JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. TISSERAND

Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 169-174.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__169_0>

Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes;

PAR M. F. TISSERAND.

La détermination de l'attraction exercée par un ellipsoïde homogène sur un point extérieur a provoqué les recherches des plus grands géomètres. Laplace, le premier, a donné la solution de ce problème en démontrant que les potentiels de deux ellipsoïdes homofocaux, relatifs à un même point extérieur, sont entre eux comme les masses de ces ellipsoïdes; on ramène ainsi la recherche de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur à celle de l'attraction d'un autre ellipsoïde sur un point de sa surface, question très-facile à résoudre.

Le théorème en question a été démontré par Laplace au moyen d'une analyse très-compliquée; depuis, Ivory en a donné une solution très-simple. Avant ce travail d'Ivory, en 1792, Lagrange s'était proposé de donner une démonstration analytique simple du théorème de Laplace. Indiquons rapidement la voie suivie par Lagrange.

Soient f, g, h les coordonnées du point attiré, rapportées aux axes de l'ellipsoïde, dont les longueurs seront représentées par $2a$, $2b$, $2c$; soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'intérieur de l'ellipsoïde, Δ la distance de ce point au point attiré, ρ la distance de ce dernier point au centre de l'ellipsoïde; en supposant la densité de l'ellipsoïde égale à l'unité, on a, pour le potentiel de l'ellipsoïde,

$$(1)\qquad \mathrm{V} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{dx\,dy\,dz}{\Delta} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(f-x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2}},$$

où les intégrations s'étendent à toute la masse de l'ellipsoïde.

Ce qu'il faut démontrer, c'est que V est de la forme

$$(2)\qquad \mathrm{V} = \tfrac{4}{3}\pi abc\varphi(a^2-b^2,\ b^2-c^2),$$

φ étant une fonction de

$$a^2 - b^2, \quad b^2 - c^2, \quad f, g, h.$$

Pour y parvenir, Lagrange introduit, au lieu des coordonnées rectangulaires f, g, h, les coordonnées polaires ρ, λ, μ du point attiré, par les formules

$$(3) \qquad h = \rho \cos\lambda, \quad g = \rho \sin\lambda \sin\mu, \quad f = \rho \sin\lambda \cos\mu,$$

et il développe $\frac{1}{\Delta}$ suivant les puissances descendantes de ρ, comme il suit :

$$(4) \qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{P_1}{\rho^2} + \frac{P_2}{\rho^3} + \frac{P_3}{\rho^4} + \ldots,$$

où les quantités P_1, P_2,... sont des fonctions de λ et μ.

Il s'arrête au terme en $\frac{P_6}{\rho_7}$, substitue cette valeur de $\frac{1}{\Delta}$ dans l'expression (1) du potentiel, effectue l'intégration, et montre que l'expression qui en résulte pour V est bien de la forme (2). Mais ce résultat n'est démontré que jusqu'au terme en P_6 ; on ne voit pas du reste comment l'analyse de Lagrange s'étendrait au cas général. Le but du présent travail est de démontrer le théorème de Laplace, en suivant la voie tracée par Lagrange, d'une façon tout à fait générale.

Je commencerai par reproduire la démonstration de Lagrange pour P_2 et P_4.

Portant l'expression (4) de $\frac{1}{\Delta}$ dans (1), on a

$$(5) \qquad V = \frac{1}{\rho} \int\int\int dx\,dy\,dz + \frac{1}{\rho^2} \int\int\int P_1\, dx\,dy\,dz + \ldots.$$

Il est aisé de voir que, P_1, P_2, ... étant des fonctions entières impaires de x, y, z, les termes qui les contiennent dans la formule (5) ne donnent rien, les intégrales correspondantes pouvant se décomposer en éléments deux à deux égaux et de signes contraires. Posons, pour abréger, $dM = dx\,dy\,dz$, représentons par M la masse de l'ellipsoïde et nous aurons

$$(6)\qquad V = \frac{M}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\int P_2 dM + \frac{1}{\rho^5}\int P_4 dM + \frac{1}{\rho_7}\int P^6 dM + \ldots.$$

Pour effectuer les intégrations, Lagrange s'appuie sur la formule suivante, aisée à démontrer :

$$(7)\qquad \begin{cases} \int x^{2m} y^{2n} z^{2l} dM \\ \quad = \dfrac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7.9\ldots(2m+2n+2l-3)} Ma^{2m}b^{2n}c^{2l}; \end{cases}$$

dans cette formule, les intégrations qui figurent au premier membre s'étendent à toute la masse de l'ellipsoïde.

Cela posé, P_2 est de la forme

$$(8)\qquad P_2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy,$$

les coefficients A, B,... étant des fonctions de λ et de μ.

Les termes en yz, zx, xy ne donneraient rien dans les intégrations, et l'on aura

$$\int P_2 dM = A\int x^2 dM + B\int y^2 dM + C\int x^2 dM.$$

Appliquant la formule (7), on trouve

$$\int x^2 dM = \frac{Ma^2}{5}, \quad \int y^2 dM = \frac{Mb^2}{5}, \quad \int z^2 dM = \frac{Mc^2}{5}.$$

On aura donc

$$(9)\qquad \int P_2 dM = \frac{M}{5}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2).$$

Or la fonction $\frac{1}{\Delta}$ vérifie l'équation différentielle

$$(10)\qquad \frac{d^2\frac{1}{\Delta}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{\Delta}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{\Delta}}{dz^2} = 0.$$

En substituant dans cette équation la valeur (4) de $\frac{1}{\Delta}$, on en conclut que toutes les fonctions P vérifient l'équation

$$(11) \qquad \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} = 0.$$

Si l'on porte en particulier dans cette équation la valeur (8) de P_2, on trouvera la relation

$$A + B + C = 0,$$

qui permettra d'écrire l'expression (9) de $\int P_2 dM$ comme il suit :

$$\int P_2 dM = \frac{M}{5}[A(a^2 - c^2) + B(b^2 - c^2)].$$

Cette expression est bien de la forme (2),

Passons au terme P_4; d'après ce qui a été dit, on verra que

$$(12) \quad \begin{cases} P_4 = Ax^4 + By^4 + Cz^4 + Dy^2z^2 + Ez^2x^2 + Fx^2y^2 \\ \qquad + \text{des termes impairs en } x, y \text{ ou } z. \end{cases}$$

Les termes impairs ne donneront rien dans l'intégration, et l'on aura, en employant la formule (7),

$$(13) \; \int P_4 dM = \frac{M}{35}(3Aa^4 + 3Bb^4 + 3Cc^4 + Db^2c^2 + Ec^2a^2 + Fa^2b^2).$$

Or, en substituant l'expression (12) dans l'équation (11) et annulant les coefficients de x^2, y^2 et z^2, on trouve

$$(14) \quad \begin{cases} 6A + E + F = 0, \\ 6B + F + D = 0, \\ 6C + D + E = 0. \end{cases}$$

Portant dans (13) les valeurs de A, B, C, tirées des relations (14), il vient

$$\int P_4 dM = -\frac{M}{70}[D(b^2 - c^2)^2 + E(c^2 - a^2)^2 + F(a^2 - b^2)^2],$$

expression qui est bien encore de la forme (2), car on peut y remplacer $a^2 - c^2$ par $(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2)$.

En opérant de la même façon, Lagrange démontre encore le théorème pour P_6, mais les calculs se compliquent et il semble difficile d'arriver ainsi au résultat cherché dans le cas général.

Je vais démontrer que, i désignant un entier positif quelconque, on a

$$\int P2i\,dM = M\psi(a^2 - b^2,\ b^2 - c^2). \tag{15}$$

On a en effet

$$P2i = \Sigma A^{(i)}m,n,l\,x^{2m}y^{2n}z^{2l} + \Sigma B\,x^{2m'+1}y^{2n'+1}z^{2l'}, \tag{16}$$

les nombres entiers m, n, l, m', n', l' vérifiant les relations

$$2m + 2n + 2l = 2i,$$
$$2m' + 2n' + 2l' = 2i - 2.$$

Dans la formule (16), on devrait faire entrer aussi des termes en

$$x^{2m'}y^{2n'+1}z^{2l'+1}, \quad x^{2m'+1}y^{2n'}z^{2l'+1};$$

mais on verra que tous ces termes nous sont inutiles.

Dans l'équation

$$\frac{d^2P2i}{dx^2} + \frac{d^2P2i}{dy^2} + \frac{d^2P2i}{dz^2} = 0 \tag{17}$$

substituons la valeur (16) de $P2i$, nous trouverons trois termes en $x^{2m}y^{2n}z^{2l}$, provenant des termes qui ont pour coefficients

$$A^{(i)}m+2,n,l, \quad A^{(i)}m,n+2,l, \quad A^{(i)}m,n,l+2;$$

la somme de ces termes devra être nulle, ce qui nous donne la relation

$$\begin{gathered}(2m+2)(2m+1)A^{(i)}m+1,n,l + (2n+2)(2n+1)\\ A^{(i)}m,n+1,l + (2l+2)(2l+1)A^{(i)}m,n,l+1 = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Or on a, en partant de l'équation (16),

$$\int P2i\,dM = \Sigma A^{(i)}m,n,l \int x^{2m}y^{2n}z^{2l}\,dM;$$

et, en appliquant la formule (7),

$$(19)\quad \int P_{2i}dM = \Sigma A^{(i)}{}_{m,n,l}\frac{[1.3\ldots(2m-1)][1.3\ldots(2n-1)][1.3\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+3)}a^{2m}b^{2n}c^{2l}M.$$

Il s'agit de montrer que, dans le second membre, le coefficient K de M est de la forme

$$(20)\qquad K = F(a^2-b^2,\ a^2-c^2,\ b^2-c^2).$$

Or une semblable fonction vérifie l'équation

$$(21)\qquad \frac{dK}{d(a^2)}+\frac{dK}{d(b^2)}+\frac{dK}{d(c^2)} = 0;$$

et réciproquement, si le coefficient K vérifie identiquement l'équation aux dérivées partielles (21), K sera de la forme (20), car l'expression (20), dans laquelle F désigne une fonction arbitraire, est l'intégrale générale de l'équation (21). Le tout est donc de prouver que la fonction

$$(22)\quad K = \Sigma A^{(i)}{}_{m,n,l}\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+3)}a^{2m}b^{2n}c^{2l}$$

vérifie l'équation (21).

Substituons donc cette valeur de K dans (21), et cherchons à distinguer dans le résultat de la substitution les termes en $a^{2m}b^{2n}c^{2l}$; nous en trouverons trois ayant respectivement pour coefficients

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m+1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+5)}(m+1)A^{(i)}{}_{m+1,n,l},$$

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n+1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+5)}(n+1)A^{(i)}{}_{m,n+1,l},$$

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l+1)]}{5.7\ldots(2m+2n+2l+5)}(l+1)A^{(i)}{}_{m,n,l+1}.$$

La somme de ces trois coefficients est, à un facteur près,

$$(2m+2)(2m+1)A^{(i)}{}_{m+1,n,l}+(2n+2)(2n+1)A^{(i)}{}_{m,n+1,l}$$
$$+(2l+2)(2l+1)A^{(i)}{}_{m,n,l+1},$$

quantité égale à zéro, d'après la relation (18).

Donc la fonction K vérifie identiquement l'équation (21), et le théorème est démontré d'une façon tout à fait générale.