JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DE SÉGUIER

Sur certaines sommes arithmétiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 55-115.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__55_0>

Sur certaines sommes arithmétiques;

PAR LE P. DE SÉGUIER.

On trouvera dans les pages suivantes :

1° Une étude des sommes

$$\psi_0(k,h)=\sum_s\left(\frac{s}{h}\right)e^{s\frac{2k\pi i}{h}},\qquad \psi_1(k,h)=\sum_s\left(\frac{h}{s}\right)e^{s\frac{2k\pi i}{h}},$$

où s parcourt un système de restes $(\bmod h)$ qui sera précisé ultérieurement, lorsque les arguments sont des entiers quelconques;

2° L'examen de leurs relations avec les sommes

$$(\mathrm{S})\qquad \sum_s\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right)f(s),\qquad \mathrm{D}\equiv 0,\ 1\ (\bmod 4);$$

3° Une application au cas où $f(s)=\log\Gamma\left(\frac{s}{|\mathrm{D}|}\right)(\mathrm{D}<0)$, la moyenne géométrique de la fonction

$$\eta(\omega)=e^{\frac{\pi i\omega}{n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2n\pi i\omega}),$$

lorsque ω parcourt les racines (à partie imaginaire positive) des formes représentantes des classes d'un genre, ainsi que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

étant alors exprimables par (S);

4° La détermination selon le module D, lorsque $f(s)$ est une puissance de s, des sommes (S) et de la partie de (S) qui se compose de termes positifs.

5° L'extension au cas d'un degré N quelconque de la décomposition (par adjonction d'un radical) de l'équation aux racines primitives de l'unité donnée par Dirichlet pour le cas où N est sans diviseur carré.

6° L'extension au cas d'un discriminant négatif quelconque des expressions elliptiques analogues aux sommes ψ données par Kronecker pour certaines séries de Rosenheim dans le cas d'un discriminant négatif fondamental.

Relativement aux points que je suppose connus ou que j'indique plus sommairement, je demande au lecteur la permission de le renvoyer au Mémoire de Kronecker sur les fonctions elliptiques, et à ma thèse de doctorat.

1. Avec Kronecker, j'appellerai *discriminant* tout nombre congru à o ou à 1, selon le module 4, et *discriminant fondamental* tout nombre de l'une des formes P, -4P, ± 8P, P étant congru à 1 selon le module 4 et sans diviseur carré. Tout discriminant D peut, et d'une seule manière, se mettre sous la forme $D = D_0 Q^2$, D_0 étant un discriminant fondamental.

J'appellerai *discriminant simple* un discriminant non carré (ou égal à l'unité) dont la valeur absolue est une puissance d'un nombre premier, et *discriminant essentiel* un produit de discriminants simples. Un discriminant quelconque pourra, et d'une seule manière, se mettre sous la forme $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2$, $\mathfrak{D}$ étant un discriminant essentiel premier à $\mathfrak{Q}$.

J'entendrai toujours par $\sqrt{a}$ la détermination du radical dont l'argument est $> -\frac{\pi}{2}$, mais $\leqq \frac{\pi}{2}$, et je poserai, pour abréger, φ étant la fonction d'Euler, $\varphi(\pm n) = \varphi(n)$.

Le sens du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ défini par Legendre pour b premier positif, a quelconque premier à b, se trouve fixé pour b quelconque $\gtreqless$ o par les conventions

$$(1) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a_1}{b}\right) = \left(\frac{aa_1}{b}\right), \qquad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b_1}\right) = \left(\frac{a}{bb_1}\right),$$

de Jacobi, si l'on y ajoute la convention de Dirichlet, que $\left(\frac{a}{b}\right)$ soit nul si a n'est pas premier à b $\left[\text{d'où } \left(\frac{\pm a}{0}\right) = 0 \text{ si } a \neq 1 \text{ et } \left(\frac{\pm 1}{0}\right) = 1\right]$, et la convention

$$\left(\frac{a}{2^\beta b}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (b \text{ impair}),$$

de Kronecker.

On ajoute ordinairement, depuis Dirichlet, la convention

$$\left(\frac{m}{-1}\right) = \left(\frac{m}{1}\right),$$

qui continue naturellement le sens donné pour $p > 0$ à $\left(\frac{m}{p}\right)$ par Legendre, ou celui qui résulte de l'égalité de Gauss,

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \frac{\varphi(m, p)}{\varphi(1, p)}, \qquad \varphi(m, p) = \sum_{s=1}^{s=p} e^{s^2 \frac{2m\pi i}{p}} \qquad (p \text{ premier}).$$

De cette convention résultent les propriétés suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{A}{b}\right), \\ A \equiv a \pmod{4b} \quad \text{si} \quad b \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{et est premier à } a, \\ A \equiv a \pmod b \quad \text{dans tous les autres cas}; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{b'-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} b - 1}{2}}, \\ a = 2^\alpha a', \qquad b = 2^\beta b', \qquad a', b' \text{ impairs}; \end{cases}$$

d'où, en particulier, pour b impair, en posant $B = b + 2\lambda a'$,

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2^\alpha}{Bb}\right)\left(\frac{a}{B}\right)(-1)^{\lambda\frac{a'-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} Bb - 1}{2}},$$

et si en outre λ est pair, en observant que $Bb \equiv 2\lambda + 1 \pmod 8$,

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{B}\right)^{\frac{\alpha\lambda}{2} + \frac{\operatorname{sgn} a - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} Bb - 1}{2}},$$

donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{D}{b}\right)=\left(\dfrac{D}{B}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} D-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} B b-1}{2}}, \qquad B\equiv b(\operatorname{mod} D), \\ \text{D étant un discriminant.}\end{array}\right.$$

Cette dernière convention n'est d'ailleurs nullement nécessaire. Elle oblige, d'après (3), à écrire,

$$\left(\frac{-1}{b}\right)=(-1)^{\frac{b'-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn} b-1}{2}},$$

et, si l'on veut représenter les caractères $\left(\frac{n}{|p|}\right)$, $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ dans la théorie des formes quadratiques de discriminant D (p étant un facteur premier impair de D pris avec un signe tel qu'il soit lui-même un discriminant) par $\left(\frac{p}{n}\right)$, $\left(\frac{-1}{n}\right)$, à supposer n non seulement premier à 2D, mais d'un signe déterminé qui soit le même pour tous les nombres aptes à former le dénominateur symbolique d'un caractère.

Une autre convention se présente encore naturellement : si l'on veut conserver, pour b négatif, la relation

$$\left(\frac{-1}{b}\right)=(-1)^{\frac{b'-1}{2}},$$

avec la formule (3), celle-ci oblige à poser $\left(\frac{a}{-1}\right)=\operatorname{sgn} a$. De là un nouveau sens parfaitement défini pour le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$. En donnant ce second sens à $\left(\frac{a}{b}\right)$, sa valeur est égale à l'ancienne multipliée par $(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} a-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} b-1}{2}}$. La propriété (2) devient, A et a ayant le même sens que tout à l'heure,

$$(5)\qquad \left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{A}{b}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} b-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} A a-1}{2}}.$$

La propriété (3) reste inaltérée. La propriété (4) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{D}{b}\right)=\left(\dfrac{D}{B}\right), \qquad B\equiv b(\operatorname{mod} D), \\ \text{D étant un discriminant.}\end{array}\right.$$

La convention relative au signe du dénominateur symbolique des caractères devient inutile.

La formule (3) qui, pour $a = -1$, fixe la valeur de $\left(\frac{-1}{b}\right)$ selon les conventions adoptées, devient illusoire pour $a = 2$. Mais (2) ou (5) donne, si $a \equiv \rho \pmod 8$,

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\rho}{2}\right);$$

puis, pour $\rho = \pm 3$,

$$\left(\frac{2}{\rho}\right) = \pm\left(\frac{2 \mp \rho}{\rho}\right) = -1,$$

pour $\rho = \pm 1$,

$$\left(\frac{2}{\rho}\right) = +1.$$

Donc

$$\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a'^2-1}{8}}, \qquad a = 2^\alpha a', \qquad a' \text{ impair.}$$

C'est le second sens du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ que M. Weber [1] a introduit d'une manière un peu différente, pour le cas particulier où a est un discriminant, en le désignant par (a, b). Je conserverai la notation $\left(\frac{a}{b}\right)$ et son premier sens, sauf à indiquer d'un mot les simplifications très légères qui résultent du second sens.

2. Dans les sommes

$$\psi_0(h, n) = \sum_s \left(\frac{s}{n}\right) e^{s\frac{2\pi i h}{n}},$$

où s parcourt un système de restes (mod n), ce système est indifférent si $n \not\equiv 2 \pmod 4$. Si $n \equiv 2 \pmod 4$, il doit encore être défini relativement au module $4n$, ou, ce qui revient au même, relativement au module 8, les restes pairs étant d'ailleurs sans influence. Je le définirai par la condition suivante, portant sur les seuls restes impairs :

$$s \equiv \rho \qquad \pmod 8,$$

---

(1) *Gœttinger Nachrichten*, 1893.

ρ étant l'un des nombres 1, 3, 5, 7, arbitraire d'ailleurs, mais le même pour tous les restes s. Dans ces conditions, ψ_0 est déterminée au facteur $\left(\frac{2}{\rho}\right)$ près.

On voit de suite que $\psi_0(-h, n)$ ou $\psi_0(h, -n)$ est conjuguée de $\psi_0(h, n)$, que $\psi_0(h, n) = \psi_0(h_1, n)$ si $h \equiv h_1 \pmod{n}$, et que, si a est premier à n, $\psi_0(ha^2, n) = \psi_0(h, n)$, cela même si $n \equiv 2 \pmod{4}$, car alors $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Si m est premier à n, h étant toujours quelconque, on a

$$\psi_0(hm, n)\,\psi_0(hn, m) = \psi_0(h, mn), \tag{1}$$

$$\psi_0(h, m)\,\psi_0(h, n) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)\psi_0(h, mn). \tag{2}$$

En effet, l'un au moins m des nombres m, n sera impair. On a d'ailleurs

$$\psi_0(hm, n)\,\psi_0(hn, m) = \sum_{s,t}\left(\frac{s}{n}\right)\left(\frac{t}{m}\right)e^{\frac{2h\pi i}{mn}(sm^2+tn^2)},$$

s, t parcourant des restes convenables selon les modules n, m respectivement. Je supposerai que t parcourt un système de restes pairs; $\left(\frac{s}{n}\right)$, $\left(\frac{t}{m}\right)$ pourront alors être remplacés par $\left(\frac{sm^2+tn^2}{n}\right)$, $\left(\frac{sm^2+tn^2}{m}\right)$ respectivement. En remarquant que $sm^2+tn^2 = \sigma$ parcourt un système de restes $\pmod{mn}$ et que $\sigma \equiv s \pmod{8}$ si $n \equiv 2 \pmod{4}$, l'identité (1) devient évidente. L'identité (2) se démontre d'une manière analogue en remplaçant $\left(\frac{s}{n}\right)$ par $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{sm+tn}{n}\right)$ et $\left(\frac{t}{m}\right)$ par $\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{sm+tn}{m}\right)$, t étant seulement pris divisible par 4 si

$$n \equiv 2 \pmod{4}.$$

On obtient sans peine les généralisations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\psi_0(h, N) = \prod_i \psi_0(hA_i, a_i), \qquad \psi_0(h, N) = \prod_{i,k}\left(\frac{a_i}{a_k}\right)\left(\frac{a_k}{a_i}\right)\psi_0(h, a_i), \\ &\left(N = \prod_i a_i = A_i a_i; \qquad i, k = 0, 1, 2, \ldots; \qquad i \neq k\right) \end{aligned}\right.$$

les a_i étant premiers entre eux deux à deux, positifs ou négatifs.

La définition adoptée pour $\psi_0(h, 2n')$ (n' impair) coïncide avec celle qui résulterait de (1) ou de (2) pour $m = n'$, $n = 2$, en remplaçant $\psi_0(hn', 2)$ ou $\psi_0(h, 2)$ par $(-1)^h\left(\frac{2}{\rho}\right)$.

En donnant au symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ le second sens, il faudrait supposer que la variable de sommation s reste positive ou que le second argument de ψ_0 est essentiellement positif.

3. Quel que soit le système de restes (mod n) que parcourt s, la somme

$$\psi_1(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{n}}$$

est conjuguée de $\psi_1(-h, n)$ et $\psi_1(h, n) = \psi_1(h_1, n)$ si $h_1 \equiv h$ (mod n). Mais c'est seulement si n est un discriminant que la valeur de ψ_1 est indépendante de ce système de restes et encore faut-il que les différentes déterminations d'un même reste s aient un signe fixé si n est négatif. Bornons-nous au cas où n est un discriminant et où les restes s sont tous positifs quand n est négatif. Soit $n = 2^\nu n'$ (n' impair). Si $n' \equiv 1$ (mod 4), $\psi_1(h, n) = \psi_0(h, n)$. Si $n' \equiv -1$ (mod 4), donc (pour s impair) $\left(\frac{-1}{s}\right) = -ie^{\frac{\pi i s}{2}}$, $\psi_1(h, n) = -i\psi_0\left(h + \frac{n}{4}, n\right)$. On voit que, même avec nos hypothèses restrictives, ψ_1 est une forme encore un peu plus générale que ψ.

Si a est premier au discriminant n, on aura

$$\psi_1(ha^2, n) = \psi_1(h, n),$$

et, si m, n sont deux discriminants premiers entre eux,

$$\psi_1(hn, m)\,\psi_1(hm, n) = \psi_1(h, mn).$$

Pour démontrer la propriété correspondant à l'identité (2), j'observerai que

$$\psi_1(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{-2h\pi i}{|n|}};$$

cela est évident si n est < 0; si n est > 0, on a

$$\psi_1(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{n-s}\right) e^{(n-s)\frac{2h\pi i}{n}} = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{-2h\pi i}{n}}.$$

On pourra alors, en remplaçant $\left(\frac{n}{s}\right)$ par $\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{s|m|+t|n|}\right)$, $\left(\frac{m}{t}\right)$ par $\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{s|m|+t|n|}\right)$, procéder comme au numéro précédent. On obtient

$$\psi_1(h, m)\psi_1(h, n) = \psi_1(h, mn)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} m - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} n - 1}{2}}.$$

La fonction

$$\psi(h, n) = \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{|n|}} = \psi_1(-h, n)$$

qu'on vient de voir s'introduire est un peu plus commode que $\psi_0(h, n)$. C'est elle que je considérerai désormais.

En donnant partout aux symboles $\left(\frac{a}{b}\right)$ leur second sens on n'est plus astreint à fixer le signe de la variable de sommation s.

4. En désignant par ε_x $(-1)^r$ si $|x|$ est le produit de r facteurs premiers différents, 0 si $|x|$ a un diviseur carré > 1, x si $|x| = 0, 1$; par $\sum\limits_d^N$ une sommation où d parcourt tous les diviseurs de N y compris 1 et N; par $f(d)$, $g(d)$, $h(d)$ trois fonctions définies au moins quand d est un diviseur de N, la seconde satisfaisant, pour des arguments diviseurs de N, aux conditions

$$g(d)g(d') = g(dd'), \qquad g(1) \neq 0;$$

si l'on suppose vraie une des deux égalités

$$h(d) = \sum_\delta^d f(\delta)g(\delta'), \qquad f(d) = \sum_\delta^d \varepsilon_\delta g(\delta)h(\delta'), \qquad \delta\delta' = d,$$

l'autre le sera également.

Ainsi $\left(\dfrac{N^2}{n_1, \ldots, n_q}\right)$ représentant o ou 1 selon que N, $n_1, \ldots, n_q$ ont ou non un plus grand commun diviseur $\neq 1$, $\sum\limits_{(n)}^{N}$ une sommation où $n_1, \ldots, n_q$ parcourent les nombres 1, 2, ..., N, si l'on pose, F étant une fonction quelconque,

$$g(d) = 1, \qquad f(d) = \sum_{(n)}^{d} \left(\frac{d^2}{n_1, \ldots, n_q}\right) \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} n_1}{d}, \ldots, \frac{\mathrm{N} n_q}{d}\right),$$

$$h(d) = \sum_{(n)}^{d} \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} n_1}{d}, \ldots, \frac{\mathrm{N} n_q}{d}\right),$$

on aura, en prenant successivement dans la somme $h(d)$ les termes où $n_1, \ldots, n_q$ ont avec d le plus grand commun diviseur $\frac{d}{\delta}$, δ parcourant les diviseurs de d,

$$\sum_{(n)}^{d} \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} n_1}{d}, \ldots, \frac{\mathrm{N} n_q}{d}\right) = \sum_{\delta}^{d} \sum_{(n)}^{\delta} \left(\frac{\delta^2}{n_1, \ldots, n_q}\right) \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} n_1}{\delta}, \ldots, \frac{\mathrm{N} n_q}{\delta}\right),$$

donc aussi

$$\sum_{(n)}^{d} \left(\frac{d^2}{n_1, \ldots, n_q}\right) \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} n_1}{d}, \ldots, \frac{\mathrm{N} n_q}{d}\right) = \sum_{\delta}^{d} \varepsilon_\delta \sum_{(n)}^{\delta'} \mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N} n_1 \delta}{d}, \ldots, \frac{\mathrm{N} n_q \delta}{d}\right),$$
$$\delta\delta' = d.$$

Cette dernière égalité peut d'ailleurs se vérifier directement en observant qu'un système d'arguments $\frac{\mathrm{N}}{d}\mu_1, \ldots, \frac{\mathrm{N}}{d}\mu_q$, où $\mu_1, \ldots, \mu_q$, d ont le plus grand commun diviseur θ, figurera dans le second membre de l'égalité précédente autant de fois que θ a de diviseurs parmi les δ et chaque fois avec le coefficient ε_δ. Or, on sait que, si θ est > 1, $\sum\limits_{\delta}^{\theta} \varepsilon_\delta = 0$.

Voici deux applications. Pour $F = 1$, $d = N$, on obtient, en appelant $\varphi_q(N)$ le nombre des systèmes $n_1, \ldots, n_q$ de nombres $\leqq N$ tels que le plus grand commun diviseur de $n_1, \ldots, n_q$, N soit l'unité,

$$\varphi_q(N) = \sum_{\delta}^{N} \varepsilon_\delta \delta'^q = N^q \prod_{p}^{N} (1 - p^{-q}), \qquad n^q = \sum_{\delta}^{N} \varphi_q(\delta),$$

p parcourant les facteurs premiers différents de N.

Soient en second lieu $q = 2\rho$, $A(u_1, \ldots, u_\rho)$ une fonction abélienne de genre ρ ne devenant infinie pour aucun des $N^{2\rho}$ systèmes de $N^{\text{èmes}}$ de période et $P_i^{(1)}, \ldots, P_i^{(\rho)}$ $(i = 1, \ldots, 2\rho)$ un système de périodes dont toute autre période soit, et d'une seule manière, une fonction linéaire homogène à coefficients entiers. Si l'on prend

$$F = \log\left[X - A\left(\frac{m_1 P_1^{(1)} + \ldots + m_{2\rho} P_{2\rho}^{(1)}}{N}, \ldots\right)\right]$$

et qu'on écrive $\log \theta_N$ pour $f(N)$, $\log \Phi_N$ pour $h(N)$, les relations précédentes deviennent, en faisant $d = N$,

$$\Phi_N = \prod_{d}^{N} \theta_d, \qquad \theta_N = \prod_{d}^{N} \Phi_{d'}^{\varepsilon_d}, \qquad dd' = N,$$

d parcourant les diviseurs de N, et le degré de θ_N est $\varphi_q(N)$.

Admettons que la fonction A vérifie la condition

$$A(nu_1, \ldots, nu_\rho) = \frac{\lambda_n[A(u_1, \ldots, u_\rho)]}{\mu_n[A(u_1, \ldots, u_\rho)]},$$

λ_n, μ_n étant des polynomes, et que les racines de θ_N soient distinctes. Soit $N = PQ$, P étant le produit des facteurs premiers différents de N. Posons $m_i = \alpha_i + P\beta_i$. On aura les $\varphi_q(N)$ systèmes de m_i en faisant parcourir aux α_i les $\varphi_q(P)$ systèmes analogues relatifs à P, et aux β_i les nombres $0, 1, \ldots, Q - 1$. Le polynome de degré N

$$\mu_Q^{\varphi_q(P)}(x)\, \theta_P\left[\frac{\lambda_Q(x)}{\mu_Q(x)}\right]$$

s'annulera pour les mêmes valeurs que $\theta_N(x)$ et n'en différera que par un facteur constant.

Pour revenir à la somme ψ_0, prenons, en désignant par Q^2 un diviseur carré commun à $N = MQ^2 > 0$ et à $h = kQ^2$ et en faisant $q = 1$,

$$F(m) = \left(\frac{m}{M}\right) e^{m\frac{2h\pi i}{N}}.$$

On aura, pour $M \not\equiv 2 \pmod 4$,

$$\psi_0(h, N) = \sum_{m=1}^{m=N} \left(\frac{N^2}{m}\right)\left(\frac{m}{M}\right) e^{m\frac{2h\pi i}{N}} = \sum_d^N \varepsilon_d \sum_{n=1}^{n=d'} \left(\frac{nd}{M}\right) e^{nd\frac{2k\pi i}{M}}, \qquad dd' = N.$$

Il suffit de faire parcourir à d les diviseurs de Q^2, le dernier symbole étant nul pour les autres valeurs de d. On aura alors $d' = Md''$, $dd'' = Q^2$, et, en introduisant un symbole sans influence,

$$\psi_0(h, N) = \sum_d^{Q^2} \varepsilon_d \left(\frac{M^2}{d}\right) \sum_{n=1}^{n=Md''} \left(\frac{nd}{M}\right) e^{nd\frac{2k\pi i}{M}}, \qquad dd'' = Q^2.$$

Pour deux valeurs de n congrues (mod M) le terme général reprend la même valeur et, d ne parcourant effectivement que des nombres premiers à M, nd parcourra avec n un système de restes (mod M). Donc

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_0(h, N) = Q^2 \prod_p^{Q} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2}{p}\right)\right] \psi_0(k, M), \qquad h = kQ^2, \qquad N = MQ^2, \\ \qquad p \text{ parcourant les facteurs premiers différents de Q.} \end{array}\right.$$

Ce résultat subsiste évidemment pour ψ_1 et ψ si M est un discriminant.

Soient $M = 2M'$, $Q = 2^\delta Q'$ (M', Q' impairs). On aura, et même si $\delta = 0$,

$$\psi_0(h, N) = \psi_0(h, M'Q'^2)\,\psi_0(h, 2^{2\delta+1}).$$

Si δ est > 0, le dernier terme se ramène, d'après ce qui précède, à une somme ψ_0 dont le second argument est 8 et le calcul direct montre qu'elle est nulle; ce dernier terme peut donc s'écrire

$$(1 - \operatorname{sgn}\delta)\,\psi_0(k, 2).$$

En appliquant à $\psi_0(h, M'Q'^2)$ les résultats obtenus, en enlevant au premier argument un facteur carré premier au second et en observant que $\psi_0(2k, M')\,\psi_0(k, 2)$ ou $\psi_0(2k, M')\,\psi_0(kM', 2)$ est égal à $\psi_0(k, M)$, on obtient

$$\psi_0(h, N) = (1 - \operatorname{sgn}\delta)\,Q'^2 \prod_p^{Q'} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M'^2}{p}\right)\right] \psi_0(k, M).$$

Ainsi Q^2 étant un diviseur carré commun à $k = hQ^2$ et à $N = MQ^2$, Θ le plus grand commun diviseur de M et de Q, on aura, quel que soit M,

$$\psi_0(k, N) = \operatorname{sgn}|\Theta - 2|\,Q^2 \prod_p^{Q} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{M^2}{p}\right)\right] \psi_0(k, M).$$

5. Si le second argument de ψ_0, ψ_1 ou ψ est un carré, on se trouve dans un cas particulier de la somme $\sigma(h, N)$ des puissances $h^{\text{ièmes}}$ des racines primitives de l'équation binome de degré N. Cette somme étant réelle, on a $\sigma(h, n) = \sigma(-h, n)$. Les formules du numéro précédent donnent, en y prenant $F(m) = e^{\frac{2mh\pi i}{N}}$ $(h > 0)$,

$$\sigma(h, N) = \sum_d^N \varepsilon_d \sum_{n=1}^{n=d'} e^{\frac{2nh\pi i}{d'}}, \qquad dd' = N.$$

La dernière somme étant nulle si d' ne divise pas h, il suffit de faire parcourir à d' les diviseurs de N qui divisent h ou le plus grand commun diviseur Δ de $h = k\Delta$, $N = M\Delta$. Alors $d = Md''$ et en remettant d pour d'' on pourra écrire

$$\sigma(h, N) = \sum_d^\Delta \varepsilon_{Md}\,d' = \varepsilon_M \sum_d^\Delta \varepsilon_d \left(\frac{M^2}{d}\right) d', \qquad dd' = \Delta,$$

où

$$\sigma(h, \mathrm{N}) = \varepsilon_{\mathrm{M}}\Delta \prod_p^{\Delta} \left[1 - \frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{M}^2}{p}\right)\right] = \varepsilon_{\mathrm{M}} \frac{\varphi(\mathrm{N})}{\varphi(\mathrm{M})},$$

p parcourant les facteurs premiers différents de N.

6. Je vais maintenant calculer $\psi(h, \delta)$, δ étant un discriminant simple, et pour cela compléter les résultats du n° 4 qui sont ici évidents.

Tout d'abord la formule connue

$$\psi_0(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

où h et p sont positifs et p premier impair, peut s'écrire

(1) $$\psi(h, \delta_0) = \left(\frac{\delta_0}{h}\right) \sqrt{\delta_0} (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} \delta_0 - 1}{2}},$$

δ_0 étant un discriminant fondamental premier impair; une vérification directe montre qu'elle subsiste pour $\delta_0 = -4, \pm 8$.

Soit d'abord δ impair, donc $|\delta| = p^\alpha$, p, α étant impairs et, δ_0 étant le discriminant fondamental, $\delta = \delta_0 p^{\alpha-1} = \delta_0 q^2$. Posons

$$s = p^{\alpha-1}s' + s''.$$

On aura

(2) $$\begin{cases} \psi(h, \delta) = \displaystyle\sum_{s''} \left(\frac{\delta_0}{s''}\right) e^{s''\frac{2h\pi i}{p^\alpha}} \sum_{s'} e^{s'\frac{2h\pi i}{p}}, \\ s' = 0, 1, \ldots, p-1, \qquad s'' = 0, 1, \ldots, p^{\alpha-1} - 1. \end{cases}$$

Posons $h = h'p^\mu$, h' étant premier à p. Si $\mu = 0$, $\psi = 0$. Si $\mu > 0$, on aura

$$\psi(h, \delta) = p\psi(hp^{-1}, \delta p^{-1}),$$

et, β étant le plus petit des nombres $\alpha - 1$, μ,

$$\psi(h, \delta) = p^\beta \psi(hp^{-\beta}, \delta p^{-\beta}).$$

Si $\beta = \mu$, cela est nul d'après (2). Si $\beta = \alpha - 1$, $\delta p^{-\beta} = \delta_0$. Donc, d'après (1), en convenant que $\left(\frac{\delta}{k}\right)$ est nul si k n'est pas entier, on aura, quel que soit β,

$$(3) \qquad \psi(h, \delta) = \left(\frac{\delta}{k}\right)\sqrt{\delta}(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\delta - 1}{2}}, \qquad \delta = \delta_0 q^2, \qquad h = kq^2.$$

Soit $|\delta| = 2^\alpha$, $h = 2^\mu h'$, h' impair. Si α est impair, en posant

$$s = 2^{\alpha-3}s' + s'',$$

on sera ramené au cas $\delta_0 = \pm 8$. Si α est pair, en posant

$$s = 2^{\alpha-2}s' + s'',$$

on sera ramené au cas $\delta_0 = -4$.

Donc la formule (3) subsiste quel que soit le discriminant simple δ.

7. Soient $\delta = \delta_0 q^2$, $\delta' = \delta'_0 q'^2$ deux discriminants simples premiers entre eux, δ_0, δ'_0 étant leurs discriminants fondamentaux. En posant $h = kq^2 = k'q'^2$, $k'' = \frac{h}{q^2 q'^2} = \frac{k}{q'^2} = \frac{k'}{q^2}$ et en observant que k'' sera entier lorsque k et k' le seront, mais seulement alors, on aura

$$\left(\frac{\delta}{k}\right) = \left(\frac{\delta}{k''}\right), \qquad \left(\frac{\delta}{k'}\right) = \left(\frac{\delta}{k''}\right), \qquad \left(\frac{\delta}{k}\right)\left(\frac{\delta'}{k'}\right) = \left(\frac{\delta\delta'}{k''}\right),$$
$$\sqrt{\delta\delta'} = \sqrt{\delta}\sqrt{\delta'}(-1)^{\frac{\operatorname{sgn}\delta - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\delta' - 1}{2}}.$$

Par suite, la dernière formule du n° **3** donne

$$\psi(h, \delta\delta') = \left(\frac{\delta\delta'}{k''}\right)\sqrt{\delta\delta'}(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\delta\delta' - 1}{2}}, \qquad h = k'' q^2 q'^2.$$

Si $D = D_0 Q^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2$ est un discriminant quelconque de discriminant fondamental D_0 et de discriminant essentiel $\mathfrak{D}$, on aura

$$\psi(h, D) = \psi(h, \mathfrak{D})\sigma(h, \mathfrak{Q}^2),$$

et, par conséquent,

$$\psi(h, \mathrm{D}) = \sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{|\mathrm{D}|}} = \sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) e^{s\frac{-2h\pi i}{\mathrm{D}}}$$
$$= \varepsilon_{\mathfrak{Q}'} \frac{\varphi(\mathfrak{Q}^2)}{\varphi(\mathfrak{Q}')} \left(\frac{\omega}{k}\right) \sqrt{\omega} (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} \mathrm{D} - 1}{2}};$$

s parcourt un système de restes > 0;

$\mathrm{D} = \mathrm{D}_0 \mathrm{Q}^2 = \omega \mathfrak{Q}^2 = \mathrm{D}_0 \mathrm{Q}_0^2 \mathfrak{Q}^2$; $\qquad h = k\mathrm{Q}_0^2$;

$\left(\frac{\omega}{k}\right) = 0$ si, ω étant $\neq 1$, k n'est pas entier; $\qquad \left(\frac{1}{k}\right) = 1$;

$\mathfrak{Q}'$ est le quotient de $\mathfrak{Q}^2$ par son plus grand commun diviseur avec h.

Il résulte de là que $\psi(0, \mathrm{D})$, et de même $\psi_0(0, \mathrm{N})$, est nul, à moins que D ou $|\mathrm{N}|$ ne soit un carré ou le double d'un carré impair; si $|\mathrm{N}|$ est un carré,

$$\psi_0(0, \mathrm{N}) = \varphi(\mathrm{N});$$

si $\left|\frac{\mathrm{N}}{2}\right|$ est un carré impair,

$$\psi_0(0, \mathrm{N}) = \left(\frac{2}{\rho}\right) \varphi(\mathrm{N}),$$

ρ étant toujours le reste commun selon le module 8 des valeurs impaires de la variable de sommation.

En donnant au symbole $\left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right)$ son second sens, on voit que

$$\sum_s \left(\frac{\mathrm{D}}{s}\right) e^{-s\frac{2h\pi i}{\mathrm{D}}} = \varepsilon_{\mathfrak{Q}'} \frac{\varphi(\mathfrak{Q}^2)}{\varphi(\mathfrak{Q}')} \left(\frac{\omega}{k}\right) \sqrt{\omega}, \qquad h = k\mathrm{Q}_0^2,$$

s parcourant un système de restes quelconque (les conventions relatives au cas où k n'est pas entier restant naturellement les mêmes).

8. Soit $f(s)$ une fonction développable en série de Fourier sous la forme

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathrm{A}(n) e^{\frac{2ni\pi s}{|\mathrm{D}|}} \qquad \text{pour} \qquad 0 < s < |\mathrm{D}|.$$

On aura, d'après ce qui précède, en posant

$$\sum_{s=1}^{s=|D|}\left(\frac{D}{s}\right)f(s)=A(o)\psi(o,D)+S,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
S=\varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{D}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varepsilon_{\mathfrak{Q}'_n}}{\varphi(\mathfrak{Q}'_n)}B(n)\left(\frac{\omega}{k}\right);\\
B(n)=A(n)+A(-n)\operatorname{sgn}D;\\
D=\omega\mathfrak{Q}^2=D_0Q^2=D_0Q_0^2\mathfrak{Q}^2;\qquad k=\dfrac{n}{Q_0^2};\\
\mathfrak{Q}_n \text{ est le quotient de } \mathfrak{Q}^2 \text{ par son plus grand commun diviseur avec } n.
\end{array}\right.$$

ω est toujours le discriminant essentiel et D_0 le discriminant fondamental de D. Si D est un carré, $\omega=Q_0=1$.

Il suffit de considérer les termes de la série où k est entier. En prenant successivement les valeurs de $k=md'$ qui ont avec $\mathfrak{Q}^2=dd'$ le plus grand commun diviseur d' et en observant que

$$\left(\frac{\omega}{dd'}\right)=1,\qquad\text{donc}\qquad\left(\frac{\omega}{d}\right)=\left(\frac{\omega}{d'}\right),$$

on peut écrire

$$S=\varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{D}\sum_{d}^{\mathfrak{Q}^2}\frac{\varepsilon_d}{\varphi(d)}\left(\frac{\omega}{d}\right)\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\omega d^2}{m}\right)B\left(\frac{mQ^2}{d}\right).$$

Or soit dans les formules du n° 4

$$g(d)=1,\qquad f(d)=\left(\frac{\omega}{d}\right)\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\omega d^2}{m}\right)B\left(\frac{mQ^2}{d}\right);$$

$$h(d)=\left(\frac{\omega}{d}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)B\left(\frac{nQ^2}{d}\right).$$

En prenant successivement les valeurs de n qui ont avec d le plus grand commun diviseur $\frac{d}{\delta}$, δ parcourant les diviseurs de d, on voit que

$h(d)=\sum\limits_{\delta}^{d} f(\delta)$. Donc aussi

$$f(d)=\sum_{\delta}^{d}\varepsilon_\delta\, h\left(\frac{d}{\delta}\right)=\left(\frac{\omega}{d}\right)\sum_{\delta}^{d}\varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)B\left(\frac{n\delta Q^2}{d}\right),$$

formule qui devient d'ailleurs évidente si l'on observe qu'un nombre quelconque m ayant avec d le plus grand commun diviseur θ, figure au second membre, sous la forme $n\delta$, comme argument de la fonction $\left(\frac{\omega}{m}\right)B\left(\frac{mQ^2}{d}\right)$ de m autant de fois que θ a de diviseurs parmi les δ et chaque fois avec le coefficient ε_δ; or $\sum\limits_{\delta}^{\theta}\varepsilon_\delta = 0$ si $\theta > 1$.

Si la fonction B jouit de la propriété $B(x)B(y)=B(xy)$, on aura, en outre,

$$f(d)=\left(\frac{\omega}{d}\right)\frac{B(Q^2)}{B(d)}\prod_{p}^{d}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)B(p)\right]\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)B(n),$$

p parcourant les facteurs premiers différents de d.

Donc

$$S=B(Q^2)\,\varphi(\mathfrak{Q})\sqrt{D}\sum_{d}^{\mathfrak{Q}^2}\varepsilon_d\, g(d)\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)B(n),$$

$$g(d)=\frac{1}{B(d)\varphi(d)}\left(\frac{\omega}{d}\right)\prod_{p}^{d}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)B(p)\right];$$

d ne parcourt, en réalité, que les diviseurs du produit P des facteurs premiers différents de $\mathfrak{Q}$. Or, pour deux diviseurs d, d' de P premiers entre eux, on a

$$g(d)\,g(d')=g(dd').$$

Donc

$$\sum_{d}^{\mathfrak{Q}^2}\varepsilon_d\, g(d)=\prod_{p}^{P}[1-g(p)]=\frac{P}{\varphi(P)}\prod_{p}^{P}\left[1-\frac{1}{p\,B(p)}\left(\frac{\omega}{p}\right)\right],$$

et, puisque $\varphi(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{Q}\frac{\varphi(P)}{P}$,

$$S = \mathfrak{Q}\sqrt{D}\,B(Q^2)\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\frac{1}{p\,B(p)}\right]\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)B(n).$$

Si $B(n) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\lambda_\nu B_\nu(n)$, λ_ν ne dépendant pas de n, on peut appliquer à chaque série S_ν, où B est remplacé par B_ν, la transformation précédente.

9. Prenons, par exemple, en observant la relation

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^n}{n} = \int_0^z\frac{dz}{1-z} = -\log(1-z), \qquad 0 \leqq |z| \leqq 1, \qquad z \neq 1,$$

et sa conséquence

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^n}{n^\nu} = \left(\int_0^z\frac{dz}{z}\right)^{\nu-1}\int_0^z\frac{dz}{1-z} = l_\nu(z), \qquad 0 \leqq |z| \leqq 1, \qquad z \neq 1$$

(où l'exposant $\nu - 1$ est symbolique et la dernière égalité une définition),

$$f(s) = l_\nu e^{\frac{2i\pi s}{|D|}}.$$

On aura $A(n) = 0$ pour $n \leqq 0$, $B(n) = n^{-\nu}$, donc

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=|D|}\left(\frac{D}{s}\right)l_\nu e^{\frac{2i\pi s}{|D|}} = \frac{\mathfrak{Q}\sqrt{D}}{Q^{2\nu}}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)p^{\nu-1}\right]H_\nu(\omega),$$

en posant

$$H_\nu(D) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^\nu} = \prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\frac{1}{p^\nu}\right]H_\nu(\omega).$$

J'écrirai parfois $H(D)$ pour $H_1(D)$.

Prenons ensuite $f(s) = s^\alpha$ et posons $\sum_{s=1}^{s=|D|}\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha = \varpi(\alpha, D)$.

Il convient de définir $\varpi(\alpha, N)$ quand $N = 2N'$ (N' impair) par

$$(2)\qquad \varpi(\alpha, N) = \left(\frac{2}{\rho}\right)\varpi(\alpha, N'),$$

ρ ayant le même sens que dans le cas analogue pour ψ.

Les sommes $\sum_{s=1}^{s=|N|}\left(\frac{s}{N}\right)s^\alpha$ où N n'est pas impairement pair se ramènent à $\varpi(\alpha, D)$. Celles où N est impairement pair s'y ramènent aussi pourvu que l'on fasse la même convention que dans (2). Je me bornerai donc aux sommes $\varpi(\alpha, D)$.

On a ici

$$A(n) = \frac{1}{|D|}\int_0^{|D|} x^\alpha e^{-\frac{2ni\pi x}{|D|}}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$A(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\frac{-|D|^\alpha\alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2ni\pi)^\nu} & \text{si} \quad n \neq 0, \\ \dfrac{|D|^\alpha}{\alpha+1} & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\sqrt{D}\,B(n) = 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\frac{-|D|^\alpha\alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2\pi n)^\nu}\,\mathfrak{R}\frac{\sqrt{D}}{i^\nu} = \sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\nu=\alpha}\lambda_\nu B_\nu,$$

$$B_\nu = \frac{1}{n^\nu}, \qquad \lambda_\nu = \frac{2}{\sqrt{D}}\,\frac{-|D|^\alpha\alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2\pi)^\nu}\,\mathfrak{R}\frac{\sqrt{D}}{i^\nu},$$

$\mathfrak{R}$ désignant une partie réelle, et

$$(3)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha, D) = \dfrac{|D|^\alpha}{\alpha+1}\varpi(0, D) \\ \qquad\qquad + 2\displaystyle\sum_{1}^{\nu=\alpha}\frac{-|D|^\alpha\alpha!}{(\alpha-\nu+1)!(2\pi)^\nu}\,\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{Q}\sqrt{D}}{i^\nu \mathfrak{Q}^{2\nu}}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)p^{\nu-1}\right]H_\nu(\omega). \end{cases}$$

Cette formule fournit l'expression des $H_\nu(\omega) = H_\nu(D_0)$ et, par conséquent, des $H_\nu(D)$ par les ϖ de proche en proche pour les ν de même parité; si D est < 0, ce sera pour les ν impairs; si D est > 0, ce sera pour les ν pairs.

En substituant aux $H_\nu(D_0)$ leurs expressions par les $\varpi(\alpha, D_0)$, on obtient une relation entre $\varpi(\alpha, D)$ et les sommes $\varpi(\nu, D_0)$ où ν est $\leqq \alpha$. Ainsi, pour $\alpha = 1$ et $D < 0$, on aura

$$\varpi(1, D) = Q\,2\prod_p^2\left[1 - \left(\frac{D_0}{p}\right)\right]\varpi(1, D_0).$$

Par exemple $\varpi(1, -28) = 0$.

Au lieu de la formule (1) qui permet de remplacer H_ν par l_ν, on obtient (H. Weber, *loc. cit.*), en sommant séparément dans H_ν les termes où n donne le même reste (mod D) et en observant la relation

$$\frac{d}{da}\log\Gamma(a) = \Gamma'(1) + \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right)$$

et ses dérivées successives [pour $\nu = 1$, il faut encore que $\varpi(0, D) = 0$].

$$H_\nu(D) = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=1}^{s=|D|}\left(\frac{D}{s}\right)\frac{d^\nu}{ds^\nu}\log\Gamma\left(\frac{s}{|D|}\right).$$

On peut comparer ces expressions et leurs transformées par la relation entre $\Gamma(a)$ et $\Gamma(1-a)$ avec celles déduites de (3) pour les valeurs de ν d'une parité convenable. Pour les valeurs de ν qui échappent à (3) on ne peut plus comparer qu'avec (1) (où l'une des parties du premier membre est toujours nulle). Ainsi, quand D est > 0, on a par (1) :

$$\frac{2\sqrt{D}}{Q^2}H(D) = -\sum_{s=1}^{s=D}\left(\frac{D}{s}\right)\log\sin\frac{\pi s}{D} = 2\sum_{s=1}^{s=D}\left(\frac{D}{s}\right)\log\Gamma\left(\frac{s}{D}\right)(D > 0).$$

D'après l'expression connue de $H(D)$ par le nombre des classes, cette relation s'ajoute, pour les nombres ayant la forme de discriminant, à celles employées par Stern (*Journal de Crelle*, t. 67) entre les fonctions Γ dont les arguments sont des fractions de même dénominateur. Elle donne aussi pour la dernière somme une limite *inférieure positive*.

Si D est < 0, les choses se présentent assez différemment, comme on va le voir.

10. Prenons

$$f(s) = 2 \log \Gamma\left(\frac{s}{|D|}\right) + 2\left(\frac{s}{|D|} - 1\right) \log \pi$$
$$- \left(\frac{2s}{|D|} - 1\right) \Gamma'(1) + \log \sin \frac{\pi s}{|D|}.$$

Cette expression est la somme de la série de Kummer et l'on a

$$f(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log 2n}{n} \sin \frac{2n\pi s}{|D|} \qquad (0 < s < |D|),$$

ou, en introduisant une série doublement infinie qui converge d'après un théorème de Dirichlet,

$$f(s) = \frac{1}{2i} \sum_{n} \frac{\log|2n|}{n} e^{\frac{2ni\pi s}{|D|}} \qquad (0 < s < |D|),$$
$$n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty.$$

Ici $A(0)$ est nul. Si $D > 0$, $B(n) = 0$. Si $D < 0$,

$$\sqrt{D}\, B(n) = 2 A(n) \sqrt{D} = \frac{\log 2n}{n} \sqrt{-D}.$$

Pour $D < 0$ on a d'ailleurs, d'après la définition de S et la fin du numéro précédent,

$$S = 2 \sum_{s=1}^{s=-D} \left(\frac{D}{s}\right) \left[\log \Gamma\left(\frac{s}{-D}\right) + \frac{\Gamma'(1) - \log \pi}{D} s\right].$$

Posons

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}}{n}\right) \frac{\log n}{n} = \overline{H}(\mathfrak{D}).$$

On aura

$$S = \varphi(\mathfrak{Q}) \sqrt{-D} \sum_{d}^{\mathfrak{Q}} \frac{\varepsilon_d}{\varphi(d)} \left(\frac{\mathfrak{D}}{d}\right) \sum_{\delta}^{d} \varepsilon_\delta \left(\frac{\mathfrak{D}}{\delta}\right) \frac{d}{\delta Q^2} \left[\overline{H}(\mathfrak{D}) + H(\mathfrak{D}) \log \frac{2\delta Q^2}{d}\right].$$

En transformant la première partie du second membre comme au n° **8**, on obtient

$$Q^2 S = \mathfrak{Q}\sqrt{-D}\prod_p^{\mathfrak{Q}}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]\left[\overline{H}(\omega)+H(\omega)\log 2Q^2\right]$$
$$-\varphi(\omega)H(\omega)\sqrt{-D}\sum_d^{\mathfrak{Q}}\frac{\varepsilon_d}{\varphi(d)}\left(\frac{\omega}{d}\right)\sum_\delta^d \varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\frac{d}{\delta}\log\frac{d}{\delta}.$$

Le coefficient de $H(\omega)\sqrt{-D}$ dans le dernier terme est de la forme $\sum_p^{\mathfrak{Q}} C_p \log p$, p parcourant les facteurs premiers différents de $\mathfrak{Q}$, dont je désignerai encore le produit par P. Calculons C_p. C_p est une somme dont les éléments ne proviennent que des termes où $d = p\Delta$, Δ parcourant les diviseurs de $\frac{P}{p}$, et où δ parcourt les diviseurs de Δ, donc que des termes

$$-\varphi(\mathfrak{Q})\sum_\Delta^{\frac{P}{p}}\frac{\varepsilon_{p\Delta}}{\varphi(p\Delta)}\left(\frac{\omega}{p\Delta}\right)\sum_\delta^\Delta \varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\frac{p\Delta}{\delta}\log\frac{p\Delta}{\delta}.$$

Donc

$$C_p = p\frac{\varphi(\mathfrak{Q})}{p-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\sum_\Delta^{\frac{P}{p}}\frac{\Delta\,\varepsilon_\Delta}{\varphi(\Delta)}\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)\sum_\delta^\Delta \varepsilon_\delta\left(\frac{\omega}{\delta}\right)\frac{1}{\delta} = p\frac{\varphi(\mathfrak{Q})}{p-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\sum_\Delta^{\frac{P}{p}}\varepsilon_\Delta\, g(\Delta),$$

$$g(\Delta) = \frac{\Delta}{\varphi(\Delta)}\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)\prod_q^\Delta\left[1-\left(\frac{\omega}{q}\right)\frac{1}{q}\right],$$

q parcourant les facteurs premiers distincts de Δ. Donc

$$C_p = p\frac{\varphi(\mathfrak{Q})}{p-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\prod_q^{\frac{P}{p}}\left[1-g(q)\right],$$

q parcourant les facteurs premiers distincts de $\frac{P}{p}$. Donc

$$C_p = \frac{-\mathfrak{Q}}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)}\prod_q^{P}\left[1-\left(\frac{\omega}{q}\right)\right],$$

q parcourant les facteurs premiers distincts de P.

Donc

$$(4)\quad \begin{cases} Q^2 S = 2\sqrt{-D}\prod\limits_p^{2}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\right] \\ \qquad \times\left[\overline{H}(\omega)+H(\omega)\log 2Q^2 - H(\omega)\sum\limits_p^{2}\dfrac{\log p}{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)}\right]. \end{cases}$$

En particulier

$$Q_0^2\, S(\omega) = \sqrt{-\omega}\left[\overline{H}(\omega)+H(\omega)\log 2Q_0^2\right].$$

Or on a

$$\overline{H}(D) = -\left[\frac{\partial H_{1+\rho}(D)}{\partial\rho}\right]_{\rho=0} = -\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\prod_p^{2}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\frac{1}{p^{1+\rho}}\right]H_{1+\rho}(\omega)\right\}_{\rho=0}$$

$$= \prod_p^{2}\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\left[\overline{H}(\omega) - H(\omega)\sum_p^{2}\left(\frac{\omega}{p}\right)\frac{\log p}{p-\left(\frac{\omega}{p}\right)}\right].$$

Ces formules fournissent la somme de la série $\overline{H}(D)$ pour $D<0$. En désignant par $K(D)$ le nombre des classes primitives de discriminant D, par $\tau(D)$ un nombre égal à 2 si $D<-4$, à 4 si $D=-4$, à 6 si $D=-3$, et en se rappelant que l'on a, pour $D_0<0$,

$$K(D_0) = \frac{\tau(D_0)}{2D_0}\varpi(1, D_0),$$

on pourra écrire

$$\overline{H}(D_0)\sqrt{-D_0} = [\Gamma'(1)-\log\pi]\frac{4K(D_0)}{\tau(D_0)} + 2\sum_{s=1}^{s=-D}\left(\frac{D_0}{s}\right)\log\Gamma\left(\frac{s}{-D_0}\right).$$

Inversement, la formule (4), quand le coefficient de $\overline{H}$ y est nul, détermine complètement S et vient s'ajouter à celles de Stern. Dans le cas contraire, elle fournit une limite *supérieure* de S, car on a [cela résulte de la formule (5), p. 85]

$$\overline{\mathrm{H}}(\mathrm{D}_0)\sqrt{-\mathrm{D}_0} < \frac{2\pi\mathrm{K}(\mathrm{D}_0)}{\tau(\mathrm{D}_0)}(\log\sqrt{-\mathrm{D}_0} - 0{,}912685).$$

11. Considérons maintenant les séries suivantes où F est une fonction quelconque assurant seulement la convergence

$$h(\Delta) = \sum_{m,n} \mathrm{F}\left(a\frac{\mathrm{Q}^2 m^2}{\Delta^2} + b\frac{\mathrm{Q}mn}{\Delta} + cn^2\right),$$

$$f(\Delta) = \sum_{m,n} \left(\frac{\Delta^2}{m}\right)\mathrm{F}\left(a\frac{\mathrm{Q}^2 m^2}{\Delta^2} + b\frac{\mathrm{Q}mn}{\Delta} + cn^2\right);$$

$b^2 - 4ac = \mathrm{D} = \mathrm{D}_0\mathrm{Q}^2 = \omega\mathfrak{Q}^2$, D_0 étant le discriminant fondamental et ω le discriminant essentiel de D;

a est positif, premier à $2\mathrm{D}$, $b = b_0\mathrm{Q}$, $c = c_0\mathrm{Q}^2$; b_0, c_0, $\frac{\mathrm{Q}}{\Delta}$ sont entiers;

Si $\mathrm{D} < 0$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$ sauf $m = n = 0$;

Si $\mathrm{D} > 0$, m, n parcourent toutes les valeurs entières vérifiant les conditions $n > 0$, $2a\frac{\mathrm{Q}m}{\Delta n} + b \geqq \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}$, T, U étant les plus petites solutions positives de $\mathrm{T}^2 - \mathrm{DU}^2 = 4$.

Le signe $\sum\limits_{m,n}$ aura le même sens dans tout ce qui va suivre; on voit que, si D est positif, ce sens dépend de Δ.

En prenant successivement les valeurs de m qui ont avec Δ le plus grand commun diviseur $\frac{\Delta}{d}$, d parcourant les diviseurs de Q, on a évidemment

$$h(\Delta) = \sum_d^{\Delta} f(d),$$

et par suite

$$f(\Delta) = \sum_d^{\Delta} \varepsilon_d h\left(\frac{\Delta}{d}\right).$$

12. Soit D_1 un discriminant diviseur de $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2$ tel que D_2 soit aussi un discriminant, A un nombre premier à $2D$ représentable par la forme $(a, b, c) = r$ et positif à moins que r ne soit négative (la convention relative au signe de A serait, je le rappelle, inutile, en prenant le symbole généralisé de Legendre dans le second sens indiqué au début). $\left(\frac{D_1}{A}\right)$ a une valeur indépendante du choix de A : c'est un caractère de la classe de r que je désignerai parfois par $\left(\frac{D_1}{r}\right)$ ou par $\left(\frac{D_1}{s}\right)$, s étant un système quelconque de formes ou de classes pour lesquelles il garde la même valeur.

Soit λ le nombre des discriminants simples fondamentaux δ tels que $\frac{D}{\delta}$ soit un discriminant. $\lambda - 1$ seulement des *caractères fondamentaux* $\left(\frac{\delta}{-}\right)$ (le dénominateur symbolique non écrit étant considéré comme *arbitraire*, toujours, bien entendu, premier à $2D$, positif, représentable par une forme de discriminant D et le même pour tous les caractères) seront indépendants, car $\left(\frac{D_0}{-}\right) = \left(\frac{D}{-}\right) = 1$. Je supprimerai donc par la pensée un des caractères fondamentaux *appartenant à* D_0, choisi d'ailleurs arbitrairement, et nommerai *indépendants* les $\lambda - 1$ caractères fondamentaux restants. Tout caractère $\left(\frac{D_1}{-}\right)$ étant exprimable sous la forme d'un produit de caractères indépendants, il n'y a proprement à considérer comme déterminations de D_1 que les $2^{\lambda-1} - 1$ termes du produit $\prod_{\delta}(1 + \delta)$ étendu aux numérateurs symboliques des caractères indépendants. Mais comme il est avantageux d'y adjoindre l'unité, je considérerai D_1 comme susceptible de $2^{\lambda-1}$ déterminations qui sont les termes du produit précédent.

Les $K(D)$ classes primitives de discriminant D forment un groupe abélien $\mathfrak{K}_D = \mathfrak{K}$ ayant un diviseur $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}$ formé des classes où tous les caractères sont égaux à $+1$, et donnant lieu à une décomposition en complexes de la forme

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P}K_1 + \mathfrak{P}K_2 + \ldots + \mathfrak{P}K_{G(D)} \qquad (K_1 = 1),$$

$$\mathfrak{P}K_\alpha = \mathfrak{P}K_\alpha^{-1},$$

chacun des $\lambda - 1$ caractères indépendants conservant la même valeur dans toutes les classes d'un même complexe et deux complexes $\mathfrak{P}K_\alpha$, $\mathfrak{P}K_\beta$ différant par la valeur d'un caractère au moins, sans quoi on aurait $\mathfrak{P}K_\alpha \mathfrak{P}K_\beta = \mathfrak{P}$, d'où $\mathfrak{P}K_\alpha = \mathfrak{P}K_\beta$. Ces $G(D)$ complexes sont les genres et $\mathfrak{P}$ le genre principal.

Tout caractère $\left(\frac{D_1}{}\right)$ où $D_1 \neq 1$ prend dans les classes de $\mathfrak{K}$ autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1. Cela résulte de la formule (3) de la page 84 pour $F(x) = \rho x^{-1-\rho}$ et ρ infiniment petit. Les classes où un caractère indépendant déterminé a la valeur $+1$ forment un groupe $\mathfrak{P}_{\lambda-1} = \mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(1)}$ d'indice 2 dans $\mathfrak{K}$, et il y a $\lambda - 1$ groupes analogues $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda - 1)$ répondant chacun à un caractère indépendant; deux quelconques de ces groupes sont distincts, sans quoi le produit des deux caractères correspondants, égaux entre eux dans toutes les classes de $\mathfrak{K}$, serait un caractère égal à $+1$ dans toutes les classes de $\mathfrak{K}$. Formons le plus grand commun diviseur $\mathfrak{P}_{\lambda-2}$ de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(1)}$ et de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(2)}$, puis celui $\mathfrak{P}_{\lambda-3}$ de $\mathfrak{P}_{\lambda-2}$ et de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(3)}, \ldots$, enfin celui $\mathfrak{P}_1$ de $\mathfrak{P}_2$ et de $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}$ qui est précisément $\mathfrak{P}$ et aussi le plus grand commun diviseur des $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(i)}$. On aura ainsi une suite de compositions de $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K}, \quad \mathfrak{P}_{\lambda-1}, \quad \mathfrak{P}_{\lambda-2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}, \quad \ldots.$$

où l'indice de chaque $\mathfrak{P}_i$ dans le groupe précédent est égal à 2. Donc $G(D) = 2^{\lambda-1}$. De plus, si l'on a la décomposition

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}K'_1 + \ldots + \mathfrak{P}K'_{2^i},$$

(les K' étant convenablement choisis et $K'_1 = 1$), on peut supposer que $K_j = K'_j$.

Voici une autre démonstration dont le principe servira tout à l'heure. Soit $F(C)$ une quantité ayant une valeur déterminée pour chaque classe C, et

$$\sum_{C}^{D} \left(\frac{D_1}{C}\right) F(C) = \Phi(D_1, D),$$

la sommation s'étendant à toutes les classes de $\mathfrak{K}_D$. Multiplions par $\left(\frac{D_1}{c}\right)$, c étant une classe déterminée et sommons pour les $2^{\lambda-1}$ valeurs de D_1. Le coefficient de $F(C)$ sera $\prod_{\delta}\left[1+\left(\frac{\delta}{C}\right)\left(\frac{\delta}{c}\right)\right]$ expression nulle si un seul des $\left(\frac{\delta}{C}\right)$ est $\neq \left(\frac{\delta}{c}\right)$, égale à $2^{\lambda-1}$ dans le cas contraire. Donc, G étant le système des classes C où les caractères ont tous les mêmes valeurs que dans c, on aura

$$2^{\lambda-1}\sum_{C}^{G} F(C) = \sum_{D_1}\left(\frac{D_1}{G}\right)\Phi(D_1, D),$$

la sommation s'étendant à toutes les classes de G. Or, si

$$F(C) = \left(\frac{D_{10}}{C}\right)$$

D_{10} étant une des valeurs de D_1, on a

$$\Phi(D_1, D) = \begin{cases} 0 & \text{pour } D_1 \neq D_{10}, \\ K(D) & \text{pour } D_1 = D_{10}. \end{cases}$$

Donc, t étant le nombre des classes de G,

$$2^{\lambda-1} t = K(D),$$

c'est-à-dire que t est le même pour tous les systèmes G (dont deux quelconques diffèrent par la valeur d'un caractère au moins). Donc les systèmes G sont les complexes $\mathfrak{P}K_t$ ou les genres.

Soit $\mathfrak{A}_{D,d} = \mathfrak{A}_d = \mathfrak{A}$ le groupe des classes primitives de discriminant $D = D'd^2$ (D' étant un discriminant) qui, composées avec une classe quelconque de diviseur d et de discriminant D, reproduisent cette classe. Tout caractère appartenant à D et à D' a la valeur $+1$ dans toutes les classes de $\mathfrak{A}_{D,d}$ et tout caractère appartenant à D, mais n'appartenant plus à D', prend dans les classes de $\mathfrak{A}_{D,d}$ autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1 (la restriction exprimée dans ma thèse relativement aux discriminants positifs divisibles par 16, quand d est pair n'est pas fondée, comme on peut le voir par la démonstration elle-même où l'on doit supposer que le signe des dénominateurs symboliques est déterminé).

Les caractères fondamentaux perdus sont nécessairement indépendants puisque le caractère fondamental supprimé appartient à D_0. On s'assure d'ailleurs facilement que jamais un caractère perdu ne peut être remplacé pour D' par un autre qui n'appartiendrait pas à D.

Supposons que les caractères perdus soient ceux qui correspondent à $\mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_{\lambda-1}^{(\mu-1)}$. On voit comme précédemment que, si $\mathfrak{W}$ est le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{K}_{D,d}$ et de $\mathfrak{P}$ et $K'_1 = 1, \ldots, K'_{2^{\mu-1}}$ un système de classes convenablement choisies dont deux quelconques diffèrent par la valeur d'un au moins des caractères de D qui sont perdus pour D',

$$\mathfrak{K}_{D,d} = \mathfrak{W}K'_1 + \ldots + \mathfrak{W}K'_{2^{\mu-1}}.$$

On peut supposer que K'_j appartient au complexe $\mathfrak{P}K_j$ et par suite que $K_j = K'_j$, $\frac{\mathfrak{K}_{D,d}}{\mathfrak{W}}$ et $\frac{\mathfrak{P}_\mu}{\mathfrak{P}}$ sont holoédriquement isomorphes.

L'ordre de $\mathfrak{K}_{D,d}$ est

$$\Omega_{D,d} = \frac{K(D)}{K(D')} = d \prod_p^d \left[1 - \left(\frac{D'}{p}\right)\frac{1}{p}\right] \frac{\log E(D')}{\log E(D)},$$

$$D' = \frac{D}{d^2}, \qquad E(D) = \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

T, U étant les plus petites solutions positives de $T^2 - DU^2 = 4$ en sorte que, si $D < 0$, $E(D) = e^{\frac{2i\pi}{\tau(D)}}$; $\tau(D) = 2$ si $D < -4$; $\tau(D) = 4$ si $D = -4$; $\tau(D) = 6$ si $D = -3$; p parcourt les facteurs premiers différents de d.

13. Tout cela rappelé multiplions les dernières équations du n° **11** par $\left(\frac{D_1}{a}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1}{a}\right) + \left(\frac{D_2}{a}\right)\right]$, prenons $\Delta = Q$ et soumettons les deux membres à la sommation $\sum\limits_{a,b,c} = \sum\limits_{a,b,c}^{D} = \sum\limits_{r}$ qui indique que

$$(a, b, c) = r$$

parcourt un système de représentants des classes de $\mathfrak{K}_D$, chaque représentant étant toujours choisi de manière que a soit positif premier à $2D$, $b = b_0 Q$, $c = c_0 Q^2$. Dans ces conditions la forme $\left(ad, b, \frac{c}{d}\right)$

d'ordre d, composée des deux formes (a, b, c) et $\left(d, \lambda d, \frac{\lambda^2 d^2 - D}{4d}\right) = \rho$ où $\lambda \equiv \frac{D}{d^2} \pmod 2$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ $\left[b \equiv \lambda d \pmod{2d}\right.$ puisque $\frac{b}{d}$ est de la parité de $\left.\frac{D}{d^2}\right]$, parcourt $\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}$ fois un système de représentants de l'ordre d pour le discriminant D, et par suite $\left(a, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right)$ autant de fois un système de représentants de l'ordre primitif pour le discriminant $\frac{D}{d^2}$. On aura donc, les sommes relatives aux classes pour lesquelles $\left(\frac{D_1}{}\right)$ n'est plus un caractère disparaissant en vertu du théorème sur le groupe $\mathfrak{K}_{D, d}$,

$$\frac{1}{K(D)} \sum_{a, b, c}^{D_0 Q^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) h(Q) = \sum_{d}^{Q} \sum_{a, b_0 d, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \frac{f(d)}{K(D_0 d^2)},$$

$$\frac{1}{K(D)} \sum_{a, b, c}^{D_0 Q^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) f(Q) = \sum_{d}^{Q} \varepsilon_{d'} \sum_{a, b_0 d, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \frac{h(d)}{K(D_0 d^2)};$$

ou, en posant

$$S_{D_1}(d) = \sum_{a, b_0 d, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m, n} \left(\frac{d^2}{m}\right) F(am^2 + b_0 dmn + c_0 d^2 n^2),$$

$$\Sigma_{D_1}(d) = \sum_{a, b_0 d, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m, n} F(am^2 + b_0 dmn + c_0 d^2 n^2)$$

si $\left(\frac{D_0}{}\right)$ appartient à $D_0 d^2$,

$$S_{D_1}(d) = 0, \qquad \Sigma_{D_1}(d) = 0$$

si $\left(\frac{D_1}{}\right)$ n'appartient plus à $D_0 d^2$, et en admettant que F jouit de la propriété $F(xy) = F(x)F(y)$,

$$(1) \qquad \frac{\Sigma_{D_1}(Q)}{K(D_0 Q^2)} = \sum_{d}^{Q} F(d'^2) \frac{S_{D_1}(d)}{K(D_0 d^2)}, \qquad dd' = Q,$$

et

$$(2)\qquad \frac{S_{D_1}(Q)}{K(D_0Q^2)} = \sum_d^Q \varepsilon_d F(d'^2)\frac{\Sigma_{D_1}(d)}{K(D_0 d^2)}.$$

Il importe d'observer que $S_{D_1}(d)$ et $\Sigma_{D_1}(d)$ ne dépendant *en aucune façon* du représentant choisi dans chaque classe de discriminant $D_0 d^2$, pourvu que l'on y remplace $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ par la valeur de $\left(\frac{D_1}{}\right)$ dans la classe de ce représentant si $\left(\frac{D_1}{}\right)$ est un caractère de $D_0 d^2$.

Multiplions les deux membres de (1) ou de (2) par $\left(\frac{D_1}{G}\right)$, G étant un genre de $\mathfrak{K}_D$, et sommons par rapport aux $2^{\lambda-1}$ valeurs de D_1. On aura dans le premier membre la valeur moyenne de $h(Q)$ ou celle de $f(Q)$ *dans les classes du genre* G. Cette valeur sera par conséquent connue si les seconds membres le sont.

Je rappellerai maintenant les deux formules suivantes de Kronecker :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n} F(am^2+bmn+cn^2)\\ &\quad = \tau(D)\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{D_1 Q^2}{m}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D_2 Q^2}{n}\right)F(mn),\\ &\text{F, fonction quelconque assurant la convergence,}\\ &\tau(D)=1 \text{ si } D>0,\quad 2 \text{ si } D<-4,\quad 4 \text{ si } D=-4,\quad 6 \text{ si } D=-3;\\ &D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont deux discriminants liés par } D_1 D_2 = D; \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho\sqrt{-D}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\right]\\ &\quad = \frac{-1}{\sqrt{-D}}\left[\Gamma'(1)+\log(-D)+\log\frac{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)}{a}\right],\\ &D<0,\qquad \eta(\omega)=e^{\frac{i\pi\omega}{12}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2ni\pi\omega}),\\ &\omega_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\qquad \omega_2=\frac{b+\sqrt{D}}{2a};\\ &\text{les logarithmes sont réels.} \end{aligned}\right.$$

On voit sur la seconde formule que le dernier logarithme ne dépend pas précisément de la forme (a, b, c) mais seulement de sa classe et que l'on peut y échanger a et c et remplacer b par $-b$.

Je ne considérerai désormais que des formes positives.

Prenons $F(x) = x^{-1-\rho}$, multiplions (4) par $\left(\frac{D_1}{r}\right)$ et sommons pour tout un système de représentants $r = (a, b, c)$. On aura, en désignant par $O(D_1, d)$ une quantité égale à 1 si $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ appartient à $D_0 d^2$, nulle dans le cas contraire, et en posant (*voir*, pour le cas où $D_1 = 1$, KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 211-220, 256-274; 1889)

$$Z(D_0, Q) = \sum_p^Q \left[1 - \left(\frac{D_0}{p}\right)\right] \frac{p^r - 1}{p^r - p^{r-1}} \frac{\log p}{p - \left(\frac{D_0}{p}\right)}, \qquad Z(D_0, 1) = 0$$

(p parcourant les facteurs premiers différents de Q et p^r étant la plus haute puissance de p qui entre dans Q),

$$X(D_1, D) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{-D}}{2\pi} \displaystyle\sum_d^Q \dfrac{\tau(D_0 d^2) O(D_1, d)}{d'^2 K(D_0 d^2)} H(D_1 d^2) H(D_2 d^2), \\ \quad \text{si } D_1 \neq 1, \\ \dfrac{\overline{H}(D_0)}{H(D_0)} - \Gamma'(1) - \log(-D) + Z(D_0, Q), \\ \quad \text{si } D_1 = 1, \end{cases}$$

$$(5) \qquad \frac{1}{K(D)} \sum_{a, b, c}^{D} \left(\frac{D_1}{r}\right) \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a} = X(D_1, D) \text{ (}^1\text{)}.$$

Les logarithmes sont réels, la forme choisie pour représenter chaque

---

(1) L'analogie de $X(1, D)$ et des autres $X(D_1, D)$ apparaît en observant que, si D_2 par exemple est un discriminant fondamental positif,

$$H(D_2)\sqrt{D_2} = 2 \sum_{S=1}^{s=D_2} \left(\frac{D_2}{s}\right) \log \Gamma\left(\frac{s}{D_2}\right).$$

classe est arbitraire; on peut remplacer b par $-b$ et l'on peut échanger a et c, c'est-à-dire que l'on peut remplacer chaque forme par une forme équivalente, par une forme opposée ou par une forme associée.

En multipliant par $\left(\frac{D_1}{G}\right)$, G étant un genre quelconque, en sommant pour les $2^{\lambda-1}$ valeurs de D_1 et en désignant par $\mathcal{M}_G$ une moyenne arithmétique dans les classes du genre G, on aura donc

$$(6) \qquad \mathcal{M}_G \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a} = \sum_{D_1}^{D} \left(\frac{D_1}{G}\right) X(D_1, D)$$

(dans une sommation relative à D_1 l'indice supérieur du signe sommatoire indiquera le discriminant que l'on considère).

Soit d'abord $Q > 1$ et $q \geqq 2$ un diviseur premier ou non de Q.

On peut toujours choisir le représentant $r = (a, b, c)$ tel que a soit premier à q, $b \equiv 0 \pmod q$, $c \equiv 0 \pmod{q^2}$. Considérons la forme de diviseur q,

$$\rho = \left(q, \lambda q, \frac{\lambda^2 q^2 - D}{4q}\right), \qquad \lambda \equiv \frac{D}{q^2} \pmod 2, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

On aura $b \equiv \lambda q \pmod{2q}$ et, par suite,

$$r\rho = \left(aq, b, \frac{c}{q}\right) = q\left(a, \frac{b}{q}, \frac{c}{q^2}\right) = q r',$$

les quantités correspondantes à ω_1, ω_2 pour r' étant $\omega'_1 = \frac{\omega_1}{q}$, $\omega'_2 = \frac{\omega_2}{q}$ $\left(\text{elles seraient } q\omega_1, q\omega_2 \text{ si l'on avait pris } \omega_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{c}, \omega_2 = \frac{b+\sqrt{D}}{c}\right)$.

Quand r parcourt les classes d'un des complexes $\mathfrak{K}_{D,q} C_i$ de la décomposition

$$\mathcal{H}_D = \mathfrak{K}_{D,q} C_1 + \mathfrak{K}_{D,q} C_2 + \ldots + \mathfrak{K}_{D,q} C_{K(Dq^{-2})} \qquad (C_1 = 1),$$

un caractère $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ appartenant à $\frac{D}{q^2}$ garde une même valeur $\left(\frac{D_1}{r}\right)$, et sa valeur dans la classe de r' sera $\left(\frac{D_1}{r'}\right) = \left(\frac{D_1}{r}\right)$; un caractère $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$

perdu pour $\frac{D}{q^2}$ prend, au contraire, autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1.

Écrivons maintenant l'égalité (5) pour le discriminant $\frac{D}{q^2}$ et pour un caractère $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ appartenant à $\frac{D}{q^2}$, en prenant pour système de formes représentantes $\frac{\rho}{q} R_\alpha C_i \left[i = 1, 2, \ldots, K\left(\frac{D}{q^2}\right), R_\alpha\right.$ représentant une classe déterminée de $\left.\mathfrak{K}_{D,q}\right]$. Quand on fait varier α, on obtient $\Omega_{D,q}$ formules qui ne diffèrent que par l'écriture. Ajoutons-les; il viendra

$$\frac{1}{K\left(\frac{D}{q^2}\right)} \sum_{a,b,c}^{D} \left(\frac{D_1}{r}\right) \log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{a} = \Omega_{D,q} X\left(D_1, \frac{D}{q^2}\right).$$

Si dans le premier membre $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ était remplacé par un caractère perdu pour $\frac{D}{q^2}$, le résultat serait nul d'après ce qui précède. On peut donc écrire, quel que soit D_1,

$$(7) \qquad \frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c}^{D} \left(\frac{D_1}{r}\right) \log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{a} = O\left(D_1, \frac{Q}{q}\right) X\left(D_1, \frac{D}{q^2}\right).$$

On en déduit, comme on a déduit (6) de (5),

$$(8) \qquad \mathfrak{M}_G \log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{a} = \sum_{D_1}^{Dq^{-1}} \left(\frac{D_1}{G}\right) X\left(D_1, \frac{D}{q^2}\right).$$

En soustrayant (6) de (8), on obtient $\mathfrak{M}_G \log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}$ exprimé par des logarithmes d'unités fondamentales $E(D_1)$, $E(D_2)$, les logarithmes de transcendantes eulériennes ayant disparu.

Soit maintenant $Q \geqq 1$ et q un diviseur premier ou non de D, que je supposerai sans diviseur carré et premier à Q.

On pourra, dans chaque classe, prendre $r=(a, b, c)$ telle que a soit premier à q et $b\equiv c\equiv 0 \pmod q$. Alors $\frac{b}{q}\equiv D \pmod 2$ si q est impair et $\frac{b}{q}\equiv\frac{D}{4} \pmod 2$ si q est pair. La forme

$$\rho=\left(q, \lambda q, \frac{\lambda^2 q^2 - D}{4q}\right), \quad \lambda\equiv\begin{cases} D \pmod 2 \text{ si } q \text{ est impair,} \\ \frac{D}{4} \pmod 2 \text{ si } q \text{ est pair,}\end{cases} \qquad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

est ici primitive et $r'=r\rho=\left(aq, b, \frac{c}{q}\right)$, dont les racines sont encore $\omega'_1=\frac{\omega_1}{q}$, $-\omega'_2=\frac{-\omega_2}{q}$, parcourt en même temps que r un système de représentants de l'ordre primitif. On aura donc

$$(9) \qquad \frac{1}{K(D)}\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{r}\right)\log\frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{aq}=\left(\frac{D_1}{\rho}\right)X(D_1, D),$$

$$(10) \qquad \mathcal{A}_G\log\frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{aq}=\sum_{D_1}^{D}\left(\frac{D_1}{G}\right)\left(\frac{D_1}{\rho}\right)X(D_1, D),$$

ces formules se réduisant respectivement à (5) et à (6) si $q=1$, puisque ρ est alors la forme principale.

14. L'expression $\sum_{a,b,c}^{G}\log\frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a}=Y$ peut se simplifier comme il suit, en précisant le représentant à choisir dans les classes ambiguës. Appelons simplement *racine* de (a, b, c) la quantité $\omega_1=\omega$; ω_2 sera la racine de la forme opposée $(a, -b, c)$, laquelle appartient au même genre.

Si (a, b, c) est ambiguë, elle peut être supposée de l'un des deux types

$$(11) \qquad (a, 0, c)\backsim(a, 2ah, c+ah^2)\backsim(c, 0, a),$$

$$(12) \qquad \begin{cases}(a, c, c)\backsim(a, 4a-c, 4a-c)\backsim(c, \pm c, a) \\ \qquad\backsim[c, c(2h+1), a+ch+ch^2].\end{cases}$$

Dans le premier cas, en prenant $r=(a, 0, c)$, on aura

$$\omega_2 = \omega_1.$$

Dans le second cas, en prenant $r=(c, \pm c, a)$, on aura

$$\omega_2 = \omega_1 \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \eta(\omega_2) = e^{\frac{\pm\pi i}{12}}\eta(\omega_1);$$

en prenant $r=(c, \pm 3c, a+2c)$, on aura

$$\omega_2 = \omega_1 \pm 3, \qquad \eta(\omega_2) = e^{\frac{\pm\pi i}{4}}\eta(\omega_1).$$

Donc, en appelant toujours a le premier coefficient,

$$(13)\qquad Y = \frac{2}{\mu}\sum_{a,b,c}^{G}\log\frac{\eta^{2\mu}(\omega)}{a^{\frac{\mu}{2}}},$$

μ étant un entier convenable qu'on peut toujours supposer égal à 8.

Si q est une puissance d'un nombre premier, la même simplification s'étend à l'expression $\sum_{a,b,c}^{G}\log\frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)} = Z$. En effet, on peut toujours, en échangeant a et c dans le cas (11), où $D=-4ac$, c et $4a-c$ dans le cas (12), où $D=c(c-4a)$, supposer que a est premier à q, et, dans le cas (12), que $c\equiv 0 \pmod q$; dans le cas (11), on aura encore $c\equiv 0 \pmod q$, sauf si $D\equiv 4 \pmod{16}$ [il n'y a point alors de forme du type (12)] avec $Q\equiv 2 \pmod 4$ et $q=2$.

Cela étant, la forme $(a, 0, c)$ ou la forme $(a+2c, \pm 3c, c)$ remplira les conditions imposées aux représentants de classe dans (7) et dans (9) et pourra être prise pour représenter sa classe, sauf si $D\equiv 4 \pmod{16}$ avec $Q\equiv 2 \pmod 4$ et $q=2$; mais, dans ce cas particulier, les coefficients extrêmes de $(a, 0, c)$ satisfont à la relation $ac\equiv -1 \pmod 4$ et l'on prendra $r=(a, 6a, c+9a)$.

Dans ces conditions, si $r=(a, 0, c)$, on aura

$$\omega_1 = \omega_2;$$

si $r = (a, 6a, c+9a)$, $q = 2$, on a

$$\omega_2 = \omega_1 + 6, \qquad \eta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \eta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Si $r = (a + 2c, \pm 3c, c)$, on a

$$r\rho = \left((a+2c)q, \pm 3c, \frac{c}{q}\right).$$

Considérons la quantité

$$\xi = \log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{(a+2c)q} = \log \frac{\eta^2\left(\frac{-q}{\omega_1}\right)\eta^2\left(\frac{-q}{\omega_2}\right)}{\frac{c}{q}}.$$

$\frac{-q}{\omega}$ est racine de $\left(\frac{c}{q}, \mp 3c, (a+2c)q\right)$ et, par suite,

$$\frac{-q}{\omega_2} = \frac{-q}{\omega_1} \mp 3q, \qquad \eta\left(\frac{-q}{\omega_2}\right) = e^{\frac{\mp \pi i q}{4}}\eta\left(\frac{-q}{\omega_1}\right), \qquad \xi = \frac{2}{\mu}\log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{-q}{\omega}\right)}{\left(\frac{c}{q}\right)^{\frac{\mu}{2}}},$$

μ étant un entier convenablement choisi qu'on peut toujours supposer égal à 8.

On a de même

$$\log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a+2c} = \frac{2}{\mu}\log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{-1}{\omega}\right)}{c^{\frac{\mu}{2}}},$$

et la formule de transformation $\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \eta(\omega)\sqrt{-i\omega}$ appliquée de nouveau donne enfin

$$\log \frac{\eta^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta^2\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)} = \frac{2}{\mu}\log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^{2\mu}(\omega)}.$$

Donc

$$Z = \frac{2}{\mu}\sum_r^{D} \log \frac{\eta^{2\mu}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^{2\mu}(\omega)}.$$

13. Je voudrais maintenant revenir sur le cas où $f(s) = s^\alpha$ (n° **9**) pour déterminer $\varpi(\alpha, D)$ selon le module D. Dans les sommes

$$S(\alpha, \pm n) = S(\alpha, n) = \sum_{s=0}^{s=|n-1|} s^\alpha, \qquad S(0, n) = |n|,$$

$$s(\alpha, \pm n) = s(\alpha, n) = \sum_{s=0}^{s=|n|} \left(\frac{n^2}{s}\right) s^\alpha,$$

que j'aurai d'abord à considérer, je supposerai le second argument positif.

Il convient de remarquer de suite que S et s sont toujours paires quand le second argument est un discriminant et de même $\varpi(\alpha, D)$ si $\varphi(D)$ est divisible par 4.

Pour abréger, je désignerai le plus grand commun diviseur (pris avec un signe indéterminé) d'une fonction numérique $F(\alpha, N)$ avec M par $F^{(M)}(\alpha, N)$ et, si $M = N$, j'écrirai simplement $F'(\alpha, N)$.

Relativement aux sommes $S(\alpha, n)$, un premier procédé de réduction portant sur α est fourni par les formules connues

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &2S(1, n) + S(0, n) = (n+1)^2 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(\alpha+1) S(\alpha, n) + \frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2} S(\alpha-1, n) + \ldots \\ &\qquad + (\alpha+1) S(1, n) + S(0, n) = (n+1)^{\alpha+1} - 1. \end{aligned} \right.$$

En désignant par m, n deux entiers positifs premiers entre eux, on aura évidemment

$$S(\alpha, mn) \equiv \sum_{s,t} (sm + tn)^\alpha \qquad (\text{mod } mn),$$

s et t parcourant deux systèmes de restes selon les modules n et m respectivement, d'où

$$S(\alpha, mn) \equiv m^\alpha S(\alpha, n) + n^\alpha S(\alpha, m) \qquad (\text{mod } mn),$$
$$S'(\alpha, mn) = S'(\alpha, m) S'(\alpha, n).$$

Par suite, m_1, m_2, ... étant premiers entre eux deux à deux et M étant leur produit, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} S(\alpha, M) \equiv \sum_i \left(\frac{M}{m_i}\right)^\alpha S(\alpha, m_i) \qquad (\mathrm{mod}\, M), \\ \equiv \left(\frac{M}{m_i}\right)^\alpha S(\alpha, m_i) \qquad (\mathrm{mod}\, m_i), \end{cases}$$

$$S'(\alpha, M) = \prod_i S'(\alpha, m_i).$$

Ainsi on est ramené au cas où le premier argument est une puissance d'un nombre premier. Si p est premier et $\alpha = p^\lambda - p^{\lambda-1} + \beta$, $S(\alpha, p^\lambda)$ est congrue (mod p^λ) à $s(\beta, p^\lambda)$, toutes les valeurs de la variable de sommation s qui sont $\equiv 0$ (mod p) donnant alors $s^\alpha \equiv 0$ (mod p^λ) puisque $p^\lambda - p^{\lambda-1}$ est toujours $\geqq \lambda$, et les autres $s^\alpha \equiv s^\beta$ (mod p^λ), d'après le théorème de Fermat.

Soient maintenant a, b deux nombres quelconques. On aura

$$S(\alpha, ab) = \sum_{s,t} (s + at)^\alpha, \qquad s = 0, 1, \ldots, a-1, \qquad t = 0, 1, \ldots, b-1,$$

et, en développant,

$$(3)\quad \begin{cases} S(\alpha, ab) = S(0, b) S(\alpha, a) + \alpha a S(1, b) S(\alpha - 1, a) \\ \qquad + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} a^2 S(2, b) S(\alpha - 2, a) + \ldots \\ \qquad + a^\alpha S(\alpha, b) S(0, a). \end{cases}$$

En faisant $a = p^{\lambda-1}$, $b = p$, p étant premier $\geqq 2$ et $\lambda \geqq 2$, donc $2\lambda - 2 \geqq \lambda$, on aura

$$(4)\quad S(\alpha, p^\lambda) \equiv p S(\alpha, p^{\lambda-1}) + \alpha p^{\lambda-1} S(1, p) S(\alpha - 1, p^{\lambda-1}) \quad (\mathrm{mod}\, p^\lambda).$$

Or $S(1, p) = \frac{p(p-1)}{2}$. Donc, si $p \neq 2$, $S(1, p) \equiv 0$ (mod p) et

$$S(\alpha, p^\lambda) \equiv p S(\alpha, p^{\lambda-1}) \qquad (\mathrm{mod}\, p^\lambda);$$

par suite

$$S(\alpha, p^\lambda) \equiv p^{\lambda-1} S(\alpha, p) \qquad (\mathrm{mod}\, p^\lambda),$$

Les formules (1) donnent d'ailleurs de proche en proche

$$(\alpha+1)!\,S(\alpha,n)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ n).$$

Donc, si $n=p$ et $\alpha<p$,

$$\begin{array}{lll} S(\alpha,p)\equiv\ \ 0\ (\mathrm{mod}\ p), & \text{si} & \alpha<p-1, \\ S(\alpha,p)\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ p), & \text{si} & \alpha=p-1, \end{array}$$

Or, dans ces dernières formules, α peut évidemment être remplacé par un nombre qui lui soit congru (mod $p-1$). Donc

$$S(\alpha,p^\lambda)\equiv\left\{\begin{array}{lll} 0\quad (\mathrm{mod}\ p^\lambda) & \text{si} & \alpha\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p-1), \\ -p^{\lambda-1}\ (\mathrm{mod}\ p^\lambda) & \text{si} & \alpha\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p-1). \end{array}\right.$$

Supposons maintenant $p=2$. Alors $S(1,2)=1$, et pour que le second terme au second membre de (4) contienne le facteur 2^λ, il faut supposer que $2^{\lambda-1}$ est un discriminant, donc $\lambda\geqq 3$. En revanche, si l'on observe que

$$S(\alpha,8)\equiv\left\{\begin{array}{lll} -2^2\ (\mathrm{mod}\ 16) & \text{pour} & \alpha=1,2, \\ \ \ 2^2\ (\mathrm{mod}\ 16) & \text{pour} & \alpha \text{ pair} \geqq 4, \\ \ \ 0\ \ (\mathrm{mod}\ 16) & \text{pour} & \alpha \text{ impair} > 1, \end{array}\right.$$

on obtient, en supposant $\lambda\geqq 4$, la formule suivante plus précise, qui se trouve vraie encore pour $\lambda=2$,

$$S(\alpha,2^\lambda)\equiv\left\{\begin{array}{lll} -2^{\lambda-1}\ (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda+1}) & \text{pour} & \alpha=1,2 \\ \ \ 2^{\lambda-1}\ (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda+1}) & \text{pour} & \alpha \text{ pair} \geqq 4 \\ \ \ 0\ \ \ (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda+1}) & \text{pour} & \alpha \text{ impair} \geqq 3 \end{array}\right\} \qquad (\lambda\geqq 2).$$

En désignant donc d'une manière générale par x^σ la première puissance d'un nombre x qui soit la valeur absolue d'un discriminant, on aura en toute hypothèse

$$\left\{\begin{array}{l} S(\alpha,p^\lambda)\equiv\ \ 0\ \ \ (\mathrm{mod}\ p^\lambda)\quad \text{si}\quad \alpha\not\equiv 0\ [\mathrm{mod}\ \varphi(p^\sigma)] \text{ et } \neq\varphi(p), \\ S(\alpha,p^\lambda)\equiv -p^{\lambda-1}\ (\mathrm{mod}\ p^\lambda)\quad \text{si}\quad \alpha\equiv 0\ [\mathrm{mod}\ \varphi(p^\sigma)] \text{ ou } =\varphi(p). \\ \qquad (p \text{ premier} \geqq 2;\ \pm p^\sigma \text{ est un discriminant fondamental}). \end{array}\right.$$

Donc, $N = \prod_i p_i^{\lambda_i}$ étant la décomposition de N en facteurs premiers et $\mathfrak{P}$ le produit de ceux p_j des facteurs premiers p_i pour lesquels $\alpha \equiv 0 \bmod \varphi(p_j^{\tau})$ ou $= \varphi(p_j)$ et $\mathfrak{P}_1 = \prod_j p_j^{\lambda_j}$, on aura, d'après (2),

$$S(\alpha, N) \equiv -N \sum_j \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{p_j} (\bmod N) = \frac{gN}{\mathfrak{P}} + kN,$$
$$S'(\alpha, N) = \frac{N}{\mathfrak{P}},$$

$g = -\sum_j \frac{\mathfrak{P}}{p_j} \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1}$ étant premier à $\mathfrak{P}$ et divisible par $\left(\frac{N}{\mathfrak{P}_1}\right)^{\alpha-1}$ ($g = 1$ si $\alpha = 1$).

Soit q un diviseur commun à N et à α; on aura

$$(s + \lambda N)^{\alpha} \equiv s^{\alpha} \qquad (\bmod N_q).$$

Donc $S(\alpha, N)$ apparaît comme ayant une valeur déterminée (mod N_q) indépendamment du système des restes parcourus par s. Donc k sera déterminé (mod q) et, si l'on pose $S(\alpha, N) = \frac{g'N}{\mathfrak{P}}$, les différentes valeurs de g' seront de la forme $g' = g + k\Omega$.

16. Dans $\mathfrak{s}(\alpha, N)$ comme dans $\varpi(\alpha, N)$, la variable de sommation ne parcourant que des valeurs premières à N, il suffira, si $N = \prod_i p_i^{\lambda_i}$ est la décomposition de N en facteurs premiers et M le plus petit multiple commun des nombres $\varphi(p_i^{\lambda_i})$, de considérer les valeurs de α qui sont $< M$. Comme d'ailleurs $\mathfrak{s}(0, N) = \varphi(N)$, je supposerai $\alpha \geqq 1$.

On a, m et n étant premiers entre eux et s, t parcourant des systèmes complets de restes selon les modules m, n respectivement,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}(\alpha, mn) &\equiv \sum_{s,t} \left(\frac{m^2n^2}{sm + tn}\right)(sm + tn)^{\alpha} && (\bmod mn),\\
&\equiv \sum_t \left(\frac{m^2}{t}\right) m^{\alpha}\mathfrak{s}(\alpha, n) + \sum_s \left(\frac{n^2}{s}\right) n^{\alpha}\mathfrak{s}(\alpha, m) && (\bmod mn),\\
&\equiv m^{\alpha}\varphi(m)\mathfrak{s}(\alpha, n) + n^{\alpha}\varphi(n)\mathfrak{s}(\alpha, m) && (\bmod mn).
\end{aligned}$$

Donc, $a_1, a_2, \ldots$ étant des entiers premiers entre eux deux à deux et A leur produit,

$$s(\alpha, \mathrm{A}) \equiv \sum_i \left(\frac{\mathrm{A}}{a_i}\right)^\alpha \varphi\left(\frac{\mathrm{A}}{a_i}\right) s(\alpha, a_i) \qquad (\mathrm{mod}\ \mathrm{A}).$$

En prenant $a_i = p_i^{\lambda_i}$ on est ramené au cas où le second argument est une puissance d'un nombre premier et l'on peut supposer dans chacune des $s(\alpha, a_i)$ α réduit à son plus petit reste [mod $\varphi(a_i)$]. Soient a, b deux nombres positifs tels que a contienne tous les facteurs premiers différents de b. On aura comme précédemment

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} s(\alpha, ab) = {} & \mathrm{S}(0, b)\, s(\alpha, a) \\ & + \alpha a \mathrm{S}(1, b)\, s(\alpha - 1, a) + \ldots + a^\alpha \mathrm{S}(\alpha, b)\, s(0, a), \end{aligned} \right.$$

et l'on est encore ramené au cas où le second argument est un nombre premier où, par conséquent, $s = \mathrm{S}$.

En faisant dans (1) $a = p$ premier impair, $b = p^{\lambda-1}$, on obtient

$$s(\alpha, p^\lambda) \equiv p^{\lambda-1} s(\alpha, p) \equiv \begin{cases} 0 \quad (\mathrm{mod}\ p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p - 1), \\ -p^{\lambda-1} \ (\mathrm{mod}\ p^\lambda) & \text{si} \quad \alpha \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p - 1). \end{cases}$$

De même, en faisant $a = 2^{\lambda-1}$, $b = 2$, on obtient par récurrence, en partant de $s(\alpha, 8)$,

$$s(\alpha, 2^\lambda) \equiv \begin{cases} 2^{\lambda-1} \ (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda+1}) & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \\ 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda+1}) & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \end{cases}$$

avec

$$s(\alpha, 4) \equiv \begin{cases} 2 \ (\mathrm{mod}\ 8) & \text{si} \quad \alpha \text{ est pair}, \\ 4 \ (\mathrm{mod}\ 8) & \text{si} \quad \alpha \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$s(\alpha, 2) = 1.$$

Ainsi on a d'une manière générale

$$s(\alpha, p^\lambda) \equiv \left\{ \begin{matrix} 0 \quad (\mathrm{mod}\ p^\lambda) & \text{si} & \alpha \not\equiv 0\ [\mathrm{mod}\ \varphi(p^\sigma)] \\ -p^{\lambda-1} \ (\mathrm{mod}\ p^\lambda) & \text{si} & \alpha \equiv 0\ [\mathrm{mod}\ \varphi(p^\sigma)] \end{matrix} \right\} \quad p^\lambda \geqq 3.$$

D'ailleurs la seconde des deux formules corrélatives (n° 4)

$$S(\alpha, N) + N^\alpha = \sum_d d^\alpha s(\alpha, d'), \qquad dd' = N,$$

$$s(\alpha, N) = \sum_d^N \varepsilon_d d^\alpha [S(\alpha, d') + d'^\alpha] = \sum_d^N \varepsilon_d d^\alpha S(\alpha, d')$$

fournit immédiatement le même résultat.

En désignant par Ω le produit des facteurs premiers différents p_j de N tels que $\alpha \equiv 0$ [mod $\varphi(p_j^\gamma)$] en même temps que

$$\varphi\left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p_j),$$

on aura

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} s(\alpha, N) &\equiv -N \sum_j \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right) \frac{1}{p_j} \;(\text{mod } N) \\ &\equiv \frac{gN}{\Omega} + kN \end{aligned} \right\} \qquad (N \geqq 3)$$

en posant

$$g = -\sum_j \frac{\Omega}{p_j} \left(\frac{N}{p_j^{\lambda_j}}\right)^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{N}{p_j}\right),$$

et

$$S'(\alpha, N) = \frac{N}{\Omega}.$$

g est premier à Ω et divisible par $\left(\frac{N}{\Omega}\right)^{\alpha-1}$; si α est impair, $\Omega = g = 1$; si α est pair, Ω n'est pair que si N se réduit à une puissance de 2 et alors $\Omega = 2$.

Ainsi $s'(2, 12) = 4$, $s'(2, 16) = 8$, $s'(1, 48) = s'(3, 48) = 48$, $s'(2, 48) = 16$.

Comme pour S, si q est un diviseur commun de N et de α, on aura pour $s(\alpha, N)$ une valeur déterminée (mod qN) indépendamment du système de restes que parcourt la variable de sommation. Donc k sera déterminé (mod q) et, si l'on pose $s(\alpha, N) = \frac{g'N}{\Omega}$, les différentes valeurs de g' seront de la forme $g' = g + k\Omega$. Je ne m'arrêterai qu'au cas où $q = 2$. Alors s^α prend $\frac{1}{2}\varphi(N)$ valeurs de la forme $8n + 1$. Donc

$$s^\alpha + (N - s)^\alpha \equiv 1\, s^\alpha \qquad (\text{mod } 2N),$$
$$s(\alpha, N) \equiv m.16 + \varphi(N) \qquad (\text{mod } 2N).$$

Donc, si $N \equiv \pm 2, \pm 4, 8 \pmod{16} = 2^\nu N'$ (N' impair) et pourvu que $\varphi(N') \equiv 0 \pmod 4$, Ω étant alors impair,

$$s^{(2N)}(\alpha, N) = \frac{2N}{\Omega}.$$

Si $\varphi(N') \equiv 2 \pmod 4$, Ω est encore impair, et l'on a

$$s^{(2N)}(\alpha, N) = \frac{N}{\Omega},$$

et si $N' = 1$, les formules du début donnent le même résultat.

Soit maintenant $N \equiv 0 \pmod{16} = 2^\nu N' = ab$, N' impair, $b = 2^\beta$, $a \equiv \pm 4, 8 \pmod{16}$. La formule (1) montre que $s(\alpha, N)$ contient 2 à la puissance $\nu + 1$ si $\varphi(N') \equiv 0 \pmod 4$, et seulement à la puissance ν si $\varphi(N') \not\equiv 0 \pmod 4$.

Donc, quel que soit le nombre pair $N = 2^\nu N'$ (N' impair), on aura, si α est pair,

$$(3) \qquad \begin{cases} s(\alpha, N) = \dfrac{g' N}{\Omega} & (\alpha \text{ pair}), \\ g' \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{si} & \varphi(N') \equiv 0 \pmod 4, \\ g' \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{si} & \varphi(N') \not\equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Si α est impair, $s(\alpha, N)$ est encore déterminé selon le module $2N$. Tout d'abord, si N est impair, $s(\alpha, N)$ sera paire toujours et seulement quand $\varphi(N) \equiv 0 \pmod 4$, chaque valeur de la variable de sommation s donnant avec la valeur $N - s$ une somme $s^\alpha \pm (N - s)^\alpha$ impaire (et cela est encore vrai si α est pair).

Si N est pair, on a (en supposant $N \geqq 3$)

$$s^\alpha + (N - s)^\alpha \equiv \alpha N s^{\alpha - 1} \pmod{2N}, \qquad s^{\alpha - 1} \equiv 1 \pmod 8.$$

En faisant donc parcourir à s les $\frac{1}{2}\varphi(N)$ nombres premiers à N et $< \frac{N}{2}$ on obtient

$$(4)\quad \begin{cases} s(\alpha, N) = \dfrac{g'N}{\Omega} & (\alpha \text{ impair}), \\ g' \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{si} & \varphi(N) \equiv 0 \pmod 4, \\ g' \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{si} & \varphi(N) \not\equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

et ici $\Omega = 1$.

Les formules (3) et (4) subsistent si N est impair.

La relation $g' \equiv g + k\Omega \pmod 2$ détermine la parité de k si $\Omega \neq 2$.

Si $\Omega = 2$ (donc $N' = 1$ et α est pair), les formules du début donnent $k \equiv 0 \pmod 2$.

En résumé, on peut écrire, $E[x]$ désignant le plus grand entier contenu dans x,

$$\begin{aligned} k &\equiv E[\tfrac{1}{2}\varphi(N')] \pmod 2 \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est pair } (N = 2^{\nu}N' \geqq 2); \\ k &\equiv 1 + \tfrac{1}{2}\varphi(N) \pmod 2 \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est impair } (N \geqq 3). \end{aligned}$$

17. Arrivons maintenant aux sommes $\varpi(\alpha, D)$ et observons de suite que $\varpi(0, D) = \psi(0, D)$, $\varpi(\alpha, Q^2) = s(\alpha, Q^2)$.

J'appellerai *complément quadratique* d'un nombre A le produit pris avec le signe de A de tous les facteurs premiers différents de A qui entrent dans A à une puissance impaire.

Lorsque s et t parcourent un système de restes positifs selon les modules m, n respectivement, m et n étant deux discriminants premiers entre eux, si μ et ν sont les compléments quadratiques respectifs de m et de n, $sm\mu + tn\nu$ parcourt un système de restes positifs selon le module mn et l'on aura

$$\varpi(\alpha, mn) \equiv \sum_{s,t} \left(\frac{mn}{sm\mu + tn\nu}\right)(sm\mu + tn\nu)^{\alpha} \pmod{mn}$$

ou

$$\varpi(\alpha, mn) \equiv (m\mu)^{\alpha}\varpi(0, m)\varpi(\alpha, n) + (n\nu)^{\alpha}\varpi(0, n)\varpi(\alpha, m) \pmod{mn}.$$

On voit que si ni m ni n ne sont des carrés, $\varpi(\alpha, mn) \equiv 0 \pmod{mn}$.

Plus généralement, si les discriminants a_1, a_2, ..., ayant pour produit A, sont premiers entre eux deux à deux et si α_1, α_2, ... sont leurs compléments quadratiques de produit $\mathcal{A}$, on obtient, en observant que pour deux nombres quelconques a, b premiers entre eux on a toujours $\varpi(0, ab) = \varpi(0, a)\,\varpi(0, b)$,

$$\varpi(\alpha, \mathrm{A}) \equiv \sum_i \left(\frac{\mathrm{A}\mathcal{A}}{a_i \alpha_i}\right)^\alpha \varpi\left(0, \frac{\mathrm{A}}{a_i}\right) \varpi(\alpha, a_i) (\mathrm{mod}\, \mathrm{A}).$$

On est donc ramené au cas où le second argument de ϖ est un discriminant simple.

Enfin, comme précédemment, si d est un discriminant contenant tous les facteurs premiers du carré c (à une puissance quelconque), on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(a, dc) = {} & \mathrm{S}(0, c)\,\varpi(\alpha, d) \\ & + \alpha|d|\,\mathrm{S}(1, c)\,\varpi(\alpha - 1, d) + \ldots + |d|^\alpha\,\mathrm{S}(\alpha, c)\,\varpi(0, d), \end{aligned}\right.$$

où le second argument est un discriminant fondamental simple.

Tout d'abord, si d est un nombre premier impair discriminant fondamental de $dc = \delta$ (d'après notre hypothèse δ est simple), on aura

$$(2)\qquad \varpi(\alpha, dc) \equiv c\,\varpi(\alpha, d) (\mathrm{mod}\, dc).$$

Il s'agit de calculer $\varpi(\alpha, d)$. Soit $|d| = p$. Il y a $\varphi\left(\frac{p-1}{2}\right)$ nombres a' appartenant à l'exposant $\frac{p-1}{2}$, et ces nombres sont parmi les résidus quadratiques a de p. Si α n'est pas un multiple de $\frac{p-1}{2}$ (ce qui suit ne s'applique donc pas à $p = 3$), $a'^\alpha - 1$ sera premier à p et la congruence

$$a'^\alpha \sum a^\alpha \equiv \sum a^\alpha (\mathrm{mod}\, p)$$

où la sommation s'étend à tous les nombres $a < p$ donnera

$$\sum a^\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p).$$

En désignant par b les non-résidus, on aura de même

$$a'^{\alpha}\sum b^{\alpha}\equiv\sum b^{\alpha}(\mathrm{mod}\,p),$$

d'où

$$\sum b^{\alpha}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$

la sommation s'étendant pareillement à tous les nombres $b<p$. Donc

$$\varpi(\alpha, d)\equiv\sum a^{\alpha}-\sum b^{\alpha}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)\qquad\text{si}\qquad \alpha\not\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,\frac{p-1}{2}\right).$$

Si $\alpha=\frac{p-1}{2}$ (et c'est toujours le cas si $p=3$), on aura, puisque $b^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$,

$$\varpi(\alpha, d)\equiv\sum a^{\frac{p-1}{2}}-\sum b^{\frac{p-1}{2}}\equiv\frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{2}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p).$$

Si $\alpha=p-1$,

$$\varpi(\alpha, d)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$

Si donc δ est impair, la formule (2) donne

$$\varpi(\alpha, \delta)\equiv\begin{cases} -p^{\lambda-1}(\mathrm{mod}\,\delta) & \text{si}\quad \alpha\equiv\frac{p-1}{2}(\mathrm{mod}\,p-1)\quad (p\geqq 3),\\ 0\quad(\mathrm{mod}\,\delta) & \text{dans tous les autres cas.}\end{cases}$$

Si d est une puissance de 2, le calcul direct donne d'abord

$$(3)\qquad\begin{cases}\varpi(\alpha, -4)\equiv\begin{cases} -2(\mathrm{mod}\,8) & \text{si}\quad \alpha \text{ est impair},\\ 0(\mathrm{mod}\,8) & \text{si}\quad \alpha\text{ est pair},\end{cases}\\ \varpi(\alpha, -8)\equiv\begin{cases} 8(\mathrm{mod}\,16) & \text{si}\quad \alpha\text{ est impair},\\ 0(\mathrm{mod}\,16) & \text{si}\quad \alpha\text{ est pair},\end{cases}\\ \varpi(\alpha,\ \ 8)\equiv 0(\mathrm{mod}\,16).\end{cases}$$

La formule (1) donne alors pour $|\delta|=2^{\lambda}$ en y prenant $|d|=2^{\lambda-2}$,

$c = 4$, et en partant de (3),

$$(4)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha, -2^\lambda) \equiv \begin{cases} -2^{\lambda-1} \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si}\quad \alpha \text{ est impair,} \\ 0 \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si}\quad \alpha \text{ est pair,} \end{cases} & (\lambda \text{ pair}) \\ \varpi(\alpha, -2^\lambda) \equiv \begin{cases} 2^{\lambda} \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si}\quad \alpha \text{ est impair,} \\ 0 \pmod{2^{\lambda+1}} & \text{si}\quad \alpha \text{ est pair,} \end{cases} & (\lambda \text{ impair}) \\ \varpi(\alpha, \quad 2^\lambda) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+1}} \qquad (\lambda \text{ impair}). \end{cases}$$

En résumé, $\varpi'(\alpha, \delta) = \delta$ si α n'est pas un multiple impair de $\frac{1}{2}\varphi(\delta_0)$ et si $\delta_0 = 8$ (δ_0 est le discriminant fondamental du discriminant simple δ). Dans tous les autres cas, $\varpi'(\alpha, \delta) = \frac{\delta}{\delta_0}\cdot$

Composons maintenant ces résultats élémentaires par les formules du début. Soit D un discriminant quelconque non carré, de discriminant fondamental D_0 et de discriminant essentiel $\mathfrak{D}$. Posons

$$D = D_0 Q^2 = D_0 Q_0^2 \mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{Q}^2.$$

On aura

$$\varpi(\alpha, D) \equiv \mathfrak{Q}^{2\alpha} \varphi(\mathfrak{Q}^2) \varpi(\alpha, \mathfrak{D}) \pmod{D},$$

et l'on pourra écrire, pour $\alpha \geqq 1$,

$$(5)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha, D) = \frac{\gamma D}{\omega} + \varkappa D, \\ \varpi'(\alpha, D) = \frac{D}{\omega}, \end{cases}$$

ω ayant la signification suivante :

Si D_0 ne contient qu'un seul facteur premier p $(p > 0)$ *et seulement à la puissance* σ (la plus petite qui fasse de p^σ la valeur absolue d'un discriminant) et si en même temps α est de la forme $\frac{2k+1}{2}\varphi(p^\sigma)$ avec $\varphi(\mathfrak{Q}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\omega = p$; dans tous les autres cas où D n'est pas carré, $\omega = 1$.

On voit que ω ne pourra être pair, c'est-à-dire égal à 2, que si $D = -2^\lambda$, λ étant pair et α impair. γ est toujours premier à ω.

Ainsi $\varpi'(1, -36) = 36$ [ici $\alpha = 1$ est bien un multiple impair de $\frac{1}{2}\varphi(2^7) = 1$; mais $\varphi(\mathfrak{Q}) = \varphi(3) \equiv 0 \pmod 2$)]; $\varpi'(\alpha, 48) = 48$, quel que soit α; $\varpi'(\alpha, -48) = 16$, si α est impair; $\varpi'(\alpha, 48) = 48$, si α est pair; $\varpi'(2, 80) = 16$, $\varpi'(2, 160) = 160$.

18. Si α et D ont un plus grand commun diviseur q, $\varpi(\alpha, D)$ conserve une valeur déterminée $(\bmod q)$ quand on change le système de restes que parcourt s. Donc $\varkappa$ est déterminé $(\bmod q)$ et les différentes valeurs de γ sont de la forme $\gamma' = \gamma + \varkappa\omega$.

Je ne m'arrêterai encore qu'au cas où $q = 2$ et je poserai $D = 2^\delta D'$, $\delta \geqq 2$, $D' = \pm P$ (P impair > 0), D n'étant pas un carré.

Soit d'abord $D > 0$. Comme alors $\left(\frac{D}{s}\right) = \left(\frac{D}{-s}\right) = \left(\frac{D}{D-s}\right)$, on aura

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{D-s}\right)(D-s)^\alpha \equiv 2\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha \pmod{2D}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varpi(\alpha, D) &\equiv m.16 + 2\varpi(0, D) \pmod{2D}\\ &\equiv m.16 \pmod{2D}.\end{aligned}$$

Par suite, si $D \equiv \pm 4, 8 \pmod{16}$, on aura $\varpi^{(2D)}(\alpha, D) = \frac{2D}{\omega}$.

Si $D \equiv 0 \pmod{16}$, la formule

$$\varpi(\alpha, dc) = S(0, c)\,\varpi(\alpha, d) + \alpha\,|d|\,S(1, c)\,\varpi(\alpha - 1, d) + \ldots,$$

où l'on fait $dc = D$, $c = 2^{2\beta}$, $d = \pm 4, 8 \pmod{16}$ donne

$$\varpi^{(2D)}(\alpha, D) = \frac{2D}{\omega}.$$

Soit maintenant $D < 0$. Alors $\left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{|D| - s}\right)$ et

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{|D|-s}\right)(|D| - s)^\alpha &\equiv \alpha D \pmod{2D}\\ &\equiv 0 \pmod{2D};\end{aligned}$$

de fait ω est alors égal à 1, car α étant pair ne peut être multiple impair de $\frac{1}{2}\varphi(\omega)$ qui est ici impair, puisque $-\omega$ est un discriminant.

Si α est impair, $\varpi(\alpha, D)$ est encore déterminé selon le module $2D$. Tout d'abord, si D est impair, $\varpi(\alpha, D) \equiv \frac{1}{2}\varphi(D) \pmod 2$ comme $S(\alpha, D)$ (et cela même quand α est pair).

Supposons D pair. Si $D > 0$, on a, comme tout à l'heure,

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{D-s}\right)(D-s)^\alpha \equiv \left(\frac{D}{s}\right)\alpha D s^{\alpha-1} \equiv D\left(\frac{D}{s}\right) \pmod{2D},$$

$$\varpi(\alpha, D) \equiv \frac{D}{2}\varpi(0, D) \equiv 0 \pmod{2D}.$$

Si $D < 0$, il faut distinguer plusieurs cas.

Soit $\delta = 2$, $D = 4D' = -4P$, $P \equiv +1 \pmod 4$. On aura, pour $s < 2P$,

$$\left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{s+2P}\right) = \left(\frac{D}{2P-s}\right),$$

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{2P-s}\right)(2P-s)^\alpha + \left(\frac{D}{s+2P}\right)(s+2P)^\alpha + \left(\frac{D}{4P-s}\right)(4P-s)^\alpha$$
$$= \left(\frac{D}{s}\right)[s^\alpha - (s-2P)^\alpha - (s+2P)^\alpha + (s-4P)^\alpha] \equiv -4\alpha P\left(\frac{D}{s}\right)s^{\alpha-1} \pmod{2D}.$$

Donc les termes de $\varpi(\alpha, D)$ se réunissent 4 par 4 pour donner une somme $\equiv D \pmod{2D}$. Donc, si $\varphi(D) \equiv 0 \pmod 8$, c'est-à-dire si $\varphi(D) \equiv 0 \pmod 4$, on a bien $\varpi(\alpha, D) \equiv 0 \pmod{2D}$; si $\varphi(P) \not\equiv 0 \pmod 4$ et $P \neq 1$, on aura $\varpi(\alpha, D) \equiv D \pmod{2D}$. Ainsi, $\varpi(1, 36) \equiv 36 \pmod{72}$.

Soit toujours $D = -4P$, mais $P \equiv -1 \pmod 4$. On aura, pour $s < 2P$,

$$\left(\frac{D}{s}\right) = \left(\frac{D}{s+2P}\right), \qquad \left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{2P-s}\right),$$

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{2P-s}\right)(2P-s)^\alpha + \left(\frac{D}{s+2P}\right)(s+2P)^\alpha + \left(\frac{D}{4P-s}\right)(4P-s)^\alpha$$
$$= \left(\frac{D}{s}\right)(4s^\alpha - 4\alpha P) \equiv 0 \qquad \pmod 8.$$

Donc

$$\varpi^{(2D)}(\alpha, D) = \frac{2D}{\omega}.$$

Soit maintenant $\delta = 3$, $D = 8D' = -8P$ ($P > 0$ impair). On aura, pour $s < 4P$, $\left(\frac{D}{s}\right) = -\left(\frac{D}{s+4P}\right)$, donc

$$\left(\frac{D}{s}\right)s^\alpha + \left(\frac{D}{s+4P}\right)(s+4P)^\alpha \equiv -4\alpha P\left(\frac{D}{s}\right)s^{\alpha-1} \pmod{2D}$$
$$\equiv -4P\left(\frac{D}{s}\right) \pmod{2D}.$$

Mais ici $\left(\frac{D}{s}\right) = \left(\frac{D}{4P-s}\right)$ et les termes de $\varpi(\alpha, D)$ se groupent quatre par quatre pour donner une somme $\equiv D \pmod{2D}$. Comme d'ailleurs ici $\varphi(D) \equiv 0 \pmod 8$ (en supposant $P \neq 1$), on a encore $\varpi(\alpha, D) \equiv 0 \pmod{2D}$. Ainsi $\varpi(1, -24) \equiv 0 \pmod{48}$.

Si maintenant $D \equiv 0 \pmod{16}$, la formule

$$\varpi(\alpha, dc) = S(0, c)\varpi(\alpha, d) + \alpha|d|S(1, c)\varpi(\alpha-1, d) + \ldots,$$

donnera, pour $dc = D$, $c = 2^{2\beta}$, $d = -4P, -8P$, P étant impair > 0,

$$\varpi(\alpha, D) \equiv 0 \pmod{2^{\delta+\varepsilon}};$$

$D = 2^\delta D'$, α impairs et $D' < -1$; $\delta > 0$;

$\varepsilon = 0$ si $D' \equiv -1 \pmod 4$ avec $\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4$, δ pair;

$\varepsilon = 1$ dans tous les autres cas.

On remarquera que, si D' est < 0 et $\equiv -1 \pmod 4$ avec $\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4$, on a nécessairement $D' = -p^{2\lambda}$, p étant un nombre premier de la forme $4n-1$; le discriminant fondamental, si δ est pair se réduit à -4 et $D = -2^{2\beta}p^{2\lambda}$.

En résumé l'on peut écrire

(6) $$\varpi(\alpha, D) = \frac{\gamma' D}{\omega}, \qquad D = 2^\delta D' \text{ non carré}, \quad D' \text{ impair};$$

si $\delta = 0$, γ' est pair sauf si $\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod 4$;

si $\delta > 0$, γ' est impair quand, α étant impair, on a, ou bien $D = -2^\delta$, ou bien $D = -2^{2\beta}p^{2\lambda}$, $p \equiv -1 \pmod 4$ étant premier positif; γ' est pair dans tous les autres cas.

La relation $\gamma' = \gamma + x\omega$ détermine la parité de x si $\omega \neq 2$. Or, si $\omega \neq 2$ donc $\omega \not\equiv 1 \pmod 2$, ou bien $\mathfrak{Q} = 1$ et alors $\gamma = \pm 1$, ou bien $\mathfrak{Q} > 1$ et γ est pair.

Si $\omega = 2$ c'est que $D = \pm 2^\lambda$ et les formules (4) montrent que $\varkappa$ est toujours pair.

19. En désignant par a_1 ceux des restes s, dans s et dans ϖ, pour lesquels $\left(\frac{D}{a_1}\right) = +1$, par a_{-1} ceux pour lesquels $\left(\frac{D}{a_{-1}}\right) = -1$, on saura, par ce qui précède, déterminer la valeur (mod D) des sommes $\sum a_1^\alpha$, $\sum a_{-1}^\alpha$ étendues respectivement à un système de nombres a_1 et de nombres a_{-1} compris entre o et $|D|$, c'est-à-dire les sommes

$$\chi_\varepsilon(\alpha, D) = \chi(\alpha, D) = \tfrac{1}{2}[s(\alpha, D) + \varepsilon\varpi(\alpha, D)],$$

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \chi_1 = \sum a_1^\alpha, \qquad \chi_{-1} = \sum a_{-1}^\alpha.$$

On a immédiatement en effet

$$(1) \qquad \chi_\varepsilon(\alpha, D) \equiv \frac{-|D|}{2} \sum_k \varphi\left(\frac{D^\alpha}{p_k^{\alpha\lambda_k}}\right)\frac{\theta}{p_k} \pmod D,$$

$|D| = \prod_i p_i^{\lambda_i}$ étant la décomposition de $|D|$ en facteurs premiers, k parcourant les facteurs de $\Omega\omega$; $\theta = \varepsilon$, si $p_k = \omega$; $\theta = 1$, si $p_k \neq \omega$ est nécessairement premier à Ω sans quoi α devrait être un multiple à la fois pair et impair de $\frac{1}{2}\varphi(\omega^\sigma)$.

On peut encore écrire, d'après les formules (3) et (4) du n° **16** et la formule (6) du n° **18**,

$$(2) \qquad \chi_\varepsilon(\alpha, D) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{g'|D|}{\Omega} + \varepsilon\frac{\gamma' D}{\omega}\right).$$

La formule (1) montre que

$$\chi'_\varepsilon(\alpha, D) = \frac{D}{2^\eta \Omega\omega}, \qquad \eta = 0 \quad \text{ou} \quad 1,$$

et η est évidemment nul si D est impair, puisque χ' est entier.

Si $D = 2^{\delta}D'$ (D' impair, $\delta > 0$) non carré, on a, d'après (2),

$$\eta \equiv g'\omega + \varepsilon\gamma'\Omega \pmod{2}, \qquad 0 \leqq \eta \leqq 1,$$

et il faut distinguer plusieurs cas :

Soit α pair donc ω impair. Si $D' \neq \pm 1$, Ω est impair, $\gamma' \equiv 0 \pmod{2}$. Donc $\eta \equiv g' \pmod{2}$. Donc η ne peut être égal à 1 que si

$$\varphi(D') \not\equiv 0 \pmod{4},$$

c'est-à-dire que si $D = \pm 2^{\delta}p^{\lambda}$, p étant un nombre positif $\equiv -1 \pmod{4}$. Ainsi $\chi'_1(2, \pm 12) = 2$, $\chi'_1(2, 24) = 4$.

Si $D' = \pm 1$ c'est-à-dire $D = \pm 2^{\delta}$, $\Omega = 2$, g' est impair et de même ω puisque α est pair. Donc $\eta = 1$.

Ainsi $\chi'_1(2, 24) = 1$, $\chi'_1(2, \pm 8) = 2$.

Soit α impair, donc $\Omega = 1$. g' ne cesse d'être pair que si $\delta = 2$ avec $D' = -1$ et alors $\omega = 2$. Donc $\eta \equiv \gamma' \pmod{2}$. Donc η ne peut être égal à 1 que si $D = -2^{2\beta}p^{2\lambda}$, p étant un nombre premier $\equiv -1 \pmod{4}$ ou si $D = -2^{\delta}$.

Ainsi

$$\chi'_1(1, 8) = 8, \qquad \chi'_1(1, -8) = 4, \qquad \chi'_1(1, -16) = 4,$$
$$\chi'_1(1, -24) = 24, \qquad \chi'_1(1, -36) = 18, \qquad \chi'_1(1, -72) = 72.$$

En résumé η n'est égal à 1 que pour les discriminants non carrés de la forme $D = \pm 2^{\delta}p^{\lambda} (\delta > 0)$ p étant un nombre premier $\equiv -1 \pmod{4}$ et $\geqq -1$, et encore faut-il, si α est impair, que D soit négatif et que sa valeur absolue soit un carré ou une puissance de 2.

En particulier, si D_0 est un discriminant fondamental,

$$\chi(1, D_0) \equiv 0 \pmod{D_0}, \qquad D_0 \neq -3, \qquad -4, \qquad -8.$$

Si $D' \equiv 1 \pmod{4}$ on aura toujours, pour $D = 2^{\delta}D'$,

$$\chi'(\alpha, D) = \frac{D}{\omega} \qquad \alpha \text{ impair.} \tag{3}$$

Ainsi $\chi'(1, -3) = 1$, $\chi'(3, -7) = 1$.

Les sommes $\sum r^\alpha, \sum t^\alpha$ (α impair) étendues à tous les nombres $r, t \pmod{N}$ pour lesquels $\left(\frac{r}{N}\right) = +1$, $\left(\frac{t}{N}\right) = -1$ seront donc toujours divisibles par $\frac{N}{\omega}$ si $|N|$ est un discriminant.

Si $N = 2N'$ (N' impair), elles seront divisibles par N' pourvu que r ou t parcoure des valeurs impaires donnant toutes un même reste $\pmod{8}$.

20. N étant un entier quelconque, j'entendrai par ζ (ou $\zeta', \zeta'', \ldots$) une unité positive ou négative choisie de la manière suivante :

Si $N \not\equiv 2 \pmod{4}$, ζN désignera un discriminant, en sorte que, si N est alors pair, ζ pourra être pris indifféremment égal à ± 1;

Si $N \equiv 2 \pmod{4} = 2N'$, $\zeta N'$ sera $\equiv 1 \pmod{4}$.

Si $N = PQ$, on pourra toujours, au moins d'une manière et au plus de quatre, trouver trois unités ζ, ζ', ζ'' telles que $\zeta N = \zeta' P . \zeta'' Q$.

J'entendrai encore par a_ε ($\varepsilon = \pm 1$) un nombre positif tel que $\left(\frac{\zeta N}{a_\varepsilon}\right) = \varepsilon$ et qui, lorsque $N \equiv 2 \pmod{4}$, sera supposé $\equiv \rho \pmod{8}$, ρ étant impair et le même pour tous les a_ε, d'ailleurs arbitraire. Pour chaque valeur de ε a_ε aura $\frac{1}{2}\varphi(N)$ valeurs incongrues, selon le module N si N n'est pas impairement pair, selon le module $4N$ si N est impairement pair.

A l'aide des résultats précédents il est facile d'étendre au cas d'un entier quelconque N que je supposerai d'abord n'être ni un carré impair ni le double d'un tel carré la décomposition connue de l'équation $\theta_N(x) = 0$ aux racines primitives de $x^N = 1$ par l'adjonction de $\sqrt{\zeta N}$ (en prenant $\zeta = -1$ si N est un carré pair, de manière que ζN ne soit pas un carré).

Posons

$$A_{\zeta N, \varepsilon}(x) = A_\varepsilon(x) = \prod_{a_\varepsilon} \left(x - e^{\frac{2\pi i a_\varepsilon}{N}}\right) = a_\varepsilon^0 x^n + a_\varepsilon^1 x^{n-1} + \ldots,$$

$$n = \tfrac{1}{2}\varphi(N).$$

On aura

$$\theta_N(x) = A_1(x) A_{-1}(x),$$

$$\sum_{a_\varepsilon} e^{a_\varepsilon \frac{2\pi i k}{N}} = \tfrac{1}{2}[\sigma(k, \zeta N) + \varepsilon \psi(k, \zeta N)].$$

Les formules de Newton

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\nu=k-1} a_\varepsilon^\nu[\sigma(k-\nu,\zeta\mathrm{N})+\varepsilon\psi(k-\nu,\zeta\mathrm{N})]+ka_\varepsilon^k=0,$$
$$a_\varepsilon^0=1,\qquad k=1,2,\ldots,n,$$

fournissent par récurrence les a_ε^k sous la forme $a_\varepsilon^k=y_k+\varepsilon z_k\sqrt{\zeta\mathrm{N}}$, les y_k, z_k étant rationnels. D'ailleurs, les a_ε^k étant des entiers algébriques comme les racines dont ils sont des combinaisons entières à coefficients entiers, il en sera de même de $2y_k$, $2z_k\sqrt{\zeta\mathrm{N}}$, donc aussi de $2y_k$, $2z_k$.

Les coefficients a_ε^k, a_ε^{n-k} sont liés l'un à l'autre par l'identité

$$x^k\mathrm{A}_\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n e^{\frac{2\pi i}{\mathrm{N}}\Sigma a_\varepsilon}\prod_{a_\varepsilon}\left(x-e^{-\frac{2\pi i a_\varepsilon}{\mathrm{N}}}\right)$$
$$=(-1)^n e^{\frac{2\pi i}{\mathrm{N}}\chi_\varepsilon(1,\zeta\mathrm{N})}\mathrm{A}_{\varepsilon\zeta}(x).$$

Or, on a

$$\chi_\varepsilon(1,\zeta\mathrm{N})=\frac{1}{2}\left(g'+\frac{\varepsilon\gamma'}{\omega}\right)\zeta\mathrm{N}\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{N}),\qquad \chi'_\varepsilon(1,\zeta\mathrm{N})=\frac{\mathrm{N}}{2^\eta\omega},$$

g', γ', ω, η ayant relativement à $\zeta\mathrm{N}$, ou à $\frac{\zeta\mathrm{N}}{2}$ si N est impairement pair, le même sens que plus haut relativement à D.

ω ne peut jamais être >3.

Si $\omega=1$ et $\eta=0$ ou 1, peu importe le signe du coefficient de πi dans l'exponentielle.

Si $\omega=2$, c'est que $\mathrm{N}=-2^{2\beta}$. Alors $\eta=1$ et

$$\chi_\varepsilon(1,\zeta\mathrm{N})=\frac{-\mathrm{N}\varepsilon}{4}\qquad(\mathrm{mod}\ 2\mathrm{N})$$

sauf si $\mathrm{N}=4$. Donc que N soit >4 ou $=4$, on a

$$(-1)^n e^{\frac{2\pi i}{\mathrm{N}}\chi_\varepsilon(1,\zeta\mathrm{N})}=-i\varepsilon,\qquad \mathrm{N}=-2^{2\beta}.$$

Si $\omega=3$, c'est que $\mathrm{N}=3\mathrm{Q}^2$, les facteurs premiers de Q étant tous $\equiv 2 \pmod 3$. Alors $g' \equiv 0 \pmod 2$ et

$$\frac{1}{Q^2}\chi_\varepsilon(1, \zeta N) \equiv \frac{-\varepsilon\gamma'}{2} \pmod 3.$$

Or $\gamma' = \gamma + \varkappa\omega \equiv \gamma \pmod 3$. Donc $\gamma' \equiv Q\varphi(Q) \equiv Q \pmod 3$. D'ailleurs γ' est ici pair et Q impair. Donc $\gamma' \equiv Q + 3 \pmod 6$ et $\frac{\gamma'}{2} \equiv -Q \pmod 3$. Donc $\frac{1}{Q^2}\chi_\varepsilon(1, \zeta N) \equiv \varepsilon Q \pmod 3$ et

$$(-1)e^{\frac{2\pi i}{N}\chi_\varepsilon(1, \zeta N)} = (-1)^n e^{\frac{2\pi i \varepsilon Q}{3}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{-75,\varepsilon}(x) &= 2x^{20} + (-1 - \varepsilon\sqrt{-3})x^{15} \\ &\quad + (-1 + \varepsilon\sqrt{-3})x^{10} + 2x^5 - 1 - \varepsilon\sqrt{-3} \\ &= 2\,\frac{x^{25} - e^{-\frac{10\pi i\varepsilon}{3}}}{x^5 - e^{-\frac{2\pi i\varepsilon}{3}}}. \end{aligned}$$

En se servant des mêmes principes on peut obtenir d'autres décompositions. Ainsi quand N est divisible par 4 et non carré, $\pm N$ est un discriminant non carré et l'on peut changer à volonté la détermination de ζ. Mais les a_ε changent en même temps, car parmi les nombres premiers à N il y en a toujours qui sont $\equiv -1 \pmod 4$, l'un des deux nombres a_ε, $N - a_\varepsilon$ par exemple. Et de fait le radical adjoint change avec ζ.

Soit $N = 2N'$, N' étant impair. Quand s parcourt les $\varphi(N)$ nombres $< N$ et premiers à N, $\frac{s + N'}{2} = s'$ parcourt les $\varphi(N')$ nombres $< N'$ et premiers à N', en sorte que

$$\theta_N(x) = \prod\left(x + e^{\frac{2\pi i s'}{N'}}\right) = (-1)^{\varphi(N)}\theta_{N'}(-x),$$

et, en exceptant le cas où $N = 2$,

$$\theta_N(x) = \theta_{N'}(-x) = \Lambda_{\zeta N',1}(-x)\Lambda_{\zeta N',-1}(-x).$$

Ici, en posant $\varepsilon\left(\frac{2}{\rho}\right) = \varepsilon'$, on a $A_{\zeta N',\varepsilon}(-x) = A_{\zeta N,\varepsilon'}(x)$; et le même radical a bien en effet été adjoint dans les deux décompositions puisque

$$\psi(k, \zeta N) = \psi_1(-k, \zeta N) = \left(\frac{2}{\rho}\right)\psi_0(-k, \zeta N').$$

Soit enfin $N = PQ$, $P > 0$ contenant tous les facteurs premiers différents de Q et $\zeta N = \zeta' P . \zeta'' Q$. On aura (n° 4)

$$\theta_N(x) = \theta_P(x^Q) = A_{\zeta' P,1}(x^Q) A_{\zeta' P,-1}(x^Q).$$

Cette décomposition correspond à l'adjonction de $\sqrt{\zeta' P}$, laquelle n'équivaut à celle de $\sqrt{\zeta N}$ que si $\zeta'' Q$ est un carré.

Appelons b_ε les nombres jouant relativement à $\zeta' P$ le rôle des a_ε relativement à ζN. On aura

$$A_{\zeta' P,\varepsilon}(x^Q) = \prod_{b_\varepsilon}\left(x^Q - e^{\frac{2\pi i b_\varepsilon}{P}}\right) = \prod_{b_\varepsilon, \nu}\left[x - e^{\frac{2\pi i (b_\varepsilon + P\nu)}{N}}\right],$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, Q.$$

Le plus grand commun diviseur de $A_{\zeta' P,\varepsilon}(x^Q)$ et de $A_{\zeta N,\varepsilon'}(x)$ ($\varepsilon' = \pm 1$) sera $\prod_\gamma\left(x - e^{\frac{2\pi i\gamma}{N}}\right)$, γ parcourant ceux des nombres $b_\varepsilon + P\nu$ qui appartiennent aux a_ε.

Supposons que $\zeta' P$ soit un discriminant (contenant toujours tous les facteurs premiers différents de Q). Soit $P^{(1)}$ le plus grand diviseur non impairement pair commun à $Q = Q^{(0)} = Q^{(1)}P^{(1)}$ et à $P = P^{(0)}$, et plus généralement $P^{(i)}$ le plus grand diviseur non impairement pair commun à $Q^{(i-1)} = Q^{(i)}P^{(i)}$ et à P ($i = 1, 2, \ldots$).

Le dernier $Q^{(s)}$ des $Q^{(i)}$ sera égal à 1 ou à 2. Soient μ, α, $\beta^{(i)}$ les exposants des plus hautes puissances de 2 qui divisent respectivement N, P, $Q^{(i)}$ et $\mu = m\alpha + r$, $r < \alpha$. On aura

$$\beta^{(i)} = (m - i - 1)\alpha + r,$$

et, si $r \geqq 2$, $Q^{(s)} = 1$, si $r = 1$, $Q^{(s)} = 2$.

Dans tous les cas, puisque

$$\zeta N = \zeta' P . \zeta^{(1)} P^{(1)} \ldots \zeta^{(s)} P^{(s)} . Q^{(s)},$$

on pourra écrire

$$\left(\frac{\zeta N}{b_\varepsilon + P\nu}\right) = \varepsilon \prod_{i=1}^{i=s} \left(\frac{\zeta^{(i)} P^{(i)}}{b_\varepsilon}\right) \left(\frac{Q^{(s)}}{b_\varepsilon + P\nu}\right),$$

et le symbole $\left(\frac{\zeta N}{b_\varepsilon + P\nu}\right)$ ne dépendra de ν que si $\left(\frac{Q^{(s)}}{b_\varepsilon + P\nu}\right)$ en dépend, c'est-à-dire que si l'on a à la fois $Q^{(s)} = 2$ et $P \equiv 4 \pmod 8$, et alors même la valeur de $\left(\frac{Q^{(s)}}{b_\varepsilon + P\nu}\right)$ reste la même pour tous les ν d'une même parité. Mais cette circonstance ne peut se présenter si $\zeta' P$ contient le discriminant fondamental de ζN. Supposons que $\zeta' P$ contienne ce discriminant fondamental, autrement dit que P contienne non seulement tous les facteurs premiers différents de N, mais le facteur 2 en particulier à une puissance de la même parité que N. Si alors b' parcourt ceux des nombres b_ε tels que $\left(\frac{\zeta N}{b'}\right) = \varepsilon''$, les nombres

$$b' + P\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, Q)$$

seront tous des δ et le plus grand commun diviseur des deux polynomes considérés sera $\prod_{b'} \left(x^Q - e^{\frac{2\pi i b'}{P}}\right)$.

D'ailleurs $\sigma(k, \zeta N)$ et $\psi(k, \zeta N)$ étant nuls quand $k \not\equiv 0 \pmod Q$ (en supposant toujours que P contient non seulement tous les facteurs premiers différents de ζN, mais aussi le discriminant fondamental), les formules de Newton montrent que les a_ε^k où $k \not\equiv 0 \pmod Q$ sont tous nuls.

Ainsi soit $\zeta N = -75$, $\zeta' P = -15$, $\zeta'' Q = 5$. On a

$$A_{-15,\varepsilon}(x^5) = x^{20} + \frac{-1 + \varepsilon\sqrt{-15}}{2} x^{15} - 2x^{10} + \frac{-1 - \varepsilon\sqrt{-15}}{2} x^5 + 1,$$

et l'on a déjà trouvé

$$\Lambda_{-75,\varepsilon}(x) = \frac{x^{25} - e^{-\frac{10\pi i \varepsilon}{3}}}{x^5 - e^{-\frac{2\pi i \varepsilon}{3}}}.$$

Le plus grand commun diviseur de $\Lambda_{-15,1}(x^5)$ et de $\Lambda_{-75,1}(x)$ par exemple est visiblement

$$\left(x^5 - e^{\frac{2\pi i}{15}}\right)\left(x^5 - e^{\frac{8\pi i}{15}}\right).$$

Dans le cas où N est un carré impair ou le double d'un carré impair, on devra recourir à l'une des deux dernières décompositions.

21. Kronecker a exprimé, pour le cas d'un discriminant fondamental négatif, les valeurs moyennes de certaines séries de Rosenhaim dans chaque genre, par des sommes analogues aux sommes ψ où les exponentielles sont remplacées par des séries simples de Jacobi. Voici comment on peut étendre son analyse au cas d'un discriminant quelconque.

Considérons d'abord la quantité

$$X[D, D_2, F(x)] = X = \sum_{h,k} \left(\frac{D_1 Q^2}{h}\right)\left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) F(hk),$$

$$D_1 D_2 = D = D_0 Q^2, \qquad h, k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Si Δ, Δ' sont les discriminants fondamentaux de $D_1 = \Delta\Gamma^2$, $D_2 = \Delta'\Gamma'^2$, Γ et Γ' divisent nécessairement Q, sans quoi on pourrait enlever au discriminant fondamental $D_1 D_2 Q^{-2} = D_0$ un facteur carré. On peut donc écrire

$$X = \sum_{h,k} \left(\frac{\Delta}{h}\right)\left(\frac{\Delta'}{k}\right)\left(\frac{Q^2}{hk}\right) F(hk).$$

Or, les formules du n° **4** donnent pour $d = N = Q^\alpha$, si α devient infini,

$$\sum_{(n)}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{n_1, \ldots, n_q}\right) F(n_1, \ldots, n_q) = \sum_{\delta}^{Q} \varepsilon_\delta \sum_{(n)}^{\infty} F(n_1\delta, \ldots, n_q\delta).$$

En appliquant cette transformation à chacune des sommations simples dans X et en remplaçant $\left(\frac{\Delta}{h}\right)$, $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ par des sommes ψ, on obtient

$$X = \sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q}\frac{\varepsilon_d\varepsilon_{d'}}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta'}}\left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta}{d'}\right)\sum_{s,s',h,k}\left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right)F(hk\,dd')e^{-\frac{2s\pi ih}{\Delta}-\frac{2s'\pi ik}{\Delta'}},$$

$$s = 1, 2, \ldots, |\Delta|, \qquad s' = 1, 2, \ldots, |\Delta'|.$$

En changeant alors s en $|\Delta| - s$ et s' en $|\Delta'| - s'$, ce qui ne change pas X, et en ajoutant, il viendra

$$(1)\quad \text{si } D > 0, \qquad X = \sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q}\frac{\varepsilon_d\varepsilon_{d'}}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta'}}\left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta'}{d'}\right)\sum_{s,s',h,k}\left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right)F(hk\,dd')\cos 2\pi\left(\frac{hs}{\Delta}+\frac{ks'}{\Delta'}\right),$$

$$(2)\quad \text{si } D < 0, \qquad X = -\sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q}\frac{\varepsilon_d\varepsilon_{d'}}{\sqrt{-\Delta\Delta'}}\left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta'}{d'}\right)\sum_{s,s',h,k}\left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right)F(hk\,dd')\sin 2\pi\left(\frac{hs}{\Delta}+\frac{ks'}{\Delta'}\right).$$

Or on a (je prends les notations de M. Jordan),

$$(3)\quad \frac{\theta'(0)\,\theta'(u+v)}{\theta(u)\,\theta(v)} = \pi(\cot\pi u + \cot\pi v) + 4\pi\sum_{h,k}q^{2hk}\sin 2\pi(hu+kv),$$

$$q = e^{i\pi\omega}, \qquad |q| < 1.$$

Donc, si $F(x) = q^{2x}$ et $D < 0$, la double sommation faisant disparaître les cotangentes,

$$X(D, D_2, q^{2x}) = -\sum_{d}^{Q}\sum_{d'}^{Q}\frac{\varepsilon_d\varepsilon_{d'}}{4\pi\sqrt{-\Delta\Delta'}}\left(\frac{\Delta}{d}\right)\left(\frac{\Delta'}{d'}\right)\sum_{s,s'}\left(\frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta'}{s'}\right)\frac{\theta'(0,\omega dd')\,\theta\left(\frac{s}{\Delta}+\frac{s'}{\Delta'}, \omega dd'\right)}{\theta\left(\frac{s}{\Delta}, \omega dd'\right)\theta\left(\frac{s'}{\Delta'}, \omega dd'\right)}.$$

Soit $D_2 = \Delta' = 1$, donc $\Delta = D_0$. Dans (1) et (2) la sommation relative à s' disparaîtra et, comme (3) donne, pour $v = 0$,

$$\frac{\theta'(u)}{\theta(u)} = \pi\cot\pi u + 4\pi\sum_{h,k}q^{2hk}\sin 2h\pi u,$$

on aura $(D < 0)$,

$$X(D, 1, q^{2x}) = \sum_d^Q \sum_{d'}^Q \frac{\varepsilon_d \varepsilon_{d'}}{4\pi\sqrt{-D_0}} \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{s=1}^{s=-D_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) \left[\pi \cot \frac{\pi s}{D_0} - \frac{\theta'\left(\frac{s}{D_0}, \omega d d'\right)}{\theta\left(\frac{s}{D_0}, \omega d d'\right)}\right].$$

Si Q est > 1, $\sum_{d'}^{Q} \varepsilon_{d'} = 0$ et la cotangente disparaît. Mais, pour écrire une formule générale plus simple, observons que, d'après la relation $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, on a

$$\frac{2\pi K(D)}{\tau(D)\sqrt{-D}} = H(D) = - \sum_{s=1}^{s=-D} \left(\frac{D}{s}\right) \frac{d}{ds} \log \Gamma\left(\frac{s}{-D}\right) = \frac{-1}{2D} \sum_{s=1}^{s=-D} \left(\frac{D}{s}\right) \cot \frac{\pi s}{D}$$
$$(D < 0).$$

Il viendra alors

$$X(D, 1, q^{2x}) = \operatorname{sgn}(Q^2 - 1) \frac{K(D_0)}{\tau(D_0)} + \frac{\sqrt{-D_0}}{4\pi} \sum_d^Q \sum_{d'}^Q \varepsilon_d \varepsilon_{d'} \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{s=1}^{s=-D_0} \frac{d}{ds} \log \theta\left(\frac{s}{D_0}, \omega d d'\right).$$

Cela posé, les formules du nº **13** donnent, pour $D > 0$ ou $D < 0$,

$$\frac{1}{K(D_0 Q^2)} \sum_{a,b,c}^{D_0 Q^2} \left(\frac{D_1}{A}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$
$$= \sum_d^Q \frac{O(D_1, d)}{K(D_0 d^2)} \sum_{a,\, b_0 d,\, c_0 d^2}^{D_0 d^2} \left(\frac{D_1}{A}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{d^2}{m}\right) F[d'^2(am^2 + b_0 dmn + c_0 d^2 n^2)]$$
$$= \sum_d^Q \frac{O(D_1, d)\,\tau(D_0 d^2)}{K(D_0 d^2)} \sum_{h,k} \left(\frac{D_1 d^2}{h}\right) \left(\frac{D_0 D_1^{-1} d^4}{k}\right) F(d'^2 hk)$$
$$= \sum_d^Q \frac{O(D_1, d)\,\tau(D_0 d^2)}{K(D_0 d^2)} X[D_0 d^2, D_1, F(d'^2 x)].$$

On saura donc exprimer par des séries de Jacobi la valeur moyenne de $\sum_{m,n} q^{2(am^2+bmn+cn^2)}$ dans chaque genre, lorsque le discriminant est négatif.

Les résultats seraient analogues si l'on prenait, avec Kronecker, la fonction $F(x) = |1-(-1)^x|\, q^{\frac{x}{2}}$ et le développement

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(u+v)}{\theta_3(u)\,\theta_3(v)} = 4\pi \sum_{\mu,\nu} q^{\frac{\mu\nu}{2}} \sin\pi(\mu u + \nu v),$$

$$\mu, \nu = 1, 3, 5, \ldots, +\infty.$$

Pour le caractère principal, c'est la fonction sn qui intervient alors au lieu de $\frac{\theta'}{\theta}\cdot$

NOTE.

Des équations de M. de la Vallée Poussin relativement aux nombres premiers (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2e Partie, p. 362; 1896) on peut déduire la suivante

$$2\sum_{p_\varepsilon}^{p_\varepsilon<y} \frac{\log p_\varepsilon}{p_\varepsilon - 1} - \log y = -\sum_{p_0} \frac{\log p_0}{p_0 - 1} + \Gamma'(1) + \varepsilon\,\frac{\overline{\Pi}(D)}{\Pi(D)} - 2\varepsilon\sigma + \alpha,$$

$$\sigma = \sum_{p_{-1}} \frac{\log p_{-1}}{p_{-1}^2 - 1} < \sum_{p} \frac{\log p}{p^2 - 1} < 1,$$

où D est un discriminant et où p_ε désigne un nombre premier tel que $\left(\frac{D}{p_\varepsilon}\right) = \varepsilon$, p un nombre premier quelconque, α tendant vers zéro avec $\frac{1}{y}\cdot$

Or on a vu que, si D est négatif, $\frac{\overline{\Pi}(D)}{\Pi(D)}$ s'exprime par un nombre fini de fonctions connues. On a donc là une extension de la relation remarquable qu'il a découverte et qui se retrouve en ajoutant les deux équations contenues dans la précédente.