjugués de g, h, g'; d'autre part, une transformation d'ordre n change les périodes g, h, g' en d'autres, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, telles que les parties imaginaires de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ aient le même signe que celles de g et g' multipliées par n; il en résulte qu'une transformation de degré 1 faisant passer de g, h, g' à G, H, G' sera nécessairement *d'ordre* -1.

Ainsi, pour que les deux points modulaires d'un système de trois relations singulières soient confondus, il faut et il suffit que ce système admette en lui-même une transformation ordinaire d'ordre -1.

Remarque I. — Si le système admet en lui-même une transformation ordinaire d'ordre $+1$, celle-ci n'altère pas g, h, g' et G, H, G'; c'est donc une *multiplication complexe* du premier degré.

Or nous avons établi (¹) qu'un système de périodes ne peut admettre une telle multiplication que si la surface de Kummer correspondante est un tétraédroïde, en excluant le cas des périodes dérivées du radical $\sqrt{x^5+1}$. Le cas exclu ne correspondant pas à un système de trois relations singulières, on voit qu'un tel système, $f_0=f_1=f_2=0$, n'aura de transformations d'ordre $+1$ en lui-même que si la surface de

(¹) Ce *Journal*, 5ᵉ série, t. VI, p. 370.

Kummer correspondant aux périodes g, h, g' (ou G, H, G') est un tétraédroïde : il faut et il suffit pour cela qu'il existe entre g, h, g' (ou G, H, G') une relation singulière d'invariant 4, c'est-à-dire qu'une relation $xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0$ ait l'invariant 4, ou encore que la forme associée au système puisse représenter $+4$. Ce résultat concorde avec ce qui a été dit plus haut (n° **95**).

Remarque II. — Soient toujours g, h, g' et G, H, G' les deux systèmes de périodes, *imaginaires conjugués*, que donne un système S de trois relations singulières; supposons que g ait sa partie imaginaire positive, celle de G sera négative. Désignons par m et M les points modulaires qui correspondent respectivement à g, h, g' et G, H, G' : ils sont imaginaires conjugués.

Si deux systèmes ont un point modulaire commun, leurs seconds points modulaires coïncident également; les deux systèmes sont dès lors réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire du premier *degré*.

Si le point m d'un des systèmes coïncide avec le point m de l'autre, la transformation est *d'ordre* $+1$; car, d'après Hermite, une transformation d'ordre k change ou ne change pas le signe de la partie imaginaire de g selon que k est > 0 ou < 0. Si, au contraire, un point m coïncide avec un point M, la transformation est *d'ordre* -1.

Réciproquement, lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont réductibles l'un à l'autre par une transformation d'ordre $+1$, les points m_1 et m_2, M_1 et M_2 coïncident; si la transformation est d'ordre -1, m_1 et M_2, m_2 et M_1 coïncident.

Équivalence de deux systèmes de trois relations singulières.

97. On dira que deux systèmes de trois relations singulières sont *équivalents* s'ils peuvent être ramenés l'un à l'autre par une transformation ordinaire du premier degré.

D'après le n° **82**, les formes ternaires associées à deux systèmes équivalents sont équivalentes; mais cette condition nécessaire est loin d'être suffisante, comme elle l'était généralement dans le cas des systèmes de deux relations singulières et des formes binaires associées.

Pour étudier la question de l'équivalence des systèmes, considérons deux systèmes S_0 et S'_0, donnant respectivement naissance à deux formes $2\psi_0$ et $2\psi'_0$, *équivalentes entre elles*. Soit Ω le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme adjointe à ψ_0; c'est aussi celui des coefficients de la forme adjointe à ψ'_0 : désignons ces adjointes par $\Omega\psi_1$ et $\Omega\psi'_1$; l'invariant Ω est impair, et ψ_1, ψ'_1 sont proprement primitives, puisque ψ_0 et ψ'_0 le sont improprement. Enfin, le discriminant commun de ψ_0 et ψ'_0 est un nombre pair, divisible, comme on sait, par Ω^2, et que nous représenterons par $\Omega^2\Delta$.

Cela posé, observons que ψ_1 et ψ'_1, formes proprement primitives équivalentes, peuvent représenter une infinité de nombres premiers : soit P l'un d'eux, que nous avons le droit de supposer impair et premier à $\Omega\Delta$. En vertu de la théorie classique de Gauss, les formes ψ_0 et ψ'_0 représenteront proprement une même forme quadratique binaire φ, *improprement primitive*, de discriminant ΩP; on pourra toujours choisir P de manière que φ n'appartienne pas à une classe ambiguë. Si donc on pose

$$(1) \qquad \varphi = 2(Dx^2 + qxy + py^2),$$

on aura

$$4pD - q^2 = \Omega P,$$

et q sera un nombre impair.

Désignons maintenant par $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, les trois relations singulières du système S_0; par définition $2\psi_0(x, y, z)$ est l'invariant de la relation $xF_0 + yF_1 + zF_2 = 0$. Or, on obtient la forme binaire $\varphi(X, Y)$, représentable proprement par ψ_0, en remplaçant, dans $\psi_0(x, y, z)$ les variables x, y, z par $\lambda X + \mu Y$, $\lambda' X + \mu' Y$, $\lambda'' X + \mu'' Y$; c'est-à-dire que $2\varphi(X, Y)$ est l'invariant de la relation singulière

$$(2) \qquad X(\lambda F_0 + \lambda' F_1 + \lambda'' F_2) + Y(\mu F_0 + \mu' F_1 + \mu'' F_2) = 0.$$

On peut remplacer le système $F_0 = F_1 = F_2 = 0$ par le système arithmétiquement équivalent

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda F_0 + \lambda' F_1 + \lambda'' F_2 = 0, \\ \mu F_0 + \mu' F_1 + \mu'' F_2 = 0, \\ \nu F_0 + \nu' F_1 + \nu'' F_2 = 0; \end{cases}$$

ν, ν', ν'' étant des entiers choisis de telle sorte que le déterminant $(\lambda\mu'\nu'')$ soit $+1$: ce choix est possible : car, la représentation de φ par ψ étant propre, les mineurs $(\lambda\mu' - \mu\lambda')$, ..., sont premiers entre eux.

Considérons maintenant le système formé par les *deux* premières équations (3); d'après ce qui précède, il est propre et sa forme associée est 2φ : la forme φ étant improprement primitive, il résulte de la seconde Partie de ce Mémoire (I, n° **30**) qu'on pourra, par une transformation ordinaire de degré *un*, ramener le système des deux premières relations (1) au type

$$(4)\qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - q = 0,$$

D, p, q étant les coefficients de la forme φ, donnée par (1). Cette transformation changera la troisième équation (3) en une relation singulière : en ajoutant à celle-ci les deux relations (4), mutipliées par des facteurs convenables, on fera disparaître les termes en $h^2 - gg'$ et en g; le système initial, S_0, sera ainsi ramené, par des opérations qui n'altèrent pas la classe de formes ternaires associée, au type *propre :*

$$(5)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' - q = 0, \\ 2\beta h - \gamma g' - \delta = 0. \end{cases}$$

De même, le système S'_0 pourra être ramené au type *propre :*

$$(6)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' - q = 0, \\ 2\beta' h - \gamma' g' - \delta' = 0; \end{cases}$$

où les deux premières équations sont les mêmes que dans (5), puisque ψ'_0 représente aussi φ.

Les formes associées aux systèmes (5) et (6), respectivement équivalentes à $2\psi_0$ et $2\psi'_0$, sont équivalentes entre elles; ce sont les formes 2ψ et $2\psi'$ définies par

$$(7)\quad \begin{cases} \psi = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\beta^2 z^2 + 2\delta zx + 2\gamma zy, \\ \psi' = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\beta'^2 z^2 + 2\delta' zx + 2\gamma' zy. \end{cases}$$

Ω est le plus grand commun diviseur des coefficients de l'adjointe de ψ (ou de ψ'), et l'on a, pour le discriminant, $\Omega^2\Delta$, de ψ (ou de ψ'),

$$(8)\qquad \Omega^2\Delta = 2q\gamma\delta - 2D\gamma^2 - 2p\delta^2 + 2\beta^2(4pD - q^2).$$

La question est maintenant de chercher les conditions d'équivalence des systèmes (5) et (6); nous aurons besoin pour cela de connaître les substitutions qui transforment l'une dans l'autre les formes équivalentes ψ et ψ' : *nous admettrons d'abord que les formes de la classe à laquelle appartiennent les formes initiales* ψ_0, ψ'_0, *et par suite* ψ et ψ', *n'ont pas d'autres substitutions semblables que les substitutions* $(+1)$ *et* (-1).

98. Les discriminants de ψ et de ψ' étant les mêmes, on a, d'après (8), en observant que $4pD - q^2$ est égal à ΩP,

$$D\gamma^2 - q\gamma\delta + p\delta^2 \equiv D\gamma'^2 - q\gamma'\delta' + p\delta'^2 \pmod{P},$$

d'où l'on tire, en multipliant les deux membres par $4D$,

$$(2D\gamma - q\delta)^2 \equiv (2D\gamma' - q\delta')^2 \pmod{P},$$

et, puisque P est premier,

$$(9)\qquad \begin{cases} \varepsilon(2D\gamma - q\delta) \equiv 2D\gamma' - q\delta' \pmod{P} \\ (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

Multiplions les deux membres par q; il vient, puisque $q^2 \equiv 4pD \bmod P$, et que P est impair,

$$(10)\qquad D\varepsilon(q\gamma - 2p\delta) \equiv D(q\gamma' - 2p\delta') \pmod{P}.$$

Or, on a le droit de supposer D premier à P : dans le cas contraire, il suffirait d'effectuer une substitution convenable dans la forme φ, c'est-à-dire $2(Dx^2 + qxy + py^2)$, *qui est primitive*, et l'on ramènerait ainsi le coefficient de x^2 à n'être plus divisible par P. On a dès lors, par (9) et (10),

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon(2D\gamma - q\delta) &\equiv 2D\gamma' - q\delta' \\ \varepsilon(2p\delta - q\gamma) &\equiv 2p\delta' - q\gamma' \end{aligned}\right. \pmod{P}.$$

D'ailleurs $2D\gamma - q\delta$ et $2p\delta - q\gamma$ sont deux des coefficients de la forme adjointe à ψ; les premiers membres, et de même les seconds, dans (11), sont donc divisibles par Ω; et, puisque Ω est premier à P (n° **97**), on peut écrire les équations (11) :

$$\begin{aligned} 2D(\gamma' - \varepsilon\gamma) - q(\delta' - \varepsilon\delta) &= \sigma\Omega P = \sigma(4pD - q^2), \\ -q(\gamma' - \varepsilon\gamma) + 2p(\delta' - \varepsilon\delta) &= \tau(4pD - q^2), \end{aligned}$$

σ et τ étant des entiers. On en tire

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma' &= \varepsilon\gamma + 2p\sigma + q\tau, \\ \delta' &= \varepsilon\delta + q\sigma + 2D\tau. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant dans ψ', à savoir

$$2(DX^2 + qXY + pY^2 + \beta'^2 Z^2 + \delta' ZX + \gamma' ZY),$$

on fait la substitution linéaire de déterminant 1 :

$$(13)\qquad X = \varepsilon x - \tau z, \qquad Y = \varepsilon y - \sigma z, \qquad Z = z,$$

ψ' devient, après substitution aux coefficients γ' et δ' de leurs valeurs (12),

$$(14)\qquad 2(Dx^2 + qxy + py^2 + \theta z^2 + \delta zx + \gamma zy).$$

Or, c'est là précisément la forme ψ, au coefficient près de z^2 : mais ce coefficient, θ, doit être égal au coefficient correspondant, β^2, dans ψ, puisque les discriminants de ψ et de la forme (14), équivalente à ψ', sont égaux.

Ainsi $\psi'(X, Y, Z)$ se transforme en $\psi(x, y, z)$ par la substitution (13); comme ψ, par hypothèse, n'a pas de transformations linéaires en elle-même autres que εx, εy, εz, la substitution (13), jointe à la substitution analogue où l'on aurait changé les signes des trois seconds membres, est la seule qui change $\psi'(X, Y, Z)$ en $\psi(x, y, z)$.

Remarque. — Il résulte également de cette analyse que deux formes improprement primitives, ψ et ψ', de même discriminant et de même invariant Ω, sont équivalentes lorsqu'elles représentent proprement une même forme binaire, φ, improprement primitive, et de discriminant ΩP, P étant un nombre premier impair et premier à Ω.

99. Revenons maintenant à notre problème, c'est-à-dire à la recherche des conditions d'équivalence des systèmes propres (5) et (6).

Pour qu'ils soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe une transformation ordinaire de degré *un*, changeant le système (5) en un système arithmétiquement équivalent au système (6); d'une manière plus précise, si l'on désigne par f_0, f_1, f_2 et f_0, f_1, f'_2 les premiers membres des relations (5) et (6), une transformation du premier degré devra changer respectivement f_0, f_1, f_2 (après suppression des dénominateurs) en

$$\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f'_2, \quad \lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f'_2, \quad \lambda'' f_0 + \mu'' f_1 + \nu'' f'_2,$$

les λ, μ, ν étant des entiers de déterminant ± 1. S'il en est ainsi, la relation $xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0$ est changée en

$$x(\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f'_2) + y(\lambda' f_0 + \ldots) + z(\lambda'' f_0 + \ldots) = 0,$$

et dès lors les invariants de ces deux relations sont égaux, quels que soient x, y, z : sous une autre forme, si, dans la forme $2\psi'(X, Y, Z)$, associée au système (6), on pose

$$(15)\quad \begin{cases} X = \lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \\ Y = \mu x + \mu' y + \mu'' z, \\ Z = \nu x + \nu' y + \nu'' z, \end{cases}$$

cette forme devient la forme $2\psi(x, y, z)$, associée au système (5).

Mais nous avons déterminé plus haut (n° **98**) les substitutions linéaires, de déterminant ± 1, qui transforment ψ' en ψ : elles se réduisent à la substitution (13), et à celle qu'on obtient en y changeant tous les signes; la substitution (15) est donc l'une de ces deux, et l'on déduit de là, pour λ, λ', μ, μ', ν, ν', ν'', les valeurs

$$\lambda = \mu' = \varepsilon, \qquad \lambda' = \mu = \nu = \nu' = 0, \qquad \nu'' = \varepsilon';$$

ε et ε' représentant ± 1.

Donc, si les systèmes (5) et (6) sont équivalents, la transformation de degré *un* correspondante change respectivement f_0, f_1, f_2 en εf_0, εf_1, $\lambda'' f_0 + \mu'' f_1 + \varepsilon' f_2'$. Or, nous avons déterminé (**I**, n^{os} **45-47**) toutes les transformations ordinaires de degré un qui reproduisent respectivement (aux signes près) deux relations singulières telles que $f_0 = 0$, $f_1 = 0$; leurs entiers caractéristiques sont définis par le Tableau

$$(16)\quad \begin{cases} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \\ b_0 = -\varepsilon p a_1 + \varepsilon q a_2, & b_1 = -\varepsilon a_0 - \varepsilon q a_3 \\ b_2 = -\varepsilon p a_3, & b_3 = -\varepsilon a_2 \\ c_0 = -\varepsilon D a_2, & c_1 = \varepsilon D a_3 \\ c_2 = -\varepsilon a_0, & c_3 = \varepsilon a_1 \\ d_0 = \varepsilon D b_2, & d_1 = -\varepsilon b_3 \\ d_2 = \varepsilon b_0, & d_3 = -\varepsilon b_1 \\ \multicolumn{2}{c}{(\varepsilon = \pm 1);} \end{cases}$$

les a_i devant uniquement satisfaire à la relation

$$(16\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2 - pa_1^2 + p\mathrm{D}a_3^2 + q(a_0 a_3 + a_1 a_2) = n \\ & \qquad\qquad (n = \pm 1). \end{aligned} \right.$$ [1]

A la relation $f_2 = 0$, c'est-à-dire $2\beta h - \gamma g' - \delta = 0$, cette transformation fait correspondre, en vertu des valeurs classiques de g, h, g' en fonction des périodes transformées G, H, G', (I, n° 5), la relation singulière

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{G}[2\beta(\mathrm{D}a_2 a_3 - a_0 a_1 - q a_1 a_3) - \gamma\varepsilon(\mathrm{D}a_3^2 - a_1^2) \\ & \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_0 a_3 - a_1 a_2 + q a_3^2)] \\ & + 2\mathrm{H}[-\beta n + 2\beta(a_0^2 + q a_0 a_3 + p\mathrm{D}a_3^2) \\ & \qquad - \gamma\varepsilon(a_0 a_1 + \mathrm{D}a_2 a_3) \\ & \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_0 a_2 + q a_2 a_3 - p a_1 a_3)] \\ & + \mathrm{G}'[2\beta(q a_0 a_2 - p a_0 a_1 + p\mathrm{D}a_2 a_3) \\ & \qquad + \gamma\varepsilon(a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2) + \delta\varepsilon(p a_0 a_3 + q a_2^2 - p a_1 a_2)] \\ & + (\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}')[2\beta(a_0 a_2 + p a_1 a_3) - \gamma\varepsilon(a_0 a_3 + a_1 a_2) \\ & \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_2^2 - p a_3^2)] \\ & + 2\beta\mathrm{D}(a_0 a_2 + p a_1 a_3) - \gamma\mathrm{D}\varepsilon(a_0 a_3 + a_1 a_2) \\ & \qquad\qquad + \delta\varepsilon(a_0^2 - p a_1^2 + q a_0 a_3 + q a_1 a_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que les systèmes (5) et (6) soient équivalents, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que le premier membre de cette relation (17) soit de la forme

$$\lambda''(\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}' - \mathrm{D}) + \mu''(\mathrm{G} - p\mathrm{G}' - q) + \nu''(2\beta'\mathrm{H} - \gamma'\mathrm{G}' - \delta'),$$

ν'' étant ε' c'est-à-dire ± 1; ou encore, qu'en remplaçant dans ce premier membre $\mathrm{H}^2 - \mathrm{GG}'$ par D et G par $p\mathrm{G}' + q$, le résultat soit identiquement égal à $\pm(2\beta'\mathrm{H} - \gamma'\mathrm{G}' - \delta')$. On obtient ainsi, pour

---

[1] En vertu de la première Partie (I, n° 8), la transformation ainsi définie change respectivement f_0 et f_1 en $-\varepsilon n f_0$ et $-\varepsilon n f_1$. La quantité n est l'*ordre* de la transformation ($n = \pm 1$).

les valeurs de β', γ', δ' en fonction de β, γ, δ, les formules

$$\begin{aligned}
\varepsilon'\beta' &= -\beta n + 2\beta(a_0^2 + qa_0a_3 + pDa_3^2) \\
&\quad - \gamma\varepsilon(a_0a_1 + Da_2a_3) + \delta\varepsilon(a_0a_2 + qa_2a_3 - pa_1a_3), \\
\varepsilon'\gamma' &= 2\beta(2pa_0a_1 - 2pDa_2a_3 + pqa_1a_3 - qa_0a_2) \\
&\quad - \gamma\varepsilon(a_0^2 - Da_2^2 - pDa_3^2 + pa_1^2) \\
&\quad + \delta\varepsilon(2pa_1a_2 - 2pa_0a_3 - qa_2^2 - pqa_3^2), \\
\varepsilon'\delta' &= -2\beta(qa_0a_1 + q^2a_1a_3 - qDa_2a_3 - 2Da_0a_2 - 2pDa_1a_3) \\
&\quad + \gamma\varepsilon(2Da_0a_3 + 2Da_1a_2 + qDa_3^2 - qa_1^2) \\
&\quad - \delta\varepsilon(a_0^2 - pa_1^2 + 2qa_0a_3 + Da_2^2 + q^2a_3^2 - pDa_3^2),
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire, en remplaçant n par sa valeur (16 *bis*),

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
2\varepsilon'\beta' &= 2\beta(a_0^2 + Da_2^2 + pa_1^2 + pDa_3^2 + qa_0a_3 - qa_1a_2) \\
&\quad - \gamma\varepsilon(2a_0a_1 + 2Da_2a_3) \\
&\quad - \delta\varepsilon(-2a_0a_2 - 2qa_2a_3 + 2pa_1a_3), \\
\varepsilon'\gamma' &= 2\beta(2pa_0a_1 - 2pDa_2a_3 + pqa_1a_3 - qa_0a_2) \\
&\quad - \gamma\varepsilon(a_0^2 - Da_2^2 - pDa_3^2 + pa_1^2) \\
&\quad - \delta\varepsilon(2pa_0a_3 + qa_2^2 + pqa_3^2 - 2pa_1a_2), \\
\varepsilon'\delta' &= 2\beta(qa_0a_1 + q^2a_1a_3 - qDa_2a_3 - 2Da_0a_2 - 2pDa_1a_3) \\
&\quad - \gamma\varepsilon(qa_1^2 - 2Da_0a_3 - 2Da_1a_2 - qDa_3^2) \\
&\quad - \delta\varepsilon(a_0^2 - pa_1^2 + Da_2^2 + 2qa_0a_3 + q^2a_3^2 - pDa_3^2).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, pour que les deux systèmes (5) et (6) soient équivalents, il faut et il suffit que $2\beta'$, γ', δ' aient les expressions précédentes (18) en 2β, γ, δ : dans ces formules, ε et ε' désignent ± 1, et a_0, a_1, a_2, a_3 sont des entiers, assujettis uniquement à satisfaire à la relation (16 *bis*), à savoir

$$(19)\quad a_0^2 - Da_2^2 - pa_1^2 + pDa_3^2 + q(a_0a_3 + a_1a_2) = n \qquad (n = \pm 1).$$

Si l'on pose $2\beta = Z$, $\gamma = X$, $\delta = Y$, on reconnaît, dans ces formules, celles qui donnent *des* transformations en elle-même de la forme ternaire indéfinie ([1]) Φ :

$$(20)\quad \Phi(X,Y,Z)=(4pD-q^2)Z^2-4DX^2+4qXY-4pY^2,$$

qui, si l'on y remplace X, Y, Z par γ, δ, 2β, devient le double du discriminant (8), $\Omega^2\Delta$, de la forme ternaire ψ. La forme Φ est l'adjointe de la forme Φ_1 :

$$\Phi_1=2(Z^2-DX^2-qXY-pY^2),$$

qui, divisée par 2, a joué un rôle fondamental dans la seconde Partie de ce Mémoire.

D'ailleurs les formules (18) et (19) ne donnent pas *toutes* les transformations linéaires en elle-même de la forme (20) ([2]).

Remarque. — Nous dirons que deux systèmes de trois relations singulières sont *proprement* ou *improprement équivalents* selon qu'on passe de l'un à l'autre par une transformation d'ordre $+1$ ou d'ordre -1.

D'après cela, les systèmes (5) et (6) sont proprement équivalents si $2\beta'$, γ', δ' ont, en fonction de 2β, γ, δ, les expressions (18), les a_i étant des entiers liés uniquement par l'équation (19), où l'on fait $n=1$; l'équivalence est impropre si l'équation (19) est satisfaite pour $n=-1$.

100. *Résumé.* — Reprenons l'équation (8), qui donne le discriminant, $\Omega^2\Delta$, de ψ, en l'écrivant

$$(21)\quad (4pD-q^2)\overline{2\beta}^2-4D\gamma^2+4q\gamma\delta-4p\delta^2=2\Omega^2\Delta,$$

([1]) Φ est indéfinie : car D, p et $4pD-q^2$ sont positifs, puisque la forme φ, $2Dx^2+2qxy+2py^2$ est positive.

([2]) Il est intéressant de comparer ces formules à celles obtenues (I, n° 66, p. 121) pour les transformations en elle-même de la forme $z^2-Dx^2-2q'xy-py^2$, qui, si l'on pose $q=2q'$, est $\frac{1}{2}\Phi_1$: les transformations actuelles sont les *transposées* des anciennes. Cela n'a rien d'inattendu, car on sait que, si une substitution linéaire n'altère pas une forme ternaire, sa transposée n'altère pas la forme adjointe.

et regardons-y 2β, γ, δ comme des inconnues. Nous dirons que deux solutions entières, 2β, γ, δ et $2\beta'$, γ', δ' sont proprement équivalentes si l'une se déduit de l'autre par les relations (18) et (19), où $n=1$; elles seront improprement équivalentes si l'une se déduit de l'autre par (18) et (19), où $n=-1$.

Considérons maintenant les deux systèmes (5) et (6), à savoir

$$(5)\quad h^2-gg'-D=0,\quad g-pg'-q=0,\quad 2\beta h-\gamma g'-\delta=0,$$
$$(6)\quad h^2-gg'-D=0,\quad g-pg'-q=0,\quad 2\beta' h-\gamma' g'-\delta'=0,$$

qu'on suppose donner naissance à deux formes ternaires équivalentes, 2ψ et $2\psi'$. Soit $\Omega^2\Delta$ le discriminant de ψ et de ψ'; pour que les deux systèmes soient proprement (ou improprement) équivalents, il faut et il suffit que 2β, γ, δ et $2\beta'$, γ', δ', qui sont des solutions de l'équation (21), en vertu même de l'expression du discriminant de ψ et de ψ', soient deux solutions proprement (ou improprement) équivalentes.

Ce résultat suppose que les formes ψ et ψ' n'ont pas d'autres transformations en elles-mêmes que les substitutions $+1$ et -1 : on reviendra plus loin (nº **105**) sur le cas laissé ici de côté.

Systèmes non équivalents qui donnent naissance à une même classe de formes.

101. Soit ψ_0 une forme ternaire, improprement primitive, positive, et telle que $2\psi_0$ soit une forme $\mathcal{F}$; désignons par Ω et Δ ses deux invariants dont le premier est impair : son discriminant sera $\Omega^2\Delta$. Proposons-nous de déterminer tous les systèmes propres de trois relations singulières non équivalents, c'est-à-dire non réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré un, qui donnent naissance à des formes ternaires équivalentes à $2\psi_0$.

Choisissons pour cela, comme au nº **97**, une forme φ, improprement primitive, n'appartenant pas à une classe ambiguë, représentable proprement par ψ_0, et dont le discriminant, nécessairement divisible par Ω, soit de la forme ΩP, P étant premier (impair), et premier à $\Omega\Delta$; soit

$$\varphi=2Dx^2+2qxy+2py^2;$$

on a

$$\Omega P = 4pD - q^2,$$

et q est impair, puisque Ω l'est; de plus, on a le droit de supposer D et q premiers à ΩP.

En vertu de la théorie générale du n° **97**, tout système propre donnant naissance à une forme équivalente à $2\psi_0$ sera réductible, par une transformation de degré *un*, au type

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - D &= 0,\\ g - pg' - q &= 0,\\ 2\beta_1 h - \gamma_1 g' - \delta_1 &= 0;\end{aligned}\right.$$

et le problème est maintenant de former tous les systèmes (22) non équivalents qui donnent naissance à une forme équivalente à $2\psi_0$.

Or, la forme associée au système (22) représente évidemment, d'une manière propre, la forme 2φ, puisque sa moitié est

$$(23)\qquad 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\beta_1^2 z^2 + 2\delta_1 zx + 2\gamma_1 zy;$$

dès lors, en vertu de la remarque du n° **98**, pour qu'elle soit équivalente à ψ_0, il faut et il suffit que la forme (23) ait les mêmes invariants, Ω et Δ, que la forme ψ_0.

Exprimons d'abord que le discriminant est le même, $\Omega^2\Delta$; il vient

$$(24)\qquad (4pD - q^2)\overline{2\beta_1}^2 - 4D\gamma_1^2 + 4q\gamma_1\delta_1 - 4p\delta_1^2 = 2\Omega^2\Delta,$$

c'est-à-dire que $2\beta_1$, γ_1, δ_1 doivent être des solutions (en nombres entiers) de l'équation (21). Parmi ces solutions en nombre infini, nous ne garderons que celles qui ne sont pas équivalentes entre elles, dans le sens du n° **100**, car les systèmes (22) qui répondent à deux solutions équivalentes sont équivalents, et *réciproquement*.

Il faut ensuite que la forme (23) admette l'invariant Ω, c'est-à-dire que Ω soit le plus grand commun diviseur des quantités [coefficients de la forme adjointe à (23)],

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{lll} 4pD - q^2, & 2D\gamma_1 - q\delta_1, & 2p\delta_1 - q\gamma_1,\\ 4p\beta_1^2 - \gamma_1^2, & 4D\beta_1^2 - \delta_1^2, & 2q\beta_1^2 - \gamma_1\delta_1,\end{array}\right.$$

La première de ces quantités étant ΩP, et P ne pouvant les diviser toutes, puisqu'il est premier à $\Omega\Delta$, il suffit que Ω divise les quantités (25). Or, on déduit de (24),

$$4D\gamma_1^2 - 4q\gamma_1\delta_1 + 4p\delta_1^2 \equiv 0 \pmod{\Omega},$$

d'où

$$(2D\gamma_1 - q\delta_1)^2 \equiv 0 \pmod{\Omega},$$

(puisque $4pD - q^2 = \Omega P$).

Ainsi, pour toute solution de (24), le carré de la quantité

$$2D\gamma_1 - q\delta_1$$

est divisible par Ω : cette quantité elle-même ne l'est pas nécessairement. On devra donc choisir, parmi les solutions de (24), celles qui rendent $2D\gamma_1 - q\delta_1$ multiple de Ω : je dis qu'alors toutes les autres quantités (25) sont aussi multiples de Ω.

Car, $2D$ étant premier à ΩP, on a, puisque $2D\gamma_1 \equiv q\delta_1 \pmod{\Omega}$,

$$2D(2p\delta_1 - q\gamma_1) \equiv 4pD\delta_1 - q^2\delta_1 = \delta_1\Omega P \equiv 0 \pmod{\Omega};$$

d'où

$$2p\delta_1 - q\gamma_1 \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

De même, l'équation (24) s'écrivant

$$2\Omega P\beta_1^2 - 2D\gamma_1^2 + 2q\gamma_1\delta_1 - 2p\delta_1^2 = \Omega^2\Delta,$$

on en tire

$$4D\Omega P\beta_1^2 - (2D\gamma_1 - q\delta_1)^2 - \Omega P\delta_1^2 = 2D\Omega^2\Delta;$$

d'où

$$(4D\beta_1^2 - \delta_1^2)P \equiv 0 \pmod{\Omega},$$

et dès lors

$$4D\beta_1^2 - \delta_1^2 \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

On voit de même que $4p\beta_1^2 - \gamma_1^2 \equiv 0 \pmod{\Omega}$; enfin on a

$$2D(2q\beta_1^2 - \gamma_1\delta_1) \equiv q\delta_1^2 - 2D\gamma_1\delta_1 \equiv \delta_1(q\delta_1 - 2D\gamma_1) \equiv 0 \pmod{\Omega},$$

ce qui montre que la dernière des quantités (25) est aussi un multiple de Ω.

102. Voici donc le résultat.

Soit $2\psi_0$ *une forme* $\mathcal{F}$, *sans autres substitutions semblables que les substitutions* $(+1)$ *et* (-1); *désignons par* Ω *et* Δ *les invariants de* ψ_0, *et choisissons d'une manière quelconque, parmi les formes binaires improprement primitives représentables proprement par* ψ_0, *une forme* φ, *n'appartenant pas à une classe ambiguë, et de déterminant* $\Omega\mathrm{P}$, P *étant premier, et premier à* $2\Omega\Delta$; *soit*

$$\varphi = 2\mathrm{D}x^2 + 2qxy + 2py^2 \quad (q \text{ impair}). \tag{26}$$

Tous les systèmes de trois relations singulières non équivalents qui donnent naissance à des formes ternaires équivalentes à $2\psi_0$ *sont fournis par les formules*

$$\left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - \mathrm{D} &= 0, \\ g - pg'_1 - q &= 0, \\ 2\beta h - \gamma g' - \delta &= 0, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

où l'on prend successivement pour 2β, γ, δ *toutes les solutions* (¹) *entières non équivalentes* (n° **100**) *de l'équation*

$$(4p\mathrm{D} - q^2)\overline{2\beta}^2 - 4\mathrm{D}\gamma^2 + 4q\gamma\delta - 4p\delta^2 = 2\Omega^2\Delta, \tag{28}$$

avec la condition supplémentaire que la quantité $2\mathrm{D}\gamma - q\delta$, *dont le carré est nécessairement divisible par* Ω, *soit elle-même un multiple de* Ω.

Il est clair que la condition supplémentaire est satisfaite d'elle-même lorsque les facteurs premiers qui figurent dans Ω n'y entrent qu'à la première puissance.

(¹) C'est-à-dire un ensemble quelconque de solutions, dont on peut déduire toutes les autres par les formules (18) et (19).

103. *Nombre des systèmes.* — Si donc N_0 est le nombre des solutions non équivalentes, en 2β, γ, δ de l'équation (28), avec la condition que $2D\gamma - q\delta \equiv 0 \pmod{\Omega}$ (et nous verrons plus loin que ce nombre est fini) nous pouvons dire qu'à une classe de formes $\mathfrak{f}$, du type 2ψ, sans autres substitutions semblables que $(+1)$ et (-1), correspondent N_0 systèmes de trois relations singulières, irréductibles l'un à l'autre par des transformations ordinaires du premier degré.

104. *Nombre des points modulaires.* — A ces N_0 systèmes correspondent, *en général*, $2N_0$ points modulaires : nous disons en général, parce que les deux points modulaires liés à un ou plusieurs des N_0 systèmes peuvent coïncider (n° **96**).

Voici comment on peut déterminer exactement le *nombre des points modulaires liés à une classe de formes* $\mathfrak{f}$, c'est-à-dire le nombre total des points modulaires fournis par les systèmes de trois relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe.

Considérons, parmi les solutions en 2β, γ, δ de l'équation (28), un ensemble quelconque de solutions qui ne soient pas équivalentes *proprement* deux à deux, et dont toutes les autres puissent se déduire par les formules (18) et (19), le nombre n étant supposé égal à $+1$ dans cette dernière (19). Parmi ces solutions, ne gardons que celles qui vérifient la condition supplémentaire indiquée plus haut : soit N leur nombre.

Nous obtenons ainsi, par les formules (27), N systèmes, $S_1, S_2, \ldots, S_N$, de trois relations singulières, non *proprement* équivalents deux à deux, et tels que tout système du type (27), donnant naissance à une forme de la classe considérée, soit proprement équivalent à l'un d'eux.

Il résulte de là que les points modulaires liés à cette classe figurent *tous* parmi les points modulaires que donnent les systèmes S_i, et réciproquement : le problème est donc de rechercher combien de points modulaires *distincts* donnent les S_i.

Or chaque S_i fournit deux groupes de périodes g, h, g' et G, H, G', imaginaires conjugués; supposons la partie imaginaire de g positive, celle de G est négative : à ces deux groupes correspondent respectivement deux points modulaires, m_i et M_i. Nous allons démontrer : 1° que les m_i (et les M_i) sont distincts; 2° que les M_i coïncident avec les m_j; il en résultera que le nombre cherché des points modulaires est N.

1° Les points m_i (et M_i) sont distincts : car, si m_i et m_j coïncidaient, les systèmes S_i et S_j seraient équivalents (n° **96**), et l'équivalence serait *propre* (*ibid.*), résultat contraire à ce qui a été dit plus haut.

2° Opérons sur les systèmes S_i une même transformation d'ordre -1, n'altérant pas (au même signe près) les deux premières relations (27), communes à tous ces systèmes (¹) : nous obtenons ainsi des systèmes S'_i, dont chacun, par ce qui précède, est proprement équivalent à un système S_j (j pouvant être égal à i), puisque la forme associée appartient toujours à la même classe. Donc, le point M_i, que donne un système S_i *quelconque,* coïncide avec un point m_j (qui peut d'ailleurs être m_i, si S_i admet en lui-même une transformation d'ordre -1).

C. Q. F. D.

Donc enfin, le nombre des points modulaires liés à une même classe de formes $\mathfrak{f}$, du type 2ψ, est égal au nombre N défini tout à l'heure : on suppose toujours que ces formes n'ont pas d'autres substitutions semblables que $(+1)$ et (-1).

Cas où les formes $\mathfrak{f}$ admettent des substitutions semblables.

105. En ce cas, les N systèmes S_i peuvent être deux à deux proprement équivalents; le problème est donc de rechercher s'ils le sont effectivement. Chacun de ces systèmes est du type

$$(\mathrm{S})\quad h^2 - gg' - \mathrm{D} = 0, \qquad g - pg' - q = 0, \qquad 2\beta h - \gamma g' - \delta = 0,$$

(¹) Il existe de telles transformations, c'est-à-dire que l'équation (19), où $n = -1$, a des solutions.

Si l'on y pose en effet $a_1 = 2a'_1$, $a_3 = 2a'_3$, elle s'écrit

$$(a_0 + qa'_3)^2 + \mathrm{F}(a'_1, a_2, a'_3) = -1,$$

en désignant par F l'adjointe de la forme $z^2 - \mathrm{D}x^2 - 2qxy - 4py^2$. Or cette forme a pour discriminant $4p\mathrm{D} - q^2$, *quantité impaire;* son invariant Ω est évidemment l'unité; dès lors, en vertu d'un résultat de M. Bachmann (*Zahlentheorie,* 4ᵉ Partie, p. 256), l'équation $p^2 + \mathrm{F}(q, q', q'') = -1$ est résoluble en nombres entiers. *Voir* aussi MEYER, *Crelle,* t. 116, p. 322.

les deux premières relations étant les mêmes pour tous; d'après le mode même de formation des S_i, *aucun d'eux ne peut être réduit à un autre par une transformation ordinaire d'ordre* $+1$, *n'altérant pas, au même signe près, les deux premières équations* (S) : mais, lorsque la classe de formes liée à ces systèmes admet d'autres substitutions semblables que $(+1)$ et (-1), il peut exister d'*autres* transformations du premier ordre réduisant un des systèmes à un autre.

Soient alors $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ les trois équations (S) du système S_i; 2ψ la forme associée. Pour qu'une transformation T, d'ordre $+1$, change S_i en un système S'_i, dont les deux premières équations soient les mêmes que celles de S_i, il faut et il suffit, les λ, μ, ν désignant des constantes, que T change

$$\begin{aligned} &\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f_2 \quad \text{en} \quad f_0, \\ &\lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f_2 \quad \text{en} \quad f_1. \end{aligned}$$

S'il en est ainsi, le système S'_i, transformé de S_i par T, sera l'un des systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_N$, ou pourra être réduit à l'un d'eux par une transformation d'ordre $+1$: cela résulte des propriétés mêmes des systèmes S_i (n° **104**).

Or, pour qu'il existe une transformation T, d'ordre $+1$, changeant respectivement $\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f_2$ et $\lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f_2$ en f_0 et f_1, il faut et il suffit, d'après les résultats de la deuxième Partie de ce Mémoire, que les invariants des deux relations singulières

$$x(\lambda f_0 + \mu f_1 + \nu f_2) + y(\lambda' f_0 + \mu' f_1 + \nu' f_2) = 0$$

et

$$x f_0 + y f_1 = 0$$

soient les mêmes quels que soient x et y [1], c'est-à-dire que l'on ait

$$\psi(\lambda x + \lambda' y, \mu x + \mu' y, \nu x + \nu' y) = 2Dx^2 + 2qxy + 2py^2. \tag{29}$$

[1] En d'autres termes, les formes binaires associées aux deux systèmes de deux relations doivent coïncider : les deux systèmes sont alors réductibles l'un à l'autre par une transformation de degré *un*, comme on l'a vu dans la deuxième

Donc, les quantités $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ sont les coefficients d'une représentation propre quelconque de la forme φ (ou $2Dx^2 + 2qxy + 2py^2$), par la forme ψ.

Soit alors $f'_2 = 0$ la troisième équation du système S'_i; $2\psi'$ la forme associée à celui-ci; la transformation T change en $f'_2 = 0$ une relation $\lambda'' f_0 + \mu'' f_1 + \nu'' f_2 = 0$ du système S_i, les λ'', μ'', ν'' étant des entiers : on a dès lors identiquement

$$(30)\quad \begin{cases} \psi(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \mu x + \mu' y + \mu'' z, \nu x + \nu' y + \nu'' z) \\ \quad = \psi'(x, y, z), \end{cases}$$

et les termes indépendants de z, dans ψ', sont $2Dx^2 + 2qxy + 2py^2$, puisque les deux premières équations de S'_i sont $f_0 = 0, f_1 = 0$.

Mais, d'après le n° **98**, ψ se change en ψ' par une substitution du type $|x, y, z;\ \varepsilon x + \tau z, \varepsilon y + \sigma z, z|$, ε désignant ± 1 et σ, τ des entiers; on a donc

$$(31)\qquad \psi'(x, y, z) = \psi(\varepsilon x + \tau z, \varepsilon y + \sigma z, z),$$

d'où, en compararant (30) et (31),

$$\psi(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \mu x + \mu' y + \mu'' z, \nu x + \nu' y + \nu'' z) \\ = \psi(\varepsilon x + \tau z, \varepsilon y + \sigma z, z).$$

Si donc on désigne par

$$|x, y, z;\ lx + my + nz, l'x + m'y + n'z, l''x + m''y + n''z|$$

une substitution semblable de ψ, on déduit de là, pour les valeurs des $\lambda, \lambda', \ldots, \nu'$ les expressions

$$(32)\qquad \begin{cases} \lambda = l\varepsilon, & \mu = l'\varepsilon, & \nu = l''\varepsilon, \\ \lambda' = m\varepsilon, & \mu' = m'\varepsilon, & \nu' = m''\varepsilon. \end{cases}$$

Partie, car la forme binaire associée à $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, est $4Dx^2 + 4qxy + 4py^2$, et devient, après division par 2, improprement primitive (I, n° **30**). La transformation peut être supposée d'ordre $+1$, car, si elle est d'ordre -1, il suffit de la faire suivre d'une transformation d'ordre -1, n'altérant pas (au même signe près) f_0 et f_1 (*voir* la Note précédente).

Réciproquement, si λ, μ, ..., ν' ont des valeurs de cette forme, l'équation (29) est satisfaite, car l'équation

$$\psi(lx+my+nz, l'x+m'y+n'z, l''x+m''y+n''z) = \psi(x, y, z)$$

donne

$$\psi(lx+my, l'x+m'y, l''x+m''y) = \psi(x, y, 0),$$

ou, par (32),

$$\psi(\lambda x+\lambda' y, \mu x+\mu' y, \nu x+\nu' y) = 2(\mathrm{D}x^2+qxy+py^2).$$

De cette analyse résulte la proposition suivante :

A toute substitution semblable des formes $\mathfrak{f}$ de la classe considérée correspond, pour chaque système S_i, *une transformation* T *d'ordre* $+1$, *changeant* S_i *en un autre des* N *systèmes; inversement, toute transformation* T *jouissant de cette propriété est associée à une substitution semblable de la classe.*

106. *Remarques.* — 1° A une substitution semblable de la forme ψ, associée à un système S_i, ne correspond ainsi qu'*une* transformation T. Car s'il en existe une seconde T_1, changeant, comme T, $lf_0+l'f_1+l''f_2$ et $mf_0+m'f_1+m''f_2$ en f_0 et f_1, on peut écrire $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}\Theta$, Θ étant une transformation d'ordre $+1$, qui n'altère pas (au même signe près) f_0 et f_1 : les deux systèmes S'_i et S''_i en lesquels S_i est transformé par T et T_1 se déduisent donc l'un de l'autre par Θ, c'est-à-dire, en vertu des propriétés des systèmes S_i (n° **104**), qu'ils sont identiques.

2° Les substitutions semblables de ψ sont deux à deux *opposées*, c'est-à-dire que l'une se déduit de l'autre par le changement de signe de tous les coefficients; à deux substitutions opposées correspond, pour chaque système S_i, une même transformation T.

3° A deux substitutions semblables de ψ, distinctes et non opposées, on peut admettre qu'il correspond deux transformations T distinctes; sous une autre forme, il n'existe pas deux substitutions semblables de ψ du type

$$|x, y, z;\ lx+my+nz,\ l'x+m'y+n'z,\ l''x+m''y+n''z|,$$

pour lesquelles l, m, l', m', l'' m'' soient les mêmes. On peut toujours en effet choisir la forme φ, à savoir

$$2Dx^2 + 2qxy + 2py^2,$$

pour que ψ, c'est-à-dire

$$2Dx^2 + 2qxy + 2py^2 + 2\gamma zy + 2\delta zx + 2\beta^2 z^2,$$

n'admette pas deux transformations semblables de cette espèce.

107. *Nombre des points modulaires.* — Admettons d'abord que la classe de formes $\mathfrak{F}$ considérée ne puisse représenter 4; d'après le n° **95**, aucun système donnant naissance à une forme de cette classe n'admet de transformation d'ordre +1 en lui-même, autre que la transformation unité.

Soit d le nombre des substitutions semblables des formes considérées, deux substitutions opposées étant comptées pour une seule. A ces d substitutions correspondent, pour un système S_i quelconque, d transformations d'ordre +1, changeant S_i en des systèmes S_j, S_k, ..., différents entre eux et différents de S_i, en vertu de tout ce qui précède; il en résulte que les N systèmes S_i sont réductibles à $\frac{N}{d}$ d'entre eux; et, par suite, le nombre des points modulaires liés à la classe considérée est $\frac{N}{d}$, d'après le raisonnement du n° **104**.

Si les formes de la classe peuvent représenter proprement 4, de k manières, il y aura (n° **95**) k transformations d'ordre +1 changeant en lui-même un quelconque des systèmes qui donnent naissance à l'une d'elles, non compris la transformation unité; donc, les d transformations ci-dessus qui correspondent à un système S_i se groupent $(k+1)$ à $(k+1)$, de manière que les transformations d'un groupe changent S_i en un même système S_k; le nombre des points modulaires cherchés sera donc $\frac{N}{d}(k+1)$.

Représentations géométriques.

108. Reprenons la représentation géométrique indiquée dans la deuxième Partie (I, n° **36**). A un système de périodes (g, h, g') ou aux fonctions abéliennes possédant ces périodes, faisons correspondre le *point modulaire*, qui a pour coordonnées cartésiennes les trois invariants absolus de la forme binaire du sixième ordre liée aux fonctions considérées : à un nombre entier Δ de l'un des types $4N$ ou $4N+1$ est associée ainsi une *surface*, lieu du point modulaire, lorsque les périodes vérifient une relation singulière d'invariant Δ; à une classe de formes binaires positives, équivalentes à une forme de l'un des types

$$4(ax^2+bxy+cy^2) \quad \text{ou} \quad 4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2,$$

est associée de même une *courbe algébrique* ou un système de courbes algébriques, qui sont le lieu du point modulaire lorsque les périodes vérifient un des systèmes propres de deux relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe.

De même, si les périodes vérifient un système de trois relations singulières, nous avons vu (n° **96**) qu'il correspond à ces périodes deux points modulaires, distincts ou confondus; si nous considérons tous les systèmes propres qui donnent naissance à une forme ternaire d'une classe donnée, les points modulaires correspondants forment un *groupe de points* dont nous avons discuté le nombre et que nous regarderons comme associés à la *classe* ternaire considérée.

Ainsi, à une classe de formes $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire de formes ternaires positives pouvant représenter un carré et équivalentes à une forme de l'un des types

$$4f(x,y,z) \quad \text{ou} \quad 4f'(x,y,z)+x^2 \quad (^1),$$

correspond dans l'espace un *groupe de points*.

Rappelons que nous avons appelé *surfaces* ou *courbes hyperabéliennes* les surfaces et courbes algébriques liées aux nombres ou aux formes binaires indiquées plus haut.

109. La représentation géométrique ainsi définie possède d'importantes propriétés.

1° *Si une classe de formes ternaires $\mathfrak{F}$ représente proprement un*

(1) On n'oubliera pas (n° **88**) que $2f(x,y,z)$ est improprement primitive, et que $4f'+x^2$ l'est proprement.

nombre Δ, *le groupe de points qui correspond à la classe est situé sur la surface qui correspond au nombre, et réciproquement.*

Soit, par exemple, Δ un nombre du type $4N$, représentable proprement par une forme $\mathfrak{F}$, du type $4f(x, y, z)$. Considérons un *quelconque* S des systèmes propres de trois relations singulières, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, qui donnent naissance à une forme équivalente à $4f$; soit $4F$ cette forme, soient m et M les deux points modulaires liés au système S. La forme $4F(x, y, z)$ est, par définition, l'invariant de la relation singulière

$$xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0,$$

à laquelle satisfont les deux systèmes de périodes donnés par $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$; dire que Δ est représentable *proprement* par $4F$, c'est dire qu'une relation

$$xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0,$$

où x, y, z sont *premiers entre eux*, a pour invariant Δ. Or, le lieu des points modulaires donnés par des périodes qui vérifient une relation singulière quelconque d'invariant Δ étant la surface hyperabélienne qui répond à Δ, les points m et M sont nécessairement sur cette surface.

Réciproquement, si m et M sont sur la surface hyperabélienne d'invariant Δ, c'est que les deux systèmes de périodes, g, h, g' et G, H, G', donnés par $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, vérifient une relation singulière d'invariant Δ. Or il est clair que toute relation singulière vérifiée par g, h, g' ou G, H, G' est du type

$$xf_0 + yf_1 + zf_2 = 0,$$

x, y, z désignant des entiers premiers entre eux; l'invariant de cette relation étant, par définition, $4F(x, y, z)$, il en résulte bien que Δ est représentable proprement par $4F$.

La même démonstration s'appliquant à *tous* les systèmes de trois relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe considérée, la proposition est établie.

2° *Si une classe de formes ternaires $\mathfrak{F}$ représente proprement une forme binaire positive d'une classe donnée, réductible* ([1]) *à l'un des types $4\varphi(x, y)$ ou $4\varphi(x, y) + y^2$, le groupe de points qui correspond à la classe ternaire est situé sur la courbe algébrique (ou sur le système de courbes algébriques) qui correspond à la classe binaire, et réciproquement.*

Supposons, par exemple, que la forme $4F(x, y, z)$ considérée plus haut représente *proprement* la forme binaire $4\varphi(x, y)$, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$4F(\lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y, \lambda'' x + \mu'' y) = 4\varphi(x, y),$$

les λ et μ désignant des entiers, tels que les mineurs d'ordre 2 du Tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \end{vmatrix}$$

soient *premiers entre eux*. Sous une autre forme, on peut dire que $4\varphi(x, y)$ est l'invariant de la relation singulière

$$(\lambda x + \mu y) f_0 + (\lambda' x + \mu' y) f_1 + (\lambda'' x + \mu'' y) f_2 = 0,$$

ou encore que le système de deux relations singulières

$$(1) \qquad \lambda f_0 + \lambda' f_1 + \lambda'' f_2 = 0 \qquad \mu f_0 + \mu' f_1 + \mu'' f_2 = 0$$

donne naissance à la forme $4\varphi(x, y)$: ce système est d'ailleurs propre, en vertu de l'hypothèse faite sur $\lambda, \mu, \ldots, \mu''$. Il résulte de là que les deux points modulaires, m et M, liés au système $f_0 = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$, sont situés sur la courbe hyperabélienne qui répond au système (1), c'est-à-dire sur *l'une des courbes* hyperabéliennes associées à la classe binaire 4φ.

La réciproque s'établit de même sans difficulté.

([1]) Par une substitution linéaire de déterminant ± 1.

110. Corollaire. — *Les systèmes de trois relations singulières qui donnent naissance à des formes $\mathcal{F}$ d'une classe déterminée sont toujours réductibles à un nombre fini d'entre eux par des transformations ordinaires de degré* 1; *ou, si l'on veut, le nombre des points modulaires liés à une classe* donnée *de formes $\mathcal{F}$ est fini.*

Ces points, étant en effet communs à toutes les courbes hyperabéliennes associées aux formes binaires représentables proprement par la classe ternaire considérée, sont nécessairement en nombre fini, puisque les courbes hyperabéliennes qui répondent à deux classes binaires différentes n'ont évidemment pas de partie commune.

111. *Intersection de trois surfaces hyperabéliennes.* — Si m est un point commun à trois surfaces hyperabéliennes, d'invariants Δ, Δ_1, Δ_2, les périodes des fonctions abéliennes dont m est le point modulaire vérifient trois relations singulières, d'invariants respectivement égaux à Δ, Δ_1, Δ_2. Deux cas sont à distinguer selon que ces trois relations sont distinctes, ou se réduisent à deux ([1]).

Si les trois relations sont distinctes, le système *propre* qu'on obtient en les combinant linéairement d'une manière convenable donne naissance à une forme $\mathcal{F}$ représentant proprement Δ, Δ_1 et Δ_2 : le point m est donc un des points du groupe lié à la classe de cette forme. Réciproquement, quand une classe de formes $\mathcal{F}$ représente proprement Δ, Δ_1, Δ_2, *tous* les points du groupe correspondant sont sur les surfaces hyperabéliennes d'invariants Δ, Δ_1, Δ_2.

Si les trois relations se réduisent aux deux relations singulières $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, formant un système propre, ce système donne naissance à une forme binaire représentant proprement Δ, Δ_1, Δ_2 : le point m est donc sur la courbe hyperabélienne (ou sur l'une des courbes) associée à la classe de cette forme binaire. Réciproquement, si une classe de formes binaires positives représente proprement Δ, Δ_1, Δ_2, les courbes hyperabéliennes associées sont toutes sur les surfaces d'invariants Δ, Δ_1, Δ_2.

([1]) Elles ne peuvent évidemment se réduire à une seule, puisque Δ, Δ_1, Δ_2 sont distincts.

Donc :

En dehors d'une intersection fixe (¹), *les trois surfaces hyperabéliennes d'invariants* Δ, Δ_1, Δ_2 *se coupent :*

1° *Suivant toutes les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes binaires positives, réductibles à l'un des types*

$$4(ax^2 + bxy + cy^2), \quad 4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2,$$

qui peuvent représenter proprement chacun des trois nombres Δ, Δ_1, Δ_2;

2° *En tous les points des groupes liés aux classes de formes ternaires* $\mathfrak{F}$ *qui représentent proprement chacun des trois mêmes nombres.*

Bien entendu, si Δ, Δ_1, Δ_2 sont pris au hasard, les trois surfaces n'ont pas de courbe hyperabélienne commune.

112. *Intersection de deux courbes hyperabéliennes.* — Démontrons d'abord la proposition suivante :

Si deux formes binaires positives représentent proprement un même nombre, les courbes (ou systèmes de courbes) hyperabéliennes qui leur sont respectivement associées se coupent dans l'espace, et réciproquement.

Supposons que les formes binaires φ et φ' représentent proprement Δ; soient $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ et $f'_0 = 0$, $f'_1 = 0$ deux *quelconques* des systèmes de deux relations singulières qui donnent respectivement naissance à des formes équivalentes à φ et φ'. En vertu de l'hypothèse, une relation $xf_0 + yf_1 = 0$ et une relation $x'f'_0 + y'f'_1 = 0$ ont même invariant Δ, en désignant par x, y (et par x', y') des nombres premiers entre eux : ces deux relations sont donc réductibles l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier ordre. En d'autres termes, on peut remplacer les deux systèmes considérés par deux systèmes

(¹) Deuxième Partie (I, n° 41).

équivalents *qui ont une relation commune*, et sont, par suite, du type

$$(2) \qquad F_0 = 0, \quad F_1 = 0 \quad \text{et} \quad F_0 = 0, \quad F'_1 = 0.$$

Les deux points modulaires donnés par le système de trois relations singulières $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F'_1 = 0$ sont dès lors situés sur les courbes hyperabéliennes associées respectivement aux deux systèmes (2), c'est-à-dire que celles-ci se coupent dans l'espace, comme il s'agissait de l'établir.

La réciproque se démontre d'une manière toute semblable.

Observons que, d'après la démonstration précédente, si φ et φ' représentent proprement un même nombre, *chacune* des courbes hyperabéliennes associées à la classe φ coupe *chacune* des courbes associées à la classe φ'.

Enfin, si nous remarquons que la forme $\mathcal{F}$ liée au système $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F'_1 = 0$ représente proprement la forme φ, puisque celle-ci est équivalente à l'invariant de l'expression $xF_0 + yF_1$, et qu'elle représente de même φ', nous en déduisons aisément que :

Deux systèmes de courbes hyperabéliennes, associées respectivement à deux classes de formes binaires, ont en commun tous les groupes de points qui sont liés aux classes de formes ternaires $\mathcal{F}$ susceptibles de représenter proprement chacune des deux classes binaires; réciproquement, tout point commun aux systèmes de courbes considérées appartient à l'un de ces groupes.

113. Ces théorèmes, si l'on suppose formées les équations *algébriques* qui donnent les surfaces, courbes, groupes de points associés respectivement à un nombre, à une forme binaire φ [1], à une forme ternaire $\mathcal{F}$, donnent la solution immédiate, et sans aucun tâtonnement, des problèmes suivants :

---

[1] C'est-à-dire une forme binaire positive, équivalente à une forme de l'un des types

$$4(ax^2 + bxy + cy^2), \quad 4(ax^2 + bxy + cy^2) + y^2.$$

Reconnaître si une forme ternaire $\mathfrak{f}$, ou une forme binaire φ, représentent, ou non, un nombre donné.

Il suffira d'examiner si la surface qui répond au nombre contient, ou non, les points ou courbes associés respectivement aux classes $\mathfrak{f}$ et φ données.

Reconnaître si une forme $\mathfrak{f}$ représente, ou non, une forme φ.

Il suffira d'examiner si les points associés à la classe $\mathfrak{f}$ sont, ou non, sur le système des courbes associées à la classe φ.

Reconnaître s'il existe un nombre représentable par deux formes φ.

Il suffira d'examiner si les systèmes de courbes respectivement associées aux deux classes φ sont ou non sécants; le même examen donnera la solution de ce problème :

Reconnaître s'il existe une forme $\mathfrak{f}$ susceptible de représenter deux formes φ.

Toutes les représentations dont il vient d'être parlé sont supposées *propres*.

Ordres de multiplicité.

114. *Ordre de multiplicité d'une courbe hyperabélienne sur une surface hyperabélienne.* — Considérons la surface hyperabélienne, Σ, qui répond au nombre Δ, et soit $f_0 = 0$ une relation singulière, d'invariant Δ, entre g, h, g', *choisie une fois pour toutes* et d'ailleurs arbitrairement. On peut dire qu'à un point de Σ correspondent tous les systèmes de périodes g, h, g', équivalents entre eux, qui vérifient la relation $f_0 = 0$, c'est-à-dire tous les systèmes de périodes réductibles l'un à l'autre par une des transformations ordinaires de degré *un* qui n'altèrent pas cette relation.

Soit maintenant donnée une courbe hyperabélienne C, tracée sur Σ; par cela même, C est associée à un système propre de deux relations singulières donnant naissance à une forme binaire susceptible de représenter proprement le nombre Δ; ce système est dès lors réductible à un système propre analogue *déterminé*, dont la première équation sera $f_0 = 0$. Soit $f_1 = 0$ la seconde. On peut dire qu'à un point de la courbe C correspondent tous les systèmes de périodes g, h, g', équivalents entre eux, qui vérifient simultanément les deux relations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$. Nous désignerons par $\varphi(x, y)$ la forme binaire associée au système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, c'est-à-dire l'invariant de la relation

$$xf_0 + yf_1 = 0;$$

et l'on aura

$$\Delta = \varphi(1, 0).$$

Considérons maintenant un point quelconque, m, de la courbe C, et soit g, h, g' un des systèmes de périodes correspondants; on aura

$$f_0(g, h, g') = 0, \qquad f_1(g, h, g') = 0.$$

Le point m sera multiple d'ordre $n+1$ *sur la surface* Σ si, à ce point *considéré comme appartenant à* Σ, correspondent $n+1$ systèmes de périodes

$$g, h, g', \quad g_1, h_1, g'_1, \quad \ldots, \quad g_n, h_n, g'_n,$$

vérifiant tous la relation $f_0 = 0$, et dont aucun ne soit réductible à un autre *par une des transformations ordinaires de degré* un *qui n'altèrent pas cette relation;* naturellement, chacun des n derniers systèmes sera réductible au premier *par une transformation ordinaire de degré* un *convenable,* puisque les $n+1$ systèmes donnent le même point modulaire.

Soit alors T_i la transformation de degré *un* qui fait passer de g_i, h_i, g'_i à g, h, g'; comme on a

$$f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0,$$

T_i change cette relation en une autre relation singulière

$$f_i(g, h, g') = 0,$$

de même invariant Δ, qui est différente de $f_0(g, h, g') = 0$, car les systèmes g_i, h_i, g'_i et g, h, g' ne sont pas, par hypothèse, réductibles l'un à l'autre par une transformation de degré *un* n'altérant pas f_0 (au signe près). Donc, puisque g, h, g' sont liés uniquement par les relations $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, qui forment un système propre, l'expression $f_i(g, h, g')$ est de la forme

$$\lambda_i f_0 + \mu_i f_1,$$

en désignant par λ_i et μ_i des entiers premiers entre eux, *dont le second n'est pas nul.*

L'invariant de f_i étant Δ, comme on l'a observé plus haut, et celui de $\lambda_i f_0 + \mu_i f_1$ étant $\varphi(\lambda_i, \mu_i)$, en vertu de la définition donnée pour φ, on aura dès lors

$$\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i).$$

De même, en considérant la transformation de degré *un*, T_j, qui fait passer de g_j, h_j, g'_j à g, h, g', on aurait

$$\Delta = \varphi(\lambda_j, \mu_j).$$

Je dis qu'on ne peut avoir

$$\lambda_j = \varepsilon\lambda_i, \qquad \mu_j = \varepsilon\mu_i \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Car si ces relations avaient lieu, T_i et T_j transformeraient respectivement les relations

$$f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$$

en une même relation

$$\lambda_i f_0(g, h, g') + \mu_i f_1(g, h, g') = 0;$$

par suite, la transformation $T_i T_j^{-1}$, qui fait passer de g_i, h_i, g'_i à g_j, h_j, g'_j, changerait $f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0$ en $\varepsilon f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$, contrairement à l'hypothèse initiale.

Ainsi, pour que le point m, et par suite la courbe C, soit multiple d'ordre $n+1$ sur la surface Σ, il est nécessaire que la forme binaire φ, associée au système de deux relations singulières qui correspond à C, puisse représenter proprement, de $n+1$ manières différentes ([1]), l'invariant Δ de Σ : les représentations $\Delta=\varphi(\lambda, \mu)$ et $\Delta=\varphi(-\lambda, -\mu)$ ne sont pas regardées comme distinctes.

115. Réciproquement, si cette condition nécessaire est satisfaite, la courbe C sera multiple d'ordre $n+1$ sur Σ.

Reprenons, en effet, le point m de C, auquel correspond un système de périodes, g, h, g', vérifiant le système $f_0=0$, $f_1=0$. Dire qu'on a une représentation propre $\Delta=\varphi(\lambda_i, \mu_i)$, c'est dire que la relation $\lambda_i f_0(g,h,g')+\mu_i f_1(g,h,g')=0$ a pour invariant Δ : donc, par une transformation convenable du premier ordre, Θ_i, conduisant des périodes g, h, g' à des périodes g_i, h_i, g'_i, on changera cette relation en $f_0(g_i, h_i, g'_i)=0$. En d'autres termes, au point m correspondent ainsi, sur Σ, $n+1$ systèmes de périodes,

$$g,\ h,\ g', \qquad g_1,\ h_1,\ g'_1, \quad \ldots, \quad g_n,\ h_n,\ g'_n,$$

vérifiant tous $f_0=0$; et, pour prouver que m est multiple d'ordre $n+1$ sur Σ, il suffira d'établir qu'aucun de ces $n+1$ systèmes n'est réductible à un autre par une des transformations ordinaires de degré *un* qui n'altèrent pas la relation $f_0=0$.

Or, si une transformation de degré *un*, τ, conduisait de g_j, h_j, g'_j à g_i, h_i, g'_i, en changeant $f_0(g_j, h_j, g'_j)=0$ en $\pm f_0(g_i, h_i, g'_i)=0$, les transformations Θ_i et $\Theta_j\tau$ conduiraient, toutes deux, des périodes g, h, g' aux périodes g_i, h_i, g'_i, en changeant respectivement

$$\lambda_i f_0(g,h,g')+\mu_i f_1(g,h,g')=0 \qquad \text{en} \qquad f_0(g_i,h_i,g'_i)=0,$$

et

$$\lambda_j f_0(g,h,g')+\mu_j f_1(g,h,g')=0 \qquad \text{en} \qquad \pm f_0(g_i,h_i,g'_i)=0.$$

([1]) Y compris la représentation donnée par $\Delta=\varphi(1,0)$.

Par conséquent, la transformation ordinaire de degré *un*, $\Theta_i(\Theta_j\tau)^{-1}$ conduira des périodes g, h, g' aux *mêmes* périodes, g, h, g', et changera

$$\lambda_i f_0 + \mu_i f_1 = 0 \quad \text{en} \quad \pm(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1) = 0.$$

Or, toute transformation ordinaire de degré *un* conduisant de g, h, g' à g, h, g' est une *multiplication complexe* ordinaire de degré *un*, et nous savons qu'il ne peut exister de telles multiplications, pour des fonctions abéliennes doublement singulières, que si la surface de Kummer correspondante est un tétraédroïde ([1]). Sous une autre forme, il faut que g, h, g' vérifient une relation singulière d'invariant 4, c'est-à-dire que la forme binaire $\varphi(x, y)$, associée au système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, puisse représenter proprement le nombre 4.

116. Dès lors il convient de distinguer deux cas.

Premier cas. — *La forme φ ne peut représenter proprement* 4. — Toute multiplication complexe de degré *un* des fonctions abéliennes attachées aux périodes g, h, g' se réduit à une multiplication ordinaire par ± 1 ([2]); par suite, elle ne peut changer $\lambda_i f_0 + \mu_i f_1 = 0$ en $\pm(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1) = 0$ que si l'on a $\lambda_j = \varepsilon\lambda_i$, $\mu_j = \varepsilon\mu_i$, ε désignant ± 1. Or, cette conséquence est inadmissible, puisqu'on a supposé *distinctes* les deux représentations propres de Δ données par

$$\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i) \quad \text{et} \quad \Delta = \varphi(\lambda_j, \mu_j).$$

Donc enfin, si la forme φ ne peut représenter proprement le nombre 4, le point m, et par suite la courbe C, sera multiple d'ordre $n+1$ sur Σ.

Deuxième cas. — *La forme φ peut représenter proprement* 4. — En ce cas, une des relations $\lambda f_0 + \mu f_1 = 0$ a pour invariant 4, et peut,

---

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 370.

([2]) C'est-à-dire que la transformation ordinaire, de degré *un*, correspondante a tous ses entiers caractéristiques nuls, sauf a_0, b_1, c_2, d_3 qui sont égaux entre eux et égaux à ± 1.

par une transformation ordinaire d'ordre *un*, être réduite au type

$$h^2 - gg' - 1 = 0.$$

Le système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ est dès lors équivalent à un système du type

$$(1) \qquad h^2 - gg' - 1 = 0, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

dont nous désignerons les deux équations respectivement par $F_0 = 0$, $F_1 = 0$. La forme binaire associée, c'est-à-dire l'invariant de

$$XF_0 + YF_1 = 0$$

est

$$(2) \qquad \Phi(X, Y) = 4X^2 + 4\omega XY + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)Y^2;$$

elle admet la substitution semblable $| X, Y; X + \omega Y, -Y |$.

Cela posé, soit g, h, g' un système de périodes vérifiant les deux relations (1); cherchons les multiplications complexes ordinaires de degré *un* correspondantes.

En vertu des formules établies par nous ([1]), les entiers caractéristiques des transformations cherchées sont définis par les formules

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_0 = 0, & b_0 = -\gamma\rho, \\ a_1 = \alpha\rho, & b_1 = \theta + \beta\rho, \\ a_2 = \beta\sigma - \tau, & b_2 = \gamma\sigma, \\ a_3 = \alpha\sigma, & b_3 = \tau, \\ c_0 = -\omega\rho - \tau, & d_0 = \gamma\sigma, \\ c_1 = \alpha\sigma, & d_1 = \omega\rho - \beta\sigma + \tau, \\ c_2 = \theta + \omega\sigma + \beta\rho, & d_2 = -\gamma\rho, \\ c_3 = \alpha\rho, & d_3 = \theta + \omega\sigma, \end{array} \right.$$

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 339 341.

où θ, ρ, σ, τ sont des entiers. Ces entiers, pour que la transformation soit ordinaire, doivent vérifier l'un des deux systèmes de relations [1] :

$$(4)\qquad \begin{cases} 1^\circ & \rho = 2\tau - \beta\sigma = 0, \\ 2^\circ & \sigma = 2\theta + \beta\rho = 0; \end{cases}$$

et, pour que la transformation soit de degré *un*, il faut et il suffit en outre qu'on ait

$$(5)\qquad \theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + \tau) - \alpha\gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Dans la *première hypothèse* (4), $\rho = 2\tau - \beta\sigma = 0$, l'équation (5) devient

$$\theta^2 + \omega\theta\sigma + \tau^2 - \alpha\gamma\sigma^2 = \pm 1,$$

ou, puisque $2\tau = \beta\sigma$,

$$(6)\qquad (2\theta + \omega\sigma)^2 + \sigma^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2) = \pm 4.$$

Comme le discriminant de la forme *positive* (2), à savoir la quantité $4(\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2)$, est essentiellement positif, l'équation (6) ne peut être vérifiée que si le second membre est $+4$; ses seules solutions possibles sont

$$(7)\qquad \begin{cases} 1^\circ & \begin{cases} \theta = \pm 1, \quad \sigma = 0, \\ \text{quels que soient } \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \omega, \end{cases} \\ 2^\circ & \begin{cases} \sigma = \pm 1, \quad 2\theta + \omega\sigma = \pm 1, \\ \text{à condition que } \beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2 = 3. \end{cases} \\ 3^\circ & \begin{cases} \sigma = \pm 1, \quad 2\theta + \omega\sigma = 0, \\ \text{à condition que } \beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2 = 4. \end{cases} \end{cases}$$

La deuxième hypothèse exige évidemment que β soit pair et ω impair;

---

(1) *Ibid.*, p. 341.

en ce cas la forme $\Phi(X, Y)$ s'écrit, si l'on pose $\beta = 2\beta'$,

$$\Phi(X, Y) = 2[2X^2 + 2\omega XY + 2(\beta'^2 - \alpha\gamma)Y^2];$$

et la forme *improprement primitive*, $2X^2 + 2\omega XY + 2(\beta'^2 - \alpha\gamma)$, ayant pour discriminant $4\beta'^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2$, c'est-à-dire $+3$, est équivalente à la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2$.

La troisième hypothèse exige que β et ω soient pairs; si $\beta = 2\beta'$, $\omega = 2\omega'$, on a

$$\Phi(X, Y) = 4[X^2 + 2\omega' XY + (\beta'^2 - \alpha\gamma)Y^2],$$

et la forme *proprement primitive* $X^2 + 2\omega' XY + (\beta'^2 - \alpha\gamma)Y^2$, ayant pour discriminant $+1$, est équivalente à la forme $x^2 + y^2$ (1).

Laissons de côté ces cas particuliers, qu'il serait aisé de traiter complètement; nous voyons que les seules solutions possibles de (6) sont $\theta = \pm 1$, $\sigma = 0$; d'où, en vertu des premières équations (4), $\rho = 0$, $\tau = 0$. La transformation (3) a alors tous ses entiers caractéristiques nuls, sauf a_0, b_1, c_2, d_3, égaux entre eux et à ± 1 : elle ne donne que la multiplication évidente que possèdent toutes les fonctions abéliennes, à savoir la multiplication ordinaire par ± 1.

Dans la seconde hypothèse (4), $\sigma = 2\theta + \beta\rho = 0$, l'équation (5) devient

$$\rho^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\omega\rho\tau + 4\tau^2 = \mp 4,$$

et il est clair qu'on doit prendre $+4$ dans le second membre. Écrivons-la

$$(2\tau + \omega\rho)^2 + \rho^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2) = 4;$$

si nous laissons encore de côté les cas où $\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2$ serait égal à 1, 3 ou 4, les seules solutions possibles sont $\tau = \pm 1$, $\rho = 0$, d'où par les dernières équations (4), $\sigma = 0$, $\theta = 0$. Les entiers caractéristiques de la transformation correspondante (3) sont alors tous nuls,

(1) On pourrait satisfaire autrement à (6) si $\beta^2 - 4\alpha\gamma - \omega^2$ était égal à $+1$; en ce cas, la forme (2) serait équivalente à $4X^2 + Y^2$ et pourrait représenter $+1$, ce qui correspond à une dégénérescence (*voir* à ce sujet le n° 120).

sauf

$$a_2 = -\varepsilon, \qquad b_3 = +\varepsilon, \qquad c_0 = -\varepsilon, \qquad d_1 = +\varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

les relations entre les périodes g, h, g' et les périodes transformées G, H, G′ sont

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} g = \dfrac{-G}{-(H^2 - GG')}, & \\ g' = \dfrac{-G'}{-(H^2 - GG')}, & h^2 - gg' = \dfrac{-1}{-(H^2 - GG')}, \\ h = \dfrac{-H}{-(H^2 - GG')}. & \end{array} \right.$$

Les relations

$$h^2 - gg' - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0$$

deviennent, par ces formules, après qu'on a chassé le dénominateur $-(H^2 - GG')$,

$$H^2 - GG' - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad -\alpha G - \beta H - \gamma G' + \omega(H^2 - GG') = 0.$$

Si l'on tient compte de la première de ces nouvelles équations, les relations (8) donnent bien $g = G$, $h = H$, $g' = G'$, ce qui devait être, puisque la transformation considérée est une multiplication complexe.

Ainsi, cette transformation change respectivement F_0 et F_1, c'est-à-dire $h^2 - gg' - 1$ et $\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega$, en F_0 et $-F_1 + \omega F_0$; en d'autres termes, elle opère sur F_0 et F_1 la substitution *transposée* de la substitution

$$|X, Y; \quad X + \omega Y, \ -Y|,$$

que nous avons signalée plus haut comme une substitution semblable de la forme binaire $\Phi(X, Y)$.

Cela posé, reprenons les raisonnements et les notations du n° **115**; nous avons à rechercher si nous pouvons passer des périodes g_j, h_j, g'_j aux périodes g_i, h_i, g'_i par une transformation ordinaire de degré *un*, τ, changeant $f_0(g_j, h_j, g'_j) = 0$ en $\pm f_0(g_i, h_i, g'_i) = 0$. Comme nous l'avons vu, il faut et il suffit pour cela qu'il existe une transformation ordinaire de degré *un* (multiplication complexe) conduisant des périodes g, h, g' aux *mêmes* périodes g, h, g', et changeant

$$\lambda_i f_0 + \mu_i f_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad \pm(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1) = 0.$$

Or, on a, en vertu de ce qui précède,

$$f_0 = a\,\mathrm{F}_0 + b\,\mathrm{F}_1,$$
$$f_1 = a'\mathrm{F}_0 + b'\mathrm{F}_1,$$

a, b, a', b' désignant des entiers, dont le déterminant $ab' - ba'$ est ± 1, puisque le système $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ est propre.

La multiplication complexe déterminée plus haut change F_0 et F_1 respectivement en F_0 et $-\mathrm{F}_1 + \omega\mathrm{F}_0$; on en conclut sans difficulté qu'elle change $(\lambda_i f_0 + \mu_i f_1)$ en $(\lambda_j f_0 + \mu_j f_1)$, les λ_j et μ_j étant définis en fonction des λ_i et μ_i de la manière suivante. La forme $\varphi(x, y)$, qui est équivalente à $\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, admet une substitution semblable qui correspond à la substitution $|\mathrm{X}, \mathrm{Y};\ \mathrm{X} + \omega\mathrm{Y},\ -\mathrm{Y}|$ de $\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$; soit $|x, y;\ cx + dy,\ c'x + d'y|$ cette substitution; on a

$$\lambda_j = c\lambda_i + d\mu_i, \qquad \mu_j = c'\lambda_i + d'\mu_i,$$

et il est clair, d'après cela, que $\varphi(\lambda_j, \mu_j) = \varphi(\lambda_i, \mu_i)$.

Donc, au point de vue de l'ordre de multiplicité de la courbe C sur la surface Σ, on ne devra pas regarder comme distinctes les deux représentations de Δ

$$\Delta = \varphi(\lambda_i, \mu_i) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \varphi(\lambda_j, \mu_j)$$

qui se déduisent l'une de l'autre par la substitution semblable de la forme $\varphi(x, y)$ dérivée de la substitution semblable

$$|\mathrm{X}, \mathrm{Y};\ \ \mathrm{X} + \omega\mathrm{Y},\ -\mathrm{Y}|$$

de $\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

117. De toute cette analyse résulte le théorème suivant :

Soit Σ une surface hyperabélienne d'invariant Δ; désignons *par* C *une courbe hyperabélienne* [1] *associée à une classe de formes binaires positives susceptible de représenter proprement* Δ, *et par* $\varphi(x, y)$ *une de ces formes; nous savons* (I, n° **39**) *que la courbe* C *est sur la surface* Σ.

De plus : *si la forme* φ *ne peut représenter proprement* 4, *l'ordre de multiplicité de la courbe* C *sur la surface* Σ *est égal au nombre des représentations propres de* Δ *par* φ; *on ne regarde pas comme distinctes les deux représentations*

$$\Delta = \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad \Delta = \varphi(-x, -y).$$

Si la forme φ *peut représenter proprement* 4, *et si elle n'est pas équivalente (proprement ou improprement) à l'une des deux formes* $4x^2 + 4y^2$, $4x^2 + 4xy + 4y^2$ [2], *elle admet en elle-même une transformation linéaire* $|x, y;\ cx + dy, c'x + d'y|$ *différente de la transformation* $|x, y;\ \varepsilon x, \varepsilon y|$, *où* ε *désigne* ± 1. *L'ordre de multiplicité de* C *sur* Σ *est encore égal au nombre des représentations propres de* Δ *par* φ; *seulement, indépendamment des représentations* x, y *et* $-x, -y$, *on ne regarde pas comme distinctes les représentations* x, y *et* $cx + dy, c'x + d'y$.

118. *Ordre de multiplicité d'un groupe de points sur une surface hyperabélienne*. — On démontrerait d'une manière absolument pareille le théorème suivant :

Soit Σ *une surface hyperabélienne d'invariant* Δ; *désignons par* G *le groupe des points modulaires liés à une classe de formes ternaires* $\mathfrak{f}$ *susceptible de représenter proprement* Δ, *et par* $\mathfrak{f}(x, y, z)$ *une de ces formes : nous savons* (n° **109**) *que les points du groupe* G *sont sur la surface* Σ.

De plus : *si la forme* $\mathfrak{f}(x, y, z)$ *ne peut représenter proprement* 4,

---

(1) C'est-à-dire l'une *quelconque* des courbes hyperabéliennes associées à la classe, lorsque ces courbes sont en nombre supérieur à l'unité; ou, dans le cas contraire, *la* courbe associée à la classe.

(2) La forme φ ne peut alors représenter 4 que d'une manière, les représentations x, y et $-x, -y$ n'étant pas regardées comme distinctes.

l'ordre de multiplicité de chacun des points du groupe G *sur la surface* Σ *est égal au nombre de représentations propres de* Δ *par* $\mathfrak{f}$; *on ne regarde pas comme distinctes les représentations* x, y, z *et* $-x, -y, -z$.

Si la forme $\mathfrak{f}(x, y, z)$ peut représenter proprement 4 (d'une ou de plusieurs manières différentes), la proposition doit être complétée de la même façon qu'au numéro précédent.

119. *Ordre de multiplicité d'un groupe de points sur une courbe hyperabélienne.* — Enfin, on établit de même cette proposition :

Soit C *une courbe hyperabélienne associée à une classe de formes binaires positives non ambiguës,* φ, *et supposée unique* (¹); *désignons par* G *le groupe des points modulaires liés à une classe de formes ternaires* $\mathfrak{f}$ *susceptible de représenter proprement la classe* φ; *nous savons* (n° **109**) *que les points du groupe* G *sont sur la courbe* C.

De plus : *si les formes* $\mathfrak{f}$ *ne peuvent représenter proprement* 4, *l'ordre de multiplicité de chacun des points du groupe* G *sur la courbe* C *est égal au nombre de représentations propres d'une forme* φ *par une forme* $\mathfrak{f}$; *on ne regarde pas comme distinctes deux représentations* $\lambda x + \lambda' y$, $\mu x + \mu' y$, $\nu x + \nu' y$ *et* $-\lambda x - \lambda' y$, $-\mu x - \mu' y$, $-\nu x - \nu' y$.

Si la courbe C associée à la classe φ n'est pas unique, le théorème subsiste et donne l'ordre de multiplicité de chacun des points du groupe G sur *l'ensemble* des courbes C associées à la classe φ.

120. *Remarque générale.* — L'invariant Δ d'une relation singulière ne peut être égal à $+1$ que dans des cas de dégénérescence des fonctions abéliennes correspondantes (ce *Journal*, 5ᵉ série, t. V, p. 248). On reconnaît aisément que la forme binaire du sixième ordre liée à ces fonctions a alors une racine triple. Par suite, la surface hyperabé-

(¹) C'est-à-dire que les systèmes propres de deux relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe φ sont supposés réductibles à un seul d'entre eux par des transformations ordinaires de degré *un*.

lienne d'invariant 1 se réduit à la *courbe fixe,* commune à toutes les surfaces hyperabéliennes (I, n° **41**). De même, cette courbe est la courbe hyperabélienne associée à toute classe de formes φ (n° **115**) susceptible de représenter $+1$, et elle contient les points associés à toute classe $\mathfrak{f}$ pouvant représenter $+1$. Les théorèmes des n^{os} **108-119** ne s'appliquent pas nécessairement à de telles classes φ et $\mathfrak{f}$.