JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. BRETON (DE CHAMP)

Explication d'un passage de la Mécanique analytique de Lagrange relatif à la composition des moments en Statique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 175-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__175_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Explication d'un passage de la Mécanique analytique *de Lagrange relatif à la composition des moments en Statique;*

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

On sait que les formules qui expriment les lois de cette composition sont démontrées dans la première Partie de la *Mécanique analytique,* Section III, article 17 (2^e^ édition, t. I, 1811). Lagrange y est conduit d'abord par une analyse très-directe, mais à laquelle on peut reprocher d'exiger d'assez longs calculs. Il indique ensuite, en terminant cet article 17, une autre manière de parvenir à cette composition :

« On aurait pu, dit-il, la déduire immédiatement de la composition des rotations instantanées, en substituant les moments aux rotations qu'*elles* produisent, comme Varignon a substitué les forces aux mouvements rectilignes. »

Il a été plusieurs fois question de ce passage dans le volume de ce *Journal,* pour l'année 1875 (3^e^ série, t. I). On a vu notamment, p. 97, que Poinsot l'a critiqué, comme si l'illustre auteur avait écrit *ils* au lieu de *elles* que j'ai souligné; puis (p. 182 et 263) qu'il a été réimprimé avec *ils*, au lieu de *elles,* dans la troisième édition de la *Mécanique analytique*.

Or il ne fallait pas se permettre de faire ce changement. En effet, les expressions dont se sert Lagrange sont trop claires et trop bien expliquées par la théorie qu'il rappelle pour qu'un malentendu soit possible.

Nous savons, par cette théorie de la composition des rotations instantanées, que toute rotation instantanée $d\theta$ d'un système de points de forme invariable autour d'un axe donné oh produit autour de trois autres axes ol, om, on, se coupant à angles droits en un point o du premier, trois rotations partielles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, et que les angles λ, μ, ν formés par l'axe de la rotation $d\theta$ avec les axes de ces derniers, sont tels que l'on a

$$\cos\lambda = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}, \cos\mu = \frac{d\omega}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}, \cos\nu = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}.$$

Ce que Lagrange annonce, c'est que, en substituant à ces trois rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ ainsi produites par la rotation instantanée $d\theta$, les moments L, M, N des forces par rapport à leurs axes *ol*, *om*, *on*, on obtiendra immédiatement les relations auxquelles sa première démonstration l'a conduit. Par cette substitution, les formules ci-dessus deviennent en effet

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

ces relations sont précisément celles dont il s'agit.

Cette substitution exige que les trois rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ soient proportionnelles respectivement aux moments donnés L, M, N. Or Lagrange commence sa première démonstration par supposer expressément qu'il en est ainsi. D'ailleurs on peut toujours satisfaire à cette condition en assignant à l'axe de la rotation instantanée $d\theta$ une direction convenable. Cette direction est celle-là même que déterminent les valeurs ci-dessus de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ en fonction des moments L, M, N.

C'était donc bien *elles* qu'il fallait, et non pas *ils*.