JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 331-350.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__331_0>

Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation;

PAR M. P. DUHEM.

Lagrange a montré qu'un système soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, et qui se trouve en équilibre absolu, est en équilibre stable lorsque le potentiel est minimum. Sa démonstration, fondée sur la considération des petits mouvements, ne prouve, en réalité, ni que cette condition soit nécessaire pour la stabilité de l'équilibre, ni qu'elle soit suffisante. Le caractère suffisant de cette condition a été établi d'une manière entièrement rigoureuse et très simple par Lejeune-Dirichlet; sa démonstration est aujourd'hui classique.

Les conditions de stabilité de l'équilibre relatif en une masse qui tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe ont été établies jusqu'ici par la seule considération des petits mouvements; cette méthode prête aux mêmes objections que la méthode suivie par Lagrange dans le cas de l'équilibre absolu.

Nous nous proposons de trouver ici, par un artifice semblable à celui de Lejeune-Dirichlet, un caractère qui suffit, au moins sous certaines conditions, à assurer cette stabilité.

1. Équilibre relatif d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Supposons qu'un système quelconque soit animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω_0, autour d'un axe que nous prendrons pour axe des z. On sait que les conditions de l'équilibre relatif de cette masse s'obtiendront en écrivant que les équations de la statique sont vérifiées lorsqu'on adjoint aux forces extérieures appliquées à la masse fluide la force centrifuge appliquée à chaque masse élémentaire dm; les composantes de cette force sont

$$(1) \qquad X_c dm = \omega_0^2 x\, dm, \qquad Y_c dm = \omega_0^2 y\, dm, \qquad Z_c = 0.$$

Désignons par $\mathfrak{F}$ le potentiel interne du système; par $\delta\mathfrak{F}$ la variation que subit ce potentiel dans une modification virtuelle sans variation de température; par $d\mathfrak{T}_e$ le travail effectué, dans la même modification, par les actions extérieures, *actions dont le moment par rapport à Oz est supposé constamment nul;* par $d\mathfrak{T}_c$ le travail des forces centrifuges, qui se réduit à

$$(2) \qquad d\mathfrak{T}_c = \omega_0^2 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\, dm.$$

Les conditions de l'équilibre relatif s'obtiendront en écrivant que l'on a, pour toute modification isothermique virtuelle à partir de l'état considéré,

$$(3) \qquad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_c - \delta\mathfrak{F} = 0.$$

Supposons le système animé d'un mouvement quelconque. La vitesse d'un point P de la masse élémentaire dm, à un instant donné, se compose d'une vitesse perpendiculaire au plan qui passe par le point P et l'axe des z et d'une vitesse située dans ce plan et, partant, rencontrant l'axe des z; désignons la première par $\omega(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ et la seconde par φ. La force vive du système sera alors

$$(4) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int [\omega^2(x^2+y^2) + \varphi^2]\, dm$$

et le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z sera

$$(5) \qquad M = \int \omega(x^2+y^2)\, dm.$$

Dans une modification quelconque du mouvement du système, M éprouve une variation

$$(6) \qquad \delta M = 2\int \omega (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \int (x^2 + y^2)\,\delta\omega\,dm.$$

Supposons que la modification soit produite à partir d'un état où le fluide est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z; alors, pour tous les éléments dm, ω a la même valeur ω_0; supposons, en outre, qu'en cette modification, M doive garder une valeur invariable; nous aurons l'égalité

$$(7) \qquad 2\omega_0 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \int (x^2 + y^2)\,\delta\omega\,dm = 0.$$

Considérons maintenant la quantité

$$(8) \qquad W = \frac{1}{2}\int \omega^2 (x^2 + y^2)\,dm.$$

Dans une modification quelconque du mouvement, cette quantité éprouve une variation

$$(9) \qquad \delta W = \int \omega^2 (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \int \omega\,(x^2 + y^2)\,\delta\omega\,dm.$$

Si l'état initial du système est un état de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω_0, autour de l'axe des z, cette égalité devient

$$(10) \qquad \delta W = \omega_0^2 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \omega_0 \int (x^2 + y^2)\,\delta\omega\,dm.$$

Si, en outre, le moment M de la quantité de mouvement est supposé invariable, on a l'égalité (7), et l'égalité précédente devient

$$(11) \qquad \delta W = -\,\omega_0^2 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm$$

ou, selon (2),

$$(12) \qquad \delta W = -\,d\mathfrak{T}_c.$$

Dès lors, on voit que la condition (3) peut être remplacée par la suivante : *Pour qu'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω_0, autour de l'axe des z, soit en équilibre relatif dans un certain état, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité*

$$d\mathfrak{T}_e - \delta(\mathfrak{F} + \mathrm{W}) = 0 \tag{13}$$

en toute modification virtuelle, imposée au système à partir de cet état, qui laisse invariable la température de chaque élément dm et qui peut, pour chacun de ces éléments, faire varier ω, tout en laissant invariable la quantité M.

2. Critérium de stabilité de l'équilibre relatif.

Supposons maintenant que les forces extérieures appliquées au système admettent un potentiel Ω :

$$d\mathfrak{T}_e = -\delta\Omega, \tag{14}$$

cas auquel l'égalité (13) pourra s'écrire

$$\delta\Phi = \delta(\mathfrak{F} + \Omega + \mathrm{W}) = 0, \tag{15}$$

en posant

$$\Phi = \mathfrak{F} + \Omega + \mathrm{W}. \tag{16}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Si l'état d'équilibre relatif considéré fait prendre à la grandeur Φ une valeur minimum parmi toutes celles qu'elle peut prendre en des états voisins du système, où chaque élément a la même température et où la quantité M *a la même valeur, l'équilibre relatif est stable pour tout dérangement initial qui n'altère ni la température de chaque élément, ni le moment de la quantité de mouvement, et sous la condition que, pendant le mouvement, chaque élément garde une température invariable.*

Dans cet énoncé, deux états, susceptibles de coïncider par une simple rotation autour de l'axe des z, ne sont pas considérés comme deux états distincts, mais comme un même état.

La grandeur Φ n'étant déterminée qu'à une constante près, nous pouvons déterminer cette constante de telle sorte que, dans l'état d'équilibre considéré, $\Phi = 0$.

Donnons au système un dérangement initial soumis aux conditions indiquées dans l'énoncé; les grandeurs $\mathfrak{F}$, Ω, W, Φ prennent, à l'instant t_1, à la suite de ce dérangement, des valeurs $\mathfrak{F}_1$, Ω_1, W_1, Φ_1; la vitesse φ, qui était nulle dans l'état d'équilibre relatif, prend une valeur φ_1 et, selon les égalités (4) et (8), la force vive initiale a la valeur

$$(17) \qquad \mathfrak{T}_1 = W_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm.$$

Durant le mouvement pris par le système à partir de cette perturbation, la température de chaque élément de masse dm demeure invariable; dès lors, nous pouvons écrire, à chaque instant t de ce mouvement,

$$(18) \qquad \mathfrak{F} + \Omega + \mathfrak{T} = \mathfrak{F}_1 + \Omega_1 + \mathfrak{T}_1 + \theta,$$

θ étant le travail effectué par les actions de viscosité entre l'instant t_1, où la perturbation a pris fin, et l'instant considéré t.

En vertu des égalités (4), (8), (16) et (17), cette égalité peut s'écrire

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2 \, dm = \Phi_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm + \theta$$

ou bien encore

$$(19) \qquad \Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2 \, dm - \theta = \Phi_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm.$$

En outre, comme les actions extérieures auxquelles le système est soumis sont supposées de moment nul par rapport à Oz, le moment de la quantité de mouvement du système par rapport au même axe demeurera égal à M.

Nous allons rapporter chaque point matériel à des coordonnées qui ne changent pas lorsque le système subit une rotation d'ensemble autour de l'axe des z, une telle rotation étant considérée comme ne changeant en rien l'état du système.

Les coordonnées que nous adopterons sont les suivantes :

La coordonnée z;

La distance $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ à l'axe des z;

L'angle ψ que fait un plan passant par l'axe des z et le point matériel considéré avec un plan passant par l'axe des z et un point matériel choisi une fois pour toutes.

Désignons par r_0, ψ_0, z_0 les coordonnées d'un point de la particule dm dans l'état d'équilibre relatif;

Par r_1, ψ_1, z_1 les coordonnées de la même masse matérielle à l'instant t_1; par ω_1 sa vitesse angulaire de rotation autour de Oz au même instant;

Par r, ψ, z les coordonnées du même élément à un instant quelconque t; par ω la vitesse angulaire de rotation au même instant.

Soient ε, σ, χ, ζ, f, des quantités positives quelconques.

Nous allons prouver que l'on peut choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 des valeurs positives si petites que les conditions

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |\omega_1 - \omega_0| < \varepsilon_1, \quad |\varphi_1| < f_1, \quad |r_1 - r_0| < \sigma_1, \\ \qquad |\psi_1 - \psi_0| < \chi_1, \quad |z_1 - z_0| < \zeta_1 \end{array} \right.$$

entraînent nécessairement les inégalités

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int |\omega - \omega_0|\, dm < \varepsilon, \\ \int |r - r_0|\, dm < \sigma, \\ \int |\psi - \psi_0|\, dm < \chi, \\ \int |z - z_0|\, dm < \zeta, \\ \int |\varphi|\, dm < f, \end{array} \right.$$

quel que soit l'instant t, postérieur à t_1, que l'on considère.

Il est clair que la proposition énoncée sera vraie *a fortiori* si l'on remplace pour la démonstration les quantités ε, σ, χ, ζ par des quantités positives plus petites; or, comme, par hypothèse, pour

$$(22) \qquad \omega = \omega_0, \qquad r = r_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad z = z_0,$$

Φ atteint une valeur minimum parmi toutes celles qui correspondent à la même valeur de M et que cette valeur minimum est nulle, on peut toujours prendre pour ε, σ, χ, ζ, des valeurs positives assez petites pour que l'on soit assuré d'avoir

$$\Phi > 0$$

toutes les fois que l'on a, avec la valeur considérée de M,

$$\int |\omega - \omega_0| \, dm \leqq \varepsilon,$$

$$\int |r - r_0| \, dm \leqq \sigma,$$

$$\int |\psi - \psi_0| \, dm \leqq \chi,$$

$$\int |z - z_0| \, dm \leqq \zeta,$$

sauf dans le cas particulier où toutes les égalités (22) seront simultanément vérifiées pour toutes les masses élémentaires du système.

Supposons ε, σ, χ, ζ choisis de la sorte.

Considérons l'ensemble des valeurs prises par Φ dans les divers états E du système que définissent les conditions suivantes :

Le moment de la quantité de mouvement par rapport à Oz est égal à M;

L'une au moins des égalités

$$\int |\omega - \omega_0| \, dm = \varepsilon, \qquad \int |\varphi| \, dm = f,$$

$$\int |r - r_0| \, dm = \sigma, \qquad \int |\psi - \psi_0| \, dm = \chi, \qquad \int |z - z_0| \, dm = \zeta$$

est vérifiée.

Celles de ces égalités qui ne sont pas vérifiées sont remplacées par les inégalités (21) qui leur correspondent.

L'ensemble de ces valeurs de Φ admet forcément une limite inférieure positive P.

On peut toujours supposer, tout d'abord, que l'on ait pris pour ε_1, f_1, σ_1, χ_1, ζ_1 des quantités assez petites pour que l'on ait

$$\int |\omega_1 - \omega_0| dm < \varepsilon,$$

$$\int |r_1 - r_0| dm < \sigma,$$

$$\int |\psi_1 - \psi_0| dm < \chi,$$

$$\int |z_1 - z_0| dm < \zeta,$$

$$\int |\varphi_1| dm < f.$$

Dès lors, à aucun moment, l'une des inégalités (21) ne pourra cesser d'être vérifiée, à moins qu'à un instant t, compris entre l'instant t_1 et ce moment, le système n'ait passé par un des états que nous avons désignés par E. Il suffit donc de prouver que l'on peut prendre ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 assez petits pour qu'à aucun instant t, postérieur à t_1, le système ne puisse atteindre un état E; et pour cela, il suffit de démontrer qu'on peut prendre ces quantités assez petites pour qu'à aucun instant t, postérieur à t_1, Φ ne puisse atteindre la valeur P.

Or cela est évident.

On peut, en effet, donner à ces quantités des valeurs assez petites pour que l'on ait

$$\Phi_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm < \mathrm{P}.$$

Alors, si à un instant t, postérieur à t_1, Φ pouvait atteindre la valeur P, le premier membre de l'égalité (19) serait au moins égal à P, tandis que le second membre serait inférieur à P; l'égalité (19) ne pourrait donc avoir lieu.

3. Variation première, pour une masse fluide, de la fonction $(W + \mathfrak{F} + \Omega)$.

Nous nous proposons d'appliquer cette proposition à une masse fluide animée d'un mouvement de rotation uniforme.

Nous sommes ainsi conduits à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction

$$\mathfrak{F} + \Omega + W$$

prenne une valeur minimum parmi celles qui peuvent correspondre à une même valeur de M.

Si l'on désigne par S la surface qui limite le système, par n_e la normale à cette surface vers l'extérieur du fluide, par Dx, Dy, Dz les composantes du déplacement virtuel d'un point de la surface S; si l'on pose

$$(23) \qquad \Delta = \cos(n_e, x)\,Dx + \cos(n_e, y)\,Dy + \cos(n_e, z)\,Dz;$$

enfin, si l'on désigne par $d\varpi$ un élément du volume occupé par le système, on a, en appliquant le procédé d'Ostrogradsky à l'égalité (5),

$$(24) \qquad \delta M = \int (x^2 + y^2)(\rho\,\delta\omega + \omega\,\delta\rho)\,d\varpi + \int (x^2 + y^2)\rho\omega\Delta\,dS,$$

la première intégrale s'étendant au volume du système et la seconde à la surface qui le termine.

La même méthode, appliquée à l'égalité (8), donne

$$(25) \qquad \delta W = \int \omega(x^2 + y^2)\left(\rho\,\delta\omega + \frac{\omega}{2}\,\delta\rho\right)d\varpi + \frac{1}{2}\int (x^2 + y^2)\rho\omega^2\Delta\,dS.$$

Ces égalités sont générales; mais si, avant la variation, la vitesse angulaire de rotation ω a la même valeur ω_0 pour tous les points du système, on peut écrire

$$(26)\qquad \delta W = -\frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\,\delta\rho\,d\varpi - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\rho\Delta\,dS + \omega_0\,\delta M$$

et, si M est assujetti à demeurer invariable dans la modification considérée,

$$(27)\qquad \delta W = -\frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\,\delta\rho\,d\varpi - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\rho\Delta\,dS.$$

Quant à $\delta(\mathfrak{F}+\Omega)$, son expression a été donnée ailleurs (¹), sous la condition que la température du fluide soit *uniforme*. Supposons, pour simplifier, que la variable s, introduite en cet endroit, n'intervienne pas. Nous aurons, en désignant par V la fonction potentielle intérieure, par U la fonction potentielle extérieure, par $\mathcal{A}$ l'*action comprimante*,

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta(\mathfrak{F}+\Omega) = {} & \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A}\right]\delta\rho\,d\varpi \\ & + \int[\rho(V+U+\zeta)+P]\Delta\,dS. \end{aligned}\right.$$

L'égalité

$$(15)\qquad \delta(\mathfrak{F}+W+\Omega) = 0$$

devient alors

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} & \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)\right]\delta\rho\,d\varpi \\ & \quad + \int\left\{\rho\left[V+U+\zeta-\frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)\right]+P\right\}\Delta\,dS = 0. \end{aligned}\right.$$

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [égalité (31)]. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. III, p. 159; 1897.)

Cette égalité (30) doit avoir lieu sous les deux conditions suivantes :

1° La masse du fluide demeure invariable :

$$\int \delta\rho \, d\varpi + \int \rho \Delta \, dS = 0. \tag{30}$$

2° La quantité M garde une valeur invariable, ce qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (24),

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_0 \int (x^2+y^2)\,\delta\rho\, d\varpi + \omega_0 \int \rho(x^2+y^2)\Delta\, dS \\ &\qquad\qquad + \int \rho(x^2+y^2)\,\delta\omega\, d\varpi = 0. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Mais il est inutile de mentionner cette dernière condition; en effet, quelle que soit la valeur de $\delta\rho$ en chaque point du volume fluide, quelle que soit la valeur de Δ en chaque point de la surface terminale, on peut toujours choisir la valeur de $\delta\omega$, qui ne figure point dans les égalités (29) et (30), de telle sorte que la condition (31) soit vérifiée. On retombe alors sur un problème analogue à celui que nous avons traité dans notre écrit précédemment cité et l'on parvient au résultat suivant :

Il existe une constante C *telle que l'on ait :*

1° *En tout point de la surface terminale du fluide, l'égalité*

$$\rho\left[V + U + \zeta - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)\right] + P + \rho C = 0; \tag{32}$$

2° *En tout point de la masse fluide, l'égalité*

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2) + C = 0. \tag{33}$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le fluide, animé d'un mouvement de rotation uniforme, soit en équilibre relatif.

4. Variation seconde de la fonction $(\mathrm{W} + \mathcal{F} + \Omega)$.

De l'égalité (24) on déduit

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 \mathrm{M} = & \int (x^2+y^2)(\rho\,\delta^2\omega + 2\,\delta\rho\,\delta\omega + \omega\,\delta^2\rho)\,d\omega \\
& + 2\int (x^2+y^2)(\rho\,\delta\omega + \omega\,\delta\rho)\Delta\,d\mathrm{S} \\
& + \int \Big\{ 2\rho\omega(x\,\mathrm{D}x + y\,\mathrm{D}y) + (x^2+y^2) \\
& \qquad \times \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega)\mathrm{D}x + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega)\mathrm{D}y + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega)\mathrm{D}z\right]\Big\}\Delta\,d\mathrm{S} \\
& + \int \rho\omega(x^2+y^2)\,\mathrm{D}(\Delta\,d\mathrm{S}).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où, initialement, ω a en tout point la même valeur ω_0,

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 \mathrm{M} = & \int (x^2+y^2)(\rho\,\delta^2\omega + 2\,\delta\rho\,\delta\omega)\,d\varpi \\
& + \omega_0 \int (x^2+y^2)\,\delta^2\rho\,d\varpi \\
& + 2\int (x^2+y^2)\rho\,\delta\omega\,\Delta\,d\mathrm{S} + 2\omega_0 \int (x^2+y^2)\,\delta\rho\,\Delta\,d\mathrm{S} \\
& + \omega_0 \int \Big[2\rho(x\,\mathrm{D}x + y\,\mathrm{D}y) \\
& \qquad + (x^2+y^2)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\Big]\Delta\,d\mathrm{S} \\
& + \omega_0 \int (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{D}(\Delta\,d\mathrm{S}).
\end{aligned}
\right.
$$

Si la variation considérée est assujettie à laisser M invariable, on devra avoir

$$
(36)\qquad \delta^2 \mathrm{M} = 0.
$$

En partant de l'égalité (25), nous trouvons

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 W = {}& \int (x^2+y^2)\left[\rho(\delta\omega)^2 + 2\omega\,\delta\rho\,\delta\omega + \rho\omega\,\delta^2\omega + \frac{\omega^2}{2}\delta^2\rho\right] d\varpi \\
&+ \int (x^2+y^2)(\omega^2\,\delta\rho + 2\rho\omega\,\delta\omega)\Delta\, dS \\
&+ \int \Big\{ \rho\omega^2(x\,Dx + y\,Dy) \\
&\qquad + \frac{x^2+y^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega^2)Dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega^2)Dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega^2)Dz\right]\Big\}\Delta\, dS \\
&+ \frac{1}{2}\int (x^2+y^2)\rho\omega^2\, D(\Delta\, dS).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où, initialement, ω a, en tout point, la même valeur ω_0,

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 W = {}& \int (x^2+y^2)\rho(\delta\omega)^2 \\
&+ \omega_0 \Big\{ \int (x^2+y^2)\left(2\,\delta\rho\,\delta\varpi + \rho\,\delta^2\omega + \frac{\omega_0}{2}\delta^2\rho\right) d\varpi \\
&\quad + \int (x^2+y^2)(\omega_0\,\delta\rho + 2\rho\,\delta\omega)\Delta\, dS \\
&\quad + \int \Big[\rho\omega_0(x\,Dx + y\,Dy) \\
&\qquad + \frac{\omega_0(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}Dz\right)\Big]\Delta\, dS \\
&\quad + \frac{1}{2}\int (x^2+y^2)\rho\omega_0\, D(\Delta\, dS)\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, en outre, la variation doit laisser invariable la quantité M, cas auquel l'égalité (36) est vérifiée, on a

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 W = {}& \int (x^2+y^2)\rho(\delta\omega)^2\, d\varpi - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\delta^2\rho\, d\varpi \\
&- \omega_0^2 \int \Big[(x^2+y^2)\delta\rho + \rho(x\,Dx + y\,Dy) \\
&\qquad + \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}Dz\right)\Big]\Delta\, dS \\
&- \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\rho\, D(\Delta\, dS).
\end{aligned}
\right.
$$

Quant à l'expression de $\delta^2(\mathcal{F}+\Omega)$, nous l'avons déjà formée ailleurs (¹) sous la condition que la température du fluide soit uniforme; en laissant de côté la variable s, introduite en cet endroit, et en gardant les notations qui s'y trouvent employées,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\delta^2(\mathcal{F}+\Omega) = & \int\left(\mathrm{V}+\mathrm{U}+\zeta+\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}-\rho\mathcal{A}\right)\delta^2\rho\, d\varpi \\
& +\int\left(\mathrm{V}+\mathrm{U}+\zeta+\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}-\rho\mathcal{A}\right) \\
& \qquad \times\left(2\delta\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{D}x+\frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{D}y+\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\Delta\, d\mathrm{S} \\
& +\int[\rho(\mathrm{V}+\mathrm{U}+\zeta)+\mathrm{P}]\,\mathrm{D}(\Delta\, d\mathrm{S}) \\
& +\int\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)(\delta\rho)^2\, d\varpi \\
& -\int\rho[(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e)\mathrm{D}x+(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e)\mathrm{D}y+(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)\mathrm{D}z]\,\Delta\, d\mathrm{S} \\
& +2\Upsilon.
\end{aligned}
\right.
\tag{40}
$$

Ainsi donc, pourvu :

1° Que la température uniforme du fluide demeure constante durant la variation virtuelle;

2° Que la quantité ω ait, initialement, la même valeur ω_0 en tous les points de la masse fluide;

3° Que la variation virtuelle laisse invariable la quantité M;

nous pouvons écrire les expressions (39) et (40) de $\delta^2\mathrm{W}$ et de $\delta^2(\mathcal{F}+\Omega)$; en les réunissant, nous aurons l'expression de

$$\delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\mathrm{W}).$$

Désignons par

$$\mathrm{X}_e=\omega_0^2 x,\qquad \mathrm{Y}_e=\omega_0^2 y,\qquad \mathrm{Z}_e=0$$

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [égalité (57)]. (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. III, p. 169; 1897.)

les composantes du champ centrifuge, et posons

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = X_i + X_e + X_c, \\ \mathfrak{Y} = Y_i + Y_e + Y_c, \\ \mathfrak{Z} = Z_i + Z_e + Z_c. \end{cases}$$

Nous aurons

$$(42)\quad \begin{aligned} &\delta^2(\mathfrak{F} + \Omega + \mathfrak{W}) \\ &= \int \left[V + U + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\zeta) - \rho\mathfrak{A} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2) \right] \delta^2 \rho \, d\varpi && (1) \\ &\quad + \int \left[V + U + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\zeta) - \rho\mathfrak{A} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2) \right] \\ &\qquad \times \left(2\,\delta\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} Dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} Dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} Dz \right) \Delta\, dS && (2) \\ &\quad + \int \left\{ \rho \left[V + U + \zeta - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2) \right] + P \right\} D(\Delta\, dS) && (3) \\ &\quad + \int \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [\rho(\zeta - \mathfrak{A})] (\delta\rho)^2 \, d\varpi && (4) \\ &\quad - \int \rho (\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz) \Delta\, dS && (5) \\ &\quad + 2\,Y && (6) \\ &\quad + \int (x^2+y^2)\rho(\delta\omega)^2 \, d\varpi && (7) \end{aligned}$$

La masse du fluide doit, dans la modification virtuelle considérée, demeurer invariable, ce qui entraîne l'égalité (30) et celle-ci, qui s'en déduit :

$$(43)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \delta^2 \rho \, d\varpi \\ \displaystyle\quad + \int \left(2\,\delta\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} Dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} Dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} Dz \right) \Delta\, dS \\ \displaystyle\quad + \int \rho\, D(\Delta\, dS) = 0. \end{cases}$$

L'expression (42) de $\delta^2(\mathfrak{F} + \Omega + \mathfrak{W})$ se simplifie beaucoup dans le cas où l'état initial de la masse fluide est un état d'équilibre relatif; dans ce cas, en effet, les égalités (32) et (33) transforment les termes (1), (2) et (3) de l'expression (42) en

$$-C\left[\int \delta^2 \rho\, d\varpi + \int\left(2\,\delta\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x}\,\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\,\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\,\mathrm{D}z\right)\Delta\, dS + \int \rho\,\mathrm{D}(\Delta\, dS)\right]$$

et, en vertu de l'égalité (43), cette dernière expression se réduit à o.

Si donc, à partir d'un état d'équilibre relatif où tous ses points tournent avec la même vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe des z, une masse fluide éprouve une variation virtuelle qui laisse invariable la température de chaque élément et qui ne change pas la valeur de la quantité M, on a

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \mathrm{W}) = {} & \int (x^2+y^2)\,\rho(\delta\omega)^2\, d\varpi \\ & + \int \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[\rho(\zeta - \psi)](\delta\rho)^2\, d\varpi \\ & - \int \rho(\mathfrak{X}\,\mathrm{D}x + \mathfrak{Y}\,\mathrm{D}y + \mathfrak{Z}\,\mathrm{D}z)\Delta\, dS \\ & + 2\mathrm{Y}.\end{aligned}\right.$$

Les variations qui figurent au second membre sont liées par les conditions

$$(30)\qquad \int \delta\rho\, d\varpi + \int \rho\Delta\, dS = 0,$$

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}\delta\mathrm{M} = \omega_0\Big[\int (x^2+y^2)\,\delta\rho\, d\varpi + \int (x^2+y^2)\,\rho\Delta\, dS\Big] & \\ + \int (x^2+y^2)\,\rho\,\delta\omega\, d\varpi = 0. &\end{aligned}\right.$$

5. Conditions pour que la fonction $(\mathcal{F} + \Omega + W)$ soit un minimum.

Pour que, dans l'état d'équilibre initial, la fonction $(\mathcal{F} + \Omega + W)$ ait une valeur minimum parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans que la température de chaque élément éprouve aucun changement et sans que la valeur de M éprouve de variations, il faut et il suffit que le second membre de l'égalité (44) soit positif toutes les fois que les égalités (30) et (45) sont vérifiées.

Quelques propositions s'aperçoivent immédiatement et, en premier lieu, celle-ci :

Pour que la fonction $(\mathcal{F} + \Omega + W)$ soit minimum dans les conditions indiquées, IL SUFFIT *que l'on ait*

$$(46) \quad \int \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[\rho(\zeta - \mathcal{A})](\delta\rho)^2 d\varpi - \int \rho(\mathfrak{X}\, dx + \mathfrak{Y}\, dy + \mathfrak{Z}\, dz)\Delta\, dS + 2Y > 0$$

en toute variation virtuelle où l'on a

$$(47) \qquad \int \delta\rho\, d\varpi + \int \rho\,\Delta\, dS = 0.$$

Dans le cas où les divers éléments du fluide n'exercent l'un sur l'autre aucune action et où, par conséquent, $\mathcal{A} = 0$, $Y = 0$, nous savons (¹) remplacer cette condition par d'autres. Si l'on tient compte de ces résultats et de ceux qui ont été établis au § 2 du présent écrit, on peut énoncer le théorème suivant :

Considérons une masse fluide dont les divers éléments n'exercent les uns sur les autres aucune action; supposons que tous les éléments qui forment cette masse tournent avec une même vitesse angulaire autour de l'axe des z et que la masse fluide soit en équilibre relatif; cet équilibre sera assurément stable pour tout déran-

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, § 5 et 7 (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. I, p. 131; 1895).

gement qui n'altère pas le moment de la quantité de mouvement, si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° *La quantité*

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho\zeta) \tag{48}$$

n'est négative en aucun point de la masse fluide; les points où elle est nulle ne forment pas un domaine continu à trois dimensions.

2° *La quantité*

$$\mathfrak{N}_e = \mathfrak{X}\cos(n_e, x) + \mathfrak{Y}\cos(n_e, y) + \mathfrak{Z}\cos(n_e, z) \tag{49}$$

n'est positive en aucun point de la surface libre du fluide; les points où elle est nulle ne forment pas sur cette surface une aire continue.

Il est permis de supposer que l'on a, en tout point de la masse fluide,

$$\delta\omega = 0;$$

mais alors la condition (47) exige que l'on ait l'égalité

$$\int (x^2 + y^2)\,\delta\rho\, d\varpi + \int (x^2 + y^2)\,\rho\Delta\, dS = 0. \tag{50}$$

On voit donc que, *pour que la fonction* $\Phi = \mathfrak{F} + \Omega + \mathrm{W}$ *ait une valeur minimum dans les conditions indiquées, il est nécessaire que l'on ait*

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[\rho(\zeta - \Lambda)](\delta\rho)^2\, d\varpi \\ &\quad - \int \rho(\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz)\Delta\, dS + 2\Upsilon > 0, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

toutes les fois que l'on a les deux égalités

$$\int \delta\rho\, d\varpi + \int \rho\Delta\, dS = 0, \tag{30}$$

$$\int (x^2 + y^2)\,\delta\rho\, d\varpi + \int (x^2 + y^2)\,\rho\Delta\, dS = 0. \tag{50}$$

Pour que cette condition soit remplie, certaines autres conditions sont nécessaires; elles peuvent être établies suivant des raisonnements que nous avons indiqués ailleurs ([1]) et qu'il suffit de modifier très légèrement.

Parmi ces *conditions nécessaires*, celles-ci sont tout à fait générales :

1° *La quantité*

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}[\rho(\zeta - \omega)]$$

ne doit être négative en aucun point de la masse fluide;

2° *La quantité* $\mathfrak{N}_e$, *définie par l'égalité* (49), *ne doit être positive en aucun point de la surface du fluide.*

Lorsque les divers éléments de la masse fluide n'exercent les uns sur les autres aucune action, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité (51) soit conséquence des égalités (30) et (50); ces conditions sont les suivantes :

1° *La quantité*

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho \zeta)$$

n'est négative en aucun point du fluide; les points où elle est nulle ne peuvent remplir un volume d'une manière continue;

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles*, § 4 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 174; 1897). La fonction u introduite à la p. 175 devra être soumise non aux conditions (64) et (65), mais aux conditions

$$\int u\, d\varpi = 0, \qquad \int (x^2 + y^2)\, u\, d\varpi = 0.$$

De même, la fonction u introduite à la p. 177 devra être soumise non aux conditions (68) et (69), mais aux conditions

$$\int u\, d\sigma = 0, \qquad \int (x^2 + y^2)\, u\, d\sigma = 0.$$

La condition indiquée sous la rubrique 2°, à la p. 175 et à la p. 177, doit être supprimée aussi bien dans l'écrit auquel nous renvoyons en ce moment que dans le présent écrit.

2° *La quantité $\mathfrak{K}_e$ n'est positive en aucun point de la surface libre du fluide; les points de cette surface où elle est nulle ne peuvent remplir une aire d'une manière continue.*

Ces conditions sont identiques aux conditions suffisantes trouvées il y a un instant. Donc, *dans le cas où les divers éléments du fluide n'agissent pas les uns sur les autres, nous connaissons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'état d'équilibre relatif corresponde à une valeur minimum de $(\mathfrak{F} + \Omega + \mathrm{W})$ parmi toutes celles que cette quantité peut prendre sans changement dans la température des divers éléments et sans variation de* M.

Ce que nous avons démontré au § 2 nous permet d'affirmer que l'équilibre relatif est certainement stable pour tous les dérangements qui n'altèrent ni la température T de chaque élément, ni la valeur de M lorsqu'il fait prendre à l'expression $\Phi = \mathfrak{F} + \Omega + \mathrm{W}$ une valeur minimum parmi toutes celles qui correspondent aux mêmes valeurs de T et de M. Mais nous n'avons pas démontré la réciproque de ce théorème; nous n'avons pas démontré que Φ devait nécessairement, en l'état d'équilibre relatif considéré, prendre une telle valeur minimum si l'on voulait que cet équilibre fût stable.

On sait quelles difficultés rencontre, dans le cas de l'équilibre absolu, la démonstration de cette réciproque; les difficultés ne sauraient être moindres lorsqu'il s'agit de l'équilibre relatif. Nous nous contenterons donc de *postuler* ici la légitimité de cette réciproque, légitimité que l'étude des petits mouvements rend très vraisemblable.

Moyennant ce postulat, les conditions qui sont nécessaires pour que Φ soit minimum en l'état d'équilibre relatif considéré et sous les conditions indiquées se transforment en conditions nécessaires pour la stabilité de cet équilibre; alors sont légitimées les conclusions que nous avions formulées autrefois ([1]).

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles*, § 8 (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III, p. 189; 1897).