JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AURIC

Essai sur la théorie des fractions continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 387-431.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__387_0>

Essai sur la théorie des fractions continues;

PAR M. AURIC.

Nous nous proposons, dans cette étude, de généraliser la notion de fraction continue, de manière à pouvoir appliquer cette théorie si féconde aux nombres négatifs et complexes.

La théorie actuelle repose en effet sur l'égalité suivante :

$$a_i = A_i + \frac{1}{a_{i+1}},$$

dans laquelle A_i représente l'*entier immédiatement inférieur* au nombre *réel et positif* a_i; il en résulte immédiatement que cette théorie n'est pas applicable aux nombres négatifs et complexes.

Reprenant un mode de développement déjà considéré par M. Minnigerode dans une Note insérée en 1873 dans les *Nachrichten* de Göttingue et par M. Hurwitz dans les *Acta mathematica* (T. XI et XII), nous avons eu l'idée de prendre pour A_i non l'entier immédiatement inférieur, mais bien l'*entier le plus rapproché* du nombre *quelconque* a_i; de plus, pour faire disparaître une ambiguïté de signe qui trouble profondément la théorie actuelle, nous avons considéré le reste de la division changé de signe, ce qui donne comme égalité fondamentale

$$a_i = A_i - \frac{1}{a_{i+1}}.$$

En partant de cette définition, nous avons élaboré une théorie des fractions continues qui nous a paru plus rationnelle et, en tout cas, plus générale.

Examinant en premier lieu le cas des nombres réels, au lieu de nous borner à l'étude exclusive des réduites, nous avons considéré les termes de celles-ci comme des fonctions numériques servant à l'étude des quotients complets et nous avons établi les formules générales qui permettent d'obtenir un quotient complet en fonction de deux quotients complets quelconques; nous avons étudié ensuite les variations de petitesse de ces quotients complets selon le rang qu'ils occupent, et en même temps les variations de grandeur des termes des réduites ordinaires : nous en avons conclu la convergence de celles-ci.

Nous avons démontré ensuite le théorème de Lagrange sur la périodicité, quant au développement en fraction continue, des nombres quadratiques du deuxième degré. Cette théorie s'applique presque sans aucun changement aux nombres négatifs et complexes et permet, par suite, de donner une véritable unité aux recherches mémorables de Dirichlet et de Dedekind.

Nous croyons que les résultats obtenus permettront d'apporter de notables améliorations dans la résolution ou, mieux, l'exposition des deux difficiles problèmes de cette partie de la théorie des nombres : nous voulons parler de la réduction des irrationnelles racines d'une équation en λ de degré > 2 et de la recherche du nombre des classes de nombres quadratiques de discriminant donné.

Ces applications feront l'objet d'une Note spéciale ultérieure.

I. — Formules générales.

1. Considérons deux nombres réels quelconques, positifs ou négatifs, a_i, a_{i+1}, tels que

$$|a_i| > |a_{i+1}|.$$

Nous diviserons a_i par a_{i+1} et nous prendrons comme quotient approché l'entier λ_{i+1} le plus rapproché du quotient exact $\dfrac{a_i}{a_{i+1}}$.

En appelant a_{i+2} le reste de la division *changé de signe*, on aura

$$a_i = \lambda_{i+1}\, a_{i+1} - a_{i+2}$$

avec

$$|a_{i+2}| < \frac{1}{2}\, |a_{i+1}|.$$

Nous pouvons de même diviser a_{i+1} par a_{i+2}.

Il viendra

$$a_{i+1} = \lambda_{i+2}\, a_{i+2} - a_{i+3}$$

avec

$$|a_{i+3}| < \frac{1}{2}\, |a_{i+2}| < \frac{1}{4}\, |a_{i+1}|,$$

et ainsi de suite.

Pour $k \geqq 1$, on aura

$$\left|\frac{a_{i+k}}{a_{i+k+1}}\right| > 2;$$

par suite, il est clair que, $|\lambda_{i+k+1}|$ étant l'entier le plus rapproché de ce rapport, on aura

$$|\lambda_{i+k+1}| \geqq 2.$$

De plus, si $|\lambda_{i+k+1}| = 2$, il est évident que a_{i+k} et a_{i+k+2} seront de signe contraire.

Les nombres positifs $|a_{i+1}|$, $|a_{i+2}|$, $|a_{i+3}|$, ... décroissent au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; ils ont donc pour limite zéro.

Deux cas peuvent se présenter :

a. Un reste a_{i+n+1} devient effectivement nul.

Dans ce cas, il est clair que les nombres a_i et a_{i+1} sont commensurables et ont comme plus grand commun diviseur a_{i+n}, lequel se trouve déterminé suivant la méthode classique bien connue.

b. Les restes a_{i+n+1}, a_{i+n+2}, ... diminuent indéfiniment en valeur absolue sans jamais cependant devenir nuls; dans ce cas, a_i et a_{i+1} sont incommensurables; il est clair, en effet, qu'ils ne peuvent avoir de diviseur commun, si petit qu'il soit, puisque ce diviseur serait également commun à a_{i+n+1}, a_{i+n+2}, ..., lesquels, par hypothèse, diminuent indéfiniment en valeur absolue.

2. Considérons les relations générales

$$
(1)\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
a_{i-n} \phantom{{}_{+1}} = \lambda_{i-n+1}\, a_{i-n+1} - a_{i-n+2},\\
a_{i-n+1} = \lambda_{i-n+2}\, a_{i-n+2} - a_{i-n+3},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_{i-2} \phantom{{}_{+1}} = \lambda_{i-1}\, a_{i-1} - a_{i},
\end{array}
\right\} \quad (A)
\\
a_{i-1} \phantom{{}_{+1}} = \lambda_i\, a_i - a_{i+1},
\\
\left.
\begin{array}{l}
a_{i} \phantom{{}_{+n-1}} = \lambda_{i+1}\, a_{i+1} - a_{i+2},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_{i+n-2} = \lambda_{i+n-1}\, a_{i+n-1} - a_{i+n},\\
a_{i+n-1} = \lambda_{i+n}\, a_{i+n} - a_{i+n+1}.
\end{array}
\right\} \quad (B)
\end{array}
\right.
$$

Au moyen des relations (A), en remontant de proche en proche, on peut exprimer a_i sous la forme d'une fonction linéaire à coefficients entiers de a_{i-n} et a_{i-n+1}; de même, au moyen des relations (B), en descendant de proche en proche, on peut exprimer a_i sous la forme d'une fonction linéaire à coefficients entiers de a_{i+n} et a_{i+n+1}; c'est l'étude de ces fonctions et de leurs relations entre elles que nous allons entreprendre en premier lieu.

3. Posons

$$
(2)\qquad a_i = P^i_{i+n}\, a_{i+n} + Q^i_{i+n}\, a_{i+n+1};
$$

nous avons, d'après (1),

$$
a_{i+n} = \lambda_{i+n+1}\, a_{i+n+1} - a_{i+n+2},
$$

d'où, en substituant dans (2),

$$
a_i = (\lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + Q^i_{i+n})\, a_{i+n+1} - P^i_{i+n}\, a_{i+n+2}.
$$

Mais, par définition,

$$
a_i = P^i_{i+n+1}\, a_{i+n+1} + Q_{i+n+1}\, a_{i+n+2},
$$

d'où l'on tire par comparaison les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} P^i_{i+n+1} = \lambda_{i+n+1} P^i_{i+n} + Q^i_{i+n}, \\ Q^i_{i+n+1} = \qquad - P^i_{i+n}. \end{cases}$$

Posons de même

$$a_i = P^i_{i-n+1} a_{i-n+1} + Q^i_{i-n+1} a_{i-n+2}.$$

Nous avons, d'après (1),

$$a_{i-n+2} = \lambda_{i-n+1} a_{i-n+1} - a_{i-n};$$

d'où, en substituant,

$$a_i = -Q^i_{i-n+1} a_{i-n} + (P^i_{i-n+1} + \lambda_{i-n+1} Q^i_{i-n+1}) a_{i-n+1}.$$

Mais, par définition,

$$a_i = P^i_{i-n} a_{i-n} + Q^i_{i-n} a_{i-n+1},$$

d'où, par comparaison,

$$(3') \qquad \begin{cases} Q^i_{i-n+1} = -P^i_{i+n}, \\ P^i_{i-n+1} = -\lambda_{i-n+1} Q^i_{i-n+1} + Q^i_{i-n} = \lambda_{i-n+1} P^i_{i-n} + Q^i_{i-n}, \end{cases}$$

relations qui sont identiques à (3), sauf le changement de signe de n.

En remplaçant, dans (2), P^i_{i+n} par sa valeur $-Q^i_{i+n+1}$, nous obtenons la relation fondamentale

$$(4) \qquad a_i = a_{i+n+1} Q^i_{i+n} - a_{i+n} Q^i_{i+n+1},$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(4') \qquad a_i = \begin{vmatrix} Q^i_{i+n} & Q^i_{i+n+1} \\ a_{i+n} & a_{i+n+1} \end{vmatrix},$$

et cette relation subsiste quel que soit le signe de n.

4. Nous avons, par définition,

$$a_i = P^i_{i+1} a_{i+1} + Q^i_{i+1} a_{i+2} = \lambda_{i+1} a_{i+1} - a_{i+2},$$

d'où l'on tire

$$P^i_{i+1} = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+1} P^i_i + Q^i_i,$$
$$Q^i_{i+1} = -1 = -P^i_i.$$

Il en résulte

$$P^i_i = 1 = \lambda_i P^i_{i-1} + Q^i_{i-1},$$
$$Q^i_i = 0 = -P^i_{i-1},$$

d'où

$$(5) \qquad \begin{cases} P^i_{i-1} = 0 = \lambda_{i-1} P^i_{i-2} + Q^i_{i-2}, \\ Q^i_{i-1} = 1 = -P^i_{i-2}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$P^i_{i-2} = -1 \qquad \text{et} \qquad Q^i_{i-2} = \lambda_{i-1}.$$

Ce sont des valeurs particulières des symboles P et Q qui nous seront utiles dans la suite.

5. Des relations (3) nous déduisons immédiatement

$$(6) \qquad Q^i_{i+n+2} = \lambda_{i+n+1} Q^i_{i+n+1} - Q^i_{i+n};$$

c'est une relation récurrente entre les symboles Q ayant même indice supérieur.

De même, la relation (1)

$$a_{i+n+2} = \lambda_{i+n+1} a_{i+n+1} - a_{i+n}$$

donne immédiatement, si l'on exprime a_{i+n+2}, a_{i+n+1}, a_{i+n} en fonction de a_k et a_{k+1} et si l'on égale dans les deux membres les coefficients de a_{k+1},

$$(7) \qquad Q_k^{i+n+2} = \lambda_{i+n+1} Q_k^{i+n+1} - Q_k^{i+n};$$

c'est une nouvelle relation récurrente entre les symboles Q ayant même indice inférieur.

6. Les relations (6) et (7) ne sont d'ailleurs que des cas particuliers d'une relation générale que nous allons établir.

La relation (4) donne immédiatement, de la même manière que nous avons obtenu la relation (7),

$$(8)\qquad Q_k^i = Q_k^{i+n+1} Q_{i+n}^i - Q_k^{i+n} Q_{i+n+1}^i,$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$(8')\qquad Q_k^i = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^i & Q_{i+n+1}^i \\ Q_k^{i+n} & Q_k^{i+n+1} \end{vmatrix}.$$

Pour $k = i + n - 1$, la relation (8) devient

$$Q_{i+n-1}^i = Q_{i+n-1}^{i+n+1} Q_{i+n}^i - Q_{i+n-1}^{i+n} Q_{i+n+1}^i.$$

Or, d'après (5),

$$Q_{i+n-1}^{i+n+1} = \lambda_{i+n}; \qquad Q_{i+n-1}^{i+n} = 1,$$

d'où

$$Q_{i+n-1}^i = \lambda_{i+n} Q_{i+n}^i - Q_{i+n+1}^i;$$

c'est la relation (6).

De même, si l'on fait $n = -2$ dans la relation (8), on a

$$Q_k^i = Q_k^{i-1} Q_{i-2}^i - Q_k^{i-2} Q_{i-1}^i.$$

Or, d'après (5),

$$Q_{i-2}^i = \lambda_{i-1}, \qquad Q_{i-1}^i = 1,$$

d'où

$$Q_k^i = \lambda_{i-1} Q_k^{i-1} - Q_k^{i-2};$$

c'est la relation (7).

7. Si dans la relation (8) nous faisons $k = i$, il vient

$$Q_i^i = 0 = Q_i^{i+n+1} Q_{i+n}^i - Q_i^{i+n} Q_{i+n+1}^i,$$

d'où, en supposant $Q_i^{i+n} Q_i^{i+n+1} \neq 0$,

$$\frac{Q_{i+n}^i}{Q_i^{i+n}} = \frac{Q_{i+n+1}^i}{Q_i^{i+n+1}}.$$

Cette relation montre que la valeur de ce rapport est indépendante de n; or, pour $n = -1$, on a

$$Q^i_{i-1} = 1, \qquad Q^{i-1}_i = -1;$$

donc, ce rapport est égal à -1 et nous obtenons la formule fondamentale de réciprocité des indices

$$Q^i_{i+n} = -Q^{i+n}_i. \tag{9}$$

Si l'on avait

$$Q^{i+n} = 0,$$

la relation (8) donnerait

$$Q^{i+n+1}_i Q^i_{i+n} = 0.$$

Or, on ne peut avoir simultanément

$$Q^{i+n}_i = 0, \qquad Q^{i+n+1}_i = 0,$$

car la relation récurrente (7) donnerait, quel que soit k,

$$Q^k_i = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la formule $Q^{i-1}_i = -1$; il faut donc que l'on ait

$$Q^i_{i+n} = 0,$$

et dès lors, même dans ce cas, la relation (9) est encore vérifiée.

8. La relation (8) devient, en tenant compte de (9),

$$Q^k_i = Q^k_{i+n+1} Q^i_{i+n} - Q^k_{i+n} Q^i_{i+n+1}, \tag{10}$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$Q^k_i = \begin{vmatrix} Q^i_{i+n} & Q^i_{i+n+1} \\ Q^k_{i+n} & Q^k_{i+n+1} \end{vmatrix}. \tag{10'}$$

Pour $k = i + 1$, on aura

$$Q^{i+1}_i = 1 = Q^i_{i+n} Q^{i+1}_{i+n+1} - Q^{i+1}_{i+n} Q^i_{i+n+1},$$

ou

$$(11)\qquad 1 = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^{i} & Q_{i+n+1}^{i} \\ Q_{i+n}^{i+1} & Q_{i+n+1}^{i+1} \end{vmatrix}.$$

Si, dans le deuxième membre de la relation (10′), nous multiplions la première colonne par a_{i+n+1}, la deuxième par $-a_{i+n}$, il viendra, en ajoutant et en tenant compte de (4),

$$-a_{i+n}Q_i^k = \begin{vmatrix} Q_{i+n}^{i} & a_i \\ Q_{i+n}^{k} & a_k \end{vmatrix}$$

ou bien, en changeant de signe,

$$(12)\qquad a_{i+n}Q_i^k = \begin{vmatrix} a_i & Q_{i+n}^{i} \\ a_k & Q_{i+n}^{k} \end{vmatrix},$$

et nous obtiendrons, par le même procédé que celui employé pour les relations (7) et (8),

$$(13)\qquad Q_j^{i+n}Q_i^k = \begin{vmatrix} Q_j^{i} & Q_{i+n}^{i} \\ Q_j^{k} & Q_{i+n}^{k} \end{vmatrix}.$$

Telle est la relation générale qui résume toutes les précédentes.

9. Considérons les deux nombres réels a_0 et a_1 avec $|a_0| > |a_1|$ et effectuons les opérations indiquées au n° **1**.

Si, dans les divisions successives, a_{n+1} est le premier reste nul, on aura les relations

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1 a_1 - a_2, \\ a_1 &= \lambda_2 a_2 - a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n-2} &= \lambda_{n-1} a_{n-1} - a_n, \\ a_{n-1} &= \lambda_n a_n, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{a_0}{a_1} = \lambda_1 - \cfrac{1}{\lambda_2 - \cfrac{1}{\lambda_3 - \ldots - \cfrac{1}{\lambda_{n-1} - \cfrac{1}{\lambda_n}}}}.$$

L'expression ainsi obtenue s'appelle une *fraction continue*, dont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ sont les *coefficients* ou *quotients incomplets*, et nous écrirons

$$\frac{a_0}{a_1} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n).$$

La relation (4) nous donne

$$a_n = a_1 Q_0^n - a_0 Q_1^n;$$

d'autre part, puisque $a_{n+1} = 0$, il vient

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{n+1} Q_n^0 - a_n Q_{n+1}^0 = a_n Q_0^{n+1}, \\ a_1 &= a_{n+1} Q_n^1 - a_n Q_{n+1}^1 = a_n Q_1^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n). \tag{14}$$

En substituant a_0 et a_1 dans la relation qui précède et en divisant par $a_n \neq 0$, il vient

$$1 = Q_0^n Q_1^{n+1} - Q_0^{n+1} Q_1^n,$$

relation identique à la formule (11) et qui prouve que les fractions $\frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}}, \frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n}$ sont irréductibles.

10. Considérons les relations

$$\begin{aligned} Q_0^{n+1} &= \lambda_n \quad Q_0^n \quad - Q_0^{n-1}, \\ Q_0^n &= \lambda_{n-1} Q_0^{n-1} - Q_0^{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_0^3 &= \lambda_1 Q_0^2 - Q_0^1, \\ Q_0^2 &= \lambda_1 Q_0^1 - Q_0^0 = \lambda_1 Q_0^1 = \lambda_1; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n} = \lambda_n - \cfrac{1}{\lambda_{n-1} - \cfrac{1}{\lambda_{n-2} - \ldots - \cfrac{1}{\lambda_2 - \cfrac{1}{\lambda_1}}}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n} = (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1). \tag{15}$$

La suite des λ est la même que dans la formule (14), mais elle est écrite dans un ordre inverse.

11. Posons

$$\Omega = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega).$$

Il est clair que l'on aura également

$$-\Omega = (-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{n-1}, -\lambda_n, -\omega),$$
$$-\frac{1}{\Omega} = (0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega).$$

Si k est un nombre entier quelconque, positif ou négatif, on aura évidemment

$$k \pm \Omega = (k \pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \pm \lambda_3, \ldots, \pm \lambda_{n-1}, \pm \lambda_n, \pm \omega),$$
$$(k, \Omega) = \left(k - \frac{1}{\Omega}\right) = (k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega).$$

Dès lors, on déduira successivement

$$(0, -\lambda_1 + \Omega) = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega),$$
$$(0, -\lambda_2, -\lambda_1 + \Omega) = (\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega),$$
$$(0, -\lambda_3, -\lambda_2, -\lambda_1 + \Omega) = (\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \omega),$$

et, par suite,

$$\omega = (0, -\lambda_n, -\lambda_{n-1}, \ldots, -\lambda_3, -\lambda_2, -\lambda_1 + \Omega),$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\omega} &= (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1 - \Omega), \\ \frac{1}{\omega} &= \left(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\Omega}\right). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Nous retrouverons plus loin cette relation symbolique qui constitue un théorème important sur la réversibilité des quotients complets.

12. Supposons que l'on nous demande la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$a_1 X - a_0 Y = M a_n.$$

Il est clair, d'après ce qui précède, que la solution générale sera donnée par les formules

$$(17) \qquad \begin{cases} X = MQ_0^n + NQ_0^{n+1}, \\ Y = MQ_1^n + NQ_1^{n+1}. \end{cases}$$

Nous croyons inutile de donner des applications de ces formules classiques.

13. Admettons maintenant que a_0 et a_1 soient incommensurables; dans ce cas, a_n diminue indéfiniment en valeur absolue sans jamais devenir nul.

Nous avons la relation

$$a_0 = a_n Q_0^{n+1} - a_{n+1} Q_0^n = a_n a_{n+1} \left(\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{Q_0^n}{a_n} \right),$$

d'où l'on déduit successivement

$$\begin{aligned} \frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{Q_0^n}{a_n} &= \frac{a_0}{a_n a_{n+1}}, \\ \frac{Q_0^n}{a_n} - \frac{Q_0^{n-1}}{a_{n-1}} &= \frac{a_0}{a_{n-1} a_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{Q_0^2}{a_2} - \frac{Q_0^1}{a_1} &= \frac{a_0}{a_1 a_2}, \\ \frac{Q_0^1}{a_1} &= \frac{a_0}{a_0 a_1}, \end{aligned}$$

d'où, en additionnant,

$$\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} = a_0 \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_0 a_1} \right).$$

Dans la parenthèse, le quotient d'un terme $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ par le suivant $\frac{1}{a_{k-1} a_k}$ est égal à $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$; or, nous avons

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \lambda_k - \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

soient

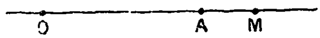
$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \overline{\mathrm{OM}}, \qquad \lambda_k = \overline{\mathrm{OA}}, \qquad -\frac{a_{k-1}}{a_k} = \overline{\mathrm{AM}}.$$

Nous aurons

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AM}}.$$

Ce rapport diminue quand M s'éloigne de A, c'est-à-dire quand AM

Fig. 1.



croît en valeur absolue. Or, le maximum de AM est $\frac{1}{2}$, et comme, d'autre part,

$$|\lambda_k| = \mathrm{OA} \geqq 2,$$

il viendra

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| > \frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} > 5.$$

Dès lors, la parenthèse ci-dessus aura un module inférieur à

$$\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right| \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|.$$

Pour la même raison, cette parenthèse aura un module supérieur à

$$\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right| - \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_{n-1} a_n}\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| \left\{\left|\frac{1}{a_{n+1}}\right| - \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_{n-1}}\right|\right\},$$

et comme

$$|a_{n-1}| > 5\,|a_{n+1}|,$$

ce module sera finalement supérieur à

$$\frac{3}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|.$$

En résumé, on aura

$$\frac{3}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right| < \left|\frac{Q_0^{n+1}}{a_0 a_{n+1}}\right| < \frac{5}{4}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|,$$

d'où la relation fondamentale

$$(18) \qquad \frac{3}{4}|a_0| < |a_n Q_0^{n+1}| < \frac{5}{4}|a_0|.$$

Nous avons

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{5}|a_n|,$$

d'où, en multipliant membre à membre avec (18),

$$(19) \qquad |a_{n+2} Q_0^{n+1}| < \frac{1}{4}|a_0|.$$

De même,

$$|a_{n+1}| < \frac{1}{2}|a_n|,$$

d'où, en multipliant membre à membre avec (18),

$$(20) \qquad |a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{5}{8}|a_0|.$$

Si l'on avait

$$|a_{n+1}| < \frac{1}{\sqrt{5}}|a_n|,$$

on en tirerait

$$(21) \qquad |a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0|,$$

mais comme

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{5}|a_n| \qquad \text{et} \qquad |a_{n+1}| < \frac{1}{5}|a_{n-1}|,$$

si l'on a

$$|a_{n+1}| > \frac{1}{\sqrt{5}}|a_n|,$$

on aura sûrement

$$|a_{n+2}| < \frac{1}{\sqrt{5}}|a_{n+1}| \qquad \text{et} \qquad |a_n| < \frac{1}{\sqrt{5}}|a_{n-1}|.$$

Par suite, si

$$|a_{n+1}Q_0^{n+1}| > \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0|,$$

on aura sûrement

$$|a_{n+2}Q_0^{n+2}| < \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0| \qquad \text{et} \qquad |a_nQ_0^n| < \frac{\sqrt{5}}{4}|a_0|.$$

Enfin, des relations ci-dessus,

$$|a_nQ_0^{n+1}| > \frac{3}{4}|a_0|, \qquad |a_nQ_0^n| < \frac{5}{8}|a_0|, \qquad |a_nQ_0^{n-1}| < \frac{1}{4}|a_0|,$$

on tire, en divisant membre à membre,

$$(22) \qquad \left|\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n}\right| > \frac{6}{5}, \qquad \left|\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^{n-1}}\right| > 3,$$

ce qui montre que Q_0^n augmente indéfiniment avec n.

14. Considérons maintenant la relation

$$a_n = a_1 Q_0^n - a_0 Q_1^n,$$

d'où

$$\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1} = \Delta_n = \frac{a_n}{a_1 Q_1^n}.$$

On aura, d'après (20),

$$(23) \qquad |\Delta_n| = \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| = \left|\frac{a_n^2}{a_1 a_n Q_1^n}\right| < \frac{8}{5}\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^2.$$

Or, a_n décroît au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; il en résulte que la différence $|\Delta_n|$ décroît au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$; par suite, $|\Delta_n|$ a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment et $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}$ a pour limite $\frac{a_0}{a_1}$: c'est la généralisation de la formule (14).

Nous avons trouvé

$$\Delta_n = \frac{a_n}{a_1 Q_1^n}, \qquad \Delta_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_1 Q_1^{n+1}},$$

d'où

$$\left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| = \left|\frac{a_n Q_1^{n+1}}{a_{n+1} Q_1^n}\right|;$$

or, d'après (18) et (19),

$$|a_n Q_0^{n+1}| > \frac{3}{4}|a_1|, \qquad |a_{n+1} Q_1^n| < \frac{1}{4}|a_1|,$$

d'où

$$(24) \qquad \left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| > 3;$$

c'est là une propriété caractéristique de l'approximation obtenue avec les fractions successives $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}, \frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}}, \ldots$.

15. Une autre propriété de ces fractions, qui leur a fait donner le nom de *réduites*, est la suivante : Si une fraction irréductible à coefficients entiers $\frac{A}{B}$ est telle que l'on ait

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| < \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right|,$$

on ne peut pas avoir

$$|B| < |Q_1^n|.$$

En effet, admettons que les inégalités ci-dessus aient lieu, il viendra

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{Q_0^n}{Q_1^n}\right| \leqq \left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| + \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right| < 2\left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right| < 2\left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right|,$$

d'où, en chassant les dénominateurs et d'après (20),

$$|AQ_1^n - BQ_0^n| < 2\left|\frac{Ba_n}{a_1}\right| < 2\left|\frac{a_n Q_1^n}{a_1}\right| < \frac{5}{4}.$$

Or, le premier membre, qui est un nombre entier, ne peut être égal à zéro, car on en tirerait

$$\frac{A}{B} = \frac{Q_0^n}{Q_1^n},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Je dis également que l'on ne peut avoir

$$AQ_1^n - BQ_0^n = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On en déduirait, d'après (17),

$$A = \varepsilon Q_0^{n-1} + kQ_0^n, \qquad B = \varepsilon Q_1^{n-1} + kQ_1^n,$$

d'où

$$\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1} = \frac{\varepsilon Q_0^{n-1} + kQ_0^n}{\varepsilon Q_1^{n-1} + kQ_1^n} - \frac{a_0}{a_1} = \frac{\varepsilon a_{n-1} + ka_n}{Ba_1}.$$

Or, si l'on veut que $|B| < |Q_1^n|$, il faut nécessairement prendre, soit $k = 0$, soit $k = \varepsilon'$ $(\varepsilon' = \pm 1)$.

Dans le premier cas, on a

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| = \left|\frac{\varepsilon a_{n-1}}{Ba_1}\right| > \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| > \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right|.$$

Dans le second cas il vient, en tenant compte de $|a_{n-1}| > 2|a_n|$,

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a_0}{a_1}\right| = \left|\frac{\varepsilon a_{n-1} + \varepsilon' a_n}{Ba_1}\right| > \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| > \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right|,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition annoncée est donc démontrée.

16. Considérons les relations

$$a_0 = a_n Q_0^{n+1} - a_{n+1} Q_0^n,$$
$$a_1 = a_n Q_1^{n+1} - a_{n+1} Q_1^n,$$

d'où, en divisant,

$$(25) \qquad \frac{a_0}{a_1} = \frac{\dfrac{a_n}{a_{n+1}} Q_0^{n+1} - Q_0^n}{\dfrac{a_n}{a_{n+1}} Q_1^{n+1} - Q_1^n}.$$

Il en résulte que la condition nécessaire pour que la réduction en fraction continue de $\frac{a_0}{a_1}$ donne $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ parmi les quotients complets est que la relation (25) ait lieu. Dans cette formule, Q_0^{n+1}, Q_1^{n+1} peuvent être pris arbitrairement : Q_0^n, Q_1^n s'en déduisent immédiatement par la réduction en fraction continue de $\frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}}$.

Cette condition est également suffisante, car si nous avons

$$\frac{Q_0^{n+1}}{Q_1^{n+1}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n),$$

d'où

$$\frac{Q_0^n}{Q_1^n} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}),$$

on aura évidemment, si (25) a lieu,

$$(25') \qquad \frac{a_0}{a_1} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \frac{a_n}{a_{n+1}}\right).$$

La relation (25) s'écrit également

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_1}{a_0} Q_0^{n+1} - Q_1^{n+1}}{\frac{a_1}{a_0} Q_0^n - Q_1^n},$$

d'où l'on tirera, par le même procédé que ci-dessus,

$$(25'') \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{a_1}{a_0}\right),$$

relation identique à la formule (16).

La formule (25) est susceptible de généralisation, car, d'après (12), on a

$$a_{i+n} Q_i^k = a_i Q_{i+n}^k - a_k Q_{i+n}^i,$$
$$a_{i+m} Q_i^k = a_i Q_{i+m}^k - a_k Q_{i+m}^i,$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{a_{i+n}}{a_{i+m}} = \frac{\frac{a_i}{a_k} Q_{i+n}^k - Q_{i+n}^i}{\frac{a_i}{a_k} Q_{i+m}^k - Q_{i+m}^i}.$$

Rappelons que le déterminant

$$\begin{vmatrix} Q^k_{i+n} & Q^i_{i+n} \\ Q^k_{i+m} & Q^i_{i+m} \end{vmatrix}$$

est égal à

$$Q^i_k Q^{i+m}_{i+n}$$

et ne devient égal à ± 1 que si l'on a à la fois

$$i = k \pm 1, \qquad m = n \pm 1,$$

c'est-à-dire dans le cas que nous avons examiné précédemment.

Nous dirons avec Dedekind (*Journal de Crelle*, t. 83, 1877) que, si l'on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \frac{a_0}{a_1}\right),$$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ et $\frac{a_0}{a_1}$ sont *équivalents*.

Nous allons rechercher la condition pour que deux nombres $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, $\frac{b_m}{b_{m+1}}$ soient équivalents à $\frac{a_0}{a_1}$; auquel cas, *par définition*, nous dirons qu'ils sont équivalents entre eux.

Nous avons

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\frac{a_n}{a_{n+1}} Q_0^{n+1} - Q_0^n}{\frac{a_n}{a_{n+1}} Q_1^{n+1} - Q_1^n} = \frac{\frac{b_m}{b_{m+1}} P_0^{m+1} - P_0^m}{\frac{b_m}{b_{m+1}} P_1^{m+1} - P_1^m},$$

d'où

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{b_m}{b_{m+1}} \begin{vmatrix} Q_0^{n+1} & Q_1^{n+1} \\ P_0^{m+1} & P_1^{m+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Q_0^{n+1} & Q_1^{n+1} \\ P_0^{m} & P_1^{m} \end{vmatrix}}{\frac{b_m}{b_{m+1}} \begin{vmatrix} Q_0^{n} & Q_1^{n} \\ P_0^{m+1} & P_1^{m+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Q_0^{n} & Q_1^{n} \\ P_0^{m} & P_1^{m} \end{vmatrix}} = \frac{A\frac{b_m}{b_{m+1}} - B}{C\frac{b_m}{b_{m+1}} - D},$$

et nous avons, d'après une propriété connue des déterminants,

$$BC - AD = \begin{vmatrix} Q_0^n & Q_0^{n+1} \\ Q_1^n & Q_1^{n+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_0^m & P_0^{m+1} \\ P_1^m & P_1^{m+1} \end{vmatrix} = 1;$$

c'est là une condition nécessaire; je dis qu'elle est suffisante.

En effet, A et C étant premiers entre eux, nous pouvons poser

$$A = R_0^{k+1}, \qquad C = R_1^{k+1},$$

d'où, d'après (17),

$$B = R_0^k + \mu R_0^{k+1}, \qquad D = R_1^k + \mu R_1^{k+1},$$

d'où il vient

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{b_m}{b_{m+1}} R_0^{k+1} - R_0^k - \mu R_0^{k+1}}{\frac{b_m}{b_{m+1}} R_1^{k+1} - R_1^k - \mu R_1^{k+1}} = \frac{R_0^{k+1}\left(\frac{b_m}{b_{m+1}} - \mu\right) - R_0^k}{R_1^{k+1}\left(\frac{b_m}{b_{m+1}} - \mu\right) - R_1^k};$$

d'où l'on déduit que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est équivalent à $\frac{b_m}{b_{m+1}} - \mu$ et par conséquent aussi à $\frac{b_m}{b_{m+1}}$.

II. — Théorème de Lagrange.

17. Considérons une équation du second degré à coefficients entiers et à racines réelles

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad \text{avec} \qquad B^2 - 4AC = \Delta > 0.$$

Soit $x' = \frac{a_0}{a_1}$ une des deux racines que nous supposerons avoir un module > 1; si aucune des deux racines ne remplissait cette condition, nous considérerions l'équation aux inverses. Nous allons réduire en fraction continue cette racine $\frac{a_0}{a_1}$; nous avons tout d'abord

$$A a_0^2 + B a_0 a_1 + C a_1^2 = 0.$$

D'ailleurs,

$$a_0 = a_n Q_0^{n+1} - a_{n+1} Q_0^n,$$
$$a_1 = a_n Q_1^{n+1} - a_{n+1} Q_1^n.$$

En substituant, nous obtenons une équation de la forme

$$L a_n^2 + M a_n a_{n+1} + N a_{n+1}^2 = 0$$

avec

$$(26)\quad \begin{cases} L = A(Q_0^{n+1})^2 + BQ_0^{n+1}Q_1^{n+1} + C(Q_1^{n+1})^2, \\ M = -2AQ_0^{n+1}Q_0^n - B(Q_0^{n+1}Q_1^n + Q_1^{n+1}Q_0^n) - 2CQ_1^{n+1}Q_1^n, \\ N = A(Q_0^n)^2 + BQ_0^nQ_1^n + C(Q_1^n)^2. \end{cases}$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$(26')\qquad M^2 - 4LN = B^2 - 4AC = \Delta,$$

car il suffit de tenir compte de la relation (11),

$$1 = Q_0^nQ_1^{n+1} - Q_0^{n+1}Q_1^n.$$

D'autre part, si nous exprimons a_n, a_{n+1} en fonction de a_0, a_1 au moyen des formules

$$a_n = a_1Q_0^n - a_0Q_1^n, \qquad a_{n+1} = a_1Q_0^{n+1} - a_0Q_1^{n+1},$$

il vient, en identifiant,

$$(26'')\quad \begin{cases} A = L(Q_1^n)^2 + MQ_1^nQ_1^{n+1} + N(Q_1^{n+1})^2, \\ B = -2LQ_1^nQ_0^n - M(Q_0^nQ_1^{n+1} + Q_0^{n+1}Q_1^n) - 2NQ_1^{n+1}Q_0^{n+1}, \\ C = L(Q_0^n)^2 + MQ_0^nQ_0^{n+1} + N(Q_0^{n+1})^2; \end{cases}$$

d'où il résulte que si A, B, C ont un diviseur commun, il en sera de même de L, M, N, et réciproquement. Nous supposerons tout d'abord que A, B, C sont premiers entre eux.

Dans (26) nous allons remplacer Q_1^{n+1} et Q_1^n par leur valeur

$$\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}, \quad \frac{a_1Q_0^n - a_n}{a_0},$$

il viendra

$$\begin{aligned} L &= A(Q_0^{n+1})^2 + BQ_0^{n+1}\left(\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right) + C\left(\frac{a_1Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right) \\ &= \frac{(Q_0^{n+1})^2}{a_0^2}(Aa_0^2 + Ba_0a_1 + Ca_1^2) \\ &\quad - \frac{Q_0^{n+1}}{a_0^2}(2Ca_1 + Ba_0)a_{n+1} + C\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$Aa_0^2 + Ba_0 a_1 + Ca_1^2 = 0;$$

d'où

$$4ACa_0^2 + 4BCa_0 a_1 + 4C^2 a_1^2 = 0,$$

$$(2Ca_1 + Ba_0)^2 = (B^2 - 4AC)a_0^2 = \Delta a_0^2,$$

par suite

$$2Ca_1 + Ba_0 = a_0\sqrt{\Delta}.$$

En substituant, il vient

$$L = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0} a_{n+1} Q_0^{n+1} + C\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right)^2.$$

D'après (20), nous avons

$$|a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{5}{8}|a_0|;$$

d'autre part, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_0}\right|$ diminue au delà de toute limite, c'est-à-dire que, à condition de prendre n assez grand, nous pouvons supposer

$$\left|C\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right)^2\right| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité finie donnée *a priori* et aussi petite qu'on voudra.

Dans ces conditions on aura

$$(27) \qquad |L| < \frac{5}{8}\sqrt{\Delta}.$$

Il en sera de même pour $|N|$, car, dans le calcul qui précède, il suffira de changer $n+1$ en n; de plus, la formule (21) prouve que l'un au moins de ces deux coefficients, L ou N, est plus petit en valeur absolue que $\frac{\sqrt{5\Delta}}{4}$ (27').

En ce qui concerne M, nous avons :

$$\begin{aligned}
M = &-2A\,Q_0^{n+1}Q_0^n - B\left[Q_0^{n+1}\left(\frac{a_1 Q_0^n - a_n}{a_0}\right) + Q_0^n\left(\frac{a_1 Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right)\right] \\
&- 2C\left(\frac{a_1 Q_0^n - a_n}{a_0}\right)\left(\frac{a_1 Q_0^{n+1} - a_{n+1}}{a_0}\right) \\
= &-\frac{2Q_0^n Q_0^{n+1}}{a_0^2}(Aa_0^2 + Ba_0 a_1 + Ca_1^2) \\
&+ \frac{2Ca_1 + Ba_0}{a_0^2}(a_n Q_0^{n+1} + a_{n+1} Q_0^n) - \frac{2Ca_n a_{n+1}}{a_0^2}.
\end{aligned}$$

En réduisant comme précédemment

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}(a_n Q_0^{n+1} + a_{n+1} Q_0^n) - 2C\frac{a_n a_{n+1}}{a_0^2}.$$

Le dernier terme diminue au delà de toute limite; d'ailleurs, d'après (18) et (19) on a

$$\frac{3}{4}|a_0| < |a_n Q_0^{n+1}| < \frac{5}{4}|a_0|, \qquad |a_{n+1} Q_0^n| < \frac{1}{4}|a_0|,$$

d'où l'on tire

$$(28) \qquad \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < |M| < \frac{3}{2}\sqrt{\Delta}.$$

Les valeurs absolues des coefficients L, M, N étant limitées, il est clair que, au bout d'un nombre fini d'opérations, on retombera soit sur l'équation qui a servi de point de départ, soit sur une équation déjà considérée; dans tous les cas, la suite des équations sera périodique : simple dans le premier cas, mixte dans le second. Par suite, le développement en fraction continue de $\frac{a_0}{a_1}$ sera également périodique, simple ou mixte, suivant le cas.

En effet, admettons que la période ait m termes et soit

$$A_{i+1} x^2 + B_i x + A_i = 0$$

une des m équations périodiques dans laquelle nous avons fait

$$x = \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

Nous avons, d'après les relations obtenues ci-dessus,

$$A_{i+1} = \lim -\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0} a_{n+1} Q_0^{n+1},$$

$$B_i = \lim \frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}(a_n Q_0^{n+1} + a_{n+1} Q_0^n),$$

$$A_i = \lim -\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0} a_n Q_0^n;$$

par suite, l'équation ci-dessus devient

$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{a_0}\left[a_{n+1}\,Q_0^{n+1}\,x^2-(a_n\,Q_0^{n+1}+a_{n+1}\,Q_0^n)\,x+a_n\,Q_0^n\right]=0,$$

dans laquelle il faut faire croître n indéfiniment.

En résolvant, on trouve deux racines : l'une

$$\omega_k=\lim\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

l'autre

$$\omega_k^1=\lim\frac{Q_0^n}{Q_0^{n+1}}.$$

La première a un module supérieur à 2; la seconde, d'après (22), a un module inférieur à $\frac{5}{6}$. Si donc ces équations se reproduisent périodiquement, il en est de même des racines qui, limitées en valeur absolue, ne peuvent s'échanger entre elles.

En d'autres termes, la suite des $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est périodique : simple si l'on retombe sur $\frac{a_0}{a_1}$, mixte si l'on retombe sur $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ $(i\neq 0)$.

Le théorème de Lagrange est ainsi démontré et précisé, car nous avons déterminé, en dehors de toute hypothèse, les limites que ne peuvent dépasser les modules des coefficients L, M, N.

18. Considérons l'équation périodique ci-dessus

$$A_{i+1}\,x^2+B_i\,x+A_i=0.$$

Nous dirons que le premier membre de cette équation est une *forme réduite* et que la racine $\omega_i=\frac{a_i}{a_{i+1}}$ de module >2 est un *nombre réduit*.

Nous obtenons ainsi tout d'abord m formes réduites et m nombres réduits équivalents au sens de Dedekind.

D'après ce que nous avons vu précédemment, on aura

$$\omega_{i+km}=\frac{a_{i+km}}{a_{i+km+1}}=\omega_{i+m}=\frac{a_{i+m}}{a_{i+m+1}}=\frac{a_i}{a_{i+1}}=\omega_i;$$

par suite, il viendra

$$\frac{a_i}{a_{i+m}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+m+1}} = \lambda$$

$$\frac{a_i}{a_{i+km}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+km+1}} = \lambda^k,$$

et le nombre λ est visiblement indépendant de i. Or nous avons

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i+km} Q_i^{i+km+1} - a_{i+km+1} Q_i^{i+km}, \\ a_{i+1} &= a_{i+km} Q_{i+1}^{i+km+1} - a_{i+km+1} Q_{i+1}^{i+km}. \end{aligned}$$

Par suite, en divisant,

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \omega_i = \frac{\omega_{i+km} Q_i^{i+km+1} - Q_i^{i+km}}{\omega_{i+km} Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km}} = \frac{\omega_i Q_i^{i+km+1} - Q_i^{i+km}}{\omega_i Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km}},$$

d'où l'équation du second degré à laquelle satisfait ω_i,

(29) $$Q_{i+1}^{i+km+1} \omega_i^2 - (Q_{i+1}^{i+km} + Q_i^{i+km+1}) \omega_i + Q_i^{i+km} = 0.$$

En ne prenant qu'une période ($k = 1$), si nous posons

$$\frac{Q_i^{i+m+1}}{Q_{i+1}^{i+m+1}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

il viendra, d'après (25'),

$$\omega_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \omega_i).$$

L'équation ci-dessus a une seconde racine ω'_i de module $< \frac{5}{6}$, et comme on peut écrire

$$\frac{1}{\omega'_i} = \frac{\frac{1}{\omega'_i} Q_i^{i+m+1} - Q_{i+1}^{i+m+1}}{\frac{1}{\omega'_i} Q_i^{i+m} - Q_{i+1}^{i+m}},$$

on aura, d'après (25''),

$$\frac{1}{\omega'_i} = \left(\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\omega'_i}\right).$$

Nous obtenons ainsi le développement en fraction continue de ω_i et de ω'_i; toutefois, il y a lieu de remarquer que ce dernier développement peut n'avoir qu'une signification formelle.

Nous avons vu, en effet, que si

$$|\lambda_j| = 2,$$

a_{j-1} et a_{j+1} sont de signe contraire, et comme λ_{j+1} est l'entier le plus rapproché de $\frac{a_j}{a_{j+1}}$, il sera évidemment d'un signe contraire à λ_j, qui est l'entier le plus rapproché de $\frac{a_{j-1}}{a_j}$.

Dès lors, si, dans le développement de ω_i, λ_{j-1} n'est pas d'un signe contraire à λ_j,

$$|\lambda_j| = 2,$$

il en résultera que le développement de $\frac{1}{\omega'_i}$ obtenu par le renversement de la période, quoique exact, différera de celui auquel on serait conduit par la réduction directe en fraction continue de $\frac{1}{\omega'_i}$.

Dans tous les cas, la réduction de la racine conjuguée donnera naissance à m nouveaux nombres réduits qui, *en général*, différeront des précédents; au contraire, ces nombres réduits correspondront *en général* à des formes réduites déjà envisagées, sauf le changement de x en $\frac{1}{x}$.

Enfin, en changeant de signe ω_i et $\frac{1}{\omega'_i}$ on obtiendra des formules réduites qui ne différeront des précédentes que par le changement de signe de B_i et $2m$ nouveaux nombres réduits dont le développement différera *en général* des précédents; on aura ainsi $4m$ nombres réduits qu'on peut considérer comme *dérivés* du nombre réduit dont on est parti; nous verrons plus loin dans quels cas ce nombre se ramène à $2m$ ou à m.

19. Reprenons l'équation réduite

$$A_{i+1}x^2 + B_i x + A_i = 0,$$

qui se transforme en (29),

$$Q_{i+1}^{i+km+1}\,\omega_i^2 - (Q_{i+1}^{i+km} + Q_i^{i+km+1})\,\omega_i + Q_i^{i+km} = 0.$$

Par hypothèse, les coefficients de l'équation réduite n'ont pas de diviseur commun; on aura donc, en identifiant et en appelant u_k le diviseur commun des coefficients de (29),

$$\frac{Q_{i+1}^{i+km+1}}{A_{i+1}} = \frac{-(Q_i^{i+km+1} + Q_{i+1}^{i+km})}{B_i} = \frac{Q_i^{i+km}}{A_i} = u_k,$$

d'où, en posant

$$Q_i^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km} = t_k,$$

il vient

$$Q_{i+1}^{i+km+1} = A_{i+1}\,u_k, \qquad Q_i^{i+km+1} = \frac{t_k - B_i u_k}{2},$$

$$Q_i^{i+km} = A_i\,u_k, \qquad Q_{i+1}^{i+km} = \frac{t_k + B_i u_k}{2},$$

et, en substituant dans

$$Q_i^{i+km}\,Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_i^{i+km+1}\,Q_{i+1}^{i+km} = 1,$$

on aura

$$(4A_iA_{i+1} - B_i^2)\,u_k + t_k^2 = 4,$$

ou

(30) $$t_k^2 - \Delta u_k^2 = 4.$$

Nous obtenons ainsi une solution de l'équation

(30′) $$t^2 - \Delta u^2 = 4,$$

connue sous le nom d'*équation de Pell*.

Pour interpréter cette solution, rappelons la relation du numéro précédent :

$$\frac{a_i}{a_{i+km}} = \frac{a_{i+1}}{a_{i+km+1}} = \lambda^k.$$

Nous aurons

$$\frac{a_{i+km}\,Q_i^{i+km+1} - a_{i+km+1}\,Q_i^{i+km}}{a_{i+km}} = \frac{a_{i+km}\,Q_{i+1}^{i+km+1} - a_{i+m+1}\,Q_{i+1}^{i+km}}{a_{i+km+1}} = \lambda^k,$$

d'où

$$a_{i+km}(Q_i^{i+km+1} - \lambda^k) = a_{i+km+1}(Q_i^{i+km}),$$
$$a_{i+km}(Q_{i+1}^{i+km+1}) \qquad = a_{i+km+1}(Q_{i+1}^{i+km} + \lambda^k),$$

et en éliminant il vient

$$(\lambda^k)^2 - (Q_i^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km})\lambda^k + Q_i^{i+km}Q_{i+1}^{i+km+1} - Q_{i+1}^{i+km}Q_i^{i+km+1} = 0$$

ou

$$(\lambda^k)^2 - t_k\lambda^k + 1 = 0,$$

et, par suite,

$$(31) \qquad \lambda^k = \frac{t_k \pm \sqrt{t_k^2 - 4}}{2} = \frac{t_k \pm u_k\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Nous obtenons ainsi des solutions qui sont toutes des puissances positives ou négatives de l'une d'entre elles. On démontrerait d'ailleurs aisément que l'équation (30) ne comporte pas d'autre solution en dehors de celles que nous venons de définir (*voir* WEBER, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 470).

20. Examinons maintenant le cas où une racine ω_i est équivalente à $\frac{1}{\omega'_i}$, partant à $-\omega'_i$. Puisque

$$\omega_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \omega_i),$$
$$\frac{1}{\omega'_i} = \left(\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\omega'_i}\right),$$

il faut pour cela que la suite indéfinie

$$\ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

soit réversible, c'est-à-dire symétrique par rapport à un terme ou à l'intervalle compris entre deux termes consécutifs :

1° Dans le premier cas on aura, en appelant λ_j le terme par rapport auquel la suite indéfinie est symétrique,

$$\lambda_{j-1} = \lambda_{j+1}, \qquad \lambda_{j-2} = \lambda_{j+2}, \qquad \ldots.$$

On aura donc

$$\omega_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}\, \omega_j),$$

d'où

$$-\frac{1}{\omega_j - \lambda_j} = (\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \omega_j);$$

or, on a

$$\frac{1}{\omega'_j} = \left(\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \ldots, \lambda_{j+2}, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \frac{1}{\omega'_j}\right),$$

d'où, en tenant compte des égalités ci-dessus,

$$\frac{1}{\omega'_j} = -\frac{1}{\omega_j - \lambda_j} \qquad \text{et} \qquad \omega_j + \omega'_j = \lambda_j.$$

La somme du nombre réduit et de son conjugué est égale à un nombre entier λ_j; en d'autres termes, dans la forme réduite correspondante

$$A_{j+1}x^2 + B_j x + A_j = 0,$$

on a

$$B_j = \lambda_j A_{j+1}. \tag{32}$$

2° Dans le second cas, on aura

$$\lambda_j = \lambda_{j-1}, \qquad \lambda_{j+1} = \lambda_{j-2}, \qquad \lambda_{j+2} = \lambda_{j-3}, \qquad \ldots,$$

par suite,

$$\omega_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \omega_j)$$

et

$$\frac{1}{\omega'_j} = \left(\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \ldots, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \frac{1}{\omega'_j}\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_j = \frac{1}{\omega'_j}, \qquad \omega_j \omega'_j = 1.$$

Il existe donc un nombre réduit tel que le produit de ce nombre par le conjugué donne l'unité; en d'autres termes, si l'on considère la forme réduite correspondante

$$A_{j+1}x^2 + B_j x + A_j = 0,$$

on aura

$$A_{j+1} = A_j. \tag{33}$$

21. Les nombres réduits satisfaisant aux conditions qui précèdent ont reçu les dénominations d'*anceps* (Gauss), d'*ambigus* (Dirichlet) et de *bilatères* (Dedekind).

Dans le premier cas, nous avons

$$A_{j+1}x^2 + \lambda_j A_{j+1} x + A_j = 0,$$

d'où

$$x = -\lambda_j \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{A_{j+1}},$$

et nous voyons que x est équivalent à une fraction de $\sqrt{\Delta}$; nous dirons plus simplement que le nombre réduit considéré est une *fraction*.

Dans le second cas, nous avons

$$A_j x^2 + B_j x + A_j = 0,$$

et nous dirons que x est une *pseudo-unité*. Nous avons vu, en effet, plus haut, que pour $A_i = 1$ on obtient une équation

$$x^2 - B_j x + 1 = 0$$

dont la solution $\frac{t_k \pm u_k\sqrt{\Delta}}{2}$ peut être considérée comme une *unité* appartenant à $u_k\sqrt{\Delta}$ (*voir* Weber, p. 469).

Les fractions et les pseudo-unités étant ainsi définies, on voit que si le nombre des termes de la période du développement de ω_i est impair on aura certainement parmi les nombres réduits une fraction et une pseudo-unité; si, au contraire, le nombre des termes est pair, on pourra avoir parmi les nombres réduits soit deux fractions, soit deux pseudo-unités; toutefois, si la période a deux termes, on aura nécessairement deux fractions (¹).

Si la période n'a qu'un terme, on aura l'*unité* comme seul nombre réduit $\left(U = \frac{t_k \pm u_k\sqrt{\Delta}}{2}\right)$.

22. Examinons le cas où ω_i est équivalent à $-\frac{1}{\omega'_i}$, partant à ω'_i. Dans ce cas, la suite indéfinie

$$\ldots,\quad \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2,\quad \ldots,\quad \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_1, \lambda_2,\quad \ldots$$

devra être telle que l'on ait

$$\lambda_j = -\lambda_{j-1},\qquad \lambda_{j+1} = -\lambda_{j-2},\qquad \lambda_{j+2} = -\lambda_{j-3},\qquad \ldots.$$

Le premier cas du numéro précédent ne peut se présenter, car on devrait avoir $\lambda_j = 0$, ce qui est contraire à la condition $|\lambda_j| \geqq 2$.

On aura donc

$$\omega_j = (\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \omega_j)$$

et

$$\frac{1}{\omega'_j} = \left(\lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}, \ldots, \lambda_{j+1}, \lambda_j, \frac{1}{\omega'_j}\right),$$

d'où l'on tire

$$\omega_j = -\frac{1}{\omega'_j} \qquad \text{et} \qquad \omega_j\omega'_j = -1.$$

La forme réduite correspondante sera

$$A_j x^2 + B_j x - A_j = 0. \tag{34}$$

Nous appellerons *pseudo-unité négative* le nombre réduit ainsi obtenu et nous ferons simplement remarquer que la période du déve-

(¹) En réalité, le cas de $m = 2$ est un cas exceptionnel, car on a en outre

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega'_2},\qquad \omega_2 = \frac{1}{\omega'_1},$$

et, comme forme réduite correspondante,

$$A x^2 - AB x + B = 0.$$

loppement qui lui correspond comprend nécessairement un nombre pair de termes.

23. Examinons enfin le cas où ω_i est équivalent à $-\omega_i$.

Dans ce cas, il faut nécessairement que la période se compose de deux demi-périodes telles que la seconde soit identique à la première changée de signe

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{2k})$$

avec

$$\lambda_1 = -\lambda_{k+1}, \qquad \lambda_2 = -\lambda_{k+2}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_k = -\lambda_{2k}.$$

On a alors évidemment

$$\omega_i = -(\omega_{i+(2n+1)k}),$$

et il vient

$$\omega_i = \frac{-\omega_i Q_i^{i+(2n+1)k+1} - Q_i^{i+(2n+1)k}}{-\omega_i Q_{i+1}^{i+(2n+1)k+1} - Q_{i+1}^{i+(2n+1)k}},$$

d'où

$$Q_{i+1}^{i+(2n+1)k+1}\omega_2^i + (Q_{i+1}^{i+2(n+1)k} - Q_i^{i+(2n+1)k+1})\omega_i - Q_i^{i+(2n+1)k} = 0,$$

et, en identifiant avec

$$A_{i+1}\omega_i^2 + B_i\omega_i + A_i = 0,$$

on aura

$$\frac{Q_{i+1}^{i+(2n+1)k+1}}{A_{i+1}} = \frac{Q_{i+1}^{i+(2n+1)k} - Q_i^{i+(2n+1)k+1}}{B_i} = \frac{-Q_i^{i+(2n+1)k}}{A_i} = u_{2n+1},$$

d'où, en posant

$$Q_{i+1}^{i+(2n+1)k} + Q_i^{i+(2n+1)k+1} = t_{2n+1},$$

il vient

$$Q_{i+1}^{i+(2n+1)k+1} = A_{i+1}u_{2n+1}, \qquad Q_{i+1}^{+(2n+1)k} = \frac{t_{2n+1} + B_i u_{2n+1}}{2},$$

$$Q_i^{i+(2n+1)} = -A_i u_{2n+1}, \qquad Q_i^{i+(2n+1)k+1} = \frac{t_{2n+1} - B_i u_{2n+1}}{2},$$

et, en éliminant, en tenant compte de (11),

$$-4\,A_l A_{l+1} u_{2n+1}^2 - (t_{2n+1}^2 - B_l^2 u_{2n+1}^2) = 4$$

ou

$$(35) \qquad t_{2n+1}^2 - \Delta u_{2n+1}^2 = -4.$$

Nous obtenons ainsi une solution de l'équation

$$(35') \qquad t^2 - \Delta u^2 = -4$$

comparable à l'équation de Pell; nous saurons la résoudre toutes les fois que le développement de l'irrationnelle considérée remplira les conditions énumérées précédemment.

Nous dirons dans ce cas qu'il existe une *racine de l'unité* appartenant à $u_k\sqrt{\Delta}$; le carré d'une solution-unité de l'équation (35') est, en effet, une solution-unité de l'équation (30'); c'est là l'explication de cette dénomination.

24. Il pourra arriver en dernier lieu que deux des hypothèses que nous venons d'examiner soient simultanément réalisées, c'est-à-dire que chacune des demi-périodes du numéro précédent donne lieu à une suite réversible.

Dans ce cas, le nombre des nombres réduits dérivés de ω_i sera évidemment ramené à m.

En résumé, d'après les formules (27) et (28), le nombre des formes réduites est limité; il en résulte qu'il en sera de même des nombres réduits.

Dans certains cas, quelques-uns de ces nombres jouiront de propriétés particulières et seront équivalents soit à leurs conjugués, soit à leurs conjugués changés de signe, soit enfin à eux-mêmes changés de signe. Ces nombres réduits spéciaux définiront en somme des classes de nombres réduits équivalents dont l'étude se rattache directement aux recherches mémorables de Dirichlet.

25. Étant donnée une irrationnelle quadratique quelconque, nous la réduirons en fraction continue et nous saurons déterminer facilement les $4m$ nombres réduits qui en dérivent.

Nous saurons donc trouver de cette manière si deux irrationnelles données sont équivalentes à un même nombre réduit et, partant, équivalentes entre elles.

Nous saurons enfin, et c'est le problème général que nous avions en vue, passer de l'une à l'autre de ces irrationnelles équivalentes par une substitution de la forme

$$\frac{Az - B}{Cz - D},$$

à coefficients entiers avec $BC - AD = 1$, autrement dit par une substitution *modulaire*.

Nous avons en effet, si Ω et Ω' sont équivalents à un nombre réduit ω,

$$\Omega = \frac{A\omega - B}{C\omega - D},$$

$$\omega = \frac{\omega Q_0^{km+1} - Q_0^{km}}{\omega Q_1^{km+1} - Q_1^{km}},$$

$$\omega = \frac{M\Omega' - N}{P\Omega' - Q}.$$

Ces trois formules résolvent entièrement la question.

Pour les applications numériques, nous renvoyons aux Traités classiques.

III. — Application aux nombres complexes.

26. Considérons deux nombres complexes quelconques a_i, a_{i+1} avec $|a_i| > |a_{i+1}|$.

En divisant a_i par a_{i+1}, nous pouvons prendre comme quotient approché l'entier imaginaire λ_{i+1} le plus voisin du quotient exact $\frac{a_i}{a_{i+1}}$.

En changeant de signe le reste, on aura

$$a_i = \lambda_{i+1} a_{i+1} - a_{i+2},$$

et, comme le module de la différence

$$\left| \frac{a_i}{a_{i+1}} - \lambda_{i+1} \right|$$

est inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, on aura évidemment

$$|a_{i+2}| < \frac{\sqrt{2}}{2} |a_{i+1}|.$$

Nous pouvons de même diviser a_{i+1} par a_{i+2} :

$$a_{i+1} = \lambda_{i+2} a_{i+2} - a_{i+3}$$

avec

$$|a_{i+3}| < \frac{\sqrt{2}}{2} |a_{i+2}| < \frac{1}{2} |a_{i+1}|.$$

Les nombres positifs $|a_{i+1}|$, $|a_{i+2}|$, $|a_{i+3}|$, ... décroissent au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ils ont donc pour limite zéro.

De même que pour les fractions continues réelles, deux cas peuvent se présenter selon que la fraction $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ est commensurable ou incommensurable : dans le premier cas, a_{i+n+1} devient effectivement nul et a_{i+n} est le plus grand commun diviseur de a_i et a_{i+1} ; dans le second cas, a_{i+n+1} diminue indéfiniment en valeur absolue sans jamais cependant devenir nul, et il est clair dès lors que a_i et a_{i+1} ne peuvent avoir de diviseur commun, si petit qu'il soit.

27. D'après ce que nous avons dit précédemment, λ_{i+1} est l'entier complexe le plus rapproché du quotient exact $\frac{a_i}{a_{i+1}}$; il en résulte que le reste $\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ est de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}$$

avec les conditions

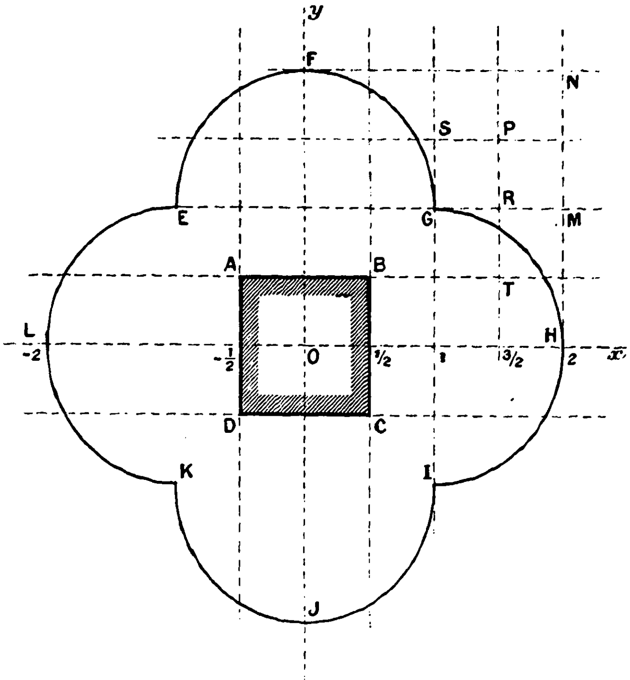
$$|\alpha| < \frac{1}{2}, \qquad |\beta| < \frac{1}{2}.$$

En d'autres termes, $\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ est *à l'intérieur* du carré formé par les droites

$$X = \pm\frac{1}{2}, \qquad Y = \pm\frac{1}{2}.$$

Par suite, l'inverse de ce quotient, soit $\frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$, sera *à l'extérieur* des cercles de rayon *un* passant par l'origine tangentiellement aux axes : nous avons indiqué ces deux zones sur la figure ci-dessous.

Fig. 2.



Il est clair, d'après cette figure, que $|\lambda_{i+1}| \geqq \sqrt{2}$; de plus, on voit que si $|\lambda_{i+1}|$ est égal à $\sqrt{2}$, 2 ou $\sqrt{5}$, ce qui correspond aux points G, H, M, le reste $\frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}$ et, par conséquent, λ_{i+2}, qui est l'entier le plus rapproché de $\frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$, sont soumis à certaines restrictions que nous allons examiner.

1° Soit $\lambda_{n+1} = 1 + i$, ce qui correspond au point G.

$-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ sera, en supposant l'origine transportée au point G, à l'extérieur des arcs FG, GH, mais à l'intérieur des droites PS, PR, d'où il résulte, en prenant l'inverse et en changeant de signe, que $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$, et, par suite aussi, λ_{n+2} seront de la forme

$$-A+Bi,$$

A et B positifs.

D'une manière générale, si

$$\lambda_{n+1} = \pm 1 \pm i,$$

λ_{n+2} sera de la forme

$$\mp A \pm Bi, \qquad A > 0, \qquad B > 0.$$

2° Soit $\lambda_{n+1} = 2$, ce qui correspond au point H; on voit aisément que λ_{n+2} sera de la forme

$$-A+Bi, \qquad A > 0.$$

Si

$$\lambda_{n+1} = -2,$$

λ_{n+2} sera de la forme

$$A+Bi, \qquad A > 0.$$

Si

$$\lambda_{n+1} = \pm 2i,$$

on aura de même

$$\lambda_{n+2} = A \pm Bi, \qquad B > 0.$$

3° Soit $\lambda_{n+1} = 2+i$, ce qui correspond au point M. En calculant comme ci-dessus la valeur inverse changée de signe de $-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, on trouve facilement que λ_{n+2} ne peut pas prendre la valeur $1-i$.

D'une manière générale, si

$$\lambda_{n+1} = \pm \alpha \pm \beta i \qquad (\alpha = 1, 2) \quad (\beta = 1, 2),$$

on trouve que λ_{n+2} ne peut pas être égal à

$$\pm 1 \mp i.$$

En résumé, si

$$\lambda_{n+1} = \pm 1 \pm i, \qquad \lambda_{n+2} = \mp A \pm Bi \qquad \begin{cases} A > 0, \\ B > 0; \end{cases}$$

si

$$\lambda_{n+1} = \pm 2, \qquad \lambda_{n+2} = \mp A + Bi, \qquad A > 0;$$

si

$$\lambda_{n+1} = \pm 2i, \qquad \lambda_{n+2} = \quad A \pm Bi, \qquad B > 0.$$

Enfin, si

$$\lambda_{n+1} = \pm \alpha \pm \beta i \qquad (\alpha = 1, 2) \quad (\beta = 1, 2),$$

λ_{n+2} ne peut être égal à $\pm 1 \mp i$.

Ainsi que nous l'avons dit, ces propriétés se vérifient facilement; elles permettent de reconnaître *a priori* si un développement donné peut être le développement effectif d'un nombre complexe, ou n'en est qu'une représentation formelle.

28. Tout ce que nous avons dit dans les nos **2** à **12** inclus de la première Partie s'applique, intégralement et sans aucun changement, au cas des fractions continues complexes.

La formule du no **13**,

$$\frac{Q_0^{n+1}}{a_{n+1}} = a_0 \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_0 a_1} \right),$$

subsiste également; mais, dans le cas actuel, le rapport $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$ a un module minimum, non plus égal à 5, mais seulement à 3, ainsi que nous allons l'établir.

Posons

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \overline{OM}, \qquad \lambda_k = \overline{O\lambda},$$

on a

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \lambda_k - \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

d'où

$$\overline{OM} = \overline{O\lambda} - \overline{M\lambda},$$

et, par suite,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = M\lambda$$

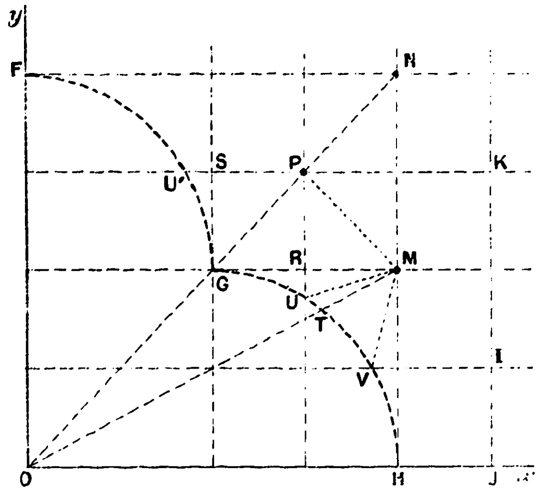
et

$$\left| \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} \right| = \frac{OM}{M\lambda}.$$

Soit d'abord

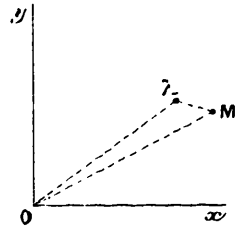
$$\lambda_k = OG = 1 + i.$$

Fig. 3.



M sera un point situé à l'intérieur du polygone curviligne GURPSU'

Fig. 4.



et nous avons, en considérant les sommets de ce polygone,

$$\frac{UO}{UG} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{6+3\sqrt{3}} = 3,346\ldots,$$

$$\frac{PO}{PG} = 3,$$

$$\frac{U'O}{U'G} = 3,346.$$

Le minimum du rapport $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$ est 3.

Si $\lambda_k = \mathrm{OH} = 2$, le point M est situé dans le quadrilatère HVIJ ou son symétrique par rapport à Ox; le minimum de $\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}$ a lieu lorsque le point est en V et l'on a

$$\frac{\mathrm{VO}}{\mathrm{VH}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3} = 3,732\ldots.$$

Lorsque $\lambda_k = \mathrm{OM} = 2 + i$, le point se trouve à l'intérieur du polygone UVJKP.

Nous trouvons

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PM}} = 3,$$

$$\frac{\mathrm{UO}}{\mathrm{UM}} = 3,346,$$

$$\frac{\mathrm{TO}}{\mathrm{TM}} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{4}\sqrt{5}} = 4,$$

$$\frac{\mathrm{VO}}{\mathrm{VM}} = 3,732.$$

Inutile d'envisager les sommets I et K; d'où

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| > 3.$$

Enfin, si $\lambda_k = \mathrm{ON} = 2 + 2i$, le minimum de ce rapport est évidemment

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PN}} = 3.$$

Nous avons donc établi que, dans tous les cas,

$$\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}}\right| > 3. \tag{36}$$

29. En tenant compte de la formule qui précède, nous trouvons que l'expression

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_0 a_1}$$

a un module inférieur à

$$\frac{3}{2}\left|\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right|;$$

par suite, on en déduit

$$(37)\qquad \frac{1}{2}|a_0| < |a_n Q_0^{n+1}| < \frac{3}{2}|a_0|,$$

$$(38)\qquad |a_{n+2} Q_0^{n+1}| < \frac{1}{2}|a_0|,$$

et comme

$$|a_{n+1}| < \frac{\sqrt{2}}{2}|a_n|,$$

on tire de (37)

$$(39)\qquad |a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{3\sqrt{2}}{4}|a_0|.$$

Si l'on avait

$$|a_{n+1}| < \frac{1}{\sqrt{3}}|a_n|,$$

on en tirerait

$$(40)\qquad |a_{n+1} Q_0^{n+1}| < \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0|,$$

et, de même que dans le cas réel, on démontrerait que si

$$|a_{n+1} Q_0^{n+1}| > \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0|,$$

on aura nécessairement

$$|a_n Q_0^n| < \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0| \quad \text{et} \quad |a_{n+2} Q_0^{n+2}| < \frac{\sqrt{3}}{2}|a_0|.$$

Enfin, des relations ci-dessus

$$|a_n Q_0^{n+1}| > \frac{1}{2}|a_0|, \qquad |a_n Q_0^n| < \frac{3\sqrt{2}}{4}|a_0|, \qquad |a_n Q_0^{n-1}| < \frac{1}{2}|a_0|,$$

on tire

$$(41)\qquad \left|\frac{Q_0^{n+1}}{Q_0^n}\right| > \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad |Q_0^{n+1}| > |Q_0^{n-1}|.$$

On aura de même

$$(42) \qquad \left|\frac{Q_0^n}{Q_1^n} - \frac{a_0}{a_1}\right| = |\Delta_n| = \left|\frac{a_n}{a_1 Q_1^n}\right| < \frac{2\sqrt{2}}{3}\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^2.$$

Donc $|\Delta_n|$ décroît au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et, par suite, $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}$ a pour limite $\frac{a_0}{a_1}$, lorsque n augmente indéfiniment.

Nous trouvons enfin aisément

$$(43) \qquad \left|\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\right| > 1,$$

ce qui montre que l'approximation des réduites successives va constamment en augmentant.

Le théorème fondamental des réduites n'a plus lieu dans le cas des nombres complexes; on démontre cependant que si $\frac{Q_0^n}{Q_1^n}$ est une réduite de $\frac{a_0}{a_1}$, il n'existe pas de fraction irréductible $\frac{A}{B}$, $|B| < |Q_1^n|$, à l'intérieur du cercle décrit sur le segment $\frac{Q_0^n}{Q_1^n} \cdots \frac{a_0}{a_1}$, comme diamètre; c'est en somme une généralisation de la notion de distance entre deux points non situés sur l'axe réel.

30. Le théorème de Lagrange se démontre de la même manière que pour les nombres réels; en tenant compte des relations (37), (38) et (39), on trouve aisément que L et N ont un module inférieur à

$$(44) \qquad \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{\Delta}$$

et que l'un au moins de ces deux coefficients a un module inférieur à

$$(44') \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2},$$

on a également

$$0 < |M| < 2\sqrt{\Delta}.$$

Il en résulte qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on retombe sur une équation déjà envisagée; le nombre des formes réduites et des nombres réduits est donc limité et il sera facile de les déterminer.

Étant données deux irrationnelles quelconques, on saura donc, par la comparaison de leurs développements en fraction continue, si elles sont ou non équivalentes, et dans le premier cas on saura trouver la substitution modulaire générale qui permet de passer de l'une à l'autre.

De même que pour les nombres réels, si un nombre réduit

$$\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),$$

on aura

$$\frac{1}{\omega'} = \left(\lambda_m, \lambda_{m-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1, \frac{1}{\omega'}\right);$$

mais ce développement, quoique exact, pourra différer du développement réel de $\frac{1}{\omega'}$ si la suite des λ, lue dans les deux sens, ne remplit pas les conditions du nº **27**.

Pour que ω soit équivalent à $-\omega'$, il faut, comme pour les nombres réels, soit que

$$\omega_i + \omega'_i = \lambda, \quad \text{nombre entier};$$

soit que

$$\omega_i \omega'_i = 1.$$

Pour que ω soit équivalent à $+\omega'$, il faut que

$$\omega_i \omega'_i = -1.$$

Pour que ω soit équivalent à $-\omega$, il faut que l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = -4$$

soit résoluble.

De même, pour que ω soit équivalent à $\pm i\omega'$, il faut que l'on ait

$$\omega_i \omega'_i = \pm i.$$

Enfin, pour que ω soit équivalent à $\pm \omega i$, il faut que l'équation

$$t^2 - \Delta u^2 = \pm 4i$$

soit résoluble.

Ces théorèmes se démontrent comme dans le Chapitre II, sans aucune difficulté ; il suffit de remarquer que, si

$$\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \ldots),$$

on aura évidemment

$$\pm \omega i = (\pm \lambda_1 i, \mp \lambda_2 i, \pm \lambda_3 i, \mp \lambda_4 i, \pm \lambda_5 i, \ldots).$$

31. Considérons le discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

On a évidemment

$$B \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm i \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \pm i \pmod 2.$$

Par suite,

$$B^2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 2i \pmod 4.$$

Il en est de même, dès lors, de Δ :

$$\Delta \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 1 \quad \text{ou} \quad \equiv \pm 2i \pmod 4.$$

Les cas de $\Delta = 0$, $\Delta = \pm 1$, $\Delta = \pm 2i$ ne doivent pas être retenus, car, le discriminant étant alors un carré parfait, on n'obtient pas une véritable irrationnelle.

Le discriminant de plus petit module est $\Delta = 3$. On trouve facilement comme nombre réduit

$$\frac{2 + \sqrt{3} + i}{2} = (2 + i, 1 - 2i)$$

et comme forme correspondante

$$x^2 - (2 + i)x + i = 0.$$

Pour $\Delta = -3$, il suffit de multiplier le nombre réduit ci-dessus par i,

$$\frac{(2 + \sqrt{3})i - 1}{2} = (2i - 1, i + 2),$$

et comme forme

$$x^2 + (1 - 2i)x - i = 0.$$

On sait que tout nombre complexe peut être décomposé en ses facteurs premiers, qui sont :

(a) ou réels de la forme

$$4k -$$

(b) ou imaginaires de la forme

$$2m + 1 + 2ni,$$

avec la condition

$$(2m + 1)^2 + 4n^2 = p,$$

nombre premier réel.

Il en résulte que Δ peut être égal soit à un nombre réel quelconque, soit à un nombre complexe quelconque, multiplié par une puissance de $2i$,

$$\Delta = N_{\text{réel}},$$
$$\Delta = (2i)^{\mu} N_{\text{compl.}} \qquad (\mu \geqq 1).$$

Telle est la forme générale des discriminants, laquelle diffère complètement de celle qui est donnée dans les Traités classiques : cela tient à ce que nous avons élargi la notion d'équivalence en l'appliquant aux nombres complexes.

Nous croyons inutile de donner des applications numériques, car elles ne présentent aucune difficulté.