JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité de l'équilibre relatif

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 215-227.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__215_0>

Sur la stabilité de l'équilibre relatif;

PAR M. P. DUHEM.

1. — Examen de divers criteria de stabilité pour une masse animée d'un mouvement de rotation uniforme. Équivalence du criterium énoncé par M. H. Poincaré avec celui que nous avons énoncé.

Considérons un système rapporté à des axes mobiles et susceptible de prendre, par rapport à ces axes mobiles, un mouvement isothermique. Soit $\mathfrak{F}$ son potentiel interne, qui est le même soit que l'on rapporte le système aux axes fixes, soit qu'on le rapporte aux axes mobiles.

Soient, pendant le temps dt, $d\mathfrak{T}_e$ le travail effectué par les forces extérieures dans le déplacement par rapport aux axes mobiles et $d\mathfrak{T}_c$ le travail des forces centrifuges dans le même déplacement; le travail des forces centrifuges composées est identiquement nul; soit $d\theta$ le travail de viscosité, qui garde même valeur, que le déplacement soit rapporté aux axes fixes ou aux axes mobiles.

Soit enfin $\mathfrak{C}$ la force vive rapportée aux axes mobiles.

Nous pourrons écrire

$$(1) \qquad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_c + d\theta - d\mathfrak{F} = d\mathfrak{C}.$$

Supposons que les forces extérieures admettent, par rapport aux axes mobiles, un potentiel Ω_r et que les forces centrifuges admettent, par rapport aux mêmes axes, un potentiel V_r. L'égalité précédente pourra s'écrire

$$d(\mathfrak{F} + \Omega_r + V_r + \mathfrak{T}) = d\Theta. \tag{2}$$

A cette égalité on peut appliquer la démonstration de Lejeune-Dirichlet, modifiée au besoin comme nous l'avons indiqué ([1]), si le système dépend d'un nombre illimité de paramètres. On sera conduit ainsi à la proposition suivante :

Un système est assurément en équilibre relatif stable dans un état où la somme

$$\Phi_r = \mathfrak{F} + \Omega_r + V_r \tag{3}$$

a une valeur minimum parmi toutes celles que peuvent lui faire prendre les déplacements isothermiques virtuels du système.

Supposons, en particulier, que le système des axes fixes et le système des axes mobiles aient même origine et même axe des z et que le système des axes mobiles tourne uniformément autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire ω_0. La force centrifuge appliquée à une masse élémentaire dm, de coordonnées x', y', z' par rapport aux axes mobiles, a pour composantes :

$$X'_c = \omega_0^2 x'\,dm, \qquad Y'_c = \omega'_0 y'\,dm, \qquad Z'_c = 0,$$

en sorte que l'on aura

$$V_r = -\frac{\omega_0^2}{2}\int (x'^2 + y'^2)\,dm$$

ou bien

$$V_r = -\frac{\omega_0^2}{2}\int r^2\,dm, \tag{4}$$

r étant la distance de la masse dm à l'axe de rotation.

([1]) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie, Chap. II, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 362). — *Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 5).

Un déplacement virtuel quelconque par rapport aux axes mobiles est aussi un déplacement virtuel quelconque par rapport aux axes fixes; le potentiel Ω_r des actions extérieures par rapport aux axes mobiles ne diffère pas du potentiel Ω des mêmes actions par rapport aux axes fixes; l'égalité (3) devient donc

$$\Phi_r = \mathfrak{F} + \Omega + V_r \tag{5}$$

et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Un système est en équilibre relatif stable dans un état où il tourne d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe Oz et où la grandeur Φ_r, définie par l'égalité (5), *a une valeur minimum parmi toutes celles que peuvent lui donner les déplacements isothermiques virtuels du système.*

L'invariabilité de la température est, ici, la seule restriction apportée aux perturbations que subit le système. Dans le calcul de la variation qu'un déplacement virtuel du système impose à la quantité V_r, donnée par l'égalité (4), on ne doit pas oublier que la valeur de ω_0 n'est pas affectée par un tel déplacement virtuel.

Le criterium que nous venons d'énoncer a été employé par Thomson et Tait, puis par divers auteurs tels que M. H. Poincaré et M. J. Hadamard.

Au cours de son grand Mémoire *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (¹), M. H. Poincaré a proposé un autre criterium de stabilité pour une telle masse fluide. Le point de départ de sa très brève analyse est une sorte d'esquisse de la démonstration développée dans notre premier écrit sur ce même sujet (²); mais l'emploi d'une remarquable inégalité fournit une proposition d'autre forme que celle que nous avons énoncée.

(¹) Voir *Stabilité des ellipsoïdes*, § XIV (*Acta mathematica*, t. VII, 1885, p. 365).

(²) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. VII, 1901, p. 311).

Nous allons prouver que le criterium énoncé par M. H. Poincaré est exactement équivalent à celui que nous avons formulé. Pour obtenir ce résultat, il nous suffira, pour ainsi dire, de reprendre l'analyse de M. Poincaré en précisant quelques points.

Commençons par démontrer l'inégalité dont M. Poincaré fait usage.

Soient dm une masse élémentaire du système et a, b deux quantités prenant, en chaque point du système, une valeur déterminée; *la quantité a est supposée essentiellement positive.* Considérons la forme, quadratique en X et Y,

$$(6)\qquad F = X^2 \int a\, dm + 2XY \int ab\, dm + Y^2 \int ab^2\, dm.$$

On peut écrire

$$F = \int a(X^2 + 2bXY + b^2Y^2)\, dm = \int a(X + bY)^2\, dm.$$

Si b a la même valeur en tous les points du système, la quantité F peut être égale à zéro sans que X et Y le soient; il suffit pour cela que l'on ait $\frac{X}{Y} = -b$; si, au contraire, b varie d'un point à l'autre du système et si l'on n'a pas $X = 0$, $Y = 0$, F est positif, en sorte que, dans ce cas, la forme (6) est définie positive. Nous pouvons donc énoncer la proposition que voici :

Si a représente une quantité positive en tous les points du système et si b n'a pas la même valeur en tous ces points, on a l'inégalité

$$(7)\qquad \int a\, dm \int ab^2\, dm - \left(\int ab\, dm\right)^2 > 0.$$

Le criterium que nous avons énoncé nous enseigne qu'un système animé, autour de l'axe des z, d'un mouvement de rotation uniforme dont ω_0 est la vitesse angulaire est assurément en équilibre relatif stable pour toutes les perturbations qui n'altèrent pas le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z, dans un état où la quantité

$$(8) \qquad \Phi = \mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}\int r^2 \omega^2 \, dm$$

a une valeur minimum parmi celles que peuvent lui faire prendre toutes les variations virtuelles accomplies sans changement de température et sans changement du moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z.

Soit I_0 le moment d'inertie du système, par rapport à l'axe des z, en l'état d'équilibre relatif initial; la valeur initiale du moment de la quantité de mouvement est $I_0 \omega_0$. L'égalité qui exprime la conservation du moment de la quantité de mouvement est

$$(9) \qquad \int r^2 \omega \, dm = I_0 \omega_0.$$

Nous sommes donc amenés à exprimer que, *si l'on prend toutes les formes, voisines de la forme d'équilibre, que le système peut présenter, et qu'on affecte chaque masse dm d'une grandeur* ω *telle que l'égalité* (9) *soit vérifiée, on aura*

$$(10) \qquad \mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2}\int r^2 \omega^2 \, dm > \mathcal{F}_0 + \Omega_0 + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2.$$

Nous pouvons supposer tout d'abord que l'on donne à ω la même valeur en tous les points du système; alors, si l'on désigne par

$$I = \int r^2 \, dm$$

le moment d'inertie du système déformé, l'égalité (9) donnera

$$(11) \qquad I\omega = I_0 \omega_0,$$

tandis que l'inégalité (10) deviendra

$$\mathcal{F} + \Omega + \frac{1}{2} I \omega^2 > \mathcal{F}_0 + \Omega_0 + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(12) \qquad \mathfrak{F} + \Omega + \frac{1}{2}\frac{I_0^2\omega_0^2}{I} > \mathfrak{F}_0 + \Omega_0 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2.$$

Ainsi, pour que notre criterium soit vérifié, il *faut* que l'inégalité (12) soit vérifiée pour toute forme du système voisine de la forme d'équilibre relatif.

Montrons maintenant que cela *suffit*.

Considérons une forme quelconque de ce système, voisine de la forme d'équilibre relatif; en cette forme, l'inégalité (12) est vérifiée.

En cette forme, distribuons les valeurs de ω de telle sorte que l'égalité (9) soit vérifiée.

L'inégalité (7), où nous pouvons faire $a = r^2$, $b = \omega$, nous permet d'écrire

$$\left(\int r^2\omega\, dm\right)^2 \leqq \int r^2\, dm \int r^2\omega^2\, dm,$$

le signe $=$ étant de mise exclusivement dans le cas où ω a la même valeur en tous les points du système.

Selon l'égalité (9), l'inégalité précédente peut s'écrire

$$I_0^2\omega_0^2 \leqq I \int r^2\omega^2\, dm.$$

On voit alors que l'inégalité (12) entraîne l'égalité (10).

Notre criterium peut donc s'énoncer ainsi :

La quantité

$$(13) \qquad \Psi = \mathfrak{F} + \Omega + \frac{1}{2}\frac{I_0^2\omega_0^2}{I}$$

a une valeur moindre dans l'état d'équilibre relatif qu'en tout état voisin où la température du système est la même.

C'est précisément le criterium énoncé par M. Poincaré.

2. — Le criterium précédent n'est pas nécessaire pour la stabilité de l'équilibre relatif.

Comme l'a remarqué M. H. Poincaré, l'inégalité (12) peut s'écrire

$$\mathcal{J} + \Omega - \mathcal{J}_0 - \Omega_0 - (\mathrm{I} - \mathrm{I}_0)\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{(\mathrm{I}-\mathrm{I}_0)^2}{\mathrm{I}}\frac{\omega_0^2}{2} > 0,$$

en sorte que, pour qu'elle ait lieu, il est suffisant, mais il n'est pas nécessaire, que l'on ait l'inégalité

$$\mathcal{J} + \Omega - \mathrm{I}\frac{\omega_0^2}{2} > \mathcal{J}_0 + \Omega_0 - \mathrm{I}_0\frac{\omega_0^2}{2}$$

ou, selon (4) et (5),

$$\Phi_r > \Phi_{r0}.$$

Donc, *toutes les fois que le criterium de Thomson et Tait indiquera qu'un système est en équilibre relatif stable, le criterium de M. Poincaré (ou le nôtre, qui lui est équivalent) indiquera certainement aussi que ce système est en équilibre relatif stable; mais la seconde indication peut être donnée alors que la première ne le serait pas.*

Il en résulte que *le criterium de Thomson et Tait ne saurait être nécessaire pour la stabilité de l'équilibre relatif.* M. Hadamard ([1]) l'a d'ailleurs prouvé en appliquant ce criterium à la rotation des solides pesants.

Mais le criterium de M. Poincaré ou le nôtre, qui lui est équivalent, ne serait-il pas nécessaire pour la stabilité de l'équibre relatif? Nous allons montrer qu'il n'en est rien et, pour cela, nous allons, selon la méthode qui a permis à M. Hadamard de discuter le criterium de Thomson et Tait, appliquer notre criterium à la rotation autour de la verticale d'un solide pesant, suspendu par un point fixe.

([1]) J. Hadamard, *Sur la stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe* (*Association française pour l'avancement des Sciences,* Congrès de Bordeaux, 1895).

Soient, avec M. Staude [1] et M. Hadamard,

$Ax^2 + By^2 + Cy^2 = 1$ l'équation de l'ellipsoïde d'inertie au point de suspension, rapporté à ses axes;

ξ, η, ζ les coordonnées, par rapport aux mêmes axes, du centre de gravité, multipliées par le poids total du corps;

γ, γ', γ'' les cosinus directeurs de la verticale descendante.

Pour un corps solide, $\mathcal{F}$ est une constante que l'on peut remplacer par zéro :

$$\mathcal{F} = 0.$$

Nous aurons, d'ailleurs,

$$(14)\qquad \begin{cases} \Omega = -(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta), \\ W = (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)\dfrac{\omega^2}{2}, \\ M = (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)\omega. \end{cases}$$

Si nous voulons que le corps tourne d'un mouvement uniforme autour de la verticale, nous devrons donner à γ, γ', γ'' et à ω des valeurs telles que toute variation virtuelle qui annule δM annule également $\delta(W + \Omega)$.

Nous avons

$$(15)\quad \delta M = (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2)\,\delta\omega + 2\omega(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma''),$$

avec

$$(16)\qquad \gamma\,\delta\gamma + \gamma'\,\delta\gamma' + \gamma''\,\delta\gamma'' = 0,$$

en vertu de l'identité

$$(17)\qquad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

[1] STAUDE, *Acta mathematica*, t. XIV.

D'autre part,

$$(18)\quad \begin{cases} \delta(\Omega+W)=(A\omega^2\gamma-\xi)\,\delta\gamma+(B\omega^2\gamma'-\eta)\,\delta\gamma'+(C\omega^2\gamma''-\zeta)\,\delta\gamma'' \\ \qquad\qquad +(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)\,\omega\,d\omega. \end{cases}$$

Les égalités (15) et (18) montrent que, toutes les fois que $\delta M = 0$, on peut écrire

$$(19)\quad \begin{cases} \delta_M(\Omega+W)=-(A\omega^2\gamma+\xi)\,\delta\gamma \\ \qquad\qquad -(B\omega^2\gamma'+\eta)\,\delta\gamma' \\ \qquad\qquad -(C\omega^2\gamma''+\zeta)\,\delta\gamma''. \end{cases}$$

Nous devons exprimer que cette quantité s'annule pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui vérifient l'égalité (16); il faut et il suffit, pour cela, qu'il existe une quantité λ telle que l'on ait

$$\left[(A-\lambda)\gamma+\frac{\xi}{\omega^2}\right]\delta\gamma+\left[(B-\lambda)\gamma+\frac{\eta}{\omega^2}\right]\delta\gamma'+\left[(C-\lambda)\gamma+\frac{\zeta}{\omega^2}\right]\delta\gamma''=0,$$

quels que soient $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$, ou bien telle que l'on ait

$$(20)\quad \frac{\xi}{\omega^2}+(A-\lambda)\gamma=0,\qquad \frac{\eta}{\omega^2}+(B-\lambda)\gamma'=0,\qquad \frac{\zeta}{\omega^2}+(C-\lambda)\gamma''=0.$$

Les égalités (17) et (20) donnent sans peine

$$(21)\qquad \frac{\xi^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{\eta^2}{(B-\lambda)^2}+\frac{\zeta^2}{(C-\lambda)^2}=\omega^2.$$

Si l'on se donne dans le corps la position du point de suspension, ξ, η, ζ, A, B, C sont déterminés; si l'on se donne une valeur arbitraire de λ, l'équation (21) déterminera ω; les équations (20) détermineront alors la direction, dans le corps, d'une droite qui, placée suivant la verticale descendante, pourra servir au corps d'axe de rotation uniforme de vitesse angulaire ω.

Les résultats ainsi obtenus sont ceux qui ont été indiqués par M. Staude.

Si l'on prend pour λ une valeur infiniment voisine de A, l'équation (21) donnera pour ω une valeur infiniment grande, tandis que les égalités (20) donneront pour γ' et γ'' des valeurs infiniment petites; le corps tournera donc avec une vitesse infiniment grande autour d'un axe infiniment voisin de l'axe principal d'inertie pris pour axe des x.

Des remarques analogues s'appliquent au cas où λ diffère très peu de B ou de C.

Nous nous proposons maintenant de rechercher celles des rotations ainsi définies qui sont stables.

Dans ce but, l'emploi de notre criterium nous amène à exprimer que l'on a

$$\delta_{\mathrm{M}}^2(\Omega + \mathrm{W}) > 0,$$

le signe δ_{M}^2 se rapportant aux modifications virtuelles qui laissent invariable le moment M de la quantité de mouvement. Or, l'égalité (19) donne

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{M}}^2(\Omega + \mathrm{W}) = & -2(\mathrm{A}\gamma\,\delta\gamma + \mathrm{B}\gamma'\,\delta\gamma' + \mathrm{C}\gamma''\,\delta\gamma'')\omega\,\delta\omega \\ & - [\mathrm{A}(\delta\gamma)^2 + \mathrm{B}(\delta\gamma')^2 + \mathrm{C}(\delta\gamma'')^2]\omega^2 \\ & - (\mathrm{A}\omega^2\gamma + \xi)\delta^2\gamma - (\mathrm{B}\omega^2\gamma' + \eta)\delta^2\gamma' - (\mathrm{C}\omega^2\gamma'' + \zeta)\delta^2\gamma''.\end{aligned}$$

Si nous tenons compte de la relation que l'on tire de l'égalité (15) en égalant $\delta\mathrm{M}$ à 0; de l'identité

$$(\delta\gamma)^2 + (\delta\gamma')^2 + (\delta\gamma'')^2 + \gamma\,\delta^2\gamma + \gamma'\,\delta^2\gamma' + \gamma''\,\delta^2\gamma'' = 0 \tag{22}$$

que donne l'égalité (16); enfin, des égalités (20), nous trouvons

$$(23)\left\{\begin{aligned}\delta_{\mathrm{M}}^2(\Omega + \mathrm{W}) = & \frac{4(\mathrm{A}\gamma\,\delta\gamma + \mathrm{B}\gamma'\,\delta\gamma' + \mathrm{C}\gamma''\,\delta\gamma'')^2\omega^2}{\mathrm{A}\gamma^2 + \mathrm{B}\gamma'^2 + \mathrm{C}\gamma''^2} \\ & + [(\lambda - \mathrm{A})(\delta\gamma)^2 + (\lambda - \mathrm{B})(\delta\gamma')^2 + (\lambda - \mathrm{C})(\delta\gamma'')^2]\omega^2.\end{aligned}\right.$$

L'équilibre sera assurément stable si cette quantité $\delta_{\mathrm{M}}^2(\Omega + \mathrm{W})$ vérifie la condition (22) pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui vérifient la relation (16).

Supposons les quantités A, B, C distinctes et rangées par ordre de valeurs décroissantes :

$$A > B > C. \tag{24}$$

On peut donner à l'égalité (23) la forme

$$\left\{\begin{aligned} \delta_M^2(\Omega + W) = {} & \frac{4(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma'')^2\omega^2}{A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2} \\ & + [(A - B)(\delta\gamma')^2 + (A - C)(\delta\gamma'')^2]\omega^2 \\ & + [(\delta\gamma)^2 + (\delta\gamma')^2 + (\delta\gamma'')^2](\lambda - A)\omega^2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Sous cette forme (25), on voit que, tant que l'on a

$$\lambda - A \geqq 0,$$

l'inégalité (22) est vérifiée pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui sont compatibles avec la relation (16); il en est encore ainsi pour les valeurs de $(\lambda - A)$ qui sont négatives, mais supérieures à une certaine limite $(\lambda - \alpha)$.

Donc, *toutes les valeurs de λ comprises entre $+\infty$ et une limite inférieure α, moindre que A, sont indiquées par notre criterium comme fournissant des rotations assurément stables.*

La limite inférieure α que nous venons de définir peut-elle être égale ou inférieure à B ?

Remarquons, tout d'abord, que, selon l'égalité (23), le signe de $\delta_M^2(\Omega + W)$ est le signe de

$$\left\{\begin{aligned} L = {} & 4(A\gamma\,\delta\gamma + B\gamma'\,\delta\gamma' + C\gamma''\,\delta\gamma'')^2 \\ & + (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) \\ & \times [(\lambda - A)(\delta\gamma)^2 + (\lambda - B)(\delta\gamma')^2 + (\lambda - C)(\delta\gamma'')^2]. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Donnons à λ une valeur infiniment voisine de B; γ, γ'' auront des valeurs infiniment voisines de zéro; selon l'égalité (16), $\delta\gamma'$ aura une valeur infiniment petite par rapport à l'une au moins des quantités $\delta\gamma$, $\delta\gamma''$; L aura sensiblement le signe de

$$(B - A)(\delta\gamma)^2 + (B - C)(\delta\gamma'')^2.$$

Comme, selon les inégalités (24), $(B - A)$ et $(B - C)$ sont de signes contraires, le signe de cette quantité dépend de la valeur du rapport $\frac{\delta\gamma''}{\delta\gamma}$; ce ne peut être constamment le signe $+$. Il en résulte que *la limite α est supérieure à* B.

Un raisonnement semblable à celui que nous venons de développer nous démontre que, pour les valeurs de λ voisines de C, L et, par conséquent, $\delta^2_M(\Omega - W)$ ont le signe de

$$(C - A)(\delta\gamma)^2 + (C - B)(\delta\gamma')^2.$$

Ce signe est nécessairement le signe $-$ pour toutes les valeurs de $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$, $\delta\gamma''$ qui satisfont à l'égalité (16).

Ainsi ni le criterium que nous avons énoncé, ni partant celui de M. Poincaré, qui lui est équivalent, n'indiquent comme stables les rotations qui se produisent autour d'axes très voisins du petit axe d'inertie.

Or, il est très certain qu'un corps solide peut, au moins dans certains cas, subir un mouvement de rotation uniforme et stable autour d'axes infiniment voisins du petit axe d'inertie.

Tout d'abord, si l'on cherche les conditions de stabilité de l'équilibre relatif par la classique méthode des petits mouvements, on trouve, avec M. Hadamard, que les valeurs de λ comprises entre $+\infty$ et a, a étant compris entre A et B, conduisent à des rotations stables, ainsi que les valeurs de λ comprises entre b et c, b étant inférieur à B et supérieur à C, et c étant inférieur à C.

On pourrait, il est vrai, prétendre que, dans ce cas, le criterium tiré de l'étude des petits mouvements est en défaut; il est impossible, en effet, de démontrer rigoureusement que ce criterium est ou suffisant, ou nécessaire, pour la stabilité de l'équilibre relatif.

Mais, dans le cas où le corps solide est suspendu par son centre de gravité, l'étude directe de la polhodie prouve que la rotation autour du petit axe d'inertie est stable ([1]). On en peut conclure qu'un corps

---

([1]) *Voir* Appell, *Traité de Mécanique rationnelle,* t. II, 1896, p. 220.

solide pesant, suspendu par un point voisin de son centre de gravité, peut être animé d'une rotation uniforme et stable autour de certains axes très voisins du petit axe d'inertie.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *Ni le criterium donné par M. H. Poincaré, ni celui que nous avons énoncé, et qui lui est équivalent, ne sont nécessairement vérifiés lorsque l'équilibre relatif est stable.*