JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les fonctions abéliennes singulières ; (deuxième mémoire)

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 279-386.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__279_0>

Sur les fonctions abéliennes singulières;

(Deuxième Mémoire)

PAR M. G. HUMBERT.

Dans un premier Mémoire, inséré au Tome V (5[e] série) de ce *Journal*, j'ai commencé l'étude des fonctions abéliennes à deux variables que j'ai nommées *singulières :* ce sont celles qui admettent pour périodes normales les quantités

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g', \end{matrix}$$

liées par une *relation singulière*, c'est-à-dire de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, . . ., E sont des entiers.

Le présent Mémoire continue la même étude, dans les domaines de la transformation et de la multiplication complexe.

Les fonctions abéliennes singulières admettent des transformations qui n'existent pas dans le cas général, et que je nomme *singulières*, par opposition aux transformations *ordinaires* de M. Hermite; la première Partie du Mémoire est consacrée à la recherche de ces transformations, à leur réduction, à la transformation des fonctions thêta et des fonctions intermédiaires singulières.

La seconde Partie s'applique aux transformations singulières du premier degré, dont je détermine complètement la forme générale; on y voit apparaître ce résultat curieux et inattendu que deux systèmes de fonctions abéliennes, liés par une transformation (singulière) de degré 1, n'ont pas toujours les mêmes modules : sous forme géométrique, c'est dire que deux surfaces hyperelliptiques, ayant des modules différents, peuvent se correspondre point par point.

Dans la troisième Partie est posé et résolu le problème de la multiplication complexe, considérée comme un cas particulier de la transformation : il s'agit de rechercher les fonctions abéliennes telles qu'une transformation convenable leur fasse correspondre des fonctions aux mêmes périodes. Nous trouvons ainsi que les fonctions singulières possèdent seules une multiplication complexe; à côté des fonctions simplement, doublement ou triplement singulières, et de fonctions réductibles à des fonctions elliptiques particulières, nous rencontrons d'intéressantes fonctions, simplement singulières, dont les périodes vérifient, en outre, deux relations quadratiques.

Ce sont là les seuls cas de multiplication complexe; nous les étudions avec détail, en indiquant toutes les multiplications correspondantes dans les cas les plus intéressants.

La quatrième et dernière Partie, enfin, traite des multiplications de degré 1, c'est-à-dire des transformations birationnelles des surfaces hyperelliptiques en elles-mêmes; nous y démontrons, qu'en dehors des correspondances évidentes $U = \pm u + c$, $V = \pm v + c'$, toutes les transformations cherchées dérivent de l'existence de relations singulières entre les périodes et se déterminent dès lors aisément; il n'y a d'exception que pour les surfaces attachées au radical $\sqrt{x^5 + 1}$, dont le Chapitre final énumère complètement les transformations univoques.

Nota. — Les numéros des paragraphes du présent Travail font suite à ceux du précédent; pour indiquer un renvoi à un numéro du premier Mémoire, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I.

PREMIÈRE PARTIE.

Transformations singulières.

136. Le problème général de la transformation des fonctions abéliennes, posé et résolu par M. Hermite ([1]), est le suivant :

Soit un premier système de fonctions abéliennes à deux variables, U *et* V, *admettant comme périodes normales* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G'); *soit, de même, un second système analogue, de variables* u *et* v, *et de périodes* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g') : *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions abéliennes du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions abéliennes du second, et cela en établissant entre les variables des relations de la forme*

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v;$$

λ, μ, λ', μ' *désignant des constantes.*

Sous forme géométrique, le problème s'énonce ainsi :

Soit S *une surface hyperelliptique générale, pour laquelle les coordonnées d'un point s'expriment en fonction abélienne des variables* U *et* V *du premier système; soit, de même,* s *une surface analogue répondant aux variables* u *et* v *du second système : dans quel cas la correspondance* (1), *établie entre les points des deux surfaces, fait-elle, à un point* (u, v) *de* s, *répondre* UN ET UN SEUL *point* (U, V) *de* S?

Nous dirons que la transformation (1) fait passer des périodes G, H, G′ aux périodes g, h, g'; ou des variables U, V aux variables u, v; ou de la surface S à la surface s.

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL; 1855.

Par *point* U, V, on entendra *géométriquement* un point de S; *analytiquement*, un système de valeurs de U, V, défini aux périodes près.

137. Pour que les conditions du problème de la transformation soient vérifiées, il faut et il suffit qu'à un point (u, v) corresponde un seul point U, V; c'est-à-dire que, par les relations (1), U et V augmentent d'une de leurs périodes simultanées, quand u, v augmentent d'une des leurs. On a donc, en désignant par a_i, b_i, c_i, d_i des entiers, conformément aux notations de M. Hermite :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu &= b_0 + b_3 G + b_2 H,\\ \lambda' &= a_1 + a_3 H + a_2 G', & \mu' &= b_1 + b_3 H + b_2 G',\\ \lambda g + \mu h &= d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' &= c_0 + c_3 G + c_2 H,\\ \lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3 H + d_2 G', & \lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ', G, H, G′ entre ces huit relations conduit, entre g, h, g', à l'équation suivante, où l'on pose pour simplifier $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &g[(ca)_{03} + (ca)_{12}] + g'[(bd)_{03} + (bd)_{12}]\\ &\quad + h[(cb)_{03} + (ad)_{03} + (cb)_{12} + (ad)_{12}]\\ &\quad + (h^2 - gg')[(ba)_{03} + (ba)_{12}] + [(dc)_{03} + (dc)_{12}] = 0. \end{aligned}\right.$$

De même, l'élimination de λ, μ, λ', μ', g, h, g' entre les relations (2) donnerait, entre G, H, G′, l'équation, équivalente à (3) :

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &G[(ad)_{31} + (bc)_{31}] + G'[(ad)_{02} + (bc)_{02}]\\ &\quad + H[(ad)_{03} + (bc)_{03} + (ad)_{21} + (bc)_{21}]\\ &\quad + (H^2 - GG')[(ad)_{23} + (bc)_{23}] + [(ad)_{01} + (bc)_{01}] = 0. \end{aligned}\right.$$

Quand g, h, g' sont quelconques, l'équation (3) ne peut avoir lieu que si les coefficients de g, h, g', $h^2 - gg'$ et le terme constant y sont nuls : c'est l'hypothèse qu'a faite implicitement M. Hermite, et dont il a déduit la théorie ordinaire de la transformation. Dans ce cas, M. Hermite a montré que les coefficients de l'équation (3 *bis*) sont également nuls, et réciproquement si les coefficients de (3 *bis*) sont nuls, ceux de (3) le sont aussi.

Au contraire, si g, h, g' et $h^2 - gg'$ satisfont à une relation linéaire à coefficients entiers, c'est-à-dire à une *relation singulière,* il existera d'autres transformations que celles de M. Hermite; c'est l'étude de ces transformations *singulières* qui va nous occuper maintenant.

138. Supposons donc que g, h, g' soient liés par la relation singulière

$$A g + B h + C g' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{4}$$

où A, B, ..., E sont des entiers sans diviseur commun, et *qu'il n'y ait, entre g, h, g', aucune autre relation analogue.* On déduira de (3), en désignant par k un entier :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} (ac)_{03} + (ac)_{12} &= Ak, \\ (db)_{03} + (db)_{12} &= Ck, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} &= Dk, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= Ek, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12} &= Bk. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'une transformation ordinaire, ou d'Hermite, l'entier k est nul, et réciproquement.

Soient alors a_i, b_i, c_i, d_i des valeurs des seize entiers a, b, c, d [1] vérifiant les relations (5), où k est un entier, quelconque d'ailleurs; les relations (2) donneront linéairement les valeurs de λ, λ', μ, μ', et celles de G, H, G', en fonction de g, h, g', de sorte que l'on obtiendra ainsi tous les systèmes cherchés de périodes G, H, G', avec les transformations (1) correspondantes.

Cette méthode conduit sans difficulté aux formules suivantes, ana-

---

[1] Nous les appellerons les *entiers caractéristiques* de la transformation.

logues à celles de M. Hermite pour les transformations ordinaires :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
G &= \frac{(cd)_{02}+(ac)_{02}g+[(bc)_{02}+(da)_{02}]h+(db)_{02}g'+(ab)_{02}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
G' &= \frac{(cd)_{31}+(ac)_{31}g+[(bc)_{31}+(da)_{31}]h+(db)_{31}g'+(ab)_{31}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
-H &= \frac{(cd)_{03}+(ac)_{03}g+[(bc)_{03}+(da)_{03}]h+(db)_{03}g'+(ab)_{03}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
H &= \frac{(cd)_{12}+(ac)_{12}g+[(bc)_{12}+(da)_{12}]h+(db)_{12}g'+(ab)_{12}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};\\
H^2-GG' &= \frac{(cd)_{01}+(ac)_{01}g+[(bc)_{01}+(da)_{01}]h+(db)_{01}g'+(ab)_{01}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+[(bc)_{23}+(da)_{23}]h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')};
\end{aligned}\right.$$

les dénominateurs étant les mêmes dans les cinq formules.

On obtiendrait de même g, h, g' en fonction de G, H, G' :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}G+[(db)_{03}-(db)_{12}]H+(db)_{02}G'+(db)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}G+[(ac)_{03}-(ac)_{12}]H+(ac)_{02}G'+(ac)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
-h &= \frac{(bc)_{01}+(bc)_{31}G+[(bc)_{03}-(bc)_{12}]H+(bc)_{02}G'+(bc)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}G+[(ad)_{03}-(ad)_{12}]H+(ad)_{02}G'+(ad)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};\\
h^2-gg' &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}G+[(cd)_{03}-(cd)_{12}]H+(cd)_{02}G'+(cd)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+[(ab)_{03}-(ab)_{12}]H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')};
\end{aligned}\right.$$

les cinq dénominateurs étant aussi les mêmes.

En égalant les deux valeurs de H que donnent les relations (6), on retrouve, en tenant compte de (5), la relation singulière initiale

$$(8)\qquad k[Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E]=0.$$

De même en égalant les deux valeurs de h données par (7), on retrouve la relation singulière (3 *bis*) entre G, H, G'. Celle-ci, comme on l'a observé plus haut en invoquant un résultat de M. Hermite, n'est pas une identité, puisque (3) n'en est une, en vertu de (5), que si k est nul, c'est-à-dire si la transformation est ordinaire. Donc :

Les fonctions abéliennes, initiales et finales, que lie une transformation singulière, sont singulières.

139. Soit alors

$$(9)\qquad A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0,$$

la relation singulière (3 *bis*) entre G, H, G', les entiers qui y figurent n'ayant pas de diviseur commun; on a, en désignant par k' un entier :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} (ad)_{13} + (bc)_{13} &= A'k', \\ (ad)_{20} + (bc)_{20} &= C'k', \\ (ad)_{32} + (bc)_{32} &= D'k', \\ (ad)_{10} + (bc)_{10} &= E'k', \\ (ad)_{12} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (bc)_{03} &= B'k'. \end{aligned}\right.$$

140. *Transformation adjointe.* — La transformation définie par les équations (1), (2) et (5), et que nous appellerons plus brièvement la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i), fait répondre, à un point (u, v) de la surface s, un et un seul point (U, V) de la surface S. *Inversement*, il existe une transformation singulière, que nous nommerons *adjointe* de la première, faisant, à un point de S, correspondre un et un seul point de s.

Soit

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}$$

le Tableau des entiers de la première transformation; pour la transformation adjointe, le Tableau sera (comme dans le cas des transformations ordinaires)

$$\begin{array}{cccc} d_3 & c_3 & -b_3 & -a_3 \\ d_2 & c_2 & -b_2 & -a_2 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \\ -d_0 & -c_0 & b_0 & a_0 \end{array}$$

Pour vérifier que cette nouvelle transformation possède bien la propriété indiquée, il suffit d'observer que les équations (5) deviennent les équations (10) si l'on y remplace A, B, C, D, E par A′, B′, C′, D′, E′, k par k', et tout nombre a_i, b_i, c_i, d_i du premier Tableau par le nombre qui occupe la même place dans le second Tableau.

De même, les équations (6) deviennent les équations (7) si l'on y fait la même substitution, en permutant g, h, g' et G, H, G′.

141. *Degré et indices d'une transformation.* — Nous appellerons *degré* de la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

et nous désignerons cette quantité par δ. Si la transformation est *ordinaire*, on sait que δ *est le carré de l'ordre*.

Nous introduirons, avec δ, deux autres entiers l et k que nous nommerons *indices* de la transformation. Le premier, l, sera défini par

$$(11) \qquad l = (ad)_{03} + (ad)_{12};$$

le second, k, est l'entier qui figure dans les formules (5).

Toutefois, pour définir k sans ambiguïté, *une convention est nécessaire.*

En effet, dans la relation singulière (4),

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les entiers A, B, C, D, E, qui n'ont, par hypothèse, aucun diviseur commun, ne sont définis qu'au signe près, c'est-à-dire que l'on peut changer simultanément leurs signes : ce changement, fait dans (5), entraîne aussi le changement de signe de k, de sorte que k présente une ambiguïté de signe. Pour préciser, nous supposerons que A est positif; dans le cas où A serait nul, nous supposerons $D > 0$, et, si D était aussi nul, $B > 0$. D'ailleurs, A, D, B ne peuvent être nuls à la fois, car l'invariant de la relation singulière, $B^2 - 4AC - 4DE$, serait nul, et l'on serait placé dans un cas spécial sans intérêt (I, n° **17**).

Grâce à cette convention, les signes de A, B, C, D, E sont définis, et il en est de même de celui de k.

On a entre δ, l et k une importante relation. On déduit, en effet, de (5) :

$$\begin{aligned} l(l + Bk) &= [(ad)_{03} + (ad)_{12}][(bc)_{03} + (bc)_{12}],\\ k^2(AC + DE) &= [(ac)_{03} + (ac)_{12}][(db)_{03} + (db)_{12}]\\ &\quad + [(ab)_{03} + (ab)_{12}][(cd)_{03} + (cd)_{12}], \end{aligned}$$

et l'on vérifie que la somme des deux seconds membres est identique au déterminant δ. Donc

$$\delta = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 \tag{12}$$

ou

$$4\delta = (2l + Bk)^2 - \Delta k^2,$$

Δ désignant l'invariant $B^2 - 4AC - 4DE$ de la relation singulière (4).

142. *Degré et indices de la transformation adjointe.* — Pour la transformation adjointe, le second indice est l'entier k' qui figure dans les formules (10), en supposant que l'on fasse sur les signes de A', D', B' la même hypothèse que sur A, D, B; soient δ' le degré et l' le premier indice. On a, d'après les n^os^ **140** et **141** :

$$\delta' = \delta, \qquad l' = (ad)_{03} + (bc)_{03}.$$

On a également la relation

$$(13) \qquad 2l + Bk = 2l' + B'k';$$

car, en vertu de la dernière des équations (5) ou (10), chacun des deux membres est égal à la quantité

$$(bc)_{03} + (bc)_{12} + (ad)_{03} + (ad)_{12}.$$

Enfin, puisque $\delta' = \delta$:

$$l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 = l'^2 + B'k'l' + (A'C' + D'E')k'^2,$$

d'où, en tenant compte de (13),

$$k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = k'^2(B'^2 - 4A'C' - 4D'E').$$

Comme $B^2 - 4AC - 4DE$ et $B'^2 - 4A'C' - 4D'E'$ sont respectivement les invariants, Δ et Δ', des relations singulières (4) et (9), entre g, h, g' et G, H, G′, on peut écrire

$$(14) \qquad k^2\Delta = k'^2\Delta'.$$

L'équation (14) montre que Δ et Δ' sont de même signe, c'est-à-dire que l'invariant d'une relation singulière et celui de la relation singulière transformée ont le même signe : en vertu d'une propriété fondamentale des invariants (I, nº **14**), ces deux quantités sont donc *positives*. Nous tirons de (14)

$$(14\ bis) \qquad k'\sqrt{\Delta'} = \varepsilon k\sqrt{\Delta},$$

ε désignant $+1$ ou -1.

Selon que ε sera égal à $+1$ ou à -1, nous dirons que la transformation est *droite* ou *gauche* : cette dénomination est d'ailleurs purement conventionnelle, puisqu'elle dérive des hypothèses faites sur les signes des coefficients dans les relations singulières (4) et (9).

Pour une transformation ordinaire, les indices k et k' sont nuls, ε est indéterminé.

143. *Signification analytique du degré.* — La transformation singulière

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v$$

fait correspondre à un *point* u, v un seul *point* U, V; inversement, à un point U, V, combien correspondent de points u, v?

Augmentons U et V respectivement d'une période, c'est-à-dire de

$$X_0 + X_3 G + X_2 H \quad \text{et} \quad X_1 + X_3 H + X_2 G',$$

les X_i étant entiers; les équations (1) donneront de nouvelles valeurs de u, v, auxquelles correspondra un nouveau *point* u, v, à moins que u et v n'aient aussi augmenté d'une période, c'est-à-dire que l'on n'ait, en désignant par x_0, x_1, x_2, x_3 des entiers,

$$(15) \quad \begin{cases} X_0 + X_3 G + X_2 H = \lambda(x_0 + x_3 g + x_2 h) + \mu(x_1 + x_3 h + x_2 g') \\ X_1 + X_3 H + X_2 G' = \lambda'(x_0 + x_3 g + x_2 h) + \mu'(x_1 + x_3 h + x_2 g') \end{cases}$$

On peut écrire ces équations en tenant compte de (2):

$$\begin{aligned} X_0 + X_3 G + X_2 H = {} & x_0(a_0 + a_3 G + a_2 H) + x_1(b_0 + b_3 G + b_2 H) \\ & + x_2(c_0 + c_3 G + c_2 H) + x_3(d_0 + d_3 G + d_2 H), \\ X_1 + X_3 H + X_2 G' = {} & x_0(a_1 + a_3 H + a_2 G') + x_1(b_1 + b_3 H + b_2 G') \\ & + x_2(c_1 + c_3 H + c_2 G') + x_3(d_1 + d_3 H + d_2 G'); \end{aligned}$$

relations qui doivent être des identités en G, H, G'. Elles sont en effet de la forme

$$N_1 G + N_2 H = M, \qquad N_1 H + N_2 G' = M',$$

les N et M étant des quantités réelles : si donc ces quantités ne sont pas toutes nulles, on en conclura, en désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', la relation inadmissible

$$H_1^2 - G_1 G'_1 = 0.$$

Par suite, les équations (15) donnent

$$(16)\quad \begin{cases} X_0 = a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3, \\ X_1 = a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3, \\ X_2 = a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3, \\ X_3 = a_3 x_0 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + d_3 x_3. \end{cases}$$

En vertu de ce qui précède, au système (U, V) et au système $(U + X_0 + X_3 G + X_2 H,\ V + X_1 + X_3 H + X_2 G')$ correspond le même point (u, v), si les équations (16) donnent pour x_0, x_1, x_2, x_3 des valeurs entières; il en résulte, pour le nombre des points (u, v) qui correspondent à un point (U, V), la conséquence suivante :

Considérons dans les équations (16) les X_i comme donnés et les x_i comme des inconnues; à deux systèmes de valeurs des X_i correspondent deux systèmes de valeurs des x_i, qui seront dits *non distincts* s'ils diffèrent de nombres entiers, et *distincts* dans le cas contraire : le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) est égal au nombre des solutions *distinctes* des équations (16), lorsque les X_i prennent toutes les valeurs entières possibles.

Or on peut, comme on sait, par des substitutions à coefficients entiers et de déterminant 1, ramener le système d'équations (16) au type

$$(17)\quad \begin{cases} \Xi_0 = \lambda_0 \xi_0, \\ \Xi_1 = \lambda_1 \xi_1, \\ \Xi_2 = \lambda_2 \xi_2, \\ \Xi_3 = \lambda_3 \xi_3, \end{cases}$$

où les λ_i sont des entiers dépendant uniquement des a_i, b_i, c_i, d_i, les ξ_i les inconnues nouvelles et les Ξ_i des entiers pouvant prendre, comme les X_i, toutes les valeurs entières possibles. Le nombre des points (u, v) correspondant à un point (U, V) sera évidemment encore égal au nombre des solutions distinctes des équations (17).

Or il est clair qu'en donnant à Ξ_0 les valeurs 0, 1, ..., mod λ_0; à Ξ_1 les valeurs 0, 1, ..., mod λ_1, etc., on obtient pour les ξ_i des solutions distinctes, c'est-à-dire ne différant pas de nombres entiers; pour d'autres valeurs des Ξ_i on obtient des solutions non distinctes des précédentes : le nombre cherché est donc égal à mod $\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, c'est-à-dire, puisque les déterminants des inconnues dans (16) et (17) sont les mêmes, à mod δ.

Ainsi :

A un point (U, V) *une transformation singulière fait correspondre un nombre de points* (u, v) *égal à son degré en valeur absolue.*

144. *Signe du degré.* — Soient toujours g_1, h_1, g'_1 et G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de g, h, g' et G, H, G'; on vérifie, en partant des formules (6) ou (7), la relation suivante :

$$(18) \qquad h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

où $\mathfrak{M}^2$ est une quantité réelle et positive. Nous donnerons d'ailleurs de cette formule une vérification directe très simple, quand nous parlerons de la réduction des transformations singulières (nº **161**) : elle est analogue à la formule classique de M. Hermite pour les transformations ordinaires; δ remplace le carré de l'ordre.

On en conclut qu'une transformation singulière ne fera passer d'un système (G, H, G') de périodes *normales* (c'est-à-dire d'un système pour lequel $H_1^2 - G_1 G'_1$ est négatif) à un système (g, h, g') de périodes également *normales*, que si δ est positif.

C'est l'hypothèse que nous ferons toujours dans ce Mémoire : nous étudierons ailleurs les fonctions de u, v aux périodes (1, 0); (0, 1); (g, h); (h, g'), pour lesquelles $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif; mais ici nous n'envisagerons que des fonctions abéliennes à périodes normales, ce qui nous oblige à admettre que les transformations singulières sont d'ordre positif,

$$(19) \qquad \delta > 0.$$

Il sera aisé de reconnaître, dans les démonstrations qui vont suivre, celles qui s'appliquent aussi au cas où δ serait négatif.

Composition de deux transformations.

145. Soit une première transformation T

$$(\mathrm{T}) \qquad \mathrm{U} = \lambda u + \mu v, \qquad \mathrm{V} = \lambda' u + \mu' v,$$

faisant passer des variables U, V et des périodes G, H, G′ aux variables u, v et aux périodes g, h, g'. Effectuons maintenant une seconde transformation T_1

$$(\mathrm{T}_1) \qquad u = \rho u' + \sigma v', \qquad v = \rho' u' + \sigma' v',$$

faisant passer des variables u, v et des périodes g, h, g' aux variables u', v' et aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$.

Les deux transformations T et T_1, effectuées successivement, font passer de U, V à u', v', c'est-à-dire qu'à un point u', v' correspond un seul point U, V donné par

$$(\mathrm{T}_2) \qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \lambda(\rho u' + \sigma v') + \mu(\rho' u' + \sigma' v'), \\ \mathrm{V} = \lambda'(\rho u' + \sigma v') + \mu'(\rho' u' + \sigma' v'). \end{cases}$$

On définit ainsi une nouvelle transformation, T_2, produit de T par T_1, $\mathrm{T}_2 = \mathrm{TT}_1$; proposons-nous de trouver ses entiers caractéristiques, son degré et ses indices.

146. Soient a_i, b_i, c_i, d_i et a'_i, b'_i, c'_i, d'_i les entiers caractéristiques de T et de T_1; ceux, a''_i, b''_i, c''_i, d''_i, de T_2 s'obtiennent comme il suit. On a par (2) :

$$\lambda = a_0 + a_3\mathrm{G} + a_2\mathrm{H}, \qquad \mu = b_0 + b_3\mathrm{G} + b_2\mathrm{H},$$
$$\lambda' = a_1 + a_3\mathrm{H} + a_2\mathrm{G}', \qquad \mu' = b_1 + b_3\mathrm{H} + b_2\mathrm{G}',$$

$$\lambda g + \mu h = d_0 + d_3\mathrm{G} + d_2\mathrm{H}, \qquad \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3\mathrm{G} + c_2\mathrm{H},$$
$$\lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3\mathrm{H} + d_2\mathrm{G}', \qquad \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3\mathrm{H} + c_2\mathrm{G}',$$

$$\rho = a'_0 + a'_3 g + a'_2 h, \qquad \sigma = b'_0 + b'_3 g + b'_2 h,$$
$$\rho' = a'_1 + a'_3 h + a'_2 g', \qquad \sigma' = b'_1 + b'_3 h + b'_2 g',$$

On en conclut, exactement comme dans le cas classique des transformations ordinaires :

$$\begin{aligned}\lambda\rho + \mu\rho' = \lambda a'_0 + \mu a'_1 + (\lambda g + \mu h)a'_3 + (\lambda h + \mu g')a'_2 \\ = (a_0 + a_3 G + a_2 H)a'_0 + (b_0 + b_3 G + b_2 H)a'_1 \\ + (d_0 + d_3 G + d_2 H)a'_3 + (c_0 + c_3 G + c_2 H)a'_2,\end{aligned}$$

et par suite, en se reportant à (T_2), on aura

$$\begin{aligned}a''_0 &= a_0 a'_0 + b_0 a'_1 + c_0 a'_2 + d_0 a'_3,\\ a''_3 &= a_3 a'_0 + b_3 a'_1 + c_3 a'_2 + d_3 a'_3,\\ a''_2 &= a_2 a'_0 + b_2 a'_1 + c_2 a'_2 + d_2 a'_3.\end{aligned}$$

Des calculs analogues fourniraient les autres entiers; on trouve ainsi les formules

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}a''_i &= a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3,\\ b''_i &= a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3,\\ c''_i &= a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3,\\ d''_i &= a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3.\end{aligned}\right.$$

147. De là résulte immédiatement que le déterminant

$$(a''_i, b''_i, c''_i, d''_i)$$

est le produit des déterminants (a_i, b_i, c_i, d_i) et (a'_i, b'_i, c'_i, d'_i); en d'autres termes, si l'on désigne par δ, δ_1, δ_2 les *degrés* des transformations T, T_1, T_2, on a

$$(21)\qquad \delta_2 = \delta\delta_1.$$

148. Passons maintenant au calcul des *indices*. Soient l, k; l_1, k_1: l_2, k_2 les indices de T, T_1, T_2; soient également

$$(22)\qquad A'G + B'H + C'G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0,$$

$$(23)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

$$(24)\qquad A_1\mathfrak{g} + B_1\mathfrak{h} + C_1\mathfrak{g}' + D_1(\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{g}\mathfrak{g}') + E_1 = 0$$

les relations singulières entre les périodes; enfin, l'_1, k'_1 désigneront les indices de la transformation adjointe de T_1.

On a, par (5) et (10) :

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l}(ac)_{03}+(ac)_{12}=Ak,\\(db)_{03}+(db)_{12}=Ck,\\(ab)_{03}+(ab)_{12}=Dk,\\(cd)_{03}+(cd)_{12}=Ek,\\(ad)_{03}+(ad)_{12}=l,\\(bc)_{03}+(bc)_{12}=l+Bk;\end{array}\right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l}(a'c')_{03}+(a'c')_{12}=A_1k_1,\\(d'b')_{03}+(d'b')_{12}=C_1k_1,\\(a'b')_{03}+(a'b')_{12}=D_1k_1,\\(c'd')_{03}+(c'd')_{12}=E_1k_1,\\(a'd')_{03}+(a'd')_{12}=l_1,\\(b'c')_{03}+(b'c')_{12}=l_1+B_1k_1;\end{array}\right.$$

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l}(a'd')_{13}+(b'c')_{13}=Ak'_1,\\(a'd')_{20}+(b'c')_{20}=Ck'_1,\\(a'd')_{32}+(b'c')_{32}=Dk'_1,\\(a'd')_{10}+(b'c')_{10}=Ek'_1,\\(a'd')_{03}+(b'c')_{03}=l'_1,\\(a'd')_{12}+(b'c')_{12}=l'_1+Bk'_1.\end{array}\right.$$

Pour calculer k_2, observons que, par définition (5),

$$A_1k_2=(a''c'')_{03}+(a''c'')_{12};$$

d'où, en remplaçant les a'' et c'' par leurs valeurs (20),

$$\begin{aligned}A_1k_2= \quad &(a'c')_{01}[(ab)_{03}+(ab)_{12}]+(a'c')_{02}[(ac)_{03}+(ac)_{12}]\\&+(a'c')_{03}[(ad)_{03}+(ad)_{12}]+(a'c')_{12}[(bc)_{03}+(bc)_{12}]\\&+(a'c')_{13}[(bd)_{03}+(bd)_{12}]+(a'c')_{23}[(cd)_{03}+(cd)_{12}];\end{aligned}$$

et, en vertu de (25),

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 k_2 &= (a'c')_{01} Dk + (a'c')_{02} Ak + (a'c')_{03} l \\ &\quad + (a'c')_{12}(l + Bk) + (a'c')_{31} Ck + (a'c')_{23} Ek \\ &= (l + Bk)[(a'c')_{03} + (a'c')_{12}] \\ &\quad - Bk(a'c')_{03} + Dk(a'c')_{01} \\ &\quad + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23}. \end{aligned}\right.$$

Par (26), $(a'c')_{03} + (a'c')_{12} = A_1 k_1$; si maintenant, dans les autres termes, on remplace A, B, C, D, E par leurs valeurs tirées de (27), il vient, après quelques calculs longs, mais faciles,

$$\begin{aligned} &- Bk(a'c')_{03} + Dk(a'c')_{01} + Ak(a'c')_{02} + Ck(a'c')_{31} + Ek(a'c')_{23} \\ &\quad = \frac{k}{k'_1}[(a'c')_{03} + (a'c')_{12}][(a'd')_{03} + (b'c')_{03}] = \frac{k}{k'_1} A_1 k_1 l'_1; \end{aligned}$$

d'où

$$A_1 k_2 = A_1 k_1 (l + Bk) + \frac{k}{k'_1} A_1 k_1 l'_1,$$

c'est-à-dire

$$k_2 = k_1 (l + Bk) + \frac{k k_1}{k'_1} l'_1.$$

Or on a (nº **142**)

$$2 l'_1 + B k'_1 = 2 l_1 + B_1 k_1,$$

$$k'_1 \sqrt{\Delta} = \varepsilon_1 k_1 \sqrt{\Delta_1},$$

en désignant par Δ et Δ_1 les invariants des relations singulières (23) et (24), et par ε_1 l'unité positive ou négative qui répond à la transformation T_1.

De là résulte l'expression finale de k_2 :

$$(29)\qquad 2 k_2 = k_1 (2 l + B k) + \varepsilon_1 k \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}} (2 l_1 + B_1 k_1).$$

On pourrait calculer l_2 par une méthode analogue, en partant de $l_2 = (a''d'')_{03} + (a''d'')_{12}$; il sera plus simple d'utiliser la relation (21), $\delta_2 = \delta\delta_1$, qui s'écrit, en remplaçant les δ par leurs valeurs en fonction des indices,

$$4(2l_2+B_1k_2)^2-4\Delta_1k_2^2 \\ =[(2l+Bk)^2-\Delta k^2][(2l_1+B_1k_1)^2-\Delta_1k_1^2].$$

Substituons à k_2 sa valeur (29), nous trouvons

$$4(2l_2+B_1k_2)^2=(2l+Bk)^2(2l_1+B_1k_1)^2 \\ +2\sqrt{\Delta\Delta_1}\,\varepsilon_1 kk_1(2l+Bk)(2l_1+B_1k_1)+\Delta\Delta_1k^2k_1^2;$$

d'où

$$2(2l_2+B_1k_2)=\pm\left[(2l+Bk)(2l_1+B_1k_1)+\varepsilon_1 kk_1\sqrt{\Delta\Delta_1}\right].$$

On doit prendre le signe $+$; car, si $k=k_1=0$, c'est-à-dire si les deux transformations sont ordinaires, l, l_1, l_2 sont les ordres de T, T_1, T_2, et l'on sait que $l_2=ll_1$. La méthode de calcul de l_2 signalée plus haut donne le même résultat, sans introduire d'ambiguïté de signe. Ainsi,

$$(30)\qquad 2(2l_2+B_1k_2)=(2l+Bk)(2l_1+B_1k_1)+\varepsilon_1 kk_1\sqrt{\Delta\Delta_1}.$$

Les formules (29) et (30) donnent la solution du problème posé, en fournissant les expressions des indices k_2 et l_2.

149. *Remarque I.* — Les calculs précédents supposent que T_1 est une transformation *singulière*, c'est-à-dire que k_1 et k'_1 ne sont pas nuls, car on a tiré de (27) les valeurs de A, B, C, D, E, admettant ainsi $k'_1 \gtrless 0$.

Si T_1 est une transformation ordinaire, l'équation (28) est toujours vraie et donne

$$A_1k_2=A_1k_1(l+Bk)-Bk(a'c')_{03} \\ +Dk(a'c')_{01}+Ak(a'c')_{02}+Ck(a'c')_{31}+Ek(a'c')_{23}.$$

Or la transformation T_1 conduit des périodes g, h, g' qui vérifient la relation singulière

$$(23)\qquad Ag+Bh+\ldots=0,$$

aux périodes $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, vérifiant

$$(24)\qquad A_1\mathcal{G} + B_1\mathcal{H} + \ldots = 0.$$

D'ailleurs, les relations classiques de M. Hermite pour les transformations ordinaires donnent sans ambiguïté g, h, g', $h^2 - gg'$ en fonction de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}'$: si l'on porte ces expressions dans (23), et si l'on chasse le dénominateur, on retombe sur (24) à un facteur entier près, θ, ainsi qu'on l'a observé au n° **2** du premier Mémoire (où ce facteur a été désigné par ρ). On a trouvé alors

$$(31)\qquad \theta^2(B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1) = l_1^2(B^2 - 4AC - 4DE),$$

en désignant par l_1 l'ordre de T_1.

Si l'on compare ensuite les coefficients de $\mathcal{G}$ dans (24) et dans la relation déduite de (23) comme on vient de le dire, on trouve

$$A_1\theta = A(a'c')_{02} + C(a'c')_{31} - B(a'c')_{03} + D(a'c')_{01} + E(a'c')_{23};$$

d'où

$$A_1k_2 = A_1k_1(l + Bk) + kA_1\theta,$$

c'est-à-dire, puisque $k_1 = 0$,

$$k_2 = k\theta.$$

D'ailleurs, par (31),

$$\theta = \varepsilon_1 l_1\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}},$$

ε_1 désignant ± 1. Nous dirons que la transformation ordinaire T_1 est *droite ou gauche, par rapport à la relation singulière* (23), selon que ε_1 sera $+1$ ou -1, les conventions d'usage étant faites sur les signes de A, D, B et A_1, D_1, B_1.

Il vient ainsi

$$(32)\qquad k_2 = \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}\,l_1,$$

ce qui est la formule (29), où l'on fait $k_1 = 0$.

La formule (30) subsiste dès lors également et donne

$$(33)\qquad 2l_2 = B_1k_2 + (2l + Bk)l_1.$$

150. *Remarque II.* — Si la *seconde* transformation, T_1, est ordinaire et du premier ordre, l_1 est égal à 1 et Δ à Δ_1 (I, n° **2**); on a alors $k_2 = \varepsilon_1 k$ et $2l_2 + B_1k_2 = 2l + Bk$. De même, si la *première* transformation, T, est ordinaire et du premier ordre, c'est-à-dire si $l = 1$, $k = 0$, on a $k_2 = k_1$, $l_2 = l_1$.

Réduction d'une transformation singulière.

151. On peut réduire une transformation *singulière* quelconque à un type simple, en la faisant précéder et suivre de transformations *ordinaires* du premier ordre, convenablement choisies.

Tout d'abord, une transformation ordinaire du premier ordre permet de ramener la relation singulière entre les périodes g, h, g', au type

$$(\mathrm{R})\qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

β étant égal à 0 ou à ± 1, et α, γ étant entiers (I, n° **6**). De plus, on a le droit de supposer $\alpha > 0$, et même $\alpha = 1$ (I, n° **10**).

Avant d'aborder la théorie générale de la réduction, nous ferons connaître une transformation singulière simple, dont la considération nous sera très utile.

152. Cette transformation se définit ainsi : Soient u et v deux variables abéliennes, aux périodes (g, h, g') liées par la relation singulière (R); u' et v' deux autres variables aux périodes $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$ définies par les relations suivantes, où l et k désignent deux entiers et δ la quantité

$$(34)\qquad \delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2:$$

$$(35)\qquad \begin{cases} \mathcal{G}\delta = lg - \gamma kh, \\ \mathcal{H}\delta = lh - \gamma kg' = \alpha kg + (l + \beta k)h, \\ \mathcal{G}'\delta = \alpha kh + (l + \beta k)g'. \end{cases}$$

Les deux valeurs de $\mathfrak{K}\delta$ sont compatibles en vertu de

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

On conclut de (35)

$$(36)\qquad \begin{cases} g = (l+\beta k)\mathfrak{G} + \gamma k \mathfrak{K}, \\ h = (l+\beta k)\mathfrak{K} + \gamma k \mathfrak{G}' = -\alpha k \mathfrak{G} + l \mathfrak{K}, \\ g' = -\alpha k \mathfrak{K} + l \mathfrak{G}'; \end{cases}$$

d'où, entre $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{G}'$, la relation

$$\alpha \mathfrak{G} + \beta \mathfrak{K} + \gamma \mathfrak{G}' = 0.$$

Cela posé, établissons entre u et v, u' et v' la correspondance

$$(\mathrm{T}_1)\qquad \begin{cases} u = (l+\beta k) u' + \gamma k v', \\ v = \quad -\alpha k \; u' + \; l v'; \end{cases}$$

à un point u', v' correspondra un et un seul point u, v; car si u', v' augmentent d'une période, u et v augmentent aussi d'une période, d'après (36).

La correspondance (T_1) définit donc une *transformation* T_1, *faisant passer de* u, v *à* u', v'; les nombres caractéristiques de cette transformation s'obtiennent sans difficulté et l'on trouve

$$\begin{aligned} a'_0 &= (l+\beta k), & b'_0 &= \gamma k, \\ a'_1 &= -\alpha k, & b'_1 &= l, \\ a'_2 &= a'_3 = 0, & b'_2 &= b'_3 = 0, \\ d'_0 &= d'_1 = d'_2 = 0, & c'_0 &= c'_1 = c'_3 = 0, \\ d'_3 &= 1, & c'_2 &= 1. \end{aligned}$$

Les indices, l_1 et k_1, de T_1 sont donnés par (5) :

$$l_1 = (a'd')_{03} + (a'd')_{12} = l + \beta k,$$

$$\alpha k_1 = (a'c')_{03} + (a'c')_{12} = -\alpha k,$$

c'est-à-dire

$$k_1 = -k.$$

Pour l'indice k'_1 de la transformation adjointe, on a par (10) :

$$\alpha k'_1 = (a'd')_{13} + (b'c')_{13} = -\alpha k$$

ou

$$k'_1 = k_1.$$

Comme d'ailleurs les invariants des relations singulières entre $g, \bar{h}, g'$ et $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}'$ sont égaux à $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, il résulte de là, par (14 *bis*), que la transformation (T_1) est droite. Enfin son degré, $l_1^2 + \beta k_1 l_1 + \gamma k_1^2$, est égal à la quantité δ ci-dessus (34).

153. Cela posé, soit T une transformation singulière quelconque, d'indices l et k et de degré $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, faisant passer des variables U', V' aux variables u, v et aux périodes g, h, g' liées par (R).

Faisons-la suivre de la transformation T_1 définie ci-dessus, *où les entiers l et k sont précisément les indices de* T; la transformation TT_1 fait passer des variables U', V' aux variables u', v' et aux périodes $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}'$: je dis que TT_1 est une transformation *ordinaire*.

En effet, son second indice k_2 est donné par (29)

$$2k_2 = k_1(2l + \beta k) + \varepsilon_1 k(2l_1 + \beta k_1),$$

car $B = B_1 = \beta$ et $\Delta = \Delta_1$. Or, d'après le numéro précédent,

$$k_1 = -k, \qquad l_1 = l + \beta k \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = +1,$$

puisque T_1 est droite; donc

$$k_2 = 0,$$

ce qui établit la proposition.

La transformation (TT_1) est donc ordinaire; faisons-la précéder d'une transformation ordinaire du premier ordre T_0, conduisant des variables U, V et des périodes G, H, G', aux variables U', V' : la transformation (T_0TT_1) sera ordinaire et fera passer des variables U, V et des périodes G, H, G', aux variables u', v' et aux périodes $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}'$.

Or, d'après une proposition fondamentale (¹), on peut choisir T_0 de telle sorte que les nombres entiers caractéristiques, a_i, b_i, c_i, d_i de T_0TT_1, vérifient les conditions suivantes :

$$(37)\quad \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0, \\ a_0,\ b_0,\ b_1,\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ d_0,\ d_3 > 0, \\ b_0 < b_1; \qquad c_0,\ c_1 < c_2, \\ d_0,\ \operatorname{mod} d_1,\ \operatorname{mod} d_2 < d_3. \end{cases}$$

On aura donc, pour définir T_0T_2, d'après (1) et (2) :

$$(T_0TT_1)\qquad U = a_0u' + b_0v', \qquad V = b_1v',$$

$$(38)\quad \begin{cases} a_0\mathcal{G} + b_0\mathcal{H} = d_0 + d_3G + d_2H, & a_0\mathcal{H} + b_0\mathcal{G}' = c_0 + c_2H, \\ b_1\mathcal{H} = d_1 + d_3H + d_2G', & b_1\mathcal{G}' = c_1 + c_2G'. \end{cases}$$

L'*ordre* de (T_0TT_1) est δ, car son degré est le produit δ^2 des degrés de T et de T_1.

Enfin, cette transformation étant ordinaire et d'ordre δ, on a

$$(39)\quad \begin{cases} -c_0d_3 + c_2d_1 - c_1d_2 = 0, \\ b_0d_3 + b_1d_2 \qquad = 0, \\ a_0d_3 = b_1c_2 \qquad = \delta. \end{cases}$$

154. Remplaçons maintenant dans ces formules u' et v' par leurs valeurs en u et v déduites de (T_1); il vient, pour la relation entre U, V et u, v, c'est-à-dire pour la transformation T_0T (²) :

$$(T_0T)\quad \begin{cases} U = \frac{u}{\delta}[a_0l + b_0\alpha k] + \frac{v}{\delta}[-a_0\gamma k + b_0(l + \beta k)], \\ V = \frac{u}{\delta}b_1\alpha k \qquad\qquad + \frac{v}{\delta}b_1(l + \beta k). \end{cases}$$

(¹) *Voir*, par exemple, KRAUSE, *Transformation der hyperelliptischen Funktionen* (Teubner, 1886), p. 78-79.

(²) D'après le n° **150**, la transformation T_0T a les mêmes indices, l et k, que T, puisque T_0 est ordinaire et d'ordre 1.

155. Telle est la forme *nécessaire* de $T_0 T$; mais il reste à exprimer que c'est là effectivement une *transformation* faisant passer de U, V à u, v, c'est-à-dire qu'à un point (u, v) correspond un seul point U, V. Or, si l'on augmente u et v de g et h, U et V augmentent, en vertu de (35), de $a_0 \mathcal{G} + b_0 \mathcal{H}$ et $b_1 \mathcal{H}$, c'est-à-dire d'une période, d'après (38); même résultat si l'on augmente u et v de h et g'. Il reste donc à écrire que U et V augmentent d'une période quand l'une des variables u et v augmente de 1, l'autre restant inaltérée. Ainsi en désignant par x, y, z, z' des entiers, il faut que

$$\frac{a_0 l + b_0 \alpha k}{\delta} = z + x\mathrm{G} + y\mathrm{H},$$

$$\frac{b_1 \alpha k}{\delta} = z' + x\mathrm{H} + y\mathrm{G}'.$$

Les entiers x et y doivent être nuls, sinon, en désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', la quantit $\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{G}_1 \mathrm{G}'_1$ serait nulle, cas à rejeter.

On a un résultat analogue en augmentant v de 1, de sorte que, finalement, les seules conditions auxquelles aient à satisfaire les a_i, b_i, c_i, d_i sont, avec (37) et (39), que les quantités

$$\text{(Q)} \qquad \frac{a_0 l + b_0 \alpha k}{\delta}, \quad \frac{b_1 \alpha k}{\delta}, \quad \frac{a_0 \gamma k - b_0 (l + \beta k)}{\delta}, \quad \frac{b_1 (l + \beta k)}{\delta}$$

soient entières.

Pour simplifier la discussion, nous supposerons, comme nous en avons le droit, que l'entier α est égal à $+1$ (n° **151**).

Les relations (39)

$$a_0 d_3 = b_1 c_2 = \delta$$

montrent que d_3 et c_2 sont des diviseurs de δ; alors

$$\text{(40)} \qquad a_0 = \frac{\delta}{d_3}, \qquad b_1 = \frac{\delta}{c_2}.$$

La relation (39)

$$b_0 d_3 = - b_1 d_2$$

donne alors

$$(41) \qquad b_0 = -\frac{\delta}{c_2 d_3} d_2,$$

ce qui montre que δd_2 doit être divisible par $c_2 d_3$. Portant ces valeurs de a_0, b_1, b_0 dans les quantités (Q), on met celles-ci sous la forme

$$(Q') \qquad \frac{l}{d_3} - \frac{k d_2}{c_2 d_1}, \quad \frac{k}{c_2}, \quad \frac{\gamma k}{d_3} + \frac{(l+\beta k) d_2}{c_2 d_3}, \quad \frac{l+\beta k}{c_2}.$$

Pour qu'elles soient entières, il faut d'abord que c_2 divise k et $l+\beta k$, c'est-à-dire que

$$(42) \qquad \begin{cases} k = c_2 \varpi_1, \\ l + \beta k = c_2 \varpi_2; \end{cases}$$

alors, par là même, c_2 divisera δ, car $\delta = l(l+\beta k) + \gamma k^2$.

Remplaçons l et k par ces valeurs dans les quantités (Q'); il faut que

$$(43) \qquad \frac{l - \varpi_1 d_2}{d_3} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma k + \varpi_2 d_2}{d_3}$$

soient entiers. Si c'est réalisé, la quantité $\frac{1}{d_3}(l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1)$, c'est-à-dire, d'après (42), $\frac{1}{c_2 d_3}\delta$, sera également entière; δ est donc divisible par $c_2 d_3$, et dès lors b_0, donné par (41), est entier, quel que soit d_2.

Ainsi, en laissant provisoirement de côté la première des relations (39), c_2 est un diviseur de k et de $l+\beta k$ et, par suite, de δ; d_3 est un diviseur de δ, tel que $c_2 d_3$ en soit un autre, et il s'agit de reconnaître si les expressions (43) sont entières, c'est-à-dire s'il existe des entiers d_2, x et y vérifiant les relations

$$(44) \qquad l - \varpi_1 d_2 - d_3 x = 0, \qquad \gamma k + \varpi_2 d_2 - d_3 y = 0,$$

ϖ_1 et ϖ_2 étant les quotients, par c_2, de k et $l+\beta k$.

Pour que les équations (44) aient des solutions entières en d_2, x

et y, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des déterminants de la matrice

$$\begin{matrix} -\varpi_1 & -d_3 & 0 \\ \varpi_2 & 0 & -d_3 \end{matrix}$$

divise les déterminants obtenus en associant une quelconque des colonnes de cette matrice à la colonne $\begin{matrix} l \\ \gamma k \end{matrix}$.

Soit θ le plus grand commun diviseur (positif) de ϖ_1, ϖ_2, d_3 :

$$\varpi_1 = \theta q_1, \qquad \varpi_2 = \theta q_2, \qquad d_3 = \theta \rho;$$

q_1, q_2 et ρ étant premiers entre eux. Le plus grand commun diviseur des déterminants de la matrice, c'est-à-dire de $d_3\varpi_1$, $d_3\varpi_2$, d_3^2, sera $d_3\theta$, ou $\theta^2\rho$; il faut qu'il divise les nombres

$$ld_3, \quad \gamma k d_3, \quad l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1.$$

Donc θ, qui divise k, puisqu'il divise ϖ_1, devra diviser l; ensuite, comme on a, en vertu de (42),

$$l\varpi_2 + \gamma k \varpi_1 = \frac{\delta}{c_2},$$

il faut que $d_3\theta$ divise $\frac{\delta}{c_2}$; c'est-à-dire que $\theta^2\rho$ divise $\frac{\delta}{c_2}$.

Si ces conditions sont remplies, les équations (44) auront, en d_2, x et y des solutions entières, parmi lesquelles figureront évidemment, pour d_2, et en nombre limité, des valeurs de module inférieur à d_3.

Enfin la première des relations (39)

$$(45) \qquad -c_0 d_3 + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0$$

donnera pour c_0, d_1 et c_1 des solutions entières, parmi lesquelles, évidemment, des solutions en nombre limité, telles que c_0 et c_1 soient positifs et $< c_2$, et que d_1 soit, en valeur absolue, $< d_3$.

156. En résumé, θ est un diviseur commun positif de l et de k; c_2, en vertu de (42), un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l+\beta k}{\theta}$; δ, c'est-à-dire $l(l+\beta k)+\gamma k^2$, est alors divisible par $c_2\theta^2$; ρ est un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que ρ et les nombres $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l+\beta k}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux. On prendra $d_3=\theta\rho$, et l'on pourra trouver un nombre entier d_2, de module inférieur à $\theta\rho$, vérifiant (44), c'est-à-dire, tel que

$$l-\frac{k}{c_2}d_2\equiv 0,\qquad \gamma k+\frac{l+\beta k}{c_2}d_2\equiv 0\qquad (\operatorname{mod}\theta\rho).$$

Les autres entiers a_i, b_i, c_i, d_i se déterminent ensuite comme on l'a expliqué plus haut.

157. Voici donc le résultat final :

Soit un système de fonctions abéliennes singulières à deux variables, u, v, dont les périodes vérifient la relation

$$g+\beta h+\gamma g'=0;$$

pour trouver tous les systèmes des fonctions singulières à deux variables U, V, *tels qu'on puisse passer de l'un d'eux au système primitif, par une transformation singulière d'indices l et k et de degré δ $(\delta=l^2+\beta kl+\gamma k^2)$, on procédera comme il suit*[1] :

Soient

θ un diviseur commun positif de l et de k;

c_2 un diviseur commun positif de $\frac{k}{\theta}$ et $\frac{l}{\theta}$;

ρ un diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, tel que les nombres ρ, $\frac{k}{c_2\theta}$, $\frac{l}{c_2\theta}$ soient premiers entre eux.

On pourra toujours trouver un ou plusieurs entiers, d_2, en nombre limité, de module inférieur à $\theta\rho$, tels que l'on ait

$$\frac{l}{\theta}-\frac{k}{c_2\theta}d_2\equiv 0,\qquad \gamma\frac{k}{\theta}+\frac{l+\beta k}{c_2\theta}d_2\equiv 0\qquad (\operatorname{mod}\rho).$$

---

[1] Les deux indices l et k sont des entiers quelconques, tels seulement que δ, c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\gamma k^2$, soit positif.

Les variables U, V sont alors liées à u, v par la transformation

$$(46)\quad \begin{cases} U = \frac{u}{\rho}\left[\frac{l}{\theta} - \frac{k}{c_2\theta}d_2\right] - \frac{v}{\rho}\left[\gamma\frac{k}{\theta} + \frac{l+\beta k}{c_2\theta}d_2\right], \\ V = u\frac{k}{c_2} \qquad\qquad + v\frac{l+\beta k}{c_2}. \end{cases}$$

Quant aux périodes G, H, G′ des fonctions abéliennes en U et V, elles sont liées à g, h, g' par les formules suivantes, déduites de (33) et de (35) :

$$(47)\quad \begin{cases} G' = -\frac{c_1}{c_2} + \frac{1}{c_2^2}[kh + (l+\beta k)g'], \\ H = -\frac{c_0}{c_2} - \frac{1}{c_2\rho\theta}\left[\left(-l + \frac{k}{c_2}d_2\right)h + \left(\gamma k + \frac{l+\beta k}{c_2}d_2\right)g'\right], \\ G = \frac{c_0d_2 - c_2d_0}{c_2\rho\theta} + \frac{g}{c_2\rho^2\theta^2}[lc_2 - kd_2] \\ \qquad + \frac{h}{c_2\rho^2\theta^2}\left[-\gamma kc_2 - (2l+\beta k)d_2 + \frac{k}{c_2}d_2^2\right] \\ \qquad + \frac{g'}{c_2\rho^2\theta^2}\left[\gamma kd_2 + \frac{(l+\beta k)}{c_2}d_2^2\right]. \end{cases}$$

Dans ces formules, c_0, c_1, d_0 sont des entiers non négatifs quelconques, vérifiant les inégalités

$$c_0,\ c_1 < c_2, \quad d_0 < \rho\theta;$$

de plus la quantité

$$\frac{\rho\theta c_0 + d_2c_1}{c_2}$$

doit être entière, et, en valeur absolue, inférieure à $\rho\theta$.

158. On peut compléter ce résultat, en déterminant les valeurs des *seize entiers caractéristiques* de la transformation ci-dessus : nous désignerons ces entiers par m_i, n_i, p_i, q_i, les lettres a_i, b_i, c_i, d_i ayant été employées tout à l'heure pour une autre transformation.

On trouve sans difficulté :

$$\begin{array}{llll}
m_0 = \dfrac{l}{\rho\theta} - \dfrac{k}{\rho\theta c_2} d_2, & m_1 = \dfrac{k}{c_2}, & m_2 = 0, & m_3 = 0; \\
n_0 = \dfrac{-\gamma k}{\rho\theta} - \dfrac{l+\beta k}{\rho\theta c_2} d_2, & n_1 = \dfrac{l+\beta k}{c_2}, & n_2 = 0, & n_3 = 0; \\
p_0 = c_0, & p_1 = c_1, & p_2 = c_2, & p_3 = 0; \\
q_0 = d_0, & q_1 = d_1, & q_2 = d_2, & q_3 = \rho\theta.
\end{array}$$

On ne doit pas perdre de vue la relation (45) :

$$-c_0\rho\theta + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0,$$

qui détermine d_1; de plus $\operatorname{mod} d_1 < \rho\theta$.

159. *Vérification.* — Les entiers m_i, n_i, p_i, q_i doivent satisfaire aux relations fondamentales (5) de la transformation singulière d'indices l et k, où $D = E = 0$, $A = 1$, $B = \beta$, $C = \gamma$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
(mp)_{03} + (mp)_{12} &= k, \\
(qn)_{03} + (qn)_{12} &= \gamma k, \\
(mn)_{03} + (mn)_{12} &= 0, \\
(pq)_{03} + (pq)_{12} &= 0, \\
(mq)_{03} + (mq)_{12} &= l, \\
(np)_{03} + (np)_{12} &= l + \beta k.
\end{aligned}$$

La vérification est immédiate.

160. *Remarque.* — Tous les systèmes de périodes G, H, G′ obtenus par les formules (47), pour des valeurs données de g, h, g', sont distincts à une transformation ordinaire près du premier ordre; c'est-à-dire que l'on ne peut passer de l'un d'eux à un autre par une transformation ordinaire d'ordre un. Cela résulte immédiatement de ce que la transformation ordinaire $T_0 T T_1$ du n° **153** est *réduite*, de telle sorte que deux transformations réduites ne peuvent être équivalentes (à une transformation près du premier ordre) que si elles sont identiques [1].

161. Des formules (47) on déduirait sans difficulté la valeur de $H_1^2 - G_1 G'_1$, en désignant toujours par $G_1, \ldots$ les parties imaginaires de $G, \ldots$; il sera plus rapide d'opérer autrement.

La transformation $T_0 T T_1$ est ordinaire et d'ordre δ; elle fait passer de G, H, G' à $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}'$; on a donc, d'après M. Hermite,

$$\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}'_1 = \frac{\delta^2}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

$\mathfrak{M}^2$ étant une quantité positive.

D'ailleurs les formules (35) donnent

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{G}_1 &= l g_1 - \gamma k h_1, \\
\delta \mathcal{H}_1 &= l h_1 - \gamma k g'_1, \\
&= \alpha k g_1 + (l + \beta k) h_1, \\
\delta \mathcal{G}'_1 &= \alpha k h_1 + (l + \beta k) g'_1,
\end{aligned}$$

d'où, en prenant pour $\delta^2 \mathcal{H}_1^2$ le produit des deux valeurs ci-dessus de $\delta \mathcal{H}_1$,

$$\delta^2(\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1 \mathcal{G}'_1) = \delta(h_1^2 - g_1 g'_1)$$

et finalement

$$(h_1^2 - g_1 g'_1) = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

$\mathfrak{M}^2$ étant positif.

C'est la formule que nous avions annoncée au n° **144**.

Transformations singulières des fonctions intermédiaires.

162. Reprenons la transformation générale singulière (1), d'entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i, d'indices l et k et de degré δ :

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

[1] *Voir* par exemple KRAUSE, *loc. cit.*, p. 79.

et considérons une fonction thêta $\Theta(U, V)$, des variables U et V, aux périodes (G, H, G'). Si m est l'ordre de $\Theta(U, V)$, on a

$$(48) \quad \begin{cases} \Theta(U+1, V) = \Theta(U, V+1) = \Theta(U, V), \\ \Theta(U+G, V+H) = \Theta(U, V) e^{-2\pi i m u + \text{const.}}, \\ \Theta(U+H, V+G') = \Theta(U, V) e^{-2\pi i m v + \text{const.}}. \end{cases}$$

Pour qu'il existe une telle fonction entière, il est nécessaire et suffisant que $H_1^2 - G_1 G'_1$ soit négatif ($G_1, \ldots$ parties imaginaires de $G, \ldots$) et que l'entier m ait le signe de G_1 (ou celui de G'_1, qui est le même).

Par l'intermédiaire de la transformation (1), $\Theta(U, V)$ devient une fonction $\psi(u, v)$ de u, v et l'on a, en vertu de (1) et de (2),

$$\begin{aligned} \psi(u+1, v) &= \Theta(U+\lambda, V+\mu) \\ &= \Theta(U + a_0 + a_3 G + a_2 H, V + a_1 + a_3 H + a_2 G'), \end{aligned}$$

et par suite, d'après (48),

$$\psi(u+1, v) = \Theta(U, V) e^{-2\pi i m(a_3 U + a_2 V) + \text{const.}}$$

et en revenant aux variables u et v

$$\psi(u+1, v) = \psi(u, v) e^{-2\pi i m[u(\lambda a_3 + \lambda' a_2) + v(\mu a_3 + \mu' a_2)] + \text{const.}}.$$

De même

$$\begin{aligned} \psi(u, v+1) &= \psi(u, v) e^{-2\pi i m[u(\lambda b_3 + \lambda' b_2) + v(\mu b_3 + \mu' b_2)] + \text{const.}}, \\ \psi(u+g, v+h) &= \psi(u, v) e^{-2\pi i m[u(\lambda d_3 + \lambda' d_2) + v(\mu d_3 + \mu' d_2)] + \text{const.}}, \\ \psi(u+h, v+g') &= \psi(u, v) e^{-2\pi i m[u(\lambda c_3 + \lambda' c_2) + v(\mu c_3 + \mu' c_2)] + \text{const.}}. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(u, v) = \psi(u, v) e^{\text{P}(u, v)},$$

$\text{P}(u, v)$ désignant un polynome du second ordre en u, v : il est aisé de voir que l'on peut déterminer les coefficients de $\text{P}(u, v)$ de manière que $\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v)$, et que $\varphi(u, v+1)$ reproduise $\varphi(u, v)$ à un facteur exponentiel près de la forme $e^{\rho u}$; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m u[b_3\lambda + b_2\lambda' - a_3\mu - a_2\mu']} \end{aligned}$$

ou, en vertu des expressions (2) de λ, μ, λ', μ',

$$\varphi(u, v+1) = e^{-2\pi i m u[(ab)_{03} + (ab)_{12}]}.$$

On trouve de même $\varphi(u+g, v+h)$, $\varphi(u+h, v+g')$, ce qui donne finalement, en désignant par ν et ν' des constantes :

$$\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m u[(ab)_{03} + (ab)_{12}]}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m \left\{ u[(ad)_{03} + (ad)_{12}] + v[(bd)_{03} + (bd)_{12} + g((ab)_{03} + (ab)_{12})] \right\} + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m \left\{ u[(ac)_{03} + (ac)_{12}] + v[(bc)_{03} + (bc)_{12} + h((ab)_{03} + (ab)_{12})] \right\} + \nu'}. \end{aligned}$$

163. Supposons d'abord que g, h, g' soient liés par la relation singulière la plus générale

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

les relations auxquelles satisfait $\varphi(u, v)$ sont, en tenant compte de (5),

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m D k u}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m [lu - (C - Dg)kv] + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m [Aku + (l + Bk + Dkh)v] + \nu'}. \end{aligned} \right.$$

Si g, h, g' sont liés par la relation singulière ramenée à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

ces relations deviennent

$$(50)\quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m(lu - k\gamma v) + \text{const.}}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i m[k\alpha u + (l+k\beta)v] + \text{const.}}. \end{cases}$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît que $\varphi(u, v)$ est une de ces *fonctions intermédiaires singulières,* définies et étudiées dans la première Partie de ce Mémoire : c'est une fonction d'indices ml et mk (I, n° **28**).

Nous dirons aussi que la fonction $\varphi(u, v)$, qui vérifie les relations (49), est une *fonction intermédiaire singulière, d'indices ml et mk.*

Ainsi :

164. *Une transformation singulière d'indices l et k, faisant passer des variables* U, V *aux variables u, v, transforme une fonction thêta, d'ordre m, de* U, V, *en une fonction intermédiaire singulière de u, v, d'indices ml et mk.*

165. Si l'on suppose $m = 1$ et si l'on fait subir aux variables u, v une nouvelle transformation singulière, d'indices l_1 et k_1, la fonction thêta initiale se transforme en une fonction intermédiaire singulière, dont les indices l_2 et k_2 sont évidemment ceux de la transformation qui est le produit des deux premières, et sont donnés par les formules (29) et (30). On en conclut, sous une autre forme, que :

Une transformation singulière, d'indices l_1 et k_1, faisant passer des variables u, v aux variables u', v', transforme une fonction intermédiaire singulière, d'indices l et k, de u, v, en une fonction intermédiaire singulière de u', v', dont les indices l_2 et k_2 s'obtiennent par les relations

$$2k_2 = k_1(2l + \mathrm{B}k) + \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + \mathrm{B}_1 k_1),$$

$$2(2l_2 + \mathrm{B}_1 k_2) = (2l + \mathrm{B}k)(2l_1 + \mathrm{B}_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}.$$

On suppose que la relation singulière entre les périodes de u, v est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

et celle entre les périodes de u', v' :

$$A_1 \mathcal{G} + B_1 \mathcal{H} + C_1 \mathcal{G}' + D_1(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + E_1 = 0;$$

Δ et Δ_1 désignent respectivement les invariants $B^2 - 4AC - 4DE$ et $B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1$; enfin ε_1 désigne $+1$ ou -1 selon que la transformation d'indices l_1, k_1 est droite ou gauche (n^{os} **142** et **149**) [1].

---

[1] *Remarque.*—Reprenons les fonctions intermédiaires singulières, $\varphi(u, v)$, du n° **163**, qui répondent à la relation singulière générale

$$(r) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

si l et k sont les indices de $\varphi(u, v)$, on a (49) :

$$(49) \qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i Dku}, \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{-2\pi i[lu-(C-Dg)kv]+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{-2\pi i[Aku+(l+Bk+Dkh)v]+\nu'}. \end{cases}$$

La théorie de ces fonctions se déduit sans difficulté de celle des fonctions analogues étudiées dans notre premier Mémoire.

Effectuons en effet une transformation ordinaire du premier ordre, ramenant la relation (r) au type (de même invariant) :

$$(r') \qquad \alpha\mathcal{G} + \beta\mathcal{H} + \gamma\mathcal{G}' = 0;$$

$\varphi(u, v)$ devient une fonction intermédiaire, $\psi(u', v')$, répondant à la relation (r'), et dont les indices, l_2 et k_2, sont donnés par les formules du n° **165**, où $k_1 = 0$, $l_1 = 1$, $\Delta_1 = \Delta$:

$$(s) \qquad k_2 = \varepsilon_1 k, \qquad 2l_2 + \beta k_2 = 2l + Bk.$$

La fonction $\psi(u', v')$ n'existe (I, n° 28), que si $l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2$ est positif, et si $2l_2 + \beta k_2$ est du signe de la partie imaginaire de $\mathcal{G}$. Or ce signe est celui de la partie imaginaire de g, d'après M. Hermite (*Théorie des transformations ordinaires*); d'ailleurs, en vertu des valeurs (s) de k_2, l_2 et de l'égalité des

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES DU PREMIER DEGRÉ.

166. Parmi les transformations singulières, les plus simples et celles qui conduiseut aux conséquences analytiques les plus intéressantes, sont celles du premier degré, c'est-à-dire celles qui répondent à $\delta = 1$.

On les obtient toutes, à une transformation ordinaire près du premier ordre, par la proposition générale du n° **157**.

---

invariants $B^2 - 4AC - 4DE$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, on a

$$l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2 = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2.$$

Donc :

1° *Les fonctions intermédiaires générales répondant à la relation singulière* (r), *et d'indices* l, k, *n'existent que si le nombre* $l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$ *est positif, et si* $2l + Bk$ *a le signe de la partie imaginaire de la période* g.

Les fonctions $\psi(u', v')$ vérifient les relations (49), où l'on remplace g, h, g' par $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$, l et k par l_2 et k_2, A, B, C, D par α, β, γ, o; nous savons (I, n° 28) que, pour ν et ν' donnés, elles s'expriment en fonction linéaire et homogène de $l_2^2 + \beta k_2 l_2 + \alpha\gamma k_2^2$ d'entre elles; donc :

2° *Les fonctions intermédiaires générales, d'indices* l, k, *qui répondent à des valeurs données des constantes* ν *et* ν' *dans* (49), *sont des fonctions linéaires et homogènes de* $l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2$ *d'entre elles.*

De même, deux fonctions $\psi(u', v')$, d'indices l_2, k_2 et l'_2, k'_2 ont un nombre de zéros communs (I, n° 34) égal à

$$2 l_2 l'_2 + \beta(k_2 l'_2 + k'_2 l_2) + 2\alpha\gamma k_2 k'_2;$$

en remplaçant dans cette expression l_2, k_2, l'_2, k'_2 par leurs valeurs (s), on reconnaît que :

3° *Deux fonctions intermédiaires générales, d'indices* l, k *et* l', k', *répondant à la relation singulière* (r), *ont un nombre de zéros communs égal à :*

$$2ll' + B(lk' + kl') + 2(AC + DE)kk'.$$

Il s'agit, bien entendu, des zéros distincts à des périodes près.

En effet, soient l et k les indices d'une transformation T de degré un; on a

$$(1) \qquad l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1;$$

l et k n'ont pas de diviseur commun, de sorte que $\theta = c_2 = 1$; ρ, diviseur positif de $\frac{\delta}{c_2\theta^2}$, est aussi l'unité, et d_2, entier de module inférieur à $\theta\rho$, est nul. Enfin, c_0, c_1, d_0, entiers positifs inférieurs à c_2 ou à $\theta\rho$, sont nuls.

La transformation T, d'indices l et k, est alors (46) :

$$(2) \qquad \begin{cases} U = lu - \gamma kv, \\ V = ku + (l + \beta k)v. \end{cases}$$

Les périodes de u, v sont toujours supposées liées par la relation singulière $g + \beta h + \gamma g' = 0$; les périodes de U, V sont

$$(3) \qquad \begin{cases} G = lg - \gamma kh, \\ H = lh - \gamma kg' = kg + (l + \beta k)h, \\ G' = kh + (l + \beta k)g'; \end{cases}$$

elles sont liées aussi par

$$G + \beta H + \gamma G' = 0.$$

Quant aux *entiers caractéristiques de la transformation* a_i, b_i, c_i, d_i, ils ont pour valeurs (n° **158**)

$$\begin{array}{llll} a_0 = l, & a_1 = k, & a_2 = 0, & a_3 = 0; \\ b_0 = -\gamma k, & b_1 = l + \beta k, & b_2 = 0, & b_3 = 0; \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0; \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 0, & d_3 = 1. \end{array}$$

167. Ainsi, les transformations singulières du premier degré sont liées aux solutions entières de l'équation (1), qui peut s'écrire, en désignant par Δ l'invariant, $\beta^2-4\gamma$, de la relation singulière entre g, h, g',

$$(2l+\beta k)^2-\Delta k^2=4.$$

C'est une *équation de Pell,* du type classique

$$x^2-\Delta k^2=\sigma^2,$$

4Δ étant ou divisible par $4\sigma^2$ ou congru à σ^2 suivant le module $4\sigma^2$: car ici $\sigma^2=4$, et l'invariant Δ est de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$. Le fait que $x=2l+\beta k$ ne diminue pas la généralité, car si β est pair, Δ est de la forme $4N$ et x est pair; si β est impair, Δ est de la forme $4N+1$ et x est pair ou impair en même temps que k.

Ainsi, à toute solution entière de l'équation de Pell

$$x^2-\Delta k^2=4 \tag{4}$$

répond une transformation singulière et réciproquement, l étant donné par

$$2l+\beta k=x.$$

Cette équation (4) admet les solutions évidentes $k=0$, $x=\pm 2$, donnant $l=\pm 1$. Il leur correspond les transformations évidentes et sans intérêt

$$(5)\quad U=u,\quad V=v,\quad G=g,\quad H=h,\quad G'=g',$$

$$(6)\quad U=-u,\quad V=-v,\quad G=-g,\quad H=-h,\quad G'=-g',$$

qui, d'ailleurs, sont ordinaires, puisque $k=0$.

168. L'équation (4) n'admet de solutions entières, autres que les précédentes, que si Δ n'est pas carré parfait, c'est-à-dire dans les cas non elliptiques (I, n° **15**). Donc :

Les fonctions abéliennes du cas elliptique n'admettent pas de transformations singulières du premier degré.

169. Au contraire, si Δ n'est pas carré, on sait que l'équation (4) admet une infinité de solutions entières, qui peuvent être considérées comme des puissances d'une même solution; elles sont comprises dans la formule (¹)

$$(\mathrm{E}) \qquad \left(\frac{x_1+k_1\sqrt{\Delta}}{2}\right)^n = \frac{x+k\sqrt{\Delta}}{2},$$

n désignant un entier positif ou négatif, et (x_1, k_1) la plus petite solution positive de l'équation de Pell.

On en déduit que toutes les transformations singulières du premier degré sont des puissances de celle qui répond aux nombres x_1, k_1, c'est-à-dire à $n = 1$. Soient, en effet, T_n la transformation qui répond au nombre n; x_n et k_n les valeurs correspondantes de x et k; il suffit d'établir que $T_{n+1} = T_n T_1$ et que T_{-1} est l'inverse de T_1.

En premier lieu, si l'on se reporte aux formules du n° **166** qui donnent les valeurs de a_i, b_i, c_i, d_i et aux formules du n° **30** qui donnent celles de a_i'', ... pour le produit de deux transformations, il s'agit de vérifier les relations

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(x_{n+1} - \beta k_{n+1}) &= \tfrac{1}{4}(x_n - \beta k_n)(x_1 - \beta k_1) - \gamma k_n k_1,\\
k_{n+1} &= \tfrac{1}{2} k_n(x_1 - \beta k_1) + \tfrac{1}{2}(x_n + \beta k_n) k_1,\\
-\gamma k_{n+1} &= -\tfrac{1}{2}(x_n - \beta k_n)\gamma k_1 - \tfrac{1}{2}\gamma k_n(x_1 + \beta k_1),\\
\tfrac{1}{2}(x_{n+1} + \beta k_{n+1}) &= -\gamma k_n k_1 + \tfrac{1}{4}(x_n + \beta k_n)(x_1 + \beta k_1);
\end{aligned}$$

les huit autres étant satisfaites d'elles-mêmes.

Or l'équation (E) donne

$$\frac{x_{n+1} + k_{n+1}\sqrt{\Delta}}{x_n + k_n\sqrt{\Delta}} = \frac{x_1 + k_1\sqrt{\Delta}}{2},$$

d'où

$$2x_{n+1} = x_1 x_n + k_1 k_n \Delta,$$

$$2k_{n+1} = x_1 k_n + k_1 x_n,$$

et, à l'aide de ces valeurs de x_{n+1}, k_{n+1}, la vérification est immédiate.

(¹) *Voir*, par exemple, DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3ᵉ édition de M. Dedekind, page 120.

En second lieu, pour $n = -1$, on a

$$x = x_1, \qquad k = -k_1,$$

et l'on reconnaît sans difficulté que le produit de la transformation (x_1, k_1) par la transformation $(x_1, -k_1)$ se réduit identiquement à la transformation unité. Ainsi :

Toutes les transformations singulières du premier degré sont les puissances, positives ou négatives, d'une même transformation de ce degré, T_1.

170. Bien entendu on ne regarde pas comme distinctes deux transformations singulières qu'on peut ramener l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier *degré :* c'est ainsi que la transformation (2) et celle où l'on change simultanément les signes de l et de k ne sont pas distinctes, car la seconde s'obtient en faisant suivre la première de la transformation (6).

171. Ici se pose un problème très intéressant, qu'il sera plus simple d'énoncer en empruntant le langage géométrique :

Considérons deux surfaces hyperelliptiques, s et S, pour lesquelles les coordonnées d'un point s'expriment respectivement par des fonctions abéliennes aux périodes g, h, g' et G, H, G' : si l'on peut passer de G, H, G' à g, h, g' par une transformation singulière du premier degré, à un point de s correspond un et un seul point de S, et *réciproquement*, d'après la signification du degré. C'est précisément la transformation (2) qui établit cette correspondance *univoque* entre les points des deux surfaces.

La question qui intervient naturellement est la suivante :

Les deux surfaces s et S, *qui se correspondent point par point, ont-elles les mêmes modules*, en appelant *modules* d'une surface hyperelliptique ceux de la courbe de genre deux qui donne naissance aux fonctions abéliennes correspondant à la surface?

172. Précisons cette notion de modules. Supposons que les coordonnées homogènes d'un point de S soient proportionnelles à quatre *fonctions thêta*, des variables U, V, formées avec les périodes G, H, G', et n'ayant *aucun facteur*, fonction de U, V, *commun;* admettons de plus qu'à un point de S réponde, aux périodes près, un et un seul système U, V. Une pareille représentation paramétrique n'est possible que d'une manière, à une transformation ordinaire près d'ordre un : car si les quatre coordonnées sont aussi proportionnelles à quatre fonctions thêta, sans facteur commun, de U', V', la transformation qui fait passer de U, V à U', V' est ordinaire, puisqu'elle change une fonction thêta en une fonction thêta; elle est du premier ordre, puisque à un système U, V (ou U', V') répond un seul point de la surface, et par suite un seul système U', V' (ou U, V). Nous dirons que les modules de S sont ceux des fonctions abéliennes de la représentation ainsi définie, ou ceux de la courbe de genre deux génératrice de ces fonctions.

173. Sur la surface S, si l'on désigne par $\vartheta(U, V)$ une fonction thêta du *premier ordre*, aux périodes G, H, G', les courbes représentées par l'équation

$$\vartheta(U+\alpha, V+\beta)=0,$$

où α et β sont deux constantes quelconques, sont de genre deux et de mêmes modules ([1]); ces modules sont ceux de la surface S ([2]).

Effectuons maintenant la transformation singulière du premier degré, d'indices l et k, qui fait passer de S à s : la fonction thêta du premier ordre $\vartheta(U+\alpha, V+\beta)$ se transforme en une fonction intermédiaire singulière (n° **161**), d'indices l et k, qui est évidemment de la forme

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu),$$

λ et μ dépendant linéairement de α et β.

---

(1) *Voir* notre Mémoire *Sur les surfaces hyperelliptiques*, 4e série, t. IX de ce Journal, p. 422.

(2) En effet, sur une surface de Kummer, pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales paires, du second ordre et à caractéristique nulle, des variables U et V, les courbes $\vartheta(U+\alpha, V+\beta)=0$ ont pour modules les rapports anharmoniques quatre à quatre des six points doubles situés sur une même conique (*Ibid.*, p. 114), c'est-à-dire les modules des fonctions abéliennes de la représentation.

Cela posé, si les deux surfaces s et S ont les mêmes modules, c'est qu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation *ordinaire* du premier ordre; une telle transformation, comme on le sait depuis M. Hermite, et comme cela résulte aussi du théorème plus général du n° **164**, change une fonction thêta d'ordre un de U et V, en une fonction thêta d'ordre un de u, v. Dès lors, soient U, V un point quelconque de S; u, v et u', v' les points de s qui lui correspondent respectivement par la transformation singulière et par la transformation ordinaire qu'on vient de définir : la transformation qui fait passer, sur s, du point u', v' au point u, v est univoque et birationnelle, puisque les deux précédentes le sont, et elle transforme une fonction thêta d'ordre un, $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$, en une fonction intermédiaire singulière d'indices l et k, $\varphi(u+\lambda, v+\mu)$, λ et μ dépendant linéairement de α' et β'.

Réciproquement, si la surface s admet une transformation birationnelle en elle-même, transformant $\theta(u'+\alpha', v'+\beta')$ en $\varphi(u+\lambda, v+\mu)$, les deux surfaces s et S ont les mêmes modules. En effet, la transformation singulière du premier degré, qui mène de S à s, fait correspondre point par point les courbes

$$\mathfrak{S}(\mathrm{U}+\alpha, \mathrm{V}+\beta)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(u+\lambda, v+\mu)=0,$$

de sorte que les courbes

$$\mathfrak{S}(\mathrm{U}+\alpha, \mathrm{V}+\beta)=0 \qquad \text{et} \qquad \theta(u'+\alpha', v'+\beta)=0$$

se correspondent également point par point et ont dès lors les mêmes modules : ces modules étant respectivement ceux des surfaces S et s, la proposition est établie.

Donc, en résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que S et s aient les mêmes modules est que s admette une transformation birationnelle en elle-même faisant correspondre à la courbe

$$\theta(u+\alpha', v+\beta')=0,$$

où θ est une fonction thêta d'ordre un, une courbe

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu)=0,$$

où φ est une fonction intermédiaire singulière, ayant pour indices ceux de la transformation singulière du premier degré qui fait passer de S à s.

174. Nous verrons plus loin, dans le Chapitre de la Multiplication singulière, que les transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique *simplement singulière* en elle-même sont comprises dans les formules (n° **193**)

$$(8) \qquad \begin{cases} u' = \rho u - \gamma\sigma v, \\ v' = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v, \end{cases}$$

en supposant toujours que les périodes g, h, g' soient liées par la *seule relation* $g + \beta h + \gamma g' = 0$, et en désignant par ρ et σ deux entiers, tels que

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Soit maintenant posé

$$\theta(u' + \alpha', v' + \beta') = \psi(u, v);$$

il s'agit d'exprimer que $\psi(u, v)$ est une fonction intermédiaire singulière d'indices l et k. On a évidemment

$$\psi(u + 1, v) = \psi(u, v + 1) = \psi(u, v),$$

car augmenter u ou v de l'unité revient à augmenter u' et v' de nombres entiers, ce qui ne change pas la fonction $\theta(u' + \alpha', v' + \beta')$. On a ensuite

$$\begin{aligned} \psi(u + g, v + h) &= \theta(u' + \alpha' + \rho g - \gamma\sigma h, v' + \beta' + \sigma g + (\rho + \beta\sigma) h) \\ &= \theta(u' + \alpha' + \rho g - \gamma\sigma h, v' + \beta' + \rho h - \gamma\sigma g'), \end{aligned}$$

en tenant compte de $g + \beta h + \gamma g' = 0$, et, par suite, en vertu des propriétés fondamentales des fonctions thêta,

$$\begin{aligned} \psi(u + g, v + h) &= \theta(u' + \alpha', v' + \beta') e^{-2\pi i [\rho u' - \gamma\sigma v'] + \text{const.}} \\ &= \psi(u, v) e^{-2\pi i [(\rho^2 - \gamma\sigma^2) u - \gamma\sigma(2\rho + \beta\sigma) v] + \text{const.}} \end{aligned}$$

On trouverait de même

$$\psi(u+h, v+g') = \psi(u, v)e^{-2\pi i[\sigma(2\rho+\beta\sigma)u+(\rho^2-\gamma\sigma^2+2\beta\rho\sigma+\beta^2\sigma^2)v]+\text{const.}},$$

et les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\psi(u, v)$ soit une fonction intermédiaire singulière d'indices l, k sont

$$(9)\qquad \begin{cases} l = \rho^2 - \gamma\rho^2, \\ k = \sigma(2\rho + \beta\sigma). \end{cases}$$

Cela revient à dire que la substitution linéaire à coefficients entiers

$$(10)\qquad \begin{cases} U = lu \;-\gamma kv, \\ V = ku + (l+\beta k)v \end{cases} \qquad (l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1)$$

doit être le carré d'une substitution, également à coefficients entiers,

$$(11)\qquad \begin{cases} U = \rho u - \gamma\sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma)v, \end{cases}$$

où l'on a

$$(12)\qquad \rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

175. *Deux cas* sont maintenant à distinguer, selon que la forme $\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2$ ne peut ou peut représenter le nombre -1.

176. *Dans le premier cas*, on a nécessairement dans (12)

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = 1;$$

et il résulte du n° **169** que toutes les substitutions des formes (10) et (11) sont des puissances d'une substitution du même type, T_1, où l et k seraient remplacés par la plus petite solution, l_1, k_1, de l'équation $l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = 1$. Si donc la substitution (10) est une puissance de T_1 *paire*, T_1^{2q}, les entiers ρ et σ seront les coefficients de la substitution T_1^q, et les équations (9) seront satisfaites pour ces valeurs de ρ et σ, c'est-à-dire que les deux surfaces S et s auront les mêmes modules.

Si, au contraire, la substitution (10) est une puissance *impaire*.

T_1^{2q+1}, elle ne peut être le carré d'une substitution de même forme, puisque celle-ci serait également une puissance de T_1 : on ne peut donc trouver des entiers ρ et σ vérifiant les équations (9), c'est-à-dire que les deux surfaces S et s n'ont pas les mêmes modules.

Soit alors s_1 la surface transformée de S par la transformation T_1 ; il est clair que la transformée de S par la transformation T_1^{2q+1} a les mêmes modules que s_1, car on l'obtient en effectuant sur s_1 la transformation T_1^{2q}, laquelle est le carré de T_1^q. Ainsi, les surfaces obtenues en effectuant sur S les transformations T_1^{2q+1} n'ont pas les mêmes modules que S, mais ont entre elles les mêmes modules.

177. Plaçons-nous maintenant *dans le second cas*, où la forme $\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2$ peut représenter -1. Soit ρ_0, σ_0 une solution de l'équation $\rho_0^2+\beta\rho_0\sigma_0+\gamma\sigma_0^2=-1$, et désignons par Σ_0 la substitution (11), où ρ et σ sont remplacés par ρ_0 et σ_0.

Il est clair que la substitution Σ_0^2 est du type (10); on a en effet pour cette substitution

$$l=\rho_0^2-\gamma\sigma_0^2, \qquad k=\sigma_0(2\rho_0+\beta\sigma_0),$$

et l'on vérifie que

$$l^2+\beta kl+\gamma k^2=+1.$$

Par suite

$$\Sigma_0^2=T_1^n,$$

n désignant un entier et T_1 ayant la même signification que ci-dessus. Je dis que cet entier est nécessairement impair. Si, en effet, il était pair, $n=2q$, on aurait

$$\Sigma_0^2=(T_1^q)^2,$$

c'est-à-dire que les carrés des deux substitutions Σ_0 et T_1^q seraient les mêmes. Or T_1^q est de la forme (10), soient l' et k' les valeurs correspondantes de ses coefficients; en écrivant que Σ_0^2 est la même substitution que $(T_1^q)^2$, on a

$$(13)\qquad \begin{cases} \rho_0^2-\gamma\sigma_0^2=l'^2-\gamma k'^2, \\ \sigma_0(2\rho_0+\beta\sigma_0)=k'(2l'+\beta k'). \end{cases}$$

En éliminant ρ_0, on obtient l'équation bicarrée en σ_0 :

$$\sigma_0^4(\beta^2-4\gamma)-2\sigma_0^2(2l'^2-2\gamma k'^2+2\beta l'k'+\beta^2 k'^2)+k'^2(2l'+\beta k')^2=0,$$

dont les racines sont

$$\sigma_0^2=\frac{2l'^2-2\gamma k'^2+2\beta k'l'+\beta^2 k'^2\pm 2(l'^2+\beta k'l'+\gamma k'^2)}{\beta^2-4\gamma}$$

d'où

1°
$$\sigma_0^2=\frac{4l'^2+4\beta k'l'+\beta^2 k'^2}{\beta^2-4\gamma};$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0=\pm\frac{2l'+\beta k'}{\sqrt{\Delta}},$$

en désignant toujours par Δ l'invariant, $\beta^2-4\gamma$, de la relation entre les périodes. Or, le cas elliptique étant exclu, puisqu'il n'y a pas alors de transformations singulières du premier ordre, Δ n'est pas un carré parfait, de sorte que les valeurs ci-dessus de σ_0 ne sont pas entières, et sont dès lors inadmissibles.

2°
$$\sigma_0^2=k'^2;$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0=k'\varepsilon,$$

ε désignant ± 1. On en conclut par (13)

$$\rho_0=l'\varepsilon,$$

de sorte que

$$\rho_0^2+\beta\rho_0\sigma_0+\gamma\sigma_0^2=l'^2+\beta k'l'+\gamma k'^2=1,$$

ce qui est inadmissible, puisque $\rho_0^2+\beta\rho_0\sigma_0+\gamma\sigma_0^2$ a été supposé égal à -1.

Donc enfin n ne peut être pair, c'est-à-dire que

$$\Sigma_0^2=T_1^n=T_1^{2q+1},$$

d'où

$$T_1=\Sigma_0^2\,T_1^{-2q}.$$

Or Σ_0 et T_1^{-q} sont des substitutions de la forme (11), et l'on vérifie sans difficulté que si A et B sont deux substitutions de cette nature, on a $AB = BA$, c'est-à-dire

$$A^2B^2 = (AB)^2;$$

donc

$$T_1 = (\Sigma_0 T_1^{-q})^2,$$

c'est-à-dire que T_1, et toutes ses puissances, sont des puissances paires d'une même substitution; donc, d'après ce qui précède, les surfaces S et s ont les mêmes modules.

178. Voici le résumé de cette théorie :

Soit une surface hyperelliptique pour laquelle les périodes des fonctions abéliennes correspondantes (n° **172**) *sont liées par la relation*

$$g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

Si la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ peut représenter le nombre -1, toutes les surfaces que l'on déduit de la première par une transformation singulière du premier degré ont les mêmes modules qu'elle.

Si la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ ne peut représenter -1, les transformations singulières du premier degré étant, comme toujours, des puissances d'une même transformation T_1, les surfaces déduites de la surface primitive par les transformations T_1^{2q} ont les mêmes modules qu'elle; les surfaces déduites par les transformations T_1^{2q+1} ont entre elles les mêmes modules, mais n'ont pas les modules de la surface primitive.

Les *périodes* G, H, G', qui répondent à une des surfaces transformées de la première et de modules différents, sont données par les formules (n° **166**) :

$$(14) \qquad \begin{cases} G = l_1 g - \gamma k_1 h, \\ H = l_1 h - \gamma k_1 g', \\ G' = k_1 h + (l_1 + \beta k_1) g'; \end{cases}$$

l_1, k_1 désignent toujours la plus petite solution en nombres entiers (autre que 1, 0) de l'équation

$$l_1^2 + \beta k_1 l_1 + \gamma k_1^2 = 1 \text{ [1]}.$$

179. *Remarque I.* — La propriété, pour la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, de représenter -1, ne dépend (comme cela doit être) que du discriminant $\beta^2 - 4\gamma$, c'est-à-dire de l'invariant Δ. En effet, la relation $x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = -1$ peut s'écrire

$$(2x + \beta y)^2 - \Delta y^2 = -4,$$

ce qui revient *exactement* à dire que la forme $X^2 - \Delta Y^2$ peut représenter -4 (n° **167**).

180. *Remarque II.* — Dans le cas où la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ peut représenter -1, toutes les substitutions (11) :

$$U = \rho u - \gamma\sigma v,$$
$$V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma) v,$$

où

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1$$

sont des puissances d'une seule d'entre elles (ainsi que cela a été démontré pour le cas où la forme ne peut représenter -1). Pour simplifier, disons que la substitution est droite ou gauche selon qu'elle correspond à $+1$ ou à -1. On a vu que les substitutions droites sont des puissances de T_1, et l'on a trouvé (n° **177**)

$$T_1 = \Sigma_1^2,$$

Σ_1 étant gauche (car c'est le produit d'une substitution gauche, Σ_0, par une droite, T_1^{-q}). Soit alors Σ une substitution gauche quelconque;

---

[1] Soit une surface de Kummer, s, pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales, paires, du second ordre et à caractéristique nulle, des variables u et v, formées avec les périodes g, h, g'; soit de même S une surface analogue répondant aux variables U et V et aux périodes G, H, G'; il est clair que la transformation $U = l_1 u - \gamma k_1 v$; $V = k_1 u + (l_1 + \beta k_1) v$ est birationnelle entre les points des deux surfaces : on voit ainsi que deux surfaces de Kummer peuvent se correspondre point par point sans que les rapports anharmoniques, quatre à quatre, des six points doubles situés sur une même conique soient les mêmes pour les deux surfaces.

$\Sigma\Sigma_1$ est droite, donc

$$\Sigma\Sigma_1 = T_1^r = \Sigma_1^{2r},$$

d'où

$$\Sigma = \Sigma_1^{2r-1}.$$

Les substitutions droites sont donc des puissances paires, les substitutions gauches des puissances impaires d'une même substitution Σ_1.

De plus : *toute substitution droite est le carré d'une autre substitution, droite ou gauche.*

181. Nous sommes arrivés au n° **178** à la notion de surfaces (hyperelliptiques) se correspondant point par point sans avoir les mêmes modules; ce résultat, assez inattendu si l'on s'en tient à l'analogie avec le cas des courbes, peut recevoir une autre forme géométrique.

Une surface hyperelliptique générale S est une surface qui correspond *point par couple* à une courbe C, de genre deux ([1]), c'est-à-dire qu'à un couple de points pris sur C répond un et un seul point de S, et réciproquement : dès lors le fait que deux surfaces hyperelliptiques peuvent se correspondre point par point sans avoir les mêmes modules montre que deux courbes de genre deux peuvent se correspondre *couple par couple* sans avoir les mêmes modules. Ces courbes de genre deux donnent naissance, d'après tout ce qui précède, à des fonctions abéliennes singulières; il serait intéressant de poursuivre des recherches analogues sur deux courbes de genre quelconque.

182. Le théorème général du n° **178** résout, *au point de vue des périodes*, le problème de la détermination des couples de surfaces hyperelliptiques se correspondant point par point, sans avoir les mêmes modules : les formules (14) donnent, en effet, les valeurs des périodes G, H, G', répondant à l'une des surfaces, en fonction des périodes g, h, g', qui répondent à l'autre.

Il resterait à compléter ce résultat *au point de vue des modules*,

---

([1]) *Voir*, par exemple, notre Mémoire *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (ce Journal, 5e série, t. II, p. 263).

c'est-à-dire à déterminer tous les systèmes de modules *différents* tels que les surfaces hyperelliptiques correspondantes soient représentables point par point l'une sur l'autre ([1]).

TROISIÈME PARTIE.

MULTIPLICATION COMPLEXE.

183. Le problème de la multiplication complexe, extension directe du problème analogue pour les fonctions elliptiques, peut se poser ainsi :

Soit un système de fonctions abéliennes à deux variables U, V aux périodes G, H, G′, on opère sur ces périodes une transformation quelconque, ordinaire ou singulière : il s'agit de reconnaître dans quel cas les périodes transformées (g, h, g') seront identiques aux périodes primitives (G, H, G′).

Au point de vue géométrique, étant donnée une surface hyperelliptique, liée aux paramètres u et v, si l'on pose

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

peut-on déterminer les constantes λ et μ de manière qu'à un point (u, v) de la surface réponde *un et un seul point* (U, V) de la même surface ?

Ce problème comprend celui de la recherche des *transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique en elle-même*.

184. *Remarque.* — La multiplication complexe n'a pas été jusqu'ici, à notre connaissance du moins, traitée avec la généralité qu'elle comporte par les divers auteurs qui s'en sont occupés. C'est ainsi que MM. Frobenius, Weber, Wiltheiss ([2]) se sont bornés au cas où la

---

([1]) *Voir* à ce sujet une Note que nous avons publiée aux *Comptes rendus* (2e semestre 1899).

([2]) Frobenius, *Journal de Crelle*, t. XCV, p. 264. — Weber, *Annali di Matematica*, 2e série, t. IX. — Wiltheiss, *Math. Annalen*, t. XXI, p. 385-398.

transformation qui fait passer des variables U, V aux variables u, v, est une transformation ordinaire d'Hermite, sans prendre garde aux transformations singulières qui conduisent précisément aux multiplications les plus intéressantes.

Il y aura, d'après cela, deux espèces de multiplications complexes: 1° les *multiplications ordinaires*, qui dérivent d'une transformation d'Hermite; 2° les *multiplications singulières*, qui dérivent d'une de nos transformations singulières.

185. Les relations entre les périodes g, h, g' de multiplication complexe s'obtiennent immédiatement en faisant, dans les relations (2) de la première Partie, $G = g$, $H = h$, $G' = g'$; ce qui donne

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h, & \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h, \\ \lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g', & \mu' = b_1 + b_2 h + b_3 g', \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 g + d_2 h, & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 g + c_2 h, \\ \lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3 h + d_2 g', & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 h + c_2 g'. \end{cases}$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ' conduit aux quatre équations *fondamentales*

$$\text{(A)}\quad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0,$$

$$\text{(B)}\quad gh a_3 + gg' a_2 + h^2 b_3 + hg' b_2 + g a_1 + h(b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0,$$

$$\text{(C)}\quad gh a_3 + gg' b_3 + h^2 a_2 + hg' b_2 - g c_3 + h(a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0,$$

$$\text{(D)}\quad h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

Les a_i, b_i, c_i, d_i sont toujours des entiers, caractéristiques de la transformation employée (1).

186. Les relations (A), (B), (C), (D) ne sont des identités que si $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = b_0 = c_0 = c_1 = c_3 = d_0 = d_1 = d_2 = 0$, et $a_0 = b_1 = d_3 = c_2$; la transformation (1) est alors

$$U = a_0 u, \qquad V = a_0 v,$$

et se réduit à la multiplication ordinaire par un nombre entier.

187. Désignons par A, B, C, D les premiers membres des quatre relations ci-dessus; on a identiquement

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & A(a_3 h + a_2 g' + a_1) - B(a_3 g + a_2 h + a_0) \\ & \quad + C(b_3 h + b_2 g' + b_1) - D(b_3 g + b_2 h + b_0) \equiv F_1, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & A(a_3 h + b_3 g' - c_3) + B(a_2 h + b_2 g' - c_2) \\ & \quad - C(a_3 g + b_3 h - d_3) - D(a_2 g + b_2 h - d_2) \equiv F_2, \end{aligned} \right.$$

étant posé

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} F_1 = {} & (h^2 - gg')[(ad)_{23} + (bc)_{23}] \\ & + g[(ad)_{31} + (bc)_{31}] + g'[(ad)_{02} + (bc)_{02}] \\ & + h[(ad)_{03} + (bc)_{03} - (ad)_{12} - (bc)_{12}] + [(ad)_{01} + (bc)_{01}], \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} F_2 = {} & (h^2 - gg'[(ba)_{03} + (ba)_{12}] \\ & + g[(ca)_{03} + (ca)_{12}] + g'[(bd)_{03} + (bd)_{12}] \\ & + h[(cb)_{03} + (cb)_{12} - (da)_{03} - (da)_{12}] + [(dc)_{03} + (dc)_{12}]. \end{aligned} \right.$$

On observera que les relations $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont les relations singulières (3 *bis*) et (3) de la première Partie entre les périodes initiales et finales de la transformation; elles ne sont identiquement nulles que si la transformation considérée est ordinaire, et, d'ailleurs, si l'une d'elles est une identité, l'autre l'est également (n° **157**).

Nous dirons que la multiplication complexe considérée *conduit* de la relation $F_1 = 0$ à la relation $F_2 = 0$.

188. Le problème est maintenant de trouver *a priori* les périodes g, h, g' telles que les relations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ puissent avoir lieu, par un choix convenable des entiers a_i, b_i, c_i, d_i.

189. *Remarque.* — Les termes du second degré en g, h, g', dans les premiers membres des équations (A), (B), (C), (D), peuvent se mettre respectivement sous la forme remarquable suivante :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & b_2(h^2 - gg') + g\,[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \\ & -a_2(h^2 - gg') + h\,[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \\ & -b_3(h^2 - gg') + h\,[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'], \\ & a_3(h^2 - gg') + g'[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g']. \end{aligned} \right.$$

On en conclut que, si l'on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes, les quatre *quadriques* représentées par les équations $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$ ont en commun, dans le plan de l'infini, les deux points

$$(8) \qquad h^2 - gg' = o, \qquad a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g' = o.$$

On reconnaît sans difficulté qu'elles n'ont pas, dans ce plan, d'autre point commun, à moins qu'on n'ait simultanément

$$a_3 = a_2 + b_3 = b_2 = o.$$

Dans ce cas, les quatre équations (A), (B), (C), (D) sont singulières : les périodes g, h, g' ne sont alors liées que par des relations singulières.

190. Théorème. — *Il y a, entre les périodes de multiplication complexe, au moins une relation singulière (à coefficients entiers).*

Car les relations $F_1 = o$, $F_2 = o$, $B - C = o$ sont singulières; le seul cas d'exception possible serait donc celui où ces trois relations seraient des identités.

Or l'identité $B - C \equiv o$ donne, en particulier, $a_2 = b_3$, $a_1 = - c_3$; et, en faisant $B \equiv C$ dans (4), il vient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &A(a_3 h + a_2 g' - c_3) \\ &\quad + B(-a_3 g + b_2 g' + d_3 - c_2) - D(a_2 g + b_2 h - d_2) \equiv o. \end{aligned} \right.$$

Considérons toujours g, h, g' comme les coordonnées d'un point dans l'espace; les trois plans

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_3 h + a_2 g' - c_3 &= o, \\ -a_3 g + b_2 g' + d_3 - c_2 &= o, \\ a_2 g + b_2 h - d_2 &= o \end{aligned} \right.$$

se coupent suivant une même droite, car les déterminants du troisième ordre compris dans la matrice

$$\begin{array}{cccc} 0 & a_3 & a_2 & -c_3 \\ -a_3 & 0 & b_2 & d_3-c_2 \\ a_2 & b_2 & 0 & -d_2 \end{array}$$

sont nuls, comme on le reconnaît aisément, en tenant compte de $a_2 = b_3$, et $(ad)_{23} + (bc)_{23} = 0$; cette dernière relation tirée de $F_1 \equiv 0$. Dès lors, l'identité (9) montre que le plan

$$a_2 g + b_2 h - d_2 = 0.$$

coupe la quadrique $A = 0$ suivant une conique située sur la quadrique $B = 0$: les quadriques $A = 0$ et $B = 0$ se coupent alors suivant une deuxième conique située sur $D = 0$.

Le plan, $a_2 g + b_2 h - d_2 = 0$, de la première conique commune à $A = 0$ et $B = 0$, ayant ses coefficients rationnels en fonction des coefficients des quadriques A et B, il en sera de même du plan de la seconde; c'est-à-dire qu'il existera entre g, h et g' une relation

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

où les coefficients sont rationnels par rapport aux a_i, b_i, c_i, d_i, c'est-à-dire sont des fractions : c'est là une relation singulière entre les périodes, et le théorème est établi.

191. *Remarque.* — On a supposé dans ce raisonnement que les trois plans (10) existent, c'est-à-dire que l'équation d'aucun d'eux n'est une identité. S'il en est autrement, du second par exemple, on aura $a_3 = 0$, $b_2 = 0$; et comme $a_2 = b_3$, si a_2 était nul, on serait dans le cas signalé au n° **189** et où les périodes ne sont liées que par des relations singulières. Supposons alors $a_2 \gtrless 0$; l'identité (9) devient :

$$A(a_2 g' - c_3) - D(a_2 g - d_2) \equiv 0,$$

d'où l'on conclut, en se reportant à l'expression de A, que A est de la forme

$$A = (mh + n)(a_2 g - d_2) = 0,$$

m et n étant entiers, et $m \gtrless 0$.

On ne saurait avoir $a_2 g - d_2 = 0$, sinon g serait réel et $h_1^2 - g_1 g'_1$ ne serait pas négatif; on a donc

$$mh + n = 0,$$

relation singulière. Un raisonnement analogue s'applique au cas où l'équation d'un des autres plans (10) serait une identité.

Mêmes conclusions, si deux ou trois de ces équations sont des identités.

192. Avant de discuter plus complètement les relations fondamentales (A), (B), (C), (D) entre les périodes de multiplication complexe, nous étudierons les multiplications dans quelques cas particuliers.

Multiplication dans le cas d'une relation singulière.

193. Cette relation pouvant se mettre sous la forme

$$\text{(R)} \qquad g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

et étant supposée la seule relation entre g, h, g', il faut que les équations (A), (B), (C), (D) en soient des conséquences, c'est-à-dire, comme on le reconnaît de suite, qu'elles soient du premier degré en g, h, g' et de la forme $g + \beta h + \gamma g'$, à un facteur entier près.

Donc

$$a_3 = a_2 = b_3 = b_2 = 0;$$

puis :

$$\begin{aligned}
\beta(a_0 - d_3) &= b_0 - d_2, \\
\gamma(a_0 - d_3) &= 0, \\
\beta a_1 &= b_1 - d_3, \\
\gamma a_1 &= - d_2, \qquad d_0 = d_1 = c_0 = c_1 = 0, \\
-\beta c_3 &= a_0 - c_2, \\
-\gamma c_3 &= b_0, \\
a_1 - c_3 &= b_1 - c_2 = 0.
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\gamma(a_1 - c_3) = b_0 - d_2 = \beta(a_0 - d_3)$$

et en comparant avec $\gamma(a_0 - d_3) = 0$, on voit que nécessairement $a_0 - d_3 = 0$, car β et γ ne peuvent être nuls en même temps.

On a ainsi pour les a_i, b_i, c_i, d_i les valeurs

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a_0 = a_0, & b_0 = -\gamma c_3, & c_0 = 0, & d_0 = 0, \\ a_1 = c_3, & b_1 = a_0 + \beta c_3, & c_1 = 0, & d_1 = 0, \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = a_0 + \beta c_3, & d_2 = -\gamma c_3, \\ a_3 = 0, & b_3 = 0, & c_3 = c_3, & d_3 = a_0, \end{array}\right.$$

et la transformation de multiplication complexe est, en remplaçant par ρ et σ les entiers, *restés arbitraires*, a_0 et c_3 :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} U = \rho u - \gamma\sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma)v. \end{array}\right.$$

Il est aisé de trouver les *indices* L et K de cette transformation.

On a, par les formules (5) de la première Partie,

$$AK = (ac)_{03} + (ac)_{12} = \sigma(2\rho + \beta\sigma)$$

d'où, puisque A, coefficient de g dans la relation singulière (R), est égal à 1,

$$K = \sigma(2\rho + \beta\sigma).$$

Ensuite

$$L = (ad)_{03} + (ad)_{12} = \rho^2 - \gamma\sigma^2.$$

A un point u, v correspond, par (12), un seul point U, V, et à un point U, V correspondent δ' points u, v, étant posé, comme au n° **141**,

$$\delta' = L^2 + \beta KL + \gamma K^2.$$

En faisant le calcul, on trouve pour le *degré* de la multiplication considérée

$$\delta' = (\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2)^2.$$

194. *Remarque.* — La transformation (12) n'est ordinaire que si $K = 0$, c'est-à-dire si $\sigma = 0$, ce qui correspond à la multiplication ordinaire par un nombre entier; ou si $2\rho + \beta\sigma = 0$, ce qui donne

$$U = -\tfrac{1}{2}\sigma[\beta u + 2\gamma v], \qquad V = \tfrac{1}{2}\sigma[2u + \beta v];$$

σ désignant un entier tel que $\beta\sigma$ soit pair. C'est là la seule *multiplication complexe ordinaire* dans le cas d'une relation singulière.

Multiplication dans le cas de deux relations singulières.

195. Si les périodes g, h, g' sont liées seulement par deux relations singulières, on peut, en combinant celles-ci linéairement, en déduire une relation, également singulière, où le terme en h ait disparu :

$$Ag + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

L'invariant de cette relation $\Delta(= -4AC - 4DE)$ est divisible par 4; on peut donc (I, n° **15**), par une transformation ordinaire du premier ordre, la ramener au type de même invariant

$$(\Delta) \qquad h^2 - gg' = \frac{\Delta}{4}.$$

La transformation employée change une quelconque des relations singulières primitives en une relation singulière, où l'on peut, en tenant compte de (Δ), faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$. Finalement, on a le droit de supposer que les périodes g, h, g' sont liées par deux relations de la forme

$$(13) \qquad \begin{cases} h^2 - gg' = d, \\ \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega, \end{cases}$$

d, α, β, ω étant entiers; de plus α, β, γ et ω peuvent être supposés premiers entre eux.

196. *Remarque.* — Cherchons à quelles conditions doivent satisfaire d, α, β, ω pour que l'inégalité

$$h_1^2 - g_1 g_1' < 0$$

puisse être vérifiée; g_1, h_1, g_1' désignant toujours les parties imaginaires de g, h, g' :

$$(14) \qquad g = g_0 + i g_1, \qquad h = h_0 + i h_1, \qquad g' = g_0' + i g_1'.$$

En premier lieu, les invariants $4d$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ des deux relations (13) doivent être positifs (**I**, n° **14**). Remplaçons g, h, g' par leurs valeurs (14) dans les relations (13) et séparons le réel de l'imaginaire, il vient :

$$(15) \qquad \begin{cases} \alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g_0' - \omega & = 0, \\ \alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g_1' & = 0, \\ 2 h_0 h_1 - g_0 g_1' - g_0' g_1 & = 0, \\ h_1^2 - g_1 g_1' - (h_0^2 - g_0 g_0') + d = 0. \end{cases}$$

Tirons des deux relations intermédiaires les valeurs proportionnelles de g_1, h_1, g_1' et écrivons que $h_1^2 - g_1 g_1'$ est négatif :

$$\omega^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)(h_0^2 - g_0 g_0') < 0.$$

La quatrième relation donne

$$h_0^2 - g_0 g_0' - d < 0;$$

d'où, puisque $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0,

$$d > h_0^2 - g_0 g_0' > \frac{\omega^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma},$$

on a en outre

$$\alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g_0' - \omega = 0.$$

Pour qu'on puisse trouver g_0, h_0, g_0' vérifiant cette égalité et les deux inégalités qui précèdent, il faut que $d > \frac{\omega^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$; c'est de plus suffisant, car si l'on regarde g_0, h_0, g'_0 comme les coordonnées d'un point dans l'espace, le plan $\alpha g_0 + \beta h_0 + \gamma g'_0 - \omega = 0$ coupe toujours en des points réels la quadrique $h_0^2 - g_0 g'_0 = \lambda^2$, *qui est un hyperboloïde à une nappe*.

Finalement, pour que $h_1^2 - g_1 g'_1$ *puisse* être négatif, il est *nécessaire* qu'on ait

$$(16) \qquad d > 0, \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0, \quad \omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) < 0.$$

Sous une autre forme, cela revient à dire que la relation singulière

$$\rho(h^2 - gg' - d) + \sigma(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0,$$

où ρ et σ sont des entiers quelconques, a son invariant positif, quels que soient ρ et σ; cet invariant est, en effet,

$$\sigma^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\rho\sigma\omega + 4\rho^2 d;$$

et cette condition était évidente *a priori*.

197. D'une manière générale, soient

$$F_1 = A\,g + B\,h + C\,g' + D\,(h^2 - gg') + E = 0,$$
$$F_2 = A'g + B'h + C'g' + D'(h^2 - gg') + E' = 0,$$

deux relations singulières entre g, h, g'; pour qu'il existe des périodes vérifiant ces relations et l'inégalité $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, il est nécessaire que l'invariant de la relation

$$\rho F_1 + \sigma F_2 = 0$$

soit positif. Géométriquement, si l'on regarde g, h, g' comme des coordonnées courantes, cela revient à dire que le discriminant de la quadrique $\rho F_1 + \sigma F_2 = 0$ n'est jamais nul pour des valeurs réelles de ρ et σ; cette quadrique ne peut donc appartenir à la variété cône, à moins qu'elle ne se réduise à un plan, c'est-à-dire à moins que les termes en $h^2 - gg'$ ne disparaissent.

Si le terme en $h^2 - gg'$ manque dans F_1 et existe dans F_2, on voit de même que le plan $F_1 = 0$ ne peut toucher la quadrique $F_2 = 0$.

198. Cela posé, reprenons les relations (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe; elles doivent être des conséquences des deux relations

$$(13) \qquad h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega.$$

En regardant toujours g, h, g' comme des coordonnées courantes, cela revient à écrire que les quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, passent par la conique représentée par les équations (13); par suite, en désignant par θ', α', β', γ', ω', des constantes, on a d'abord, pour la quadrique $A = 0$:

$$\begin{aligned} b_2(h^2 - gg') + g[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'] \\ + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 \equiv \theta'(h^2 - gg' - d) \\ + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)(\alpha' g + \beta' h + \gamma' g' - \omega'), \end{aligned}$$

ce qui donne de suite, en supposant $\gamma \gtrless 0$,

$$\gamma' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \theta' = b_2, \qquad \omega' = 0,$$

et il reste

$$(17)\left\{\begin{aligned} g[a_3 g + (a_2 + b_3)h + b_2 g'] + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 \\ \equiv - b_2 d + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)\alpha' g; \end{aligned}\right.$$

d'où, en identifiant,

$$\begin{gathered} a_3 = \alpha\alpha', \qquad a_2 + b_3 = \beta\alpha', \qquad b_2 = \gamma\alpha', \\ a_0 - d_3 = -\omega\alpha', \qquad b_0 - d_2 = 0, \qquad d_0 = b_2 d. \end{gathered}$$

Les quatre premières de ces relations montrent que α' est un entier, car si c'était une fraction $\frac{p}{q}$, réduite à sa plus simple expression, q devrait diviser α, β, γ et ω, qui sont supposés sans autre diviseur commun que l'unité. On peut donc écrire, en remplaçant α' par σ,

$$(18)\qquad \begin{cases} a_3 = \alpha\sigma, \\ a_2 + b_3 = \beta\sigma, \\ b_2 = \gamma\sigma, \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} a_0 - d_3 + \sigma\omega = 0, \\ b_0 - d_2 = 0, \\ d_0 - db_2 = 0. \end{cases}$$

Maintenant, en tenant compte de (13) et de (18), l'équation (B) s'écrit

$$-a_2 d + h\sigma\omega + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0,$$

ce qui doit évidemment être une conséquence de

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0.$$

Donc, en désignant par ρ un entier

$$(20)\qquad \begin{cases} a_1 = \alpha\rho, \\ b_1 - d_3 + \sigma\omega = \beta\rho, \\ -d_2 = \gamma\rho, \\ d_1 + a_2 d = \omega\rho. \end{cases}$$

En opérant de même pour les équations (C) et (D), et en désignant par ν un entier, il vient :

$$(21)\qquad \begin{cases} -c_3 = \alpha\nu, \\ a_0 - c_2 + \sigma\omega = \beta\nu, \\ b_0 = \gamma\nu, \\ c_0 + b_3 d = \omega\nu, \end{cases}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} a_1 - c_3 = 0, \\ b_1 - c_2 + \sigma\omega = 0, \\ c_1 - a_3 d = 0. \end{cases}$$

La relation $a_1 = c_3$ donne $\nu = -\rho$; remplaçant ν par cette valeur et résolvant les équations (18), (19), (20), (21) et (22) par rapport aux a_i, b_i, c_i, d_i, on trouve que ces seize entiers s'expriment comme il suit en fonction des entiers ρ, σ et de a_0 et b_3, que nous désignerons par θ et τ :

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{llll} a_0 = \theta, & b_0 = -\gamma\rho, & c_0 = -\omega\rho - d\tau, & d_0 = \gamma d\sigma, \\ a_1 = \alpha\rho, & b_1 = \theta + \beta\rho, & c_1 = \alpha d\sigma, & d_1 = \omega\rho - \beta d\sigma + d\tau, \\ a_2 = \beta\sigma - \tau, & b_2 = \gamma\sigma, & c_2 = \theta + \omega\sigma + \beta\rho, & d_2 = -\gamma\rho, \\ a_3 = \alpha\sigma, & b_3 = \tau, & c_3 = \alpha\rho, & d_3 = \theta + \omega\sigma. \end{array}\right.$$

199. *Remarque.* — On a supposé, pour obtenir ces relations, $\gamma \gtrless 0$; dans le cas contraire, on verrait sans difficulté qu'elles subsistent encore, à condition que les inégalités nécessaires du n° **196** soient vérifiées.

200. Les formules (23) où ρ, σ, θ et τ désignent des *entiers quelconques* résolvent le problème en donnant les nombres caractéristiques des multiplications complexes cherchées; les transformations correspondantes sont données par les formules (1) et (2) :

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{U} = (a_0 + a_3 g + a_2 h\ )u + (b_0 + b_3 g + b_2 h\ )v, \\ \mathrm{V} = (a_1 + a_3 h + a_2 g')u + (b_1 + b_3 h + b_2 g')v. \end{array}\right.$$

201. La multiplication n'est qu'une transformation qui conduit des périodes g, h, g' aux mêmes périodes g, h, g'; d'après la théorie générale de la transformation et le n° **187**, g, h et g', considérées comme périodes *finales*, vérifient la relation (6), $\mathrm{F}_2 = 0$ de ce numéro, laquelle est de la forme

$$(25)\qquad \mathrm{A}g + \mathrm{B}h + \mathrm{C}g' + \mathrm{D}(h^2 - gg') + \mathrm{E} = 0.$$

De même g, h, et g', considérées comme périodes *initiales*, vérifient la relation analogue (5), $\mathrm{F}_1 = 0$:

$$(26)\qquad \mathrm{A}'g + \mathrm{B}'h + \mathrm{C}'g' + \mathrm{D}'(h^2 - gg') + \mathrm{E}' = 0.$$

Calculons A, B, C, D, E pour la multiplication (23). On a, en désignant par K l'indice de cette multiplication,

$$\begin{aligned} AK &= (ac)_{03} + (ac)_{12} = \alpha(2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2),\\ DK &= (ab)_{03} + (ab)_{12} = 2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta. \end{aligned}$$

Il est inutile de calculer BK, CK, EK, car la relation (25) est nécessairement de la forme

$$m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

où m et n désignent des entiers; on voit ainsi que la relation *finale*, $F_2 = 0$, entre g, h, g' est

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &(h^2 - gg' - d)[2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta]\\ &\quad + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)[2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2] = 0. \end{aligned}\right.$$

On trouverait de même pour la relation *initiale*, $F_1 = 0$,

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &(h^2 - gg' - d)(2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau)\\ &\quad + (\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega)(2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + d\beta\sigma^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

202. *Degré.* — Le *degré* de la transformation, c'est-à-dire le nombre des points u, v qui répondent à un point U, V est égal (n° **141**) au déterminant des nombres a_i, b_i, c_i, d_i; on trouve, pour sa valeur,

$$[\theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) - d\alpha\gamma\sigma^2]^2.$$

203. *Remarque.* — La multiplication considérée ne sera ordinaire (n° **184**) que si la relation (27) est une identité; en ce cas, la relation (28) en sera une également.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\sigma\rho + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta = 0,\\ &2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - d\beta\sigma^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Tirons τ de la première de ces relations et portons dans la seconde; il vient, en supposant $2\theta + \beta\rho \gtrless 0$,

$$\rho\{(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)^2 + \sigma^2[d(\beta^2 - 4\alpha\gamma) - \omega^2]\} = 0.$$

D'après les inégalités du n° **196**, la quantité entre crochets est une somme de carrés; elle ne peut dès lors être nulle que si $\sigma = 0$, $2\theta + \beta\rho = 0$, cas écarté : on a donc $\rho = 0$, ce qui donne ensuite, par (29),

$$\theta(2\tau - \beta\sigma) = 0, \qquad d\sigma(2\tau - \beta\sigma) = 0;$$

d'où

$$2\tau - \beta\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = \sigma = 0.$$

Enfin, si $2\theta + \beta\rho = 0$, les relations (29) donnent

$$\rho\sigma(\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 0, \qquad \sigma(2d\tau + 2\omega\rho - \beta\, d\sigma) = 0;$$

d'où les solutions

$$\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho = 2\tau - \beta\sigma = 0.$$

Finalement, pour que la multiplication définie par les entiers (23) soit ordinaire, il faut et il suffit que soit vérifiée une des hypothèses suivantes :

1° $$\rho = 2\tau - \beta\sigma = 0,$$

2° $$\sigma = 2\theta + \beta\rho = 0.$$

La multiplication ordinaire par un nombre entier, θ, correspond à $\rho = \sigma = \tau = 0$ (n° **186**).

204. Conformément au langage que nous avons adopté (n° **187**), nous disons que la multiplication complexe définie par les entiers (23) a_i, b_i, c_i, d_i *conduit* de la relation singulière (28) à la relation singulière (27). Proposons-nous de rechercher les multiplications qui conduisent d'une relation à la même.

Soit

$$(30) \qquad m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

cette relation, m et n désignant des entiers quelconques; pour que les relations initiale et finale (28) et (27) soient identiques à (30), il faut et il suffit que

$$\frac{m}{n} = \frac{2\theta\tau + (2\alpha\gamma - \beta^2)\rho\sigma + \beta\rho\tau - \beta\sigma\theta}{2\theta\rho + 2d\sigma\tau + 2\omega\rho\sigma + \beta\rho^2 - \beta d\sigma^2}$$
$$= \frac{2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau}{2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + \beta d\sigma^2}.$$

On met aisément ces équations sous la forme :

$$(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)[n(2\tau - \beta\sigma) - 2m\rho] = 0,$$
$$\sigma\{(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m]\} = 0.$$

On y satisfait de quatre manières :

1° $\quad \sigma = 0, \qquad 2\theta + \beta\rho = 0;$

2° $\quad \sigma = 0, \qquad n\tau - m\rho = 0;$

3° $\quad (2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$
$\qquad n(2\tau - \beta\sigma) - 2m\rho = 0;$

4° $\quad (2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$
$\qquad 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0.$

205. Examinons successivement ces quatre hypothèses :

1° $\sigma = 0$ et $2\theta + \beta\rho = 0$ donne (n° **203**) une transformation ordinaire qu'on devait évidemment rencontrer, puisqu'en ce cas les premiers membres des relations initiale et finale, étant identiquement nuls, sont identiques entre eux.

2° $\sigma = 0$ et $n\tau - m\rho = 0$ donne une transformation singulière : on reconnaît aisément qu'on trouve ainsi les multiplications singulières répondant au cas où g, h et g' seraient liées *uniquement* par la relation $m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$.

3° Des deux équations

$$\begin{aligned}(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] &= 0,\\ (2\tau - \beta\sigma)n \qquad\qquad - \rho.2m \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0,\end{aligned}$$

on déduit

$$2\tau - \beta\sigma = 0, \qquad \rho = 0,$$

transformation ordinaire (n° **203**). Cela suppose toutefois que le déterminant

$$-2m(2md + n\omega) - n^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) - 2\omega mn$$

n'est pas nul. Cette quantité s'écrit, en changeant le signe,

$$n^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\omega mn + 4m^2 d;$$

elle ne peut s'annuler pour aucun système de valeurs de m et n (autre que 0,0), car $\omega^2 - d(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ est négatif (n° **196**).

4° C'est ce cas qui donne des multiplications singulières nouvelles, conduisant d'une relation singulière à la même relation; il est caractérisé par la condition

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0,$$

σ étant $\gtrless 0$, et aussi ρ et $2\tau - \beta\sigma$ n'étant pas nuls simultanément. Si ρ, σ, θ et τ sont des entiers quelconques satisfaisant à ces conditions, la multiplication dont les entiers caractéristiques sont donnés par les formules (23) conduira de la relation

$$m(h^2 - gg' - d) + n(\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega) = 0$$

à la même relation; m et n étant définis par l'équation

$$(2\tau - \beta\sigma)(2md + n\omega) + \rho[n(\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 2\omega m] = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{m}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)\rho + \omega(2\tau - \beta\sigma)} = \frac{n}{-2\omega\rho - 2d(2\tau - \beta\sigma)}.$$

206. *Corollaire.* — Étant donnée une relation initiale (30), on peut toujours trouver une multiplication conduisant de cette relation à une relation *différente;* car il suffit que ρ, σ, θ, τ soient choisis de manière à vérifier

$$\frac{m}{n} = \frac{2\theta\tau - 2\alpha\gamma\rho\sigma + 2\omega\sigma\tau - \beta\sigma\theta - \beta\omega\sigma^2 + \beta\rho\tau}{2\theta\rho - 2d\sigma\tau + \beta\rho^2 + \beta d\sigma^2},$$

et de telle sorte que ni σ, ni ρ, ni $2\theta+\beta\rho+\omega\sigma$ ne soient nuls : ce choix est évidemment possible.

207. *Composition de deux multiplications.* — Si nous effectuons successivement deux multiplications, définies respectivement par les valeurs ρ, σ, θ, τ et ρ', σ', θ', τ' des entiers qui figurent dans les formules (23), nous obtenons une multiplication du même type (23), pour laquelle les entiers correspondants seront ρ'', σ'', θ'', τ''. On obtient leurs valeurs sans difficulté en partant des formules du n° **146** relatives à la composition de deux transformations; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\rho'' &= \rho\theta' + \theta\rho' + \beta\rho\rho' - d(\sigma\tau' - \sigma'\tau) + \omega\rho\sigma',\\
\sigma'' &= \sigma\theta' + \theta\sigma' + \tau\rho' - \rho\tau' + \beta\rho\sigma' + \omega\sigma\sigma',\\
\theta'' &= \theta\theta' - \alpha\gamma\rho\rho' + \alpha\gamma\, d\sigma\sigma' - (d\tau + \omega\rho)(\beta\sigma' - \tau'),\\
\tau'' &= \theta\tau' + \tau\theta' + \alpha\gamma(\rho\sigma' - \sigma\rho') + \beta\tau\rho' + \omega\sigma\tau'.
\end{aligned}$$

208. On déduit de ces formules une conséquence arithmétique intéressante.

Posons, pour simplifier,

$$\begin{aligned}
\xi &= 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma,\\
\eta &= 2\tau - \beta\sigma;
\end{aligned}$$

les entiers ξ et η remplaçant θ et τ. On trouve, en appelant ξ'' et η'' les quantités $2\theta''+\beta\rho''+\omega\sigma''$ et $2\tau''-\beta\sigma''$,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
2\xi'' &= \xi\xi' + d\eta\eta' + \Delta\rho\rho' + (\omega^2 - d\Delta)\sigma\sigma' + \omega(\rho\eta' + \rho'\eta),\\
2\eta'' &= \xi\eta' + \xi'\eta - \omega(\sigma'\eta - \sigma\eta') + \Delta(\sigma\rho' - \sigma'\rho),\\
2\rho'' &= \rho\xi' + \rho'\xi + \omega(\rho\sigma' - \sigma\rho') + d(\sigma'\eta - \sigma\eta'),\\
2\sigma'' &= \sigma\xi' + \sigma'\xi + \rho'\eta - \rho\eta',
\end{aligned}\right.$$

en écrivant $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta$.

Maintenant observons que le degré de la transformation composée est le produit des degrés des transformations composantes; ce degré, pour la transformation ξ, η, ρ, σ, s'écrit, en vertu de la formule du n° **202**,

$$\frac{1}{16}[\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2]^2.$$

On aura donc

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} & [\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2] \\ & \times [\xi'^2 - d\eta'^2 - 2\omega\rho'\eta' - \Delta\rho'^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma'^2] \\ = {} & 4[\xi''^2 - d\eta''^2 - 2\omega\rho''\eta'' - \Delta\rho''^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma''^2], \end{aligned} \right.$$

en désignant par ξ, η, ρ, σ; ξ', η', ρ', σ' des entiers quelconques, et ξ'', η'', ρ'', σ'' étant définis par les formules (31). On aurait dû écrire $\pm$ devant le second membre de (32), mais on reconnaît de suite que l'identité des deux membres exige le signe $+$. On a ainsi une propriété curieuse de la forme quaternaire

$$\xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2.$$

209. *Carré d'une multiplication.* — Si l'on fait dans les formules précédentes $\rho' = \rho$, $\sigma' = \sigma$, $\theta' = \theta$, $\tau' = \tau$, il vient

$$\begin{aligned} \rho'' &= \rho(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma), \\ \sigma'' &= \sigma(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma), \\ \tau'' &= \tau(2\theta + \beta\rho + \omega\sigma), \\ \theta'' &= \theta^2 - \alpha\gamma\rho^2 + \alpha\gamma d\sigma^2 - (d\tau + \omega\rho)(\beta\sigma - \tau). \end{aligned}$$

Comme conséquence, on voit que si la multiplication considérée est une de celles du type 4° du n° **205**, conduisant d'une relation singulière à la même relation, ρ'', σ'' et τ'' sont nuls, puisque

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0.$$

Le carré d'une telle multiplication est donc une multiplication ordinaire par un nombre entier (n° **203**); cet entier est θ''.

Si l'on désigne par D^2 le degré de la multiplication considérée (n° **202**)

$$D = \theta^2 + \theta(\beta\rho + \omega\sigma) + \alpha\gamma\rho^2 + (\beta\sigma - \tau)(\omega\rho + d\tau) - \alpha\gamma d\sigma^2,$$

on a

$$D + \theta'' = (2\theta + \beta\rho + \omega\sigma)\theta = 0.$$

Ainsi

$$\theta'' = -D.$$

Multiplication dans le cas elliptique.

210. Supposons les périodes g, h, g' liées par une relation singulière d'invariant carré parfait n^2, et par une ou deux autres relations. Si la relation singulière était la seule liant les périodes, on rentrerait dans un cas examiné (n° **193**).

On peut ramener la relation singulière à la forme $nh - 1 = 0$ (I, n° **15**); remplaçons h par $\frac{1}{n}$ dans les quatre équations fondamentales de la multiplication complexe, celles-ci deviennent :

$$\text{(A)} \quad n^2 a_3 g^2 + n[a_2 + b_3 + n(a_0 - d_3)]g + b_2 + n(b_0 - d_2) - n^2 d_0 = 0,$$
$$\text{(B)} \quad n^2 a_2 g g' + n[a_3 + n a_1]g + n[b_2 - n d_2]g' + b_3 + n(b_1 - d_3) - n^2 d_1 = 0,$$
$$\text{(C)} \quad n^2 b_3 g g' + n[a_3 - n c_3]g + n[b_2 + n b_0]g' + a_2 + n(a_0 - c_2) - n^2 c_0 = 0,$$
$$\text{(D)} \quad n^2 b_2 g'^2 + n[a_2 + b_3 + n(b_1 - c_2)]g' + a_3 + n(a_1 - c_3) - n^2 c_1 = 0.$$

En tenant compte de $h^2 = \frac{1}{n^2}$, les équations (B) et (C) sont singulières, car $gg' = (gg' - h^2) + \frac{1}{n^2}$; si donc (A) et (D) sont des identités, on retombe dans le cas où g, h, g' ne sont liées que par des relations singulières.

Si (A), par exemple, n'est pas une identité, et si (B) ou (C) n'en est pas une, les périodes sont encore liées par trois relations singulières; car (B) donne

$$g = \frac{\rho g' + \sigma}{\rho' g' + \sigma'},$$

les ρ et σ étant entiers, et si nous portons cette valeur dans (A), nous trouvons

$$n^2 a_3 g \frac{\rho g' + \sigma}{\rho' g' + \sigma'} + Mg + P = 0,$$

relation de la forme

$$M_1 gg' + N_1 g + P_1 g' + Q_1 = 0,$$

c'est-à-dire singulière, en raison de $h^2 = \frac{1}{n^2}$.

Donc, pour échapper au cas de relations uniquement singulières, il faut que (B) *et* (C) soient des identités, et que (A) ou (D) n'en soit pas une. Or (A), par exemple, est de la forme

$$Mg^2 + Ng + P = 0,$$

M, N, P étant entiers : si l'on se reporte au tableau des périodes :

$$\begin{array}{cccc} 1, & 0, & g, & \frac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \frac{1}{n}, & g', \end{array}$$

on voit que le couple $\left(g, \frac{1}{n}\right)$ est un couple de périodes elliptiques de multiplication complexe, c'est-à-dire que l'un des deux systèmes de fonctions elliptiques auxquelles se réduisent les fonctions abéliennes considérées possède une multiplication complexe.

Même conclusion si (D) n'est pas une identité.

Il est aisé de trouver les multiplications relatives à ces cas.

211. Supposons d'abord que (A) n'est pas une identité et que (D) en est une; en écrivant que $(D) \equiv (B) \equiv (C) \equiv 0$, on a :

$$\begin{array}{llll} b_2 = 0, & a_1 + b_3 + n(b_1 - c_2) = 0, & & a_3 + n(a_1 - c_3) - n^2 c_1 = 0, \\ a_2 = 0, & a_3 + na_1 = 0, & b_2 - nd_2 = 0, & b_3 + n(b_1 - d_3) - n^2 d_1 = 0, \\ b_3 = 0, & a_3 - nc_3 = 0, & b_2 + nb_0 = 0, & a_2 + n(a_0 - c_2) - n^2 c_0 = 0, \end{array}$$

ce qui donne

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{llll} a_2 = b_2 = b_3 = b_0 = d_2 = 0, & a_3 = -n^2 c_1, & b_1 = c_2, & a_1 = nc_1, \\ & c_3 = -nc_1, & a_0 = c_2 + nc_0, & d_3 = c_2 - nd_1. \end{array} \right.$$

La période g vérifie (A), c'est-à-dire une relation quadratique de la forme

$$n^2mg^2 + npg + q = 0, \tag{34}$$

m, p, q étant entiers sans diviseur commun.

Écrivons que (A) est identique à (34), à un facteur près, il vient, en tenant compte de (33),

$$c_1 = -\rho m, \qquad c_0 + d_1 = \rho p, \qquad d_0 = -\rho q,$$

ρ désignant un entier; et finalement les entiers caractéristiques de la multiplication complexe cherchée sont donnés par les formules :

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{llll} a_0 = c_2 + nc_0, & b_0 = 0, & c_0 = c_0, & d_0 = -\rho q, \\ a_1 = -n\rho m, & b_1 = c_2, & c_1 = -\rho m, & d_1 = -c_0 + \rho p, \\ a_2 = 0, & b_2 = 0, & c_2 = c_2, & d_2 = 0, \\ a_3 = n^2\rho m, & b_3 = 0, & c_3 = n\rho m, & d_3 = c_2 + nc_0 - n\rho p; \end{array}\right.$$

ρ, c_0, c_2 sont des entiers arbitraires.

Le *degré* de cette multiplication complexe, égal au déterminant des a_i, b_i, c_i, d_i (n° **141**), est

$$c_2^2[(c_2 + nc_0)^2 - np\rho(c_2 + nc_0) + n^2mq\rho^2]$$

quantité toujours positive, car $p^2 - 4mq$ doit être < 0, pour que g, donné par (34), soit imaginaire.

Remarque. — En vertu de ce qui précède, si les équations (A), (B), (C), (D) établissent entre les périodes une relation singulière d'invariant carré parfait et *deux* autres relations, une de celles-ci ne pourra être singulière sans que l'autre le soit également.

212. On trouverait de même sans difficulté les formules qui répondent au cas où (D) seul ne serait pas une identité, et à celui où (A) et (D) ne seraient pas simultanément des identités.

Multiplication dans le cas de trois relations singulières.

213. Les trois relations peuvent (nº **195**) être réduites aux formes

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h = \omega, \qquad \beta' h + \gamma' g' = \omega';$$

les deux dernières ont leur invariant carré parfait.

On peut alors ramener l'une d'elles au type $nh - 1 = 0$; les deux autres seront des formes

$$\begin{aligned} A\,gg' + B\,g + C\,g' + D &= 0,\\ A_1 gg' + B_1 g + C_1 g' + D &= 0. \end{aligned}$$

En tirant g' de la dernière pour porter dans la précédente, on voit que g vérifie une relation quadratique $Mg^2 + Ng + P = 0$ à coefficients entiers, et il en est de même de g'.

On retombe donc sur le cas elliptique où les deux systèmes de fonctions elliptiques correspondantes ont une multiplication complexe; mais, outre les relations quadratiques que vérifient g et g', il y a de plus une relation $Agg' + Bg + Cg' + D = 0$, qui n'existe pas en général dans le cas précédent.

Nous n'indiquerons pas les formules de multiplication complexe relatives au cas de trois relations singulières; on les obtiendrait sans difficulté en imitant la marche déjà suivie.

Multiplication complexe, en général.

214. Revenons au cas général de la multiplication complexe, c'est-à-dire à la discussion des équations fondamentales (A), (B), (C), (D) du nº **185**:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{A}) & g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0,\\
(\mathrm{B}) & gha_3 + gg'a_2 + h^2 b_3 + hg'b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0,\\
(\mathrm{C}) & gha_3 + gg'b_3 + h^2 a_2 + hg'b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g'b_0 - c_0 = 0,\\
(\mathrm{D}) & h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0.
\end{array}$$

Nous avons établi (n° **190**) que ces relations entraînent au moins une relation singulière entre g, h et g'.

Distinguons maintenant plusieurs cas.

215. I. Les quatre relations (A), (B), (C), (D) se réduisent à une seule, laquelle, par ce qui vient d'être dit, est nécessairement une relation singulière; nous avons appris à former (n^{os} **193-194**) les multiplications complexes correspondantes.

216. II. Les quatre relations (A), (B), (C), (D) se réduisent à deux : géométriquement, c'est dire que, en regardant g, h, g' comme des coordonnées courantes, les quatre quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont une ligne commune. On peut supposer que cette ligne est une droite ou une conique (véritable ou décomposée) : les relations (A), (B), (C), (D) entraînent en effet entre g, h, g' au moins une relation singulière qui, par une transformation du premier ordre, peut être ramenée à la forme linéaire en g, h, g'.

Si la ligne commune aux quatre quadriques est une droite, celle-ci a deux équations du type

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0, \qquad \alpha_1 g + \beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = 0,$$

les α, β, γ, ω étant rationnels par rapport aux coefficients des surfaces, c'est-à-dire étant des entiers : les périodes g, h, g' sont alors uniquement liées par deux relations singulières.

Si la ligne commune aux quatre quadriques est une conique, elle ne peut avoir comme points à l'infini que les deux points

$$h^2 - gg' = 0, \qquad a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = 0.$$

En effet, en dehors du cas signalé au n° **189** et où toutes les relations entre les périodes sont encore singulières, ces points sont les seuls communs à l'infini aux quatre quadriques (n° **189**).

Deux cas sont alors à distinguer selon que la conique passe par ces deux points, ou qu'elle passe par un seul en y touchant alors le plan de l'infini. Dans le premier cas, le plan de la conique a une équation de la forme

$$a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = \omega,$$

ω étant une fraction, et en tenant compte de cette relation entre les périodes, les quatre relations (A), (B), (C), (D) deviennent singulières, comme le montrent les formes (7) des termes du plus haut degré dans ces équations.

Par suite, dans ce premier cas, g, h et g', qui sont, par hypothèse, simplement indéterminés, sont liés uniquement par deux relations singulières.

Dans le second cas, soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

le plan de la conique; α, β, γ, ω étant des fractions ou, si l'on veut, des entiers. Il faut, en vertu de l'hypothèse, que, dans le plan de l'infini, les droites $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, $a_3 g + (a_2 + b_3) h + b_2 g' = 0$ se coupent sur la conique $h^2 - gg' = 0$; l'un des points où la première droite coupe la conique ayant ainsi ses coordonnées fractionnaires, il en est de même du second, ce qui exige que la quantité $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ soit un carré. En d'autres termes, il existe entre les périodes une relation singulière d'invariant carré parfait, qu'on peut ramener au type $nh - 1 = 0$, et l'on retombe (n° **210**) soit sur le cas d'une seconde relation singulière, examiné aux n^{os} **195-209**, soit sur le cas où g (ou g') vérifie une relation du deuxième ordre à coefficients entiers; c'est le cas de multiplication elliptique complexe étudié au n° **211**.

217. III. Les quatre quadriques $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ ont un nombre fini de points communs, c'est-à-dire que g, h, g' sont liés par *trois* relations.

Je dis que, dans ce cas, il existe entre les périodes *une* ou *trois* relations singulières; ou encore, puisqu'il y a une relation singulière au moins, je dis que les équations (A), (B), (C), (D) ne peuvent entraîner deux relations singulières sans en entraîner une troisième, distincte des deux premières.

Le théorème est vrai si l'une des relations singulières de l'hypothèse a un invariant carré parfait (n° **211**, *Remarque*); nous aurons donc, dans ce qui suit, le droit de supposer qu'on est en dehors du cas elliptique.

Distinguons maintenant trois cas :

218. 1° La transformation de multiplication complexe considérée est singulière et conduit d'une relation singulière entre g, h, g' à une relation singulière différente : cela revient à dire que les expressions F_1 et F_2 du n° **187** ne sont pas identiquement nulles et sont linéairement distinctes.

Effectuons une transformation ordinaire du premier ordre, de manière à faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$ dans la relation $F_2 = 0$; je dis que le terme analogue ne disparaîtra pas dans $F_1 = 0$. Sinon, en éliminant g' entre $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, on trouverait une relation singulière du type $Mg + Nh + P = 0$, d'invariant carré parfait N^2, ce qui est contraire à l'hypothèse (n° **217**).

Considérons maintenant les identités (3) et (4) du n° **187** :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & A(a_3 h + a_2 g' + a_1) - B(a_3 g + a_2 h + a_0) \\ & + C(b_3 h + b_2 g' + b_1) - D(b_3 g + b_2 h + b_0) \equiv F_1, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & A(a_3 h + b_3 g' - c_3) + B(a_2 h + b_2 g' - c_2) \\ & - C(a_3 g + b_3 h - d_3) - D(a_2 g + b_2 h - d_2) \equiv F_2. \end{aligned} \right.$$

Entre ces deux identités, éliminons D; il vient une relation de la forme

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} & AP_1 + BP_2 + CP_3 \\ & \quad \equiv F_1(a_2 g + b_2 h - d_2) - F_2(b_3 g + b_2 h + b_0) \end{aligned} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 = {} & (a_3 h + a_2 g' + a_1)(a_2 g + b_2 h - d_2) \\ & -(a_3 h + b_3 g' - c_3)(b_3 g + b_2 h + b_0), \\ P_2 = {} & -(a_3 g + a_2 h + a_0)(a_2 g + b_2 h - d_2) \\ & -(a_2 h + b_2 g' - c_2)(b_3 g + b_2 h + b_0), \\ P_3 = {} & (b_3 h + b_2 g' + b_1)(a_2 g + b_2 h - d_2) \\ & +(a_3 g + b_3 h - d_3)(b_3 g + b_2 h + b_0). \end{aligned}$$

En développant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}
P_1 &= Cb_3 - Ba_2 + h[(ba)_{03} + (ba)_{12} + (ad)_{32} + (bc)_{32}] \\
&\qquad + (cb)_{03} + (ad)_{12}, \\
P_2 &= Aa_2 + Cb_2 + g[(ad)_{23} + (bc)_{23}] + (ad)_{20} + (bc)_{20}, \\
-P_3 &= Ab_3 + Bb_2 + g[(ba)_{03} + (ba)_{12}] + (db)_{12} + (db)_{03},
\end{aligned}$$

de sorte que l'identité (36) prend la forme

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}A\left(\frac{\partial F_2}{\partial h} - \frac{\partial F_1}{\partial h}\right) - B\frac{\partial F_1}{\partial g'} + C\frac{\partial F_2}{\partial g'} \\
&\qquad \equiv F_1(a_2 g + b_2 h - d_2) - F_2(b_3 g + b_2 h + b_0).
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, observons que $B - C = 0$ est une relation singulière entre g, h, g', dont le premier membre est une combinaison linéaire de F_1 et de F_2; sinon les périodes seraient liées par trois relations singulières et le théorème à démontrer serait établi. On peut alors, en posant pour abréger

$$\Phi = F_2 - F_1,$$

écrire l'identité (37)

$$(38)\qquad \frac{1}{2}A\Phi'_h - C\Phi'_{g'} \equiv F_1 R_1 + F_2 R_2,$$

R_1 et R_2 étant linéaires en g, h, g'.

En éliminant A au lieu de D entre les identités (3) et (4), on trouve de même

$$(39)\qquad \frac{1}{2}D\Phi'_h - C\Phi'_g = F_1 R'_1 + F_2 R'_2.$$

Comme F_1 contient un terme en $h^2 - gg'$ et que F_2 n'en contient pas, $\Phi(= F_2 - F_1)$ n'est pas identiquement nul, et même Φ'_g, Φ'_h, $\Phi'_{g'}$ ne sont pas des constantes.

Les surfaces (quadrique et plan) $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ se coupent suivant une conique qui rencontre en *deux* points, *à distance finie*, le plan $\Phi'_h = 0$. En effet : 1° le plan $\Phi'_h = 0$ ne peut coïncider avec le plan $F_2 = 0$ de la conique, car Φ'_h ne contient que h, tandis que F_2 doit contenir des termes en g et g', pour que l'invariant de la relation singulière $F_2 = 0$ ne soit pas carré parfait; 2° la conique ne rencontre pas le plan $\Phi'_h = 0$ à l'infini, c'est-à-dire qu'aucun des points à l'infini $h^2 - gg' = 0$, $h = 0$, n'est sur le plan $F_2 = 0$, car il faudrait pour cela que F_2 ne contînt pas de termes en g (ou en g'), et l'invariant correspondant serait encore carré parfait.

Je dis maintenant que les deux points où la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ coupe le plan $\Phi'_h = 0$ sont situés sur la quadrique $C = 0$. Si l'un d'eux, en effet, n'était pas sur C, il serait, en vertu des identités (38) et (39), sur les plans $\Phi'_g = 0$ et $\Phi'_{g'} = 0$. En d'autres termes, le point

$$\Phi'_h = \Phi'_g = \Phi'_{g'} = 0,$$

qui est le centre de $\Phi = 0$, serait sur la conique commune à $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$, donc sur $\Phi = 0$. Or cela est impossible, car la quadrique $\Phi = 0$, contenant des termes du second ordre dans son équation, ne peut appartenir à la variété cône (n° **197**).

Donc les deux points où la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ coupe le plan $\Phi'_h = 0$ sont sur la quadrique $C = 0$; donc les deux autres points où cette conique coupe $C = 0$ sont, d'après (38) et (39), sur $A = 0$ et sur $D = 0$. En d'autres termes (puisque $B - C \equiv \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$), les quadriques $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ n'ont à distance finie que deux points communs [1], c'est-à-dire [en vertu de (3) et (4)] que les quadriques (A), (B), (C), (D) se coupent, à distance finie, en deux points, situés sur la quadrique proprement dite $F_1 = 0$. La droite qui joint ces deux points a les coefficients de ses équations rationnels en fonction de ceux des équations (A), (B), (C), (D), c'est-à-dire entiers, et il y a entre les périodes, outre la relation singulière du second ordre $F_1 = 0$, deux autres relations singulières (puisque linéaires).

On complète ce raisonnement en observant que la droite dont on vient de parler ne saurait être sur la quadrique $F_1 = 0$; elle est en

---

[1] A moins que la conique $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ne soit tout entière située sur $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$; en ce cas, contrairement à l'hypothèse, les quatre dernières quadriques auraient une courbe commune.

effet dans le plan $F_2 = 0$ qui contient les deux points communs à (A), (B), (C), (D) à distance finie, et l'on a vu (nº **197**) que le plan $F_2 = 0$ ne peut toucher la quadrique $F_1 = 0$.

219. 2° La transformation de multiplication complexe considérée est singulière et conduit d'une relation singulière à la même relation, $F_1 = 0$.

Soit

$$(40) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

cette multiplication.

Par hypothèse, il y a entre les périodes deux relations singulières, qui peuvent être supposées (nº **195**) de la forme

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega.$$

Parmi les multiplications complexes déduites de ces deux relations, considérons-en une qui conduise de la relation singulière $F_1 = 0$ à une relation singulière différente $F_2 = 0$ (nº **206**) :

$$(40\ bis) \qquad u = \lambda_1 u' + \mu_1 v', \qquad v = \lambda_2 u' + \mu_2 v'.$$

Il est clair que la transformation composée de (40) et (40 *bis*)

$$(41) \qquad \begin{cases} U = \lambda\,(\lambda_1 u' + \mu_1 v') + \mu\,(\lambda_2 u' + \mu_2 v'), \\ V = \lambda'(\lambda_1 u' + \mu_1 v') + \mu'(\lambda_2 u' + \mu_2 v'), \end{cases}$$

sera encore une multiplication complexe, et qu'elle conduira de la relation $F_1 = 0$ à la relation $F_2 = 0$.

En vertu de ce qui précède, si l'existence de cette nouvelle multiplication détermine complètement g, h et g', il y a entre ces périodes une troisième relation singulière et le théorème est établi; si g, h et g' ne sont pas déterminés, c'est que la multiplication nouvelle est une de celles formées aux nºs **195-209** et qui se déduisent de l'existence de deux relations singulières entre les périodes.

On a ainsi, pour la transformation (40 *bis*), d'après les formules ordinaires de la transformation :

$$\lambda_1 = a'_0 + a'_3 g + a'_2 h, \qquad \lambda_2 = a'_1 + a'_3 h + a'_2 g';$$
$$\mu_1 = b'_0 + b'_3 g + b'_2 h, \qquad \mu_2 = b'_1 + b'_3 h + b'_2 g';$$

les a'_i et b'_i étant donnés par les formules (23) où l'on écrit ρ', σ', θ', τ' à la place de ρ, σ, θ, τ. De même pour la transformation (41) :

$$(41\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 &= a_0 + a_3 g + a_2 h,\\ \lambda\mu_1 + \mu\mu_2 &= b_0 + b_3 g + b_2 h,\\ \lambda'\lambda_1 + \mu'\lambda_2 &= a_1 + a_3 h + a_2 g',\\ \lambda'\mu_1 + \mu'\mu_2 &= b_1 + b_3 h + b_2 g'; \end{aligned}\right.$$

les a_i et b_i étant donnés par les formules (23). En portant dans ces équations les valeurs ci-dessus de λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, on en déduit les valeurs de λ, μ, λ', μ'; or, à l'aide des relations

$$h^2 - gg' = d, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega,$$

et des expressions des a_i, b_i, a'_i, b'_i en fonction des ρ, σ, θ, τ; ρ', ..., τ', on trouve

$$\lambda = mg + nh + p,$$
$$\mu = m'g + n'h + p',$$

m, n, p, m', n', p' étant fractionnaires; on a des expressions analogues pour λ' et μ'.

Les deux premières relations (41 *bis*), mises alors sous la forme

$$a'_3(\lambda g + \mu h) + a'_2(\lambda h + \mu g') = m_1 g + n_1 h + p_1,$$
$$b'_3(\lambda g + \mu h) + b'_2(\lambda h + \mu g') = m'_1 g + n'_1 h + p'_1,$$

donnent aussi, pour $\lambda g + \mu h$ en $\lambda h + \mu g'$, des expressions linéaires, à coefficients fractionnaires, en g et h; et l'on obtient un résultat semblable pour $\lambda' g + \mu' h$ et $\lambda' h + \mu' g'$.

Il faut maintenant écrire, pour que (40) soit une multiplication complexe, que λ et λ'; μ et μ'; $\lambda g + \mu h$ et $\lambda' g + \mu' h$; $\lambda h + \mu g'$ et $\lambda' h + \mu' g'$ sont des périodes : d'après ce qui précède, on n'est conduit ainsi à écrire que des relations *linéaires* entre g, h et g'. Si ce sont des identités ou des conséquences de $\alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega$, la multiplication complexe considérée (40) ne suppose entre g, h et g' que les deux relations singulières de l'hypothèse; si l'une, au moins, n'est pas une identité, ou une conséquence de $\alpha g + \beta h + \gamma g' = \omega$, c'est qu'il y a, entre les périodes, trois relations singulières. C. Q. F. D.

220. 3° La transformation de multiplication complexe considérée est ordinaire : il suffit de la faire suivre d'une multiplication singulière du premier degré, déduite de l'existence des deux relations singulières admises, pour rentrer dans un des cas précédents.

221. Ainsi, dans le cas où les périodes g, h, g' sont déterminées complètement par les équations fondamentales de la multiplication complexe, il y a entre elles une ou trois relations singulières.

S'il n'y en a qu'une et si son invariant est carré parfait, il résulte du n° **210** que g et g' vérifient chacun une relation quadratique à coefficients entiers, c'est-à-dire que les deux systèmes de fonctions elliptiques par lesquelles s'expriment les fonctions abéliennes considérées possèdent chacun une multiplication complexe.

Si l'invariant n'est pas carré parfait, on a un cas nouveau qui sera examiné plus loin.

222. *Conclusion.* — En résumé, cette discussion prouve qu'il ne peut y avoir de multiplication complexe que dans les cinq cas suivants :

1° Les périodes g, h, g' sont liées uniquement par une relation singulière;

2° et 3° Elles sont liées uniquement par deux ou trois relations singulières;

4° Elles sont liées par une relation singulière d'invariant carré parfait, et les deux systèmes de fonctions elliptiques auxquelles se ramènent alors les fonctions abéliennes possèdent l'un ou l'autre, ou tous deux, une multiplication elliptique complexe;

5° Elles sont liées par une relation singulière d'invariant non carré parfait et par deux autres relations non singulières.

Les quatre premiers cas ont été étudiés précédemment; il ne nous reste à examiner que le cinquième.

Dernier cas de multiplication abélienne complexe.

223. Nous ferons deux hypothèses, selon que l'invariant de la relation singulière qui lie les périodes est pair ou impair.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — *Invariant pair.*

224. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme

$$g = cg'$$

c étant un entier positif, puisque l'invariant $4c$ doit être $>$ o. Reprenons maintenant les équations fondamentales (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe, et faisons-y $g = cg'$. Les résultats obtenus dans B et C doivent être identiques, car B — C = o étant une relation singulière est, soit une identité, soit une conséquence de $g - cg' = 0$.

Voici ce que deviennent les quatre équations, quand on y fait la substitution indiquée :

$$\text{(A)}\quad a_3 c^2 g'^2 + (a_2 + b_3) cg'h + b_2 h^2 + c(a_0 - d_3)g' + (b_0 - d_2)h - d_0 = 0,$$

$$\text{(B)}\quad a_2 c\, g'^2 + (a_3 c + b_2)\, g'h + b_3 h^2 + (ca_1 - d_2)g' + (b_1 - d_3)h - d_1 = 0,$$

$$\text{(C)}\quad b_3 c\, g'^2 + (a_3 c + b_2)\, g'h + a_2 h^2 + (b_0 - cc_3)g' + (a_0 - c_2)h - c_0 = 0,$$

$$\text{(D)}\quad b_2 g'^2 + (a_2 + b_3)\, g'h + a_3 h^2 + (b_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0.$$

Écrivons que les deux expressions intermédiaires sont identiques; il vient

$$(42)\qquad \begin{cases} a_2 = b_3, & ca_1 - d_2 = b_0 - cc_3; \\ b_1 - d_3 = a_0 - c_2, & c_0 = d_1. \end{cases}$$

Observons encore que (A) et (D) doivent être identiques à un facteur près; en multipliant en effet (D) par $-c$ et ajoutant à (A), on obtient la relation

$$\begin{aligned} 0 = h^2(b_2 - a_3 c) + cg'^2(a_3 c - b_2) + g'c[a_0 - d_3 - b_1 + c_2] \\ + h[b_0 - d_2 - ca_1 + cc_3] - d_0 + cc_1. \end{aligned}$$

Comme $cg'^2 = gg'$, on voit que c'est une relation *singulière*, et puisque $g = cg'$ est la seule relation possible de cette nature, il faut que l'on ait

$$(43) \qquad \begin{cases} b_2 = a_3 c, & a_0 - d_3 = b_1 - c_2, \\ b_0 - d_2 = c(a_1 - c_3), & d_0 = cc_1. \end{cases}$$

Ces équations, combinées avec les équations (42), donnent l'ensemble des relations entre les a_i, b_i, c_i, d_i :

$$(44) \qquad \begin{cases} a_2 = b_3, & a_0 = b_1, & b_0 = ca_1, & c_0 = d_1; \\ b_2 = a_3 c, & d_3 = c_2, & d_2 = cc_3, & d_0 = cc_1. \end{cases}$$

225. Cela posé, il ne subsiste, entre h et g', que les équations (D) et (C), qui, en tenant compte des relations (44), s'écrivent

$$(45) \quad ca_3 g'^2 + 2b_3 g'h + a_3 h^2 + (b_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0,$$

$$(46) \quad cb_3 g'^2 + 2ca_3 g'h + b_3 h^2 + c(a_1 - c_3)g' + (b_1 - c_2)h - c_0 = 0.$$

On peut donc dire que g' et h sont définis par deux équations *à coefficients entiers* de la forme

$$(47) \qquad cpg'^2 + 2\,ng'h + ph^2 + qg' + rh + s = 0,$$

$$(48) \qquad cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + crg' + qh + s' = 0;$$

n et p ne peuvent être nuls à la fois, sinon ces équations seraient singulières.

Pour trouver toutes les multiplications complexes correspondantes, il faut écrire que les équations (45) et (46) sont des conséquences de (47) et (48), ce qui donne, en désignant par λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 des constantes :

$$\begin{aligned}
a_3 &= \lambda_1 p + \mu_1 n, & b_3 &= \lambda_2 p + \mu_2 n,\\
b_3 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp, & ca_3 &= \lambda_2 n + \mu_2 cp,\\
b_1 - c_2 &= \lambda_1 q + \mu_1 cr, & c(a_1 - c_3) &= \lambda_2 q + \mu_2 cr,\\
a_1 - c_3 &= \lambda_1 r + \mu_1 q, & b_1 - c_2 &= \lambda_2 r + \mu_2 q,\\
- c_1 &= \lambda_1 s + \mu_1 s', & - c_0 &= \lambda_2 s + \mu_2 s'.
\end{aligned}$$

On en tire

$$cp(\lambda_1 - \mu_2) = n(\lambda_2 - c\mu_1),$$
$$n(\lambda_1 - \mu_2) = p(\lambda_2 - c\mu_1).$$

D'ailleurs, le déterminant $cp^2 - n^2$ ne peut s'annuler ; p et n, en effet, ne sont pas nuls et c n'est pas un carré parfait, car on retomberait (nº **210**) sur le cas elliptique de multiplication elliptique complexe ; donc $\lambda_1 = \mu_2$, $\lambda_2 = c\mu_1$, et l'on en conclut, pour les a_i, b_i, c_i, d_i, les valeurs suivantes :

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
a_0 &= c_2 + \lambda_1 q + \mu_1 cr, & b_0 &= cc_3 + \lambda_1 cr + \mu_1 cq,\\
a_1 &= c_3 + \lambda_1 r + \mu_1 q, & b_1 &= c_2 + \lambda_1 q + \mu_1 cr,\\
a_2 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp, & b_2 &= \lambda_1 cp + \mu_1 cn,\\
a_3 &= \lambda_1 p + \mu_1 n, & b_3 &= \lambda_1 n + \mu_1 cp,\\
- c_0 &= \lambda_1 s' + \mu_1 cs, & - d_0 &= \lambda_1 cs + \mu_1 cs',\\
- c_1 &= \lambda_1 s + \mu_1 s', & - d_1 &= \lambda_1 s' + \mu_1 cs,\\
c_2 &= c_2, & d_2 &= cc_3,\\
c_3 &= c_3, & d_3 &= c_2.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, c_2 et c_3 désignent des entiers arbitraires ; λ_1 et μ_1, également arbitraires, sont des nombres entiers ou même fractionnaires, mais tels alors que les a_i, b_i, c_i, d_i soient entiers : on voit immédiatement, dans ce dernier cas, que les facteurs qui *peuvent* figurer au dénominateur de λ_1 et μ_1 sont connus *a priori* et sont en nombre limité.

226. Il faut maintenant rechercher dans quels cas les équations (47) et (48), jointes à $g = cg'$, donnent pour g, h, g' des valeurs telles que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif.

A cet effet, observons que les équations (47) et (48), si l'on y regarde h et g' comme des coordonnées courantes, représentent deux coniques *concentriques ;* pour simplifier les calculs, transportons l'origine au centre commun dans le plan des hg' ; *cela ne changera pas les parties imaginaires de* g, h, g', et les deux équations deviennent

$$(50) \qquad \begin{cases} cpg'^2 + 2ng'h + ph^2 + \varpi = 0, \\ cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + \varpi' = 0, \end{cases}$$

ϖ et ϖ' désignant des constantes qu'il est inutile d'expliciter.

On en déduit, en appelant g_1, h_1, g'_1 et g_0, h_0, g'_0 les parties imaginaires et réelles de g, h, g'

$$(51) \qquad g' = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)} \frac{1}{h}, \qquad -g'_1 = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)} \frac{h_1}{h_0^2 + h_1^2}.$$

L'élimination de g' entre les deux équations (50) donne l'équation en h :

$$(52) \qquad h^4 + Mh^2 + cN^2 = 0;$$

étant posé

$$M = \frac{\varpi' cp - \varpi n}{cp^2 - n^2},$$

$$N = \frac{\varpi' n - \varpi p}{2(cp^2 - n^2)}.$$

En remplaçant h par $h_0 + ih_1$ et séparant le réel de l'imaginaire, on trouve

$$h_0^4 + h_1^4 - 6h_0^2 h_1^2 + M(h_0^2 - h_1^2) + cN^2 = 0,$$
$$2h_0 h_1 (2h_0^2 - 2h_1^2 + M) = 0.$$

Si $h_0 h_1$ est $\gtrless 0$, on aura $-2(h_0^2 - h_1^2) = M$; substituons à M cette valeur dans la première des deux équations précédentes, nous trouvons

$$(53) \qquad (h_0^2 + h_1^2)^2 - cN^2 = 0.$$

Or la condition $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$ s'écrit, en y remplaçant g'_1 par sa valeur (51) et g_1 par cg'_1,

$$(54) \qquad (h_0^2 + h_1^2)^2 - c\mathrm{N}^2 < 0,$$

ce qui est en contradiction avec (53). Il faut donc que $h_0 h_1 = 0$, et comme h_1 ne peut être nul, puisque g_1 et g'_1 le seraient aussi (51), on a

$$h_0 = 0,$$

et l'équation (52) donne

$$(55) \qquad h_1^4 - \mathrm{M} h_1^2 + c\mathrm{N}^2 = 0.$$

Cette équation doit avoir au moins une racine réelle, telle que $h_1^4 - c\mathrm{N}^2$ soit négatif (54); il en résulte que l'*équation* (55) *en* h_1^2 doit avoir ses deux racines réelles et positives (car leur produit est positif); cela implique

$$(56) \qquad \mathrm{M} > 0, \qquad \mathrm{M}^2 - 4c\mathrm{N}^2 > 0.$$

S'il en est ainsi, la plus petite racine de l'équation en h_1^2 est positive et inférieure à $\sqrt{c\mathrm{N}^2}$, puisque le produit des deux racines est $c\mathrm{N}^2$; donc, si h_1^2 est cette plus petite racine, $h_1^4 - c\mathrm{N}^2$ sera < 0.

Inversement, on reconnaît que les conditions (56), qui sont nécessaires, sont suffisantes, et *voici le résultat final, traduit géométriquement :*

227. Les périodes de multiplication complexe, dans le cas où elles vérifient une relation singulière d'invariant pair, non carré parfait, et deux autres relations non singulières, sont déterminées par des équations réductibles aux formes

$$g = cg',$$
$$cpg'^2 + 2n\, g'h + ph^2 + q\, g' + rh + s = 0,$$
$$cng'^2 + 2cpg'h + nh^2 + crg' + qh + s' = 0;$$

les n, p, q, r, s, s' sont des entiers; c est un entier positif. Les deux dernières équations représentent, en h et g', deux coniques concentriques; il faut que ces coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les deux cordes communes qui passent par le centre soient réelles.

S'il en est ainsi, l'élimination de g' entre les deux dernières équations donne pour h une équation du quatrième ordre; les deux racines imaginaires conjuguées pour lesquelles la partie imaginaire est la plus petite, en valeur absolue, conviennent et conviennent seules au problème; g' et g se déterminent ensuite sans ambiguïté en fonction de h.

Quant aux multiplications complexes qui correspondent à ces périodes, leurs entiers caractéristiques sont définis par les formules (49).

Deuxième hypothèse. — *Invariant impair.*

228. La relation singulière entre g, h et g' peut être supposée de la forme

$$g = h + cg' \qquad (c > 0),$$

c étant > 0 pour que l'invariant $1 + 4c$ soit supérieur à 1.

Remplaçons g par cette valeur dans les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe; celles-ci deviennent

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} c^2 a_3 g'^2 + [2a_3 c + ca_2 + cb_3] hg' + (a_3 + b_3 + a_2 + b_2) h^2 \\ \qquad + c(a_0 - d_3) g' + (b_0 - d_2 + a_0 - d_3) h - d_0 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} c\ a_2 g'^2 + [ca_3 + a_2 + b_2] hg' + (a_3 + b_3) h^2 \\ \qquad + (ca_1 - d_2) g' + (b_1 - d_3 + a_1) h - d_1 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} c\ b_3 g'^2 + [ca_3 + b_3 + b_2] hg' + (a_3 + a_2) h^2 \\ \qquad + (b_0 - cc_3) g' + (a_0 - c_2 - c_3) h - c_0 = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} b_2 g'^2 + [b_3 + a_2] hg' + a_3 h^2 \\ \qquad + (b_1 - c_2) g' + (a_1 - c_3) h - c_1 = 0. \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, les premiers membres de (B) et de (C) doivent être identiques, ce qui donne

$$(57)\quad \begin{cases} a_2 = b_3, & b_0 + d_2 = c(a_1 + c_3), \\ b_1 + c_2 + c_3 = a_0 - a_1 + d_3, & c_0 = d_1. \end{cases}$$

Maintenant, en multipliant les premiers membres de (A), (C), (D) par des constantes indéterminées et ajoutant à (A), on peut *toujours* faire en sorte que les termes du second ordre dans le résultat soient de la forme $h^2 - hg' - cg'^2$, à un facteur près; comme

$$h^2 - hg' - cg'^2 = h^2 - gg';$$

la relation qu'on obtient ainsi entre h et g' est singulière, et elle doit être, dès lors, une identité; cela revient à dire que les premiers membres de (A), (C), (D) ne sont pas linéairement distincts, ce qui exige l'évanouissement des déterminants du troisième ordre compris dans la matrice

$$\begin{matrix} b_2 & 2b_3 & a_3 & b_1 - c_2 & a_1 - c_3 & c_1, \\ c^2 a_3 & 2c(a_3 + b_3) & a_3 + 2b_3 + b_2 & c(a_0 - d_3) & b_0 - d_2 + a_0 - d_3 & d_0, \\ cb_3 & ca_3 + b_2 + b_3 & a_3 + b_3 & ca_1 - d_2 & b_1 - d_3 + a_1 & d_1. \end{matrix}$$

Or, le premier de ces déterminants développé donne

$$(ca_3 - b_2 - b_3)[(b_2 + ca_3)^2 + (b_2 + ca_3)(a_3 + 2b_3) - c(a_3 + 2b_3)^2] = 0.$$

La quantité entre crochets ne peut être nulle, à moins que $b_2 + ca_3$ et $a_3 + 2b_3$ ne soient nuls à la fois : le discriminant $1 + 4c$ n'est pas en effet un carré parfait, puisqu'on a exclu le cas elliptique.

Mais si $b_2 + ca_3 = a_3 + 2b_3 = 0$, on reconnaît de suite que dans les relations (A), (B) et (D) les termes du plus haut degré sont $2cb_3(h^2 - hg' - cg'^2)$, $-b_3(h^2 - hg' - cg'^2)$ et $-2b_3(h^2 - hg' - cg'^2)$, c'est-à-dire que ces relations seraient singulières, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc que

$$(58)\qquad ca_3 = b_2 + b_3.$$

En tenant compte de cette relation, la matrice devient

$$\begin{matrix} ca_3 - b_3 & b_3 & b_1 - c_2 & a_1 - c_3 & c_1, \\ c^2 a_3 & c(a_3 + b_3) & c(a_0 - d_3) & b_0 - d_2 + a_0 - d_3 & d_0, \\ cb_3 & ca_3 & ca_1 - d_2 & b_1 - d_3 + a_1 & d_1, \end{matrix}$$

ce qui donne d'abord

$$\begin{aligned}(b_1 - c_2)c^2[ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2] + c^2(a_0 - d_3)[-ca_3^2 + a_3 b_3 + b_3^2] \\ + (ca_1 - d_2)c[ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2] = 0.\end{aligned}$$

Le facteur $ca_3^2 - a_3 b_3 - b_3^2$ ne peut s'annuler, puisque $1 + 4c$ n'est pas carré parfait et que d'ailleurs si a_2, a_3, b_2, b_3 étaient nuls à la fois, les équations (A), (B), (C), (D) seraient singulières; il reste donc

$$c(b_1 - c_3 - a_0 + d_3) + ca_1 - d_2 = 0.$$

On trouve de même

$$c(a_1 - c_3) - b_0 + d_2 - a_0 + b_1 + a_1 = 0,$$
$$cc_1 - d_0 + d_1 = 0.$$

En utilisant (57) et (58), on obtient toutes les relations entre les a_i, b_i, c_i, d_i sous la forme :

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{lll} b_2 + b_3 = ca_3, & b_0 = ca_1, & d_2 = cc_3, \\ a_2 = b_3, & b_1 = a_0 - a_1, & d_3 = c_2 + c_3, \\ & & d_1 = c_0, \\ & & d_0 = c_0 + cc_1. \end{array} \right.$$

229. Il ne subsiste maintenant, entre h et g', que les équations (C) et (D), qui s'écrivent en tenant compte de (59),

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} cb_3 g'^2 + 2ca_3 hg' + (a_3 + b_3)h^2 \\ \quad + c(a_1 - c_3)g' + (a_0 - c_2 - c_3)h - c_0 = 0, \end{array} \right.$$

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ca_3 - b_3)g'^2 + 2b_3 hg' + a_3 h^2 \\ \quad + (a_0 - a_1 - c_2)g' + (a_1 - c_3)h - c_1 = 0. \end{array} \right.$$

On peut donc dire que h et g' sont définis par deux équations *à coefficients entiers* de la forme

$$(62)\quad cng'^2 + 2cphg' + (n+p)h^2 + crg' + (q+r)h + s = 0,$$
$$(63)\quad (cp-n)g'^2 + 2nhg' + ph^2 + qg' + rh + s' = 0;$$

n et p ne peuvent être nuls à la fois, sinon ces équations seraient singulières.

Pour trouver toutes les multiplications complexes correspondantes, il faut écrire que les équations (60) et (61) sont des conséquences de (62) et (63); on obtient ainsi les valeurs des a_i, b_i, c_i, d_i sous la forme

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
a_0 &= c_2 + c_3 + \lambda_2(q+r+cr) + \mu_2(q+r),\\
a_1 &= c_3 + \lambda_2(q+r) + \mu_2 r,\\
a_2 &= \lambda_2 cp + \mu_2 n,\\
a_3 &= \lambda_2(n+p) + \mu_2 p,\\
b_0 &= cc_3 + \lambda_2 c(q+r) + \mu_2 cr,\\
b_1 &= c_2 + \lambda_2 cr + \mu_2 q,\\
b_2 &= \lambda_2 cn + \mu_2(cp-n),\\
b_3 &= \lambda_2 cp + \mu_2 n,\\
-c_0 &= \lambda_2(s+cs') + \mu_2 s,\\
-c_1 &= \lambda_2 s + \mu_2 s',\\
c_2 &= c_2,\\
c_3 &= c_3,\\
-d_0 &= \lambda_2(s+cs+cs') + \mu_2(s+cs'),\\
-d_1 &= \lambda_2(s+cs') + \mu_2 s,\\
d_2 &= cc_3,\\
d_3 &= c_2 + c_3.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules c_2 et c_3 sont deux entiers arbitraires; λ_2 et μ_2, également arbitraires, sont des entiers, ou des fractions choisies de telle sorte que les a_i, b_i, c_i, d_i soient entiers.

Enfin, on établit, comme dans le cas précédent, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $h_1^2 - g_1 g'_1$ soit négatif, et *le résultat est celui-ci :*

230. Les périodes de multiplication complexe, dans le cas où elles vérifient une relation singulière d'invariant impair non carré parfait, et deux autres relations non singulières, sont déterminées par des équations réductibles aux formes

$$g = h + cg',$$
$$cng'^2 + 2cphg' + (n+p)h^2 + crg' + (q+r)h + s = 0,$$
$$(cp - n)g'^2 + 2nhg' + ph^2 + qg' + rh + s' = 0;$$

les $n, p, q, \ldots, s'$ sont des entiers; c est un entier positif. Les deux dernières équations représentent, en h et g', deux coniques concentriques; il faut que ces coniques se coupent en quatre points imaginaires et que les deux cordes communes qui passent par le centre soient réelles.

S'il en est ainsi, l'élimination de g' entre les deux dernières équations donne pour h une équation du quatrième ordre; les deux racines imaginaires conjuguées pour lesquelles la partie imaginaire est la plus petite en valeur absolue conviennent et conviennent seules au problème; g et g' se déterminent ensuite sans ambiguïté en fonction de h.

Quant aux multiplications complexes qui correspondent à ces périodes, leurs entiers caractéristiques sont définis par les formules (64).

QUATRIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DES SURFACES HYPERELLIPTIQUES EN ELLES-MÊMES.

231. Le problème de déterminer, parmi toutes les surfaces hyperelliptiques dont chaque point répond à un seul couple d'arguments aux périodes près, celles qui possèdent des transformations birationnelles en elles-mêmes, et de former toutes ces transformations, revient à chercher les multiplications complexes de degré *un*.

Désignons, en effet, par U, V le point qui répond, dans une telle transformation au point u, v; comme du, dv, $d\mathrm{U}$, $d\mathrm{V}$ sont des différentielles de première espèce et qu'il n'existe que deux différentielles de cette nature, $d\mathrm{U}$ et $d\mathrm{V}$ sont linéaires en du, dv, c'est-à-dire que

$$\mathrm{U} = \lambda\, u + \mu\, v + \text{const.},$$
$$\mathrm{V} = \lambda' u + \mu' v + \text{const.}$$

Négligeons les constantes, que nous réintroduirons ensuite; on voit bien que l'on est ramené à chercher toutes les multiplications complexes qui font correspondre à un point U, V *un seul point* u, v.

Distinguons maintenant deux cas, selon que la transformation en question est ordinaire ou non.

232. *Transformations ordinaires.* — Si (u, v) et (U, V) désignent les deux points de la surface transformés l'un de l'autre et si $\vartheta(u, v)$ est une fonction thêta paire du premier ordre, lorsque le point u, v décrira une courbe $\vartheta(u+\alpha, v+\beta) = 0$, le point U, V décrira une courbe analogue $\vartheta(\mathrm{U}+\alpha', \mathrm{V}+\beta') = 0$; une transformation ordinaire du premier ordre change, en effet, une fonction thêta d'ordre *un* en une fonction semblable. En augmentant U et V de constantes convenables on peut faire en sorte que les deux courbes coïncident, et par suite la courbe $\vartheta(u+\alpha, v+\beta) = 0$ admettra une transformation birationnelle en elle-même.

Or, cette courbe est une courbe de genre *deux*, donc hyperelliptique; elle a les modules de la surface et n'admet, *en général*, que deux transformations birationnelles, à savoir la transformation unité et celle qui fait correspondre à un point son conjugué hyperelliptique; sur la surface ces transformations sont (¹) :

$$\mathrm{U} = u, \qquad \mathrm{V} = v$$

et

$$\mathrm{U} = -2\alpha - u, \qquad \mathrm{V} = -2\beta - v.$$

(¹) *Voir* par exemple à ce sujet notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX de ce Journal, 4ᵉ série, p. 422.

Elles sont comprises dans les formules

$$(1) \qquad U = \varepsilon u + \text{const.}, \qquad V = \varepsilon v + \text{const.} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

qui donnent les transformations birationnelles évidentes de la surface en elle-même.

Mais il peut se faire que la courbe de genre *deux* possède *d'autres transformations univoques* que les précédentes; pour les trouver, prenons cette courbe sous la forme

$$y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_6).$$

Soit X, Y le point transformé de x, y : les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe se transformeront évidemment les unes dans les autres, de sorte que l'on aura

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dX}{\sqrt{(X - a_1)\ldots(X - a_6)}} &= \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}\,dx, \\ \frac{X\,dX}{\sqrt{(X - a_1)\ldots(X - a_6)}} &= \frac{\alpha' x + \beta'}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}\,dx, \end{aligned}$$

α, β, α', β' étant des constantes. On en tire

$$X = \frac{\alpha' x + \beta'}{\alpha\, x + \beta}, \qquad dX = k\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2},$$

et en portant ces valeurs de X et dX dans (2), il vient

$$\frac{k}{\sqrt{[\alpha' x + \beta' - a_1(\alpha x + \beta)]\ldots}} = \frac{1}{\sqrt{(x - a_1)\ldots(x - a_6)}}.$$

En d'autres termes, la forme sextique $(X - a_1 Z)\ldots(X - a_6 Z)$ se réduit, à un facteur constant près, à la forme $(x - a_1 z)\ldots(x - a_6 z)$ par la substitution

$$X = \alpha' x + \beta' z, \qquad Z = \alpha x + \beta z.$$

Le problème revient donc à chercher toutes les formes binaires sextiques admettant une transformation linéaire en elles-mêmes autre que $X = \pm x$, $Z = \pm z$: la solution en est connue [1], les formes correspondantes sont au nombre de six :

1°
$$A x^6 + B x^4 z^2 + C x^2 z^4 + D z^6.$$

La surface de Kummer correspondant à cette forme est le *tétraédroïde de Cayley*.

2°
$$xz(A x^4 + B x^2 z^2 + C z^4).$$

La surface de Kummer correspondante est *deux fois tétraédroïde*.

3°
$$A x^6 + B x^3 z^3 + C z^6.$$

La surface de Kummer correspondante est *trois fois tétraédroïde*.

4°
$$x^6 + z^6.$$

La surface de Kummer correspondante est *quatre fois tétraédroïde*.

5°
$$xz(x^4 + z^4).$$

La surface de Kummer correspondante est *six fois tétraédroïde* [2].

6°
$$z(x^5 + z^5).$$

L'expression des périodes correspondant aux cinq premiers cas est bien connue; on a : dans le premier cas,

$$g = g';$$

dans le deuxième cas,

$$h = \tfrac{1}{2}, \qquad g = g';$$

---

(1) *Voir*, par exemple, un Mémoire de M. O. Bolza dans l'*American Journal of Mathematics*, t. X, p. 50.

(2) *Voir*, à ce sujet, un travail de M. Hutchinson.

dans le troisième cas,

$$g = g' = 2h;$$

dans le quatrième cas,

$$g = g' = 2h = \frac{2i}{\sqrt{3}};$$

dans le cinquième cas,

$$g = g' = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{2}), \qquad h = \tfrac{1}{2}.$$

Dans les trois premiers cas, il n'y a entre les périodes que des relations singulières; dans les deux autres, on peut définir les périodes respectivement par les équations

$$g = g' = 2h, \qquad h^2 - gg' = 1,$$
$$g = g', \qquad 2h = 1, \qquad h^2 - gg' + g - 1 = 0,$$

qui sont encore des relations singulières.

On en déduira toutes les transformations univoques cherchées par les formules qui vont être données (nos **235**, **237**, **240**).

Le sixième cas est plus intéressant et compliqué; nous le traiterons complètement à la fin de ce travail.

233. Ainsi, *les surfaces hyperelliptiques possédant des transformations birationnelles ordinaires en elles-mêmes* (*autres que les transformations évidentes*) *sont celles qui dérivent des radicaux portant sur les polynomes*

$$Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D, \qquad x(Ax^4 + Bx^2 + C),$$
$$Ax^6 + Bx^3 + C, \qquad x^6 + 1, \qquad x(x^4 + 1), \qquad x^5 + 1.$$

234. *Transformations singulières.* — Il reste à faire la même étude pour les transformations *singulières*, ce qui revient à la recherche des multiplications complexes singulières de degré *un;* nous examinerons successivement les cinq cas de multiplication.

235. *Surfaces simplement singulières.* — Les périodes étant liées *uniquement* par une relation singulière,

$$g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

les multiplications complexes, *singulières ou non*, sont, à une constante additive près, données par les formules (n° **193**)

$$(3) \qquad U = \rho u - \gamma\sigma v, \qquad V = \sigma u + (\rho + \beta\sigma)v.$$

Le degré δ' étant

$$\delta' = (\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2)^2,$$

la transformation (3) sera birationnelle si les entiers ρ et σ sont tels que

$$\rho^2 + \beta\rho\sigma + \gamma\sigma^2 = \pm 1.$$

Dans le cas non elliptique, c'est-à-dire si $\beta^2 - 4\gamma$ n'est pas carré, cette équation, avec le second membre $+1$, a toujours des solutions autres que $\rho = \pm 1$, $\sigma = 0$; pour qu'elle en ait si l'on prend -1, il faut et il suffit que la forme $X^2 - (\beta^2 - 4\gamma)Y^2$ puisse représenter -4 (n° **179**). Dans les deux cas, il résulte des n^os **169** et **180** que toutes les transformations (3) sont des puissances d'une seule d'entre elles, combinées avec la transformation $U = -u$, $V = -v$.

Donc, *toutes les transformations birationnelles, ordinaires ou singulières, d'une surface hyperelliptique simplement singulière, en elle-même, s'obtiennent en combinant une même transformation du type* (3), *et ses puissances, avec les transformations*

$$U = \varepsilon u + \text{const.}, \qquad V = \varepsilon v + \text{const.} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si la surface est une surface de Kummer à un point de laquelle correspondent les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$, les transformations birationnelles précédentes se réduisent aux puissances d'une seule d'entre elles et forment un groupe *évidemment infini*. C'est là le premier exemple qui ait été donné de surface admettant un groupe infini et discontinu de transformations birationnelles sans admettre de transformations continues; je l'ai indiqué incidemment dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du premier semestre de 1898; M. Painlevé a fait connaître ensuite, dans le même Recueil, un exemple encore plus simple, qui correspond à un cas de dégénérescence des fonctions abéliennes en fonctions elliptiques.

236. *Remarque.* — Les transformations (3) sont, en général, singulières, car l'indice correspondant, K, est (nº **193**) $\sigma(2\rho+\beta\sigma)$ et ne peut être nul que pour $\sigma=0$ et $2\rho+\beta\sigma=0$.

Si $\sigma=0$, la relation $\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2=\pm 1$ donne $\rho=\pm 1$, et l'on retombe sur la transformation $U=\pm u$, $V=\pm v$; si $2\rho+\beta\sigma=0$, la même relation, écrite $(2\rho+\beta\sigma)^2-(\beta^2-4\gamma)\sigma^2=\pm 4$, montre que l'invariant, $\beta^2-4\gamma$, qui est essentiellement positif et supérieur à 1, doit être égal à 4, ce qui répond au cas elliptique du tétraédroïde.

En supposant, par exemple, comme on en a le droit, que la relation singulière correspondante soit $g-g'=0$, on trouve la transformation *ordinaire*

$$U=v, \qquad V=u.$$

On devait effectivement rencontrer une telle transformation (nº **232**). En dehors de l'invariant 4, les surfaces simplement elliptiques n'ont pas de transformations birationnelles en elles-mêmes autres que les transformations évidentes : car, si $\beta^2-4\gamma$ est carré parfait, la forme $\rho^2+\beta\rho\sigma+\gamma\sigma^2$ ne peut représenter $+1$ que pour $\sigma=0$, $\rho=\pm 1$, et elle ne peut représenter -1 que si $\beta^2-4\gamma=4$, avec $2\rho+\beta\sigma=0$; $\sigma=\pm 1$.

237. *Surfaces doublement singulières.* — Les périodes étant liées uniquement par deux relations singulières réductibles (nº **195**) aux formes

$$h^2-gg'=d, \qquad \alpha g+\beta h+\gamma g'=\omega,$$

les transformations birationnelles en elles-mêmes, *ordinaires ou singulières*, de la surface correspondante sont données par les formules du nº **200**

$$(4)\quad \begin{cases} U=u[\theta+\alpha\sigma g+(\beta\sigma-\tau)h]+v[-\gamma\rho+\tau g+\gamma\sigma h], \\ V=u[\alpha\rho+\alpha\sigma h+(\beta\sigma-\tau)g']+v[\theta+\beta\rho+\tau h+\gamma\sigma g'], \end{cases}$$

où θ, σ, ρ, τ sont des entiers arbitraires, tels seulement que le degré de la multiplication soit l'unité, c'est-à-dire (nº **202**) que

$$\theta^2+\theta(\beta\rho+\omega\sigma)+\alpha\gamma\rho^2-\alpha\gamma d\sigma^2+(\beta\sigma-\tau)(\omega\rho+d\tau)=\pm 1.$$

Cette équation, si l'on pose, comme au n° **208** :

$$(5) \qquad \xi = 2\theta + \beta\rho + \omega\sigma, \qquad \eta = 2\tau - \beta\sigma, \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma,$$

s'écrit

$$(6) \qquad \xi^2 - d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2 = \pm 4.$$

On est ainsi ramené à la résolution en nombres entiers d'une équation évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de ξ, η, ρ, σ; car, par exemple, elle se réduit à une équation de Pell pour $\eta = \sigma = 0$, si l'on prend $+4$ au second membre.

Nous n'en connaissons pas la solution générale; les résultats du n° **208** montrent que, si l'on en a deux solutions, ξ, η, ρ, σ et ξ', η', ρ', σ', on en obtiendra une troisième, ξ'', η'', ρ'', σ'', par les formules (31) de ce numéro.

238. *Remarque I.* — Parmi les transformations précédentes, celles qui sont ordinaires rentrent dans l'un des deux cas (n° **205**),

$$\rho = \eta = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi = \sigma = 0;$$

on reconnaît aisément qu'elles correspondent à des cas elliptiques de tétraédroïde, comme cela doit être (n° **232**).

239. *Remarque II.* — Les multiplications qui répondent à

$$2\theta + \beta\rho + \omega\sigma = 0,$$

c'est-à-dire à $\xi = 0$, ont été rencontrées au n° **205**. Pour qu'il en existe de degré un, il faut que l'équation

$$(7) \qquad -d\eta^2 - 2\omega\rho\eta - \Delta\rho^2 + (d\Delta - \omega^2)\sigma^2 = \pm 4$$

ait des solutions entières en η, ρ, σ, telles que $\eta + \beta\sigma$ soit pair; alors on voit de suite que $\beta\rho + \omega\sigma$ est également pair, et les équations (5), où $\xi = 0$, donnent des valeurs entières pour θ et τ.

Le carré d'une de ces multiplications (n° **209**) est la multiplication ordinaire

$$U = \varepsilon u, \qquad V = \varepsilon v,$$

ε étant ± 1 selon que le second membre de (7) a été ∓ 4.

Il en résulte que si l'équation (7) a des solutions entières de la nature indiquée, le second membre étant égal à -4, le carré de la transformation birationnelle correspondante (4) sera la transformation unité, c'est-à-dire que la transformation birationnelle est *involutive*.

Sur la surface de Kummer, où un même point répond aux arguments u, v et $-u$, $-v$, on a aussi des transformations involutives en prenant le second membre de (7) égal à $+4$.

240. *Surfaces triplement singulières.* — Elles possèdent également des transformations birationnelles qu'il serait aisé de trouver *toutes*, en suivant la même marche que dans le cas précédent.

241. *Autres surfaces possédant des multiplications complexes.* — Ce sont celles qui correspondent au quatrième et au cinquième cas de multiplication complexe; *il n'y a entre les périodes qu'une seule relation singulière*, et une ou deux autres non singulières; nous traiterons simultanément tous ces cas par une méthode différente de celle qui précède.

Soit $g + \beta h + \gamma g' = 0$ la relation singulière unique qui lie les périodes; considérons une transformation birationnelle de la surface en elle-même

$$(\mathrm{T}) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

c'est-à-dire une transformation de *degré* un, conduisant des périodes g, h, g' aux mêmes périodes. Si l et k sont ses deux indices, on aura

$$(8) \qquad l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = +1.$$

Effectuons maintenant deux fois de suite la transformation T; nous obtenons une transformation T^2, et pour ses indices L et K, les formules (29) et (30) du n° **148**, où l'on fait

$$l_1 = l, \qquad k_1 = k, \qquad B_1 = B = \beta, \qquad \Delta = \Delta_1 = \beta^2 - 4\gamma,$$

donnent

$$2K = k(2l + \beta k) + \varepsilon_1 k(2l + \beta k),$$
$$2(2L + \beta K) = (2l + \beta k)^2 + \varepsilon_1 k^2(\beta^2 - 4\gamma),$$

ε_1 étant ± 1, selon que T est droite ou gauche.

On trouve ainsi, pour $\varepsilon = +1$:

$$K = k(2l + \beta k),$$
$$L = l^2 - \gamma k^2;$$

pour $\varepsilon = -1$:

$$K_1 = 0,$$
$$L_1 = 1,$$

en tenant compte de (8). On vérifie également que

$$L^2 + \beta KL + \gamma K^2 = +1. \tag{9}$$

242. Plaçons-nous d'abord dans le cas de $\varepsilon = +1$, et supposons, pour fixer les idées, que la partie imaginaire, g_1, de g soit positive; les fonctions intermédiaires singulières d'indices L et K sont celles qui vérifient :

$$\varphi(u + 1, v) \qquad = \varphi(u, v + 1) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u + g, v + h) = \varphi(u, v)\, e^{2\pi i[-Lu+\gamma Kv]+\nu},$$
$$\varphi(u + h, v + g') = \varphi(u, v)\, e^{2\pi i[-Ku-(L+\beta K)v]+\nu'}.$$

En vertu de (9), pour ν et ν' donnés, elles se réduisent (I, n° **28**) à une seule d'entre elles, $\varphi(u, v)$, à un facteur constant près. Pour d'autres valeurs de ν et ν', les fonctions intermédiaires d'indices L et K se réduisent évidemment (à un facteur près) à $\varphi(u + c, v + c')$, les constantes c et c' étant convenablement choisies.

Cela posé, soit $\vartheta(u, v)$ une fonction thêta, d'ordre un, paire; lorsque U, V décrit, sur la surface considérée, la courbe $\vartheta(U + c, V + c') = 0$, le point u, v, *qui lui correspond univoquement par* T^2, décrit (n° **164**) la courbe $\varphi(u + c_1, v + c'_1) = 0$; et réciproquement, si u, v décrit $\varphi(u + c_1, v + c'_1) = 0$, c_1 et c'_1 étant des constantes quelconques, U, V décrit $\vartheta(U + c, V + c') = 0$.

Considérons maintenant la transformation de la surface en elle-même

$$(S) \qquad \begin{cases} U' = lu - \gamma k v, \\ V' = ku + (l + \beta k) v. \end{cases}$$

Elle est birationnelle (nº **235**) en vertu de (8), et ses indices, calculés au nº **193**, sont précisément L et K; d'après ce qui précède, si u, v décrit $\varphi(u + c_1, v + c'_1) = 0$, le point U′, V′, qui lui correspond par S, décrira $\vartheta(U' + c_2, V' + c'_2) = 0$.

Par suite la transformation $T^2 S^{-1}$ fait correspondre point par point les deux courbes

$$(10) \qquad \vartheta(U + c, V + c') = 0, \qquad \vartheta(U' + c_2, V' + c'_2) = 0;$$

elle est donc ordinaire et d'ordre 1, puisqu'elle fait correspondre, à une fonction thêta une fonction thêta de même ordre (nº **164**).

En d'autres termes, *en dehors des six cas spéciaux signalés au nº* **232**, la transformation $T^2 S^{-1}$ doit se réduire soit à la substitution unité, soit à la substitution qui ne fait que changer les signes des variables (¹).

Sous une autre forme, la substitution T^2 doit être identique à la substitution

$$(11) \qquad \begin{cases} U = lu - \gamma k v, \\ V = ku + (l + \beta k) v, \end{cases}$$

ou à cette même substitution dans laquelle les signes de l et k seraient simultanément changés.

243. Supposons maintenant $\varepsilon = -1$; la transformation T^2, qui a pour indices $L_1 = 1$ et $K_1 = 0$, est *ordinaire;* si donc l'on exclut encore les six cas du nº **232**, T^2 devra se réduire à la substitution unité ou à la substitution $U = -u$, $V = -v$ (²).

(¹) Si l'on est dans un des six cas spéciaux, $T^2 S^{-1}$ devra se réduire à une des transformations univoques *ordinaires* de la surface en elle-même.

(²) Dans les six cas spéciaux, T^2 devra se réduire à une des transformations univoques *ordinaires* de la surface en elle-même.

244. Exprimons d'abord que T^2 est identique à (11); on a, en partant de (T) :

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} l &= \lambda^2 + \mu\lambda', & k &= \lambda'(\lambda+\mu'),\\ -\gamma k &= \mu(\lambda+\mu'), & l+\beta k &= \mu'^2 + \mu\lambda'. \end{aligned}\right.$$

La quantité k est $\gtrless 0$, sinon la transformation (T) serait ordinaire, et l'on retomberait dans un des six cas exclus; alors λ' est aussi $\gtrless 0$, et les équations (12) donnent

$$\lambda = \frac{k-\beta\lambda'^2}{2\lambda'},$$

$$\mu = -\gamma\lambda',$$

$$\mu' = \frac{k+\beta\lambda'^2}{2\lambda'}.$$

Quant à λ', il satisfait à l'équation bicarrée

$$(13)\qquad \lambda'^4(\beta^2-4\gamma) - 2\lambda'^2(2l+\beta k) + k^2 = 0,$$

qui donne, à cause de (8),

$$(14)\qquad \lambda'^2 = \frac{2l+\beta k \pm 2}{\beta^2-4\gamma}.$$

La transformation (T) est ainsi

$$(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{k-\beta\lambda'^2}{2\lambda'}u - \gamma\lambda' v,\\ \mathrm{V} &= \lambda' u + \frac{k+\beta\lambda'^2}{2\lambda'}v, \end{aligned}\right.$$

λ' étant défini par (14).

Écrivons que c'est une transformation faisant correspondre à u, v un seul point U, V; nous avons en particulier (n° **137**), les a_i étant des entiers,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{k-\beta\lambda'^2}{2\lambda'} &= a_0 + a_3 g + a_2 h,\\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{k-\beta\lambda'^2}{2\lambda'^2} = \frac{a_0+a_3 g+a_2 h}{a_1+a_3 h+a_2 g'}.$$

Comme λ'^2 est une fraction (14), c'est là une relation singulière entre g, h, g', qui doit être une conséquence de $g+\beta h+\gamma g'=0$, ce qui donne en particulier

$$\begin{aligned} a_2(\beta\lambda'^2-k) &= a_3 2\gamma\lambda'^2, \\ a_2 2\lambda'^2 &= a_3(\beta\lambda'^2+k). \end{aligned}$$

On en conclut que $a_2=a_3=0$, car le déterminant $\lambda'^4(\beta^2-4\gamma)-k^2$ ne peut être nul.

S'il était nul en effet, on aurait par (13)

$$\lambda'^2(2l+\beta k)=k^2,$$

et en écrivant que

$$\lambda'^4(\beta^2-4\gamma)=k^2,$$

on trouverait

$$l^2+\beta kl+\gamma k^2=0,$$

résultat contradictoire avec l'hypothèse (8).

Alors, a_2 et a_3 étant nuls, les équations (15) montrent que λ' et $\frac{1}{2\lambda'}(k-\beta\lambda'^2)$ sont entiers; en appelant ρ cette dernière quantité, la transformation (T) s'écrit

$$\begin{aligned} U &= \rho u-\gamma\lambda' v, \\ V &= \lambda' u+(\rho+\beta\lambda')v, \end{aligned}$$

λ' et ρ étant entiers. On vérifie de plus, en tenant compte de (8) et (14), que

$$\rho^2+\beta\lambda'\rho+\gamma\lambda'^2=\pm 1.$$

Dans ces conditions, (T) est une des transformations connues qui dérivent de l'existence de la relation singulière $g+\beta h+\gamma g'=0$ (n° **235**), et la surface considérée n'admet pas d'autres transformations univoques.

245. Il reste maintenant à reconnaître si T^2 peut être identique à la substitution $U=\varepsilon u$, $V=\varepsilon v$, $(\varepsilon=\pm 1)$; il faut pour cela que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lambda^2+\mu\lambda', & 0 &= \lambda'(\lambda+\mu'), \\ 0 &= \mu(\lambda+\mu'), & \varepsilon &= \mu'^2+\mu\lambda'. \end{aligned}$$

De là deux hypothèses :

1° $$\mu = \lambda' = 0; \qquad \text{d'où} \qquad \lambda^2 = \mu'^2 = \varepsilon;$$

la transformation (T) serait alors

$$U = \pm u, \qquad V = \pm v,$$

ou

$$U = \pm iu, \qquad V = \pm iv.$$

Dans ce dernier cas, il faut, pour qu'à un point u, v corresponde un seul point U, V, que

$$i = a_0 + a_3 g + a_2 h, \qquad 0 = a_1 + a_3 h + a_2 g',$$

les a étant entiers; comme il n'y a pas de relation singulière entre h et g' seuls, $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ et a_0, égal à i, ne peut être entier. On ne trouve donc, dans cette hypothèse, que les transformations évidentes $U = \pm u$, $V = \pm v$.

2° $$\lambda + \mu' = 0, \qquad \lambda^2 + \mu\lambda' = \varepsilon.$$

Alors les relations

$$\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h, & \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h, \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g', & -\lambda &= b_1 + b_3 h + b_2 g', \end{aligned}$$

donnent

$$a_0 + b_1 + a_3 g + h(a_2 + b_3) + b_2 g' = 0.$$

Il suffit maintenant de se reporter aux équations (A), (B), (C), (D) de la multiplication complexe et aux formes (7) du n° **189**, pour reconnaître que, grâce à cette relation, (A), (B), (C), (D) deviennent singulières; en d'autres termes, la transformation considérée n'implique entre les périodes que des relations singulières, et comme g, h, g' ne sont supposées liées que par une relation de cette nature, la transformation (T) en dérive.

246. La conclusion de toute cette analyse est la suivante :

Dans le cas de multiplication complexe où les périodes sont liées par une relation singulière et une ou deux autres non singulières, les surfaces hyperelliptiques correspondantes ne possèdent pas d'autres transformations univoques en elles-mêmes que celles dérivant de la relation singulière et étudiées au n° **235**.

Il faut y joindre naturellement les transformations habituelles

$$U = \pm u + c, \qquad V = \pm v + c'.$$

Les seuls cas d'exception possibles sont les six cas du n° **232**, qui ont été explicitement réservés aux nos **242**, **243** et **244**; les cinq premiers n'impliquent entre les périodes que des relations singulières et sont compris dans les formules générales des nos **235**, **237** et **240**; il reste seulement à examiner le sixième, et tout d'abord à reconnaître quelles relations il suppose entre les périodes.

Étude du cas hyperelliptique dérivé du radical $\sqrt{x^5+1}$.

247. On trouve aisément pour les périodes, en posant

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

les valeurs

$$g = \omega^2 - \omega^3, \qquad h = -(1+\omega^2), \qquad g' = -\omega^4, \qquad h^2 - gg' = -\omega^3;$$

d'où la relation singulière d'invariant *cinq*

$$h^2 - gg' - g - h - 1 = 0.$$

Faisons sur les périodes la transformation ordinaire du premier ordre définie par

$$a_3 = b_1 = c_2 = -d_0 = 1,$$

tous les autres a_i, b_i, c_i, d_i étant nuls; on trouve, en appelant G, H, G' les périodes nouvelles

$$G = -\frac{1}{g}, \qquad H = -\frac{h}{g}, \qquad G' = -\frac{h^2 - gg'}{g},$$

liées par la relation

$$G + H - G' - 1 = 0.$$

Prenons pour périodes les quantités G, H, G' + 1 que nous désignerons par g', h, g, — ces lettres n'ayant pas la même signification que plus haut, — il vient

$$g = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega^3}, \qquad h = \frac{1 + \omega^2}{\omega^2 - \omega^3}, \qquad g' = \frac{-1}{\omega^2 - \omega^3},$$

avec

$$g = h + g'.$$

On vérifie ensuite que h et g' sont liés par les deux équations à coefficients entiers

$$(16) \qquad \begin{cases} 2g'h + h^2 - g' - h = 0, \\ g'^2 + h^2 - h + 1 = 0; \end{cases}$$

elles sont du type du n° **230**, où l'on aurait posé (puisque $c = 1$)

$$n = 0, \qquad p = 1, \qquad r = -1, \qquad q = 0, \qquad s = 0, \qquad s' = 1.$$

Nous sommes donc placés dans le dernier cas de multiplication complexe, l'invariant de la relation singulière (ici 5) étant impair (et non carré).

248. Pour rechercher toutes les transformations univoques de la surface correspondante, on peut raisonner comme il suit :

Soit T l'une quelconque d'entre elles, d'indices l et k. Je dis que l'on peut trouver deux entiers ρ et σ, tels que

$$(17) \quad l = \rho^2 - \gamma\sigma^2, \qquad k = \sigma(2\rho + \beta\sigma), \quad \ldots, \quad (\beta = \gamma = -1).$$

Cela revient, en effet, à dire que la substitution

$$\begin{cases} U = lu - \gamma k v, \\ V = ku + (l + \beta k) v, \end{cases}$$

où

$$l^2 + \beta kl + \gamma k^2 = + 1,$$

est le carré d'une substitution de même forme

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} U = \rho u - \gamma \sigma v, \\ V = \sigma u + (\rho + \beta \sigma) v, \end{cases}$$

où

$$\rho^2 + \beta \rho \sigma + \gamma \sigma^2 = \pm 1.$$

Comme la forme $x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, ici $x^2 - xy - y^2$, peut représenter -1, la proposition a été établie au n° **180**.

La transformation T change une fonction thêta d'ordre un,

$$\vartheta(U + c, V + c'),$$

en une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u + c_1, v + c'_1)$, d'indices l et k; la transformation (S) produit, en raison de (17), un changement analogue (n° **242**). On en conclut, comme au n° **242**, que TS^{-1} est une des transformations *ordinaires* de la surface en elle-même (en comprenant dans celles-ci $U = \pm u$, $V = \pm v$). En d'autres termes T est le produit d'une transformation univoque ordinaire par S; d'ailleurs S, qui est, d'après sa forme même, une des transformations univoques dérivant de l'existence de la relation singulière $g - h - g' = 0$, est une puissance d'une certaine transformation Σ_1 (n° **235**), de sorte que l'on obtient toutes les transformations birationnelles de la surface en elle-même en faisant suivre une transformation univoque ordinaire d'une puissance de Σ_1.

Cette transformation Σ_1 se trouve aisément, c'est

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{cases} U = v, \\ V = u - v. \end{cases}$$

249. Cherchons maintenant les transformations *ordinaires* de degré un. A cet effet, reportons-nous au n° **229** qui donne les entiers caractéristiques des multiplications complexes dans le cas qui nous occupe; nous devons faire dans ces formules

$$n=0,\quad p=1,\quad r=-1,\quad q=0,\quad s=0,\quad s'=1,\quad c=1;$$

d'où

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_2+c_3-2\lambda_2-\mu_2, & b_0 &= c_3-\lambda_2-\mu_2,\\
a_1 &= c_3-\lambda_2-\mu_2, & b_1 &= c_2-\lambda_2,\\
a_2 &= \lambda_2, & b_2 &= \mu_2,\\
a_3 &= \lambda_2+\mu_2, & b_3 &= \lambda_2.\\
-c_0 &= \lambda_2, & -d_0 &= \lambda_2+\mu_2,\\
-c_1 &= \mu_2, & -d_1 &= \lambda_2,\\
c_2 &= c_2, & d_2 &= c_3,\\
c_3 &= c_3, & d_3 &= c_2+c_3.
\end{aligned}$$

Les c_2, c_3, λ_2, μ_2 sont des *entiers* arbitraires; il faut exprimer maintenant que la multiplication est ordinaire et de degré un; c'est-à-dire que ses indices l et k sont respectivement ± 1 et 0. Or, d'après la théorie générale de la transformation,

$$l=(ad)_{03}+(ad)_{12},\qquad k=(ac)_{03}+(ac)_{12}.$$

On a ainsi

$$(18)\quad \begin{cases} \pm 1 = 2c_3^2+2c_2c_3+c_2^2-c_3(3\lambda_2+2\mu_2)-c_2(2\lambda_2+\mu_2)+2\lambda_2^2+2\lambda_2\mu_2+\mu_2^2,\\ 0 = c_3^2+2c_2c_3-c_3(2\lambda_2+2\mu_2)-c_2(\lambda_2+\mu_2)+\lambda_2^2+2\lambda_2\mu_2. \end{cases}$$

Posons $2c_3-\lambda_2-\mu_2=x$, $2c_2-\lambda_2=y$, retranchons les deux équations (18) membre à membre et conservons la seconde, il vient, ε désignant ± 1 :

$$4\varepsilon = x^2+y^2+2\lambda_2^2-2\lambda_2\mu_2+3\mu_2^2,$$
$$0 = x^2+2xy+\lambda_2^2+4\lambda_2\mu_2-\mu_2^2.$$

L'élimination de y donne, en x, l'équation bicarrée

$$5x^4 + 2x^2[5\lambda_2^2 + 5\mu_2^2 - 8\varepsilon] + (\lambda_2^2 + 4\lambda_2\mu_2 - \mu_2^2)^2 = 0.$$

L'équation en x^2 doit avoir ses racines réelles; leur produit étant > 0, la somme doit être > 0 pour qu'il y en ait au moins une positive; donc

$$5\lambda_2^2 + 5\mu_2^2 - 8\varepsilon < 0,$$

ce qui exige $\varepsilon = +1$, de plus λ_2 et μ_2 ne pourront prendre que les valeurs 0 et ± 1, et de telle sorte que $5(\lambda_2^2 + \mu_2^2)$ soit < 0. On a donc à envisager les hypothèses suivantes :

1° $\lambda_2 = \mu_2 = 0$; ce qui donne $x = 0$, $y = \pm 2$, $c_3 = 0$, $c_2 = \pm 1$ et la transformation correspondante est

$$U = \pm u, \qquad V = \pm v;$$

2° $\lambda_2 = 0$, $\mu_2 = \varepsilon$, d'où $x = \eta$, $y = 0$, en posant $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, et par suite $2c_3 = \varepsilon + \eta$, $c_2 = 0$. La transformation correspondante est

$$U = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon g\right] u + \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] v,$$
$$V = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] u + \varepsilon g' v;$$

3° $\lambda_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = 0$, d'où $x = \eta$, $y = -\eta$, $2c_3 = \varepsilon + \eta$, $2c_2 = \varepsilon - \eta$, et la transformation correspondante est

$$U = [-\varepsilon + \varepsilon g + \varepsilon h]\, u + \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon g\right] v,$$
$$V = \left[\frac{\eta - \varepsilon}{2} + \varepsilon h + \varepsilon g'\right] u + \left[-\frac{\eta + \varepsilon}{2} + \varepsilon h\right] v.$$

250. On vérifie sans difficulté que toutes ces équations donnent des transformations univoques, qui sont des puissances de la transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{ \begin{aligned} -U &= gu + h\,v, \\ -V &= hu + g'v, \end{aligned} \right.$$

combinées avec $U = -u$, $V = -v$. D'ailleurs la cinquième puissance de cette transformation est l'unité, comme on le reconnaît aisément : toutes ces vérifications se font en tenant compte des relations (16) entre g' et h et de $g = h + g'$.

En d'autres termes, les transformations ordinaires se réduisent à une transformation T, *de période cinq*, et à ses puissances T^2, T^3, T^4, combinées avec $U = -u$, $V = -v$; et finalement, en vertu du n° **248**, si l'on désigne toujours par Σ_1 la substitution $U = v$, $V = u - v$, toutes les transformations birationnelles de la surface considérée en elle-même sont, au signe près, et à des constantes additives près, comprises dans la formule

$$T^m \Sigma_1^n,$$

m et n étant entiers et m positif et plus petit que 5.