JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Sur la transformation ordinaire des fonctions abéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 395-417.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__395_0>

Sur la transformation ordinaire des fonctions abéliennes;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. La théorie de la transformation des fonctions abéliennes ordinaires peut recevoir, sur la surface de Kummer, une interprétation géométrique très simple qui conduit à d'intéressantes propriétés de cette surface; inversement, l'interprétation géométrique peut venir en aide à l'Analyse pour la recherche des trois équations, dites *modulaires*, qui lient les modules des fonctions abéliennes primitives et transformées; nous insisterons spécialement, à ce point de vue, sur la transformation du second ordre.

Propriétés préliminaires.

2. Soit une surface de Kummer représentée paramétriquement par le procédé de M. Weber (*Crelle*, Tome 84) : les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales des variables u et v, du second ordre et à caractéristique nulle; ces fonctions étant paires, à un point de la surface répondent (aux périodes près) deux couples d'arguments, u, v et $-u$, $-v$. Les seize points doubles ont pour arguments les seize demi-périodes, en y comprenant la demi-période o, o.

3. Considérons maintenant, sur la surface de Kummer, une courbe C que nous supposerons d'abord ne passer *par aucun des seize points*

doubles, et cherchons, *le long de cette courbe*, l'expression des différentielles du et dv. En admettant que les coordonnées d'un point de C soient exprimées en fonction fuchsienne d'un paramètre, ξ, on aura, pour du et dv, des expressions de la forme $\sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi$, $\Theta(\xi)$ étant une fonction uniforme de ξ; cela résulte de ce que, en chaque point de la courbe, du et dv doivent avoir chacun deux valeurs égales et de signes contraires. De plus, $\Theta(\xi)$ doit être une fonction thêtafuchsienne du second ordre. Soit en effet $\left(\xi, \dfrac{a\xi+b}{c\xi+d}\right)$ une des substitutions fondamentales du groupe fuchsien lié à C; il faut que du et dv se reproduisent, du moins au signe près, quand on opère sur ξ cette substitution, car celle-ci n'altère pas le point considéré sur la courbe. En d'autres termes, en supposant $ad - bc = 1$, le radical $\sqrt{\Theta(\xi)}$ doit se reproduire multiplié par $\pm(c\xi+d)^2$, c'est-à-dire que

$$\Theta\left(\frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right) = (c\xi+d)^4\,\Theta(\xi),$$

ce qui établit bien que $\Theta(\xi)$ est une fonction thêtafuchsienne d'ordre deux.

Étudions maintenant les pôles et les zéros de cette fonction; ou mieux, pour plus de généralité, de la fonction $\Theta(\xi)$ définie le long de C par

$$(1) \qquad du + \rho\,dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi,$$

où ρ est une constante quelconque : cette nouvelle fonction, d'après le raisonnement précédent, est encore thêtafuchsienne et du second ordre.

Elle ne peut avoir de pôle d'ordre supérieur à l'unité, car ce pôle serait au moins d'ordre deux, et l'intégrale $\int\sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi$ y deviendrait infinie, ce qui est impossible, puisque $u + \rho v$ demeure fini, comme u et v, sur toute la surface de Kummer, et *a fortiori* sur la courbe C.

Je dis que $\Theta(\xi)$ ne peut pas non plus admettre de pôle d'ordre un, $\xi = \xi_0$. On aurait en effet, dans le domaine du point ξ_0,

$$du + \rho\,dv = \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\xi_0}}\,[a_0 + a_1(\xi-\xi_0) + \ldots]$$

et

$$(2) \qquad u + \rho v = \sqrt{\xi - \xi_0}\, F(\xi - \xi_0) + c_0,$$

c_0 désignant une constante, et $F(\xi - \xi_0)$ une fonction holomorphe de ξ au voisinage de ξ_0. Faisons maintenant décrire à ξ un contour fermé autour du point ξ_0; $u + \rho v$ prend la nouvelle valeur

$$(3) \qquad -\sqrt{\xi - \xi_0}\, F(\xi - \xi_0) + c_0,$$

différente de la précédente. Comme $u + \rho v$ ne peut admettre, en un même point de la surface de Kummer, que deux valeurs égales et de signes contraires, aux périodes près, la *somme* ou la *différence* des valeurs (2) et (3) doit être une période de $u + \rho v$: la différence, qui dépend de ξ, ne peut satisfaire à cette condition; il faut donc que ce soit la somme, qui est $2c_0$. Si donc on désigne par $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') un système de périodes normales de u et v, et par m, n, p, q des entiers, on aura

$$2c_0 = m + n\rho + p(g + \rho h) + q(h + \rho g').$$

D'ailleurs, pour $\xi = \xi_0$, $u + \rho v$ se réduit à c_0. Il en résulte aisément, puisque ρ est quelconque, que, *pour* $\xi = \xi_0$, u et v ont les valeurs

$$u = \tfrac{1}{2}(m + pg + qh), \qquad v = \tfrac{1}{2}(n + ph + qg').$$

Ces deux valeurs constituent une *demi-période* de u, v; le point correspondant sur la surface de Kummer est donc un des seize points doubles de la surface, conclusion contraire à l'hypothèse initiale que la courbe C ne passe par aucun de ces points.

Ainsi, la fonction $\Theta(\xi)$ ne peut admettre de pôle; un raisonnement tout pareil établit que $\Theta(\xi)$ ne peut avoir de zéro d'ordre impair. Voici donc le résultat :

4. *Soit, sur la surface de Kummer, une courbe,* C, *ne passant par aucun des seize points doubles; imaginons que les coordonnées d'un point de* C *soient exprimées en fonction fuchsienne d'un para-*

mètre ξ. *En désignant par* du *et* dv *les différentielles abéliennes qui répondent à la surface, par* ρ *une constante quelconque, on a,* en tout point de la courbe C,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ *étant une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre deux, dont tous les zéros sont d'ordre pair de multiplicité.*

5. Sous une autre forme, en représentant par $f(x,y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane d'ordre n, répondant point par point à C, on aura, le long de la courbe $f = 0$,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{F_{2n-6}(x,y)}\, \frac{dx}{f'_y},$$

$F_{2n-6}(x,y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $2n - 6$, biadjointe à $f(x,y) = 0$. Par *biadjointe*, on entend une courbe qui présente, en chaque point multiple de la proposée, la même singularité que la figure formée par l'ensemble de deux adjointes ordinaires. De plus, la courbe $F_{2n-6} = 0$ a un contact d'ordre impair avec la courbe $f = 0$ en tous les points, non multiples, où elle la coupe.

6. *Remarque.* — Il peut arriver que $\Theta(\xi)$ soit le carré d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre un; ou, si l'on veut, que F_{2n-6} soit le carré d'un polynome de degré $n - 3$ en x et y, qui égalé à zéro représente une courbe adjointe à $f = 0$.

Dans ce cas, du et dv sont des différentielles *abéliennes de première espèce* le long de la courbe C : celle-ci est alors ce que j'ai appelé une *courbe univoque* (*Journal de Math.*, 4e série, t. IX), c'est-à-dire que son équation sur la surface de Kummer s'obtient en annulant une fonction thêta des variables u et v, qui n'est ni paire ni impaire.

7. Supposons maintenant que la courbe C passe par un ou plusieurs points doubles de la surface de Kummer; on aura toujours (no 3) le

long de cette courbe

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ étant une fonction thêtafuchsienne du second ordre de ξ. Cette fonction, d'après le n° **5**, ne peut admettre comme pôles (nécessairement d'ordre un) ou comme zéros d'ordre impair, que les valeurs de ξ qui répondent aux points de C coïncidant avec un point double de la surface. Pour éclaircir cette question, supposons que, pour $\xi = \xi_0$, la courbe C passe par le point double qui a pour arguments abéliens $u = 0$, $v = 0$ sur la surface (le raisonnement serait le même pour un autre point double) et prenons ce point pour origine, $x = y = z = 0$, des coordonnées. On aura, *sur la courbe* C, au voisinage de ξ_0,

$$x = \alpha(\xi - \xi_0)^p + \beta(\xi - \xi_0)^{p+1} + \ldots$$

et des expressions analogues pour y et z : dans ces équations, p désigne un entier positif, au moins égal à 1; si $p = 1$, la branche de courbe qui répond aux valeurs voisines de ξ_0 est *simple;* si $p > 1$, la courbe présente, pour ces valeurs, un *cycle* singulier, d'ordre p.

Observons maintenant que, *sur la surface de Kummer*, en vertu même du mode de représentation de M. Weber, les coordonnées x, y et z sont des fonctions paires des paramètres u et v; au voisinage de $u = 0$, $v = 0$; on a donc, sur la surface,

$$x = A u^2 + B uv + C v^2 + \ldots$$

et de même pour y et z. On en conclut, *le long de la courbe* C, au voisinage de ξ_0,

$$A u^2 + B uv + C v^2 + \ldots = \alpha(\xi - \xi_0)^p + \beta(\xi - \xi_0)^{p+1} + \ldots$$

et deux autres équations semblables; d'où

$$u^2 = \lambda(\xi - \xi_0)^p + \ldots, \qquad uv = \mu(\xi - \xi_0)^p + \ldots, \qquad v^2 = \nu(\xi - \xi_0)^p + \ldots$$

et par suite u et v, exprimés en fonction de ξ le long de C, sont d'ordre $\frac{1}{2}p$ en $(\xi - \xi_0)$. Dès lors on a

$$du + \rho\, dv = (\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2}p-1} F(\xi - \xi_0)\, d\xi,$$

F ne devenant ni nul ni infini pour $\xi = \xi_0$; ce qui montre que $\Theta(\xi)$ contient $(\xi - \xi_0)^{p-2}$ en facteur. Ainsi :

1° La fonction $\Theta(\xi)$ admet comme pôles d'ordre un les valeurs de ξ répondant aux branches *simples* de la courbe C qui passent par les points doubles de la surface, et ces valeurs seulement;

2° Elle admet comme zéros d'ordre $p-2$ les valeurs de ξ répondant aux *cycles* d'ordre p que présente la courbe en ces mêmes points doubles. Les autres zéros de $\Theta(\xi)$ sont (n° 3) d'ordre de multiplicité pair.

8. On ne devra pas oublier, en appliquant ces résultats, qu'un point multiple d'ordre n, *à tangentes distinctes*, est formé par n branches simples; au contraire, un cycle d'ordre p comporte p branches à tangentes confondues en une seule.

Application aux courbes de genre zéro.

9. Pour une courbe unicursale C, tracée sur la surface de Kummer, on a évidemment

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ étant une fonction rationnelle du paramètre unicursal ξ, dont chaque valeur répond à un point de la courbe et inversement.

Cette fonction ne peut être identiquement nulle quel que soit ρ, car on aurait tout le long de la courbe C, $du = dv = 0$, c'est-à-dire

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.};$$

conclusion inadmissible, car à des valeurs données de u et v correspond *toujours*, sur la surface de Kummer, un point et *jamais* une courbe : cela tient à ce que les quatre fonctions thêta auxquelles sont proportionnelles les coordonnées d'un point de la surface ne s'annulent simultanément pour aucun système de valeurs de u, v.

Cela posé, pour que l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi$ reste finie quel que soit ξ, il faut que le nombre des pôles de $\Theta(\xi)$ surpasse de *quatre unités au* *moins* le nombre des zéros (on a préalablement effectué sur ξ la transformation homographique la plus générale, de manière que $\xi = \infty$ ne soit pas un point critique de l'intégrale). Comme les pôles, nécessairement simples, de $\Theta(\xi)$ ne peuvent correspondre qu'aux branches simples que présente l'unicursale aux points doubles de la surface (n° **7**), il en résulte que :

Il n'existe, sur aucune surface de Kummer, de courbe unicursale ayant au total moins de quatre branches simples en des points doubles de la surface.

Par exemple, il n'y a pas de courbe unicursale ne passant par aucun point double; donc il n'existe pas de plan touchant une surface de Kummer en trois points simples, de quadrique la touchant en neuf points simples, etc.

10. Le cas d'une unicursale C présentant en tout quatre branches simples en des points doubles de la surface mérite un examen; soient ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les valeurs du paramètre ξ qui répondent à ces quatre branches; on a nécessairement, par ce qui précède,

$$du + \rho\, dv = a \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_4)}}$$

tout le long de la courbe C, a désignant une constante. Comme ρ est arbitraire, du et dv sont de la même forme, de sorte que $du = k\, dv$ sur C; l'équation de l'unicursale sur la surface est donc

$$u = kv + \text{const.},$$

k étant constant. Mais on reconnaît bien aisément qu'une courbe définie par cette relation linéaire entre u et v ne peut être algébrique que si les quatre périodes abéliennes de $u - kv$ se réduisent à deux : on est donc placé dans le *cas elliptique*. J'ai montré ailleurs (*American Journal of Mathem.*, t. XVI) qu'en égalant à une constante convenable les deux quantités $u - kv$ dont les périodes abéliennes se réduisent à deux, on obtient au total *huit* courbes unicursales passant chacune simplement par quatre points doubles de la surface de Kummer. Par suite :

Dans le cas elliptique, et dans ce cas seulement, on peut tracer sur la surface de Kummer des courbes unicursales présentant, au total, quatre branches simples en des points doubles de la surface; ces courbes, au nombre de huit, passent chacune simplement par quatre points doubles.

Par exemple, le *tétraédroïde* possède huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans, et contenant quatre points doubles chacune.

On conclut de là que, pour $p = 0$, 1 ou 2, il n'existe pas de surface d'ordre n, passant simplement par p points doubles de la surface de Kummer, et touchant celle-ci en $2n^2 - p + 1$ points simples : la courbe d'intersection serait, en effet, unicursale, comme on le vérifie aisément, et aurait 0, 2 ou 4 branches simples en des points doubles de la surface, dont le nombre serait inférieur à quatre.

11. Passons maintenant au cas d'une unicursale C, présentant au total plus de quatre branches simples en des points singuliers de la surface de Kummer; la fonction rationnelle $\Theta(\xi)$ correspondante a alors plus de quatre pôles simples. Elle en a *six au moins*, comme on le reconnaît, en opérant sur ξ une transformation homographique, de manière que le point $\xi = \infty$ ne soit pas critique pour l'intégrale

$$\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi.$$

Il en résulte qu'*une unicursale tracée sur une surface de Kummer non elliptique doit présenter en tout, aux points doubles de la surface, six branches simples au moins.*

12. Admettons d'abord qu'il y ait exactement six branches simples, répondant aux valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ du paramètre ξ qui détermine les points de l'unicursale C : pour que l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi$ reste finie pour $\xi = \infty$, il faut que $\Theta(\xi)$, qui n'a que les six pôles simples

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$, n'ait que deux zéros, lesquels sont nécessairement confondus (nº **7**), puisque, par hypothèse, la courbe C n'a, aux points doubles de la surface, que les six branches (simples) considérées ici. On a donc, tout le long de la courbe C,

$$du + \rho\, dv = \frac{a\xi + b}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi.$$

Comme ρ est quelconque, u et v sont, le long de C, deux intégrales hyperelliptiques de genre *deux* et de première espèce; en un point de C, elles ne sont donc déterminées qu'à certaines périodes près, que nous définirons de la manière suivante : Soient u' et v' deux intégrales hyperelliptiques du même type que u et v le long de la courbe C,

$$(3) \quad u' = \int \frac{a_1\xi + b_1}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi, \qquad v' = \int \frac{a_2\xi + b_2}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi,$$

formant un système normal, c'est-à-dire admettant comme périodes quatre couples de quantités, de la forme $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'). Les intégrales u et v, le long de C, sont des fonctions linéaires de u' et v', fonctions qu'on peut supposer homogènes, si l'on choisit convenablement les limites inférieures des intégrales

$$(4) \qquad u = \lambda u' + \mu v', \qquad v = \lambda' u' + \mu' v'.$$

En un point de la courbe C, u' et v' ne sont déterminés qu'à une de leurs périodes près, *quelconque d'ailleurs;* si u' et v' augmentent d'une période, u et v augmentent, en vertu de (4), de quantités correspondantes. Mais u et v sont, par hypothèse, les arguments hyperelliptiques d'un point de la courbe C, c'est-à-dire de la surface de Kummer; ils ne peuvent donc avoir, en un même point, que des valeurs différant entre elles d'une période des fonctions abéliennes liées à la surface. Soit, comme au nº **3**, $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g') un système de périodes primitives pour u et v sur la surface; les quantités u et v définies par (4) augmenteront d'une période de ce dernier système quand u' et v' augmentent d'une période *quelconque* dérivée des périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ').

En d'autres termes, si l'on considère u' et v' comme deux variables abéliennes, *indépendantes entre elles*, de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'), les équations (4) établissent une *transformation* entre les fonctions abéliennes des variables u' et v', admettant ces périodes, et les fonctions abéliennes des variables u et v, admettant les périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g') : car, aux valeurs u' + période, v' + période, les équations (4) font correspondre, d'après ce qui précède, des valeurs de la forme u + période, v + période, c'est-à-dire un seul *point abélien* u, v.

Si nous admettons que les fonctions abéliennes en u, v (ou en u', v') ne sont pas singulières dans le sens que nous avons donné à ce mot (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V, VI et VII), la transformation dont il s'agit est nécessairement une transformation ordinaire, et il est aisé de déterminer son ordre.

13. L'équation de la courbe C, sur la surface de Kummer, est de la forme $\Theta(u, v) = 0$, la fonction $\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta, aux périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), qui est nécessairement *paire* ou *impaire :* autrement, en effet, la courbe serait univoque (n° 6); c'est-à-dire que u et v seraient des intégrales abéliennes de première espèce sur cette courbe, qui, dès lors, ne pourrait être unicursale.

D'ailleurs, le long de C, u' et v' sont deux intégrales hyperelliptiques de genre *deux*, aux périodes normales $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'); elles sont donc liées, en vertu d'un théorème fondamental classique, par une équation $\Im(u', v') = 0$, en désignant par $\Im(u', v')$ une fonction thêta du premier ordre, aux périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ') : cette fonction est nécessairement paire ou impaire, car u et v n'étant simultanément définis qu'au signe près le long de C, il en est de même de u' et v', d'après (4).

Cela posé, si la transformation définie par les équations (4) est d'ordre n, ces équations font correspondre, à un point abélien u, v, n^2 points abéliens u', v', dont les arguments diffèrent de certains $n^{\text{ièmes}}$ de périodes; on aura donc, d'après la théorie de la transformation, appliquée à la fonction $\Theta(u, v)$,

$$(5)\quad \Theta(u, v) = e^{P(u', v')} \Im(u', v') \Im(u' + \alpha_2, v' + \beta_2) \ldots \Im(u' + \alpha_{n^2}, v' + \beta_{n^2}),$$

en désignant par $P(u', v')$ un polynome du second ordre en u', v' et par $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_{n^2}, \beta_{n^2}$, des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes convenables.

Or, on sait qu'une fonction thêta d'ordre p en u, v a pour transformée en u', v' une fonction thêta d'ordre pn; si p est l'ordre de $\Theta(u, v)$, l'ordre du second membre de (5), qui est évidemment n^2, devant être égal à pn, on aura

$$n = p.$$

Ainsi la transformation que nous étudions a pour ordre l'ordre même de $\Theta(u, v)$, ou, si l'on veut, la moitié du degré de la courbe $\Theta(u, v) = 0$, c'est-à-dire de C (1).

14. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Soit une surface de Kummer liée à des fonctions abéliennes dérivant du radical $\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}$; *supposons qu'une courbe unicursale, tracée sur elle, et de degré* $2p$, *présente en tout six branches simples aux points doubles de la surface, et désignons par* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ *les valeurs du paramètre unicursal correspondantes; les fonctions abéliennes dérivées respectivement des deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$$

sont liées par une transformation d'ordre p.

Nous reviendrons plus loin sur ce théorème et sur sa réciproque, et nous en ferons quelques applications.

15. Le cas d'une courbe unicursale ayant plus de six branches simples au total en des points doubles de la surface de Kummer paraît moins intéressant. Le long d'une telle courbe, u et v se présentent sous

---

(1) Car, sur la surface de Kummer définie paramétriquement par le procédé de M. Weber, la courbe $\Theta(u, v) = 0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta, paire ou impaire, d'ordre p, est coupée par un plan en $\frac{1}{2}.2.2.p$ points; elle est donc d'ordre $2p$.

la forme d'intégrales hyperelliptiques de genre supérieur à deux, et comme elles ne peuvent admettre que quatre paires de périodes simultanées, on a un exemple géométrique d'intégrales réductibles au genre *deux*. Nous n'insisterons pas sur ce point.

16. *Courbes de genre un.* — Il est aisé d'établir, en suivant les méthodes précédentes, que, en dehors du cas elliptique, une courbe de genre *un*, tracée sur la surface de Kummer, présente en tout quatre branches au moins en des points singuliers de la surface. Par suite, il n'existe pas de plan tangent à la surface en deux points simples; pas de quadrique tangente en huit points simples, etc.

Application aux courbes de genre deux.

17. Nous ne traiterons que des courbes de genre *deux* (tracées sur la surface de Kummer) ne passant par aucun des seize points doubles.

Soient C une pareille courbe; C′ une courbe plane du quatrième ordre, à un point double, lui correspondant point par point, et d'équation $f(x, y) = 0$. Les différentielles $du + \rho\, dv$ prises sur la surface le long de C ont pour expression le long de C′ (n°.5)

$$du + \rho\, dv = \frac{\sqrt{F_2(x, y)}}{f'_y}\, dx,$$

$F_2(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une conique *biadjointe* à C′, c'est-à-dire ayant un point double au point double de C′. La conique $F_2 = 0$ se décompose donc en deux droites passant par ce point et qui, de plus, doivent être soit confondues, soit tangentes à C′ (n° 5) : mais les tangentes menées à C′ par son point double sont au nombre de six, et l'équation simultanée de deux d'entre elles ne peut contenir de paramètre arbitraire; comme $F_2(x, y)$ doit évidemment dépendre du paramètre ρ, il faut que les deux droites qui composent la conique $F_2 = 0$ soient confondues. En d'autres termes, du et dv sont de la forme

$$\frac{ax + by + c}{f'_y}\, dx,$$

la droite $ax + by + c = 0$ passant par le point double de C'; u et v sont donc *deux intégrales abéliennes de première espèce* appartenant à cette courbe.

Il en résulte qu'on peut séparer analytiquement, le long de C' ou de C, les arguments u, v et $-u$, $-v$ qui correspondent à un même point; C est donc une courbe *univoque*, c'est-à-dire que son équation, sur la surface de Kummer, s'obtient en annulant une fonction thêta, de u et v, qui n'est ni paire, ni impaire.

18. Soient maintenant u' et v' deux intégrales abéliennes de première espèce, appartenant à C' (ou, ce qui revient au même, à C) et formant un système normal, c'est-à-dire ayant des couples de périodes du type $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ'); en un point de C, u' et v' prennent des valeurs qui diffèrent entre elles d'une période, et cette période peut être *quelconque*. Comme C est de genre *deux*, u et v sont, le long de cette courbe, linéaires en u' et v' :

$$(6) \qquad u = \lambda u' + \mu v'; \qquad v = \lambda' u' + \mu' v'.$$

D'ailleurs, en un point de C, u et v prennent des valeurs qui diffèrent entre elles d'une période dérivée des périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') liées aux arguments u et v sur la surface de Kummer; il en résulte que, u' et v' augmentant d'une *quelconque* de leurs périodes, u et v, définis par (6), augmentent d'une des leurs. Par suite (n° **12**), les équations (6) établissent une *transformation* entre les fonctions abéliennes de u, v, aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), et les fonctions abéliennes de u', v', aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ').

Si la transformation est ordinaire, ce qui est le cas certain pour des fonctions abéliennes non singulières, soit n son ordre; $\Theta(u, v)$ étant le premier membre de l'équation de C sur la surface de Kummer, on a, comme au n° **13**,

$$(7) \quad \Theta(u, v) = e^{P(u', v')}\mathfrak{Z}(u', v')\,\mathfrak{Z}(u' + \alpha_2, v' + \beta_2)\ldots\mathfrak{Z}(u' + \alpha_{n^2}, v' + \beta_{n^2}),$$

d'où l'on conclut encore que n est égal à l'ordre, p, de la fonction thêta $\Theta(u, v)$.

Dans cette équation, $\mathfrak{Z}(u', v')$ désigne, comme au n° **13**, une fonction thêta d'ordre un, aux périodes $(1, 0), (0, 1), (\sigma, \tau), (\tau, \sigma')$; mais cette fonction n'est plus paire ou impaire, parce que $\Theta(u, v)$ ne l'est pas.

Le degré de la courbe C est d'ailleurs égal à $4p$, car le nombre des zéros communs à $\Theta(u, v)$ et à une fonction thêta du second ordre est $4p$, et ces zéros ne sont pas deux à deux égaux et de signes contraires, puisque $\Theta(u, v)$ n'est ni paire ni impaire.

19. Complétons ces résultats par une interprétation géométrique. Soient K la surface de Kummer initiale sur laquelle est tracée C, et K′ une surface analogue définie de la même manière à l'aide des fonctions abéliennes en u' et v'. En vertu de (6), à un point u', v' de K′ répond un seul point u, v de K, et à un point de K répondent p^2 points de K′, puisque la transformation (6) est d'ordre p. Quand le point u, v décrit sur K la courbe C, l'équation (7) montre que les p^2 points u', v' correspondants décrivent, sur K′, les p^2 courbes distinctes

$$\mathfrak{S}(u', v') = 0, \qquad \mathfrak{S}(u' + \alpha_2, v' + \beta_2) = 0, \qquad \ldots,$$

dont chacune, dès lors, correspond à C *point par point*. D'ailleurs, la courbe $\mathfrak{S}(u', v') = 0$, où $\mathfrak{S}(u', v')$ est une fonction thêta d'ordre *un*, ni paire ni impaire, est la section de K′ par un plan tangent, et a pour modules les modules mêmes des fonctions abéliennes liées à K′ (¹).

Observons encore qu'en désignant par α et β deux constantes, la courbe définie sur K par l'équation $\Theta(u + \alpha, v + \beta) = 0$ correspond évidemment point par point à $\Theta(u, v) = 0$; c'est donc une courbe de même genre (*deux*) et de mêmes modules que C; elle est aussi de même degré, $4p$.

Enfin, chacune des courbes $\Theta(u + \alpha, v + \beta) = 0$, y compris C, est l'intersection complète de la surface K avec une surface d'ordre p (²); en général, une telle intersection est de genre $2p^2 + 1$ et, pour qu'elle soit de genre *deux*, il faut qu'elle admette $2p^2 - 1$ points doubles (ou des points multiples d'ordre supérieur en nombre équivalent); la surface d'ordre p touchera donc la surface de Kummer en $2p^2 - 1$ points.

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. IX, p. 112.
(²) *Ibid.*, t. IX, p. 155.

20. On peut donc énoncer ce résultat :

Soit, sur une surface de Kummer, une courbe de genre deux *ne passant par aucun des seize points doubles : cette courbe est de degré $4p$; elle appartient à un groupe doublement infini de courbes de même degré, de même genre et de mêmes modules, également tracées sur la surface et ne passant par aucun point double. Chacune de ces courbes, y compris la proposée, est l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre p, qui la touche en $2p^2-1$ points; ses modules sont ceux de fonctions abéliennes liées, par une transformation d'ordre p, à celles qui définissent la surface primitive.*

Réciproquement : *Toute surface d'ordre p touchant la surface de Kummer en $2p^2-1$ points et ne passant par aucun de ses seize points doubles, la coupe suivant une courbe de degré $4p$ et de genre* deux, *dont les modules jouissent de la propriété précédente.*

Une autre réciproque, à peu près évidente, est celle-ci :

Soient K *et* K′ *deux surfaces de Kummer transformées l'une de l'autre par une transformation ordinaire d'ordre p, c'est-à-dire telles qu'à un point de* K′ *réponde un point de* K *et, à un point de* K, *p^2 points de* K′ : *aux sections de* K′ *par ses plans tangents correspondent, point par point, sur* K, *des courbes d'ordre $4p$, de genre* deux, *ayant toutes pour modules ceux des fonctions abéliennes qui définissent la surface* K′.

21. De cet ensemble de propositions résulte le théorème général :

Les surfaces d'ordre p qui touchent une surface de Kummer en $2p^2-1$ points, c'est-à-dire la coupent suivant des courbes de genre deux, *et qui ne passent par aucun des seize points singuliers, se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations ordinaires, non équivalentes, d'ordre p; chaque groupe est lié à une de ces transformations.*

Les surfaces d'un groupe sont en nombre doublement infini et coupent la surface de Kummer proposée suivant des courbes de *degré $4p$ et de genre* deux *qui ont les mêmes modules : ces modules sont ceux des fonctions abéliennes transformées, par la transformation qui correspond au groupe, des fonctions abéliennes liées à la surface de Kummer initiale.*

On a ainsi une représentation géométrique très simple des transformations d'un ordre donné et des équations modulaires correspondantes.

Par exemple, si p est premier, il y a $1+p+p^2+p^3$ transformations non équivalentes d'ordre p (Hermite); nous aurons donc ce même nombre pour nos groupes de surfaces d'ordre p. Ainsi, il y a quarante groupes de surfaces du troisième ordre touchant chacune la surface de Kummer en dix-sept points; quinze groupes de quadriques tangentes en sept points, etc.

22. On peut rattacher à cette théorie les résultats donnés plus haut (nº **14**) à propos de certaines courbes unicursales.

Reprenons les deux surfaces de Kummer K et K′ introduites tout à l'heure : aux sections de K′ par ses plans tangents correspondaient point par point, sur K, des courbes de genre *deux* et de degré $4p$. Si $\mathfrak{S}(u', v') = 0$ est l'équation d'une des sections considérées sur K′, et si $\Theta(u, v) = 0$ est celle de la courbe correspondante sur K, on a (7)

$$\Theta(u, v) = e^{P(u', v')}\mathfrak{S}(u', v')\,\mathfrak{S}(u'+\alpha_2, v'+\beta_2), \ldots, \mathfrak{S}(u'+\alpha_{p^2}, v'+\beta_{p^2}).$$

Parmi les sections de K′ par ses plans tangents figurent les seize coniques de cette surface; soit $\mathfrak{S}_0(u', v') = 0$ l'une d'elles. La fonction $\mathfrak{S}_0(u', v')$ est un des seize thêtas normaux d'ordre *un;* elle est paire ou impaire. On en déduit immédiatement que la fonction $\Theta(u, v)$ correspondante, que je désignerai par $\Theta_0(u, v)$, est aussi paire ou impaire; de plus, $\mathfrak{S}_0(u', v')$ s'annule pour six demi-périodes de u', v'; d'où l'on conclut que $\Theta_0(u, v)$ s'annule six fois pour des demi-périodes de u, v. Plus exactement, la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a six branches simples en des points doubles de K. Cette courbe est d'ailleurs de degré $2p$, au lieu de $4p$, à cause de la parité ou de l'imparité de $\Theta_0(u, v)$; elle est unicursale, puisqu'elle répond point par point à la conique $\mathfrak{S}_0(u', v') = 0$.

23. Réciproquement, toute unicursale de degré $2p$, tracée sur K, et présentant en tout six branches simples aux points doubles de cette surface, appartient, comptée deux fois, à un des *groupes* de courbes de genre *deux* et d'ordre $4p$ rencontrés tout à l'heure. Car si $\Theta_0(u, v) = 0$ est son équation, je dis que les courbes

$$\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$$

sont de degré $4p$ et de genre *deux*.

1° Elles sont d'un degré double du degré de $\Theta_0(u, v) = 0$, car la fonction $\Theta_0(u, v)$ est nécessairement paire ou impaire (n° **13**) et la fonction $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta)$ n'a plus cette propriété, tout en ayant, comme fonction thêta, le même ordre que la précédente.

2° Elles sont de genre *deux*, car on peut établir entre les courbes $\Theta_0(U, V) = 0$ et $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$ la correspondance

$$U = u+\alpha, \qquad V = v+\beta,$$

qui à un point u, v ne fait correspondre qu'un point U, V, et à un point U, V fait correspondre les deux points $u = \varepsilon U - \alpha$, $v = \varepsilon V - \beta$, ε désignant ± 1. D'ailleurs, ces deux derniers points ne coïncident que si U, V est une demi-période, ce qui se présente en tout six fois, puisque la courbe $\Theta_0(U, V) = 0$ n'a que six branches simples aux points doubles de K : le genre ρ de la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$ s'obtient dès lors par la formule de M. Zeuthen sur les genres de deux courbes correspondantes, ce qui donne ici

$$2(\rho - 1) = 2.2.(0-1) + 6, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = 2.$$

24. Il résulte de là et du théorème du n° **14** que, pour obtenir les modules de toutes les fonctions abéliennes liées, par une transformation d'ordre p, aux fonctions abéliennes qui définissent une surface de Kummer donnée K, on pourra procéder ainsi: on cherchera à déterminer sur K les unicursales d'ordre $2p$ qui présentent en tout six branches simples aux points doubles de la surface; ces courbes se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations non équivalentes d'ordre p. Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ sont les valeurs du paramètre unicursal qui correspond, sur une des courbes, aux six branches simples passant par des points doubles, le radical $\sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$ donnera naissance (n° **14**) à des fonctions abéliennes liées aux fonctions primitives par une transformation d'ordre p.

Transformations d'ordre trois.

25. Pour les transformations du troisième ordre, on doit, d'après ce qui précède, chercher les courbes unicursales de degré *six* ayant en tout six branches simples aux points singuliers. Or (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 42), les courbes d'ordre *six* se divisent en deux grandes classes : celles de la première passent simplement par six points doubles, celles de la seconde par dix. Les premières sont donc seules admissibles. Elles se répartissent (*ibid.*) en seize familles, quadruplement infinies chacune, et qui sont transformées l'une de l'autre par une des quinze transformations homographiques de la surface en elle-même (ces transformations font répondre à un point u, v le point $u+\frac{1}{2}$ période, $v+\frac{1}{2}$ période). Il suffit donc de considérer une des seize familles : les courbes correspondantes sont (*ibid.*) les intersections de la surface de Kummer K avec des quadriques menées par une des seize coniques, γ. Une pareille courbe est, en général, de genre *quatre* (*ibid*, p. 141); pour qu'elle soit unicursale, il faut qu'elle ait quatre points doubles, distincts des points singuliers de K, puisqu'en ces derniers points il ne peut y avoir, en tout, que six branches simples. Ainsi, tout revient à déterminer, parmi les quadriques en nombre quatre fois infini qui passent par la conique γ, celles qui touchent la surface de Kummer en quatre points (simples). Il y en a en tout quarante, puisqu'il y a quarante transformations non équivalentes d'ordre *trois* (nos **21**, **24**). En projetant la figure à partir d'un des points doubles de K, non situés sur γ, on arrive sans difficulté à ce résultat (1) :

Soient ABC *et* A'B'C' *deux triangles circonscrits à une même conique; désignons par* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *les arguments des six côtés considérés comme tangents à la conique.*

(1) *Voir*, à ce sujet, notre Mémoire *Sur les fonctions abéliennes singulières* (ce Journal, 5e série, t. V, p. 342-344).

Il y a quarante courbes unicursales du sixième ordre passant par les sommets des deux triangles et en outre bitangentes aux six côtés; si $\xi_1, \ldots, \xi_6$ sont les arguments unicursaux qui répondent aux six sommets sur une de ces courbes, les fonctions abéliennes des deux radicaux

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad et \quad \sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$$

sont liées par une transformation du troisième ordre.

On obtient ainsi les quarante transformations non équivalentes de cet ordre.

Transformations d'ordre deux.

26. Les courbes d'ordre quatre, sur la surface de Kummer ordinaire, sont les sections planes et des biquadratiques dont chacune passe par *huit* points doubles (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 79). Les quartiques ayant *six* branches simples en des points singuliers ne peuvent donc appartenir qu'à la catégorie des sections planes; et ce seront nécessairement les sections faites par des plans contenant trois points doubles. On doit rejeter les seize coniques qui sont d'ordre deux et non d'ordre quatre; or il y a en tout $\frac{1}{6}16 \times 15 \times 14$ plans menés par trois des seize points doubles; parmi eux figure chacun des seize plans singuliers compté $\frac{1}{6}6 \times 5 \times 4$ fois, puisqu'il contient six points doubles; il reste donc $\frac{1}{6}16[15 \times 14 - 6 \times 5 \times 4]$, ou 240 plans non singuliers contenant trois points doubles chacun. D'ailleurs, ces plans sont transformés les uns des autres par les quinze transformations homographiques de la surface en elle-même, de sorte qu'il n'y a à considérer que 240 : 16, c'est-à-dire quinze, d'entre eux. Ce nombre de quinze est, comme cela devait être, celui des transformations non équivalentes du second ordre. Ainsi :

Soient K *une surface de Kummer et* A_1, A_2, A_3 *trois de ses points doubles non situés dans un même plan singulier; la section de* K *par le plan* A_1, A_2, A_3 *est une quartique unicursale, admettant* A_1, A_2 *et* A_3 *comme points doubles : les six arguments de ces points sur l'unicursale sont les racines d'un polynome du* *sixième ordre dont la racine carrée donne naissance à des fonctions abéliennes liées, par une transformation quadratique, à celles dont dépend la surface de Kummer proposée.*

27. On peut donner à ce résultat une forme bien autrement élégante.

Observons d'abord qu'en vertu des propriétés générales de la surface de Kummer, il existe un point double A_0 de cette surface, tel que le tétraèdre $A_0A_1A_2A_3$ n'admette pour face aucun plan singulier de K. Dès lors, les six plans singuliers qui contiennent le point A_0 passent, deux par deux, par les trois droites A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, et coupent le plan $A_1A_2A_3$ suivant six droites tangentes à une même conique (τ), qui est la section du cône des tangentes à la surface K en A_0. Les rapports anharmoniques des six droites précédentes quatre à quatre sont, d'ailleurs, comme on sait, les modules de K, c'est-à-dire ceux des fonctions abéliennes liées à cette surface.

Cela posé, prenons, dans le plan $A_1A_2A_3$, le triangle $A_1A_2A_3$ pour triangle de référence, $xyz = 0$; la quartique unicursale considérée plus haut, admettant A_1, A_2 et A_3 comme points doubles, est la transformée d'une conique (σ) par la substitution

$$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{1}{y}, \qquad z' = \frac{1}{z};$$

aux points A_1, A_2, A_3 considérés comme appartenant successivement aux branches de la quartique qui s'y croisent, correspondent les six points où la conique (σ) coupe les six côtés du triangle de référence. Ainsi, les modules des fonctions abéliennes, liées à celles qui définissent K par la transformation quadratique du théorème précédent, sont les rapports anharmoniques, quatre à quatre, des six points où les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ coupent (σ).

D'un autre côté, nous avons dit tout à l'heure que les modules des fonctions abéliennes liées à K sont les rapports anharmoniques des six droites, tangentes à la conique (τ), suivant lesquelles le plan $A_1A_2A_3$ coupe les six plans singuliers menés par A_0 : ces six droites sont évidemment les six tangentes qu'on peut mener à la quartique unicursale envisagée, par les points A_1, A_2, A_3; on vérifie directement, par la

Géométrie analytique, que leurs rapports anharmoniques quatre à quatre, sur la conique qu'elles touchent, sont les mêmes que ceux des six tangentes qu'on peut mener à la conique (σ) par A_1, A_2, A_3. Par conséquent :

Soit donné un radical $\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}$; *marquons sur une conique quelconque* (σ) *les six points qui ont pour arguments unicursaux les quantités* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *et joignons-les deux à deux par trois droites, de manière à former un triangle* T *dont chaque côté contienne deux des six points et dont aucun sommet ne soit sur la conique. Il y a quinze pareils triangles.*

Prenons maintenant le triangle polaire de T *par rapport à la conique; soient* $b_1, b_2, \ldots, b_6$ *les arguments des six points où ses côtés coupent la courbe; les deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x-b_1)\ldots(x-b_6)}$$

donnent naissance à deux systèmes de fonctions abéliennes liés l'un à l'autre par une transformation du second ordre.

Aux quinze triangles T *correspondent ainsi les quinze systèmes qui dérivent du système primitif par une transformation quadratique.*

28. Analytiquement, cette construction conduit au résultat suivant :

Les quinze transformations quadratiques des fonctions abéliennes dérivées du radical $\sqrt{x^6+Ax^5+\ldots+Ex+F}$ sont liées respectivement aux quinze décompositions du polynome sous le radical en trois facteurs du second degré.

Soit une de ces décompositions

$$(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)(x^2+p_3x+q_3);$$

le polynome du sixième ordre qui donne naissance aux fonctions abéliennes de la transformation correspondante est

$$\begin{aligned}&[x^2(p_2-p_1)+x(q_2-q_1)+p_1q_2-p_2q_1]\\ \times\,&[x^2(p_3-p_2)+x(q_3-q_2)+p_2q_3-p_3q_2]\\ \times\,&[x^2(p_1-p_3)+x(q_1-q_3)+p_3q_1-p_1q_3].\end{aligned}$$

29. Terminons par quelques propositions relatives aux quadriques sept fois tangentes à la surface de Kummer. D'abord, en vertu de nos théorèmes généraux :

Il y a quinze groupes, doublement infini chacun, de quadriques touchant en sept points une surface de Kummer K *et ne passant par aucun des seize points singuliers de cette surface; les quadriques d'un même groupe coupent* K *suivant des courbes d'ordre huit, de genre deux, qui ont les mêmes modules; ces modules sont ceux d'un des quinze systèmes de fonctions abéliennes liées, par transformation quadratique, aux fonctions dont dépend la surface de Kummer proposée.*

Si $\Theta_0(u, v) = 0$ *est l'équation de la section faite sur* K *par un plan non singulier contenant trois points doubles de* K, *les courbes de genre deux ci-dessus, appartenant à un même groupe, sont données par l'équation* $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$, *où* α *et* β *désignent deux constantes arbitraires.*

D'après cela, les courbes $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$ ont *sept points doubles;* mais ces points doubles sont de deux espèces.

Quatre d'entre eux ont pour arguments les solutions communes aux deux équations $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$, $\Theta_0(-u+\alpha, -v+\beta) = 0$: ces solutions sont au nombre de $2.2.2$, ou 8, puisque $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta du second ordre; comme elles sont deux à deux égales et de signe contraire, elles ne donnent bien que quatre points doubles de la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$.

On obtient les *trois* autres points doubles comme il suit. Désignons par ω, ω' une des trois demi-périodes qui annulent (doublement) $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire les arguments u, v d'un des trois points singuliers de K que contient la section plane $\Theta_0(u, v) = 0$: il est clair que le point d'arguments $\omega - \alpha$, $\omega' - \beta$ sera un point double sur la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$. On trouve donc ainsi trois points doubles, dont les arguments diffèrent de demi-périodes, ce qui conduit à de nombreuses propriétés, faciles à énoncer, de ces groupes de trois points.

La courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$ étant de genre deux est hyperelliptique et ses points sont, par suite, deux à deux conjugués. Si (u, v) est un de ces points, le conjugué est évidemment $(-2\alpha - u, -2\beta - v)$; les deux conjugués coïncident si $u + \alpha$, $v + \beta$ est une demi-période, ce qui ne se produit que pour les trois points doubles de la seconde espèce. Ces points, considérés comme appartenant successivement à chacune des deux branches de la courbe de genre deux qui s'y croisent, sont donc les six points de *diramation* de cette courbe.