JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL GUIEYSSE

H. AIRY

De la propagation des marées dans les rivières

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 399-450.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__399_0>

De la propagation des marées dans les rivières.

Traduit et extrait des *Tides and Waves* de M. Airy, Astronome royal d'Angleterre, Associé étranger de l'Académie des Sciences (Institut de France);

Par M. Paul GUIEYSSE,

Ingénieur hydrographe de la Marine, Répétiteur à l'École Polytechnique.

---

1. M. Airy a publié, dans le cinquième volume de l'*Encyclopedia metropolitana* [*], un Mémoire intitulé *Tides and Waves* (Marées et Vagues), qui contient une théorie complétement nouvelle de ces phénomènes, théorie que nous croyons très-peu connue en France et même à l'étranger, d'après les recherches que nous avons faites sur cette question, et qui lui a permis de pousser les résultats théoriques beaucoup plus loin que ne le permet la théorie statique de Newton ou la théorie dynamique de Laplace, surtout au point de vue de l'influence des fonds et de la forme des côtes sur les marées locales. Nous en extrayons la partie relative à la propagation des marées dans les rivières, qui contient des éléments propres à apprécier l'influence sur le régime de la portion maritime des fleuves, des travaux faits ou à faire pour en améliorer le cours.

2. Un observateur placé sur le bord d'une rivière à marée constaterait les phénomènes suivants : dans le cours d'une des deux marées qui se produisent à peu près dans les vingt-quatre heures, l'eau de la mer produit une élévation jusqu'à une certaine distance de l'embouchure, accompagnée d'un courant dit *de flot*, qui généralement persiste quelque temps après la haute mer, et s'abaisse en formant un courant dit *de jusant*, qui dure aussi quelque temps après la basse mer. La durée de la *baissée* est plus grande que celle de la *montée;* cette différence varie suivant les stations d'observation le long de la rivière; elle est presque

[*] Londres, 1845.

nulle à l'embouchure, où les courants de flot et de jusant persistent longtemps après la haute et la basse mer (trois heures à l'entrée de la Tamise), et elle augmente à mesure que l'on remonte en rivière, tandis que l'heure de la renverse du courant se rapproche de plus en plus de celle de la phase correspondante de la marée. La courte durée du flot dans la partie haute de la rivière est une des causes des barres ou mascarets que l'on observe quelquefois, et produit aussi, mais assez rarement, deux et même trois ondes de marées distinctes; mais ceci s'observe beaucoup plus fréquemment pendant la baissée, à cause de sa longue durée. Nous verrons que ce phénomène devrait théoriquement se présenter partout, mais il arrive le plus souvent que les ondes secondaires sont beaucoup trop faibles pour être observées facilement. Enfin les marées sont plus hautes au fond des estuaires qu'en pleine mer; mais, quand la marée est réellement entrée en rivière, sa hauteur va en diminuant, et le courant de jusant, même en ne tenant pas compte du courant propre de la rivière, est plus fort que le courant de flot.

Ce phénomène de la marée ne consiste pas en un apport de la masse des eaux de la mer dans la rivière : la vitesse de propagation des différentes phases le prouve; mais, du reste, l'expérience directe le montre, puisqu'un flotteur à la surface d'une mer agitée ne possède qu'un très-faible mouvement de translation, tandis que les vagues courent avec une grande vitesse; le mouvement apparent que l'on observe n'est que le mouvement d'une forme, et l'on sait, par la théorie des divers mouvements ondulatoires, que des mouvements très-petits des molécules produisent un mouvement continu de l'onde dans une même direction; en particulier, le mouvement des vagues sur la surface de la mer est le résultat de petits mouvements des molécules d'eau qui passent successivement à la crête ou au creux des vagues avec des vitesses en avant ou en arrière, selon qu'elles sont au-dessus ou au-dessous de leur hauteur moyenne. (*Voir* n° **8**.)

3. Chaque molécule d'eau est donc animée d'un petit mouvement horizontal et vertical; si nous comptons alors les abscisses dans le sens de la longueur du canal, à partir d'un point fixe, et les ordonnées dans le sens vertical, à partir d'un certain plan horizontal, en appelant x, y les ordonnées d'une molécule à l'état de repos et x', y' ces mêmes ordonnées quand le canal est traversé par une vague, nous aurons la relation

$$(1) \qquad x' = x + X, \quad y' = y + Y,$$

où X et Y sont des fonctions de x, y et t (le temps t est compté à partir d'une certaine époque arbitraire).

Le caractère de la vague, c'est qu'une molécule, dont l'abscisse est $x + vt'$ (v étant la vitesse de la vague), aura le même mouvement, au bout du temps $t + t'$, que la molécule dont l'abscisse est x au bout du temps t, ce que nous pouvons exprimer par

$$X = \varphi(x, t) = \varphi(x + vt', t + t');$$

d'où, en développant et nous arrêtant à la première puissance de t', nous avons l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{d\varphi(x, t)vt'}{dx} + \frac{d\varphi(x, t)t'}{dt} = 0,$$

dont la solution générale est

$$\varphi(x, t) = \psi(vt - x)$$

ou, en posant

$$(2) \qquad v = \frac{m}{n},$$

$$(3) \qquad X = \varphi(x, t) = \chi(nt - mx),$$

où φ et χ sont des fonctions arbitraires variant suivant la question, et m et n des constantes.

Nous exprimerons que les molécules d'une même ordonnée verticale ont des déplacements horizontaux différents en prenant

$$(4) \qquad X = P\chi_1(nt - mx),$$

P étant une fonction de y, et que ces déplacements en outre ne sont pas simultanés, en prenant

$$X = P\chi_2(nt - mx - Q), \tag{5}$$

Q étant encore une fonction de y seul.

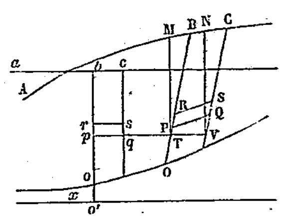
Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons que de mouvements oscillatoires, et l'on sait que de pareils mouvements peuvent toujours se représenter par une somme de termes en sinus ou cosinus : la forme la plus générale d'un des termes de X sera donc

$$X = P\cos(nt - mx - Q). \tag{6}$$

Nous ne nous sommes occupé encore que de la fonction X : c'est que, dans chacun des problèmes que nous traiterons, la fonction Y s'en déduit au moyen d'une équation mettant en évidence une des propriétés fondamentales des liquides, la *continuité*; une autre équation, basée sur l'égalité des pressions en tous sens, nous donnera une relation entre les forces agissantes et les déplacements.

4. *Des vagues dans lesquelles les déplacements des molécules sont très-petits.*

(*a*) *Équation de continuité.* — Soient oO une section longitudinale faite dans le fond d'un canal de largeur uniforme, *abc* et ABC les sur-



faces de l'eau à l'état de repos et de mouvement; supposons l'eau divisée en colonnes verticales élémentaires, puis en tranches horizontales minces, et soient

OBC et PS ce que deviennent *obc* et *ps* au bout du temps t;

x et y les coordonnées du point p;
$x' = x + X$ et $y' = y + Y$ celles du point P;
$pq = h$, $pr = l$ et $bo' = k$ la profondeur du canal à l'état de repos.

Les coordonnées du point S sont

$$x + h + X + \frac{dX}{dx} h \quad \text{et} \quad y + l + Y + \frac{dY}{dy} l;$$

et comme, en vertu de la continuité, les aires ps et PS sont égales, nous aurons, aux infiniment petits du second ordre près,

$$hl = h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right) l \left(1 + \frac{dY}{dy}\right),$$

d'où

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0$$

et, en intégrant,

$$Y = -\int \frac{dX}{dx} dy + f(x),$$

l'intégration commençant du fond du canal; ou, si nous appelons Ξ la valeur de X pour le fond du canal au point o, et η l'ordonnée de ce point, nous aurons évidemment $\Xi \frac{d\eta}{dx}$ pour la valeur correspondante de Y : l'*équation de continuité* est donc

$$(a) \qquad Y = \Xi \frac{d\eta}{dx} - \int_\eta^y \frac{dX}{dx} dy.$$

Dans le cas d'une profondeur uniforme, en comptant les ordonnées à partir du fond du canal, elle devient

$$(a') \qquad Y = -\int_0^y \frac{dX}{dx} dy.$$

(b) *Équation du mouvement*. — Soit K la valeur de Y pour un point de la surface : prolongeons pq en TV, et considérons la colonne TMNV; les longueurs TM et TB, VN et VC ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre; nous pouvons donc prendre les points M et N au lieu de B et C dans l'évaluation correspondante de K. Soient maintenant p la pression en un point, mesurée par l'accélération qu'elle produit en agissant sur l'unité de volume par l'unité de surface, et g' l'accélération variable de la pesanteur : deux éléments de TM, égaux à l'unité de surface et ayant pour ordonnées y' et $y'+dy'$, supporteront des pressions en sens inverse p et $p+\frac{dp}{dy'}dy'$, dont la différence, agissant sur une colonne de hauteur dy', produira une accélération $\frac{dp}{dy'}$ qui s'ajoutera à celle variable de la pesanteur; nous aurons donc

$$\frac{d^2y'}{dt^2}=-\frac{dp}{dy'}-g'$$

ou, comme $y'=y+\mathrm{Y}$ et que y est indépendant de t,

$$\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}=-\frac{dp}{dy'}-g',$$

d'où

$$p=-\int g'dy'-\int\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}dy'.$$

Pour avoir la pression jusqu'à la surface, nous devons intégrer de $y'=y$ à $y'=k+\mathrm{K}$; mais, comme $\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}$ est une quantité très-petite, nous pourrons, dans les limites de notre approximation, faire la seconde intégrale par rapport à y au lieu de y' et prendre k au lieu de $k+\mathrm{K}$ pour limite supérieure; nous aurons donc, pour la pression en T, celle à la surface étant nulle,

$$p=g'(k+\mathrm{K}-y)+\int_y^k\frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}dy.$$

Si maintenant nous considérons l'élément de longueur $\mathrm{TV}=h'$, les pressions sur ses faces extérieures sont, en vertu de la transmission des pressions en tous sens, p et $\frac{dp}{dx}h'$; nous avons donc, comme précédemment, et en appelant F l'accélération due aux forces extérieures que nous supposons horizontales [*],

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \mathrm{F} - \frac{dp}{dx}$$

ou

$$(b) \qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{F} - \frac{d}{dx}\left[g'(k + \mathrm{K} - y) + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt}dy\right].$$

Cette équation, jointe à l'équation (a), contient la théorie complète du mouvement de l'eau dans un canal de largeur uniforme et de profondeur variable : elles nous permettent de déterminer la force nécessaire pour entretenir un mouvement donné X, ou de trouver les mouvements X et Y produits par une force horizontale donnée F; dans le cas le plus général, où la pesanteur peut être considérée comme constante, l'équation (b) devient

$$(b') \qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{F} - \frac{d}{dx}\left(g\mathrm{K} + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}dy\right).$$

Ces équations sont générales, quels que soient les mouvements horizontaux et verticaux, pourvu qu'ils soient petits; dans le cas, où nous resterons désormais, d'un mouvement oscillatoire, X étant de la forme A cos $(nt - \mathrm{B})$, où A et B sont des fonctions quelconques de x et y, et Y étant nécessairement de la même forme d'après l'équation de continuité, l'équation du mouvement devient

$$n^2\mathrm{X} = -\mathrm{F} + \frac{d}{dx}\left(g\mathrm{K} - n^2\int_y^k \mathrm{Y}dy\right).$$

5. Quand les forces qui ont donné naissance à un mouvement oscillatoire viennent à cesser brusquement, un nouvel état oscillatoire a lieu. Nous allons rechercher s'il est possible qu'il se maintienne dans un canal de largeur uniforme et de profondeur variable; nous pren-

---

[*] Nous verrons (17) que, dans la question des marées, nous n'avons besoin que de considérer la composante horizontale des forces; dans le cas, plus général, où les forces ont une composante verticale, celle-ci s'ajoute à g' dans l'équation (b).

drons pour cela les équations

$$(1)\qquad Y = \Xi \frac{d\eta}{dx} - \int_\eta^y \frac{dX}{dx}\,dy$$

et

$$n^2 X = \frac{d}{dx}\left(gK - n^2 \int_y^k Y\,dy\right)$$

ou

$$(2)\qquad n^2 X = g\frac{dK}{dx} - n^2 \int_y^k \frac{dY}{dx}\,dy,$$

puisque les limites de l'intégrale sont indépendantes de x; différentiant l'équation (1) successivement par rapport à y et x et l'équation (2) par rapport à x et y, nous avons, en égalant les valeurs de $\frac{d^2Y}{dx.dy}$ qui s'en déduisent,

$$(3)\qquad \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2X}{dx^2} = 0,$$

équation aux différentielles partielles dont la solution générale est

$$(4)\qquad X = \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \psi(x - y\sqrt{-1}),$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires, ou

$$X = \chi(x + y\sqrt{-1}) + \chi(x - y\sqrt{-1}) + \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\omega(y + x\sqrt{-1}) - \omega(x - y\sqrt{-1})\right],$$

χ et ω ne contenant dans leur forme aucune imaginaire. Il nous reste à voir si nous pouvons déterminer ces fonctions de manière à satisfaire à l'équation (2), dans laquelle nous aurons remplacé Y par sa valeur tirée de l'équation (1); il nous suffit de considérer un seul des termes de X, un calcul identique s'appliquant à l'autre, et nous poserons

$$X = \nu'(y + x\sqrt{-1}) + \nu'(x - y\sqrt{-1}),$$

en considérant ν' comme la dérivée d'une fonction ν; en formant donc chacune des quantités $\int \frac{dX}{dx}$, Ξ pour avoir Y, puis $\frac{dK}{dx}$ et $\int \frac{dY}{dx}\,dy$ pour avoir X, nous aurons, après réductions,

$$\begin{aligned}(n^2K - n^2y - g)\frac{d^2}{dx^2}&\left[\varphi\left(\eta + x\sqrt{-1}\right) + \varphi\left(\eta - x\sqrt{-1}\right)\right]\\ &- g\left[\varphi''\left(K + x\sqrt{-1}\right) + \varphi''\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right]\\ &+ n^2\left[\varphi'\left(K + x\sqrt{-1}\right) + \varphi'\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right] = 0;\end{aligned}$$

x et y étant des variables indépendantes, cette équation nécessite les deux suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\left[\varphi\left(\eta + x\sqrt{-1}\right) + \varphi\left(\eta - x\sqrt{-1}\right)\right] = 0,\\ &g\left[\varphi''\left(K + x\sqrt{-1}\right) + \varphi''\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right]\\ &- n^2\left[\varphi'\left(K + x\sqrt{-1}\right) + \varphi'\left(K - x\sqrt{-1}\right)\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

La première nous montre que, lorsque η est variable ou fonction de x, il n'est pas possible d'y satisfaire par une fonction quelconque de φ; le mouvement oscillatoire que nous avons supposé ne peut exister, et donnera naissance à des *brisants* au lieu de vagues continues.

Des mouvements ondulatoires soustraits à l'action des forces extérieures.

6. *Des vagues dans un canal de largeur et de profondeur constantes.* — Nous sommes donc conduits, par ce qui précède, quand il n'y a plus de forces extérieures, à considérer le mouvement ondulatoire dans un canal de profondeur constante; nous allons étudier les diverses circonstances de ce mouvement.

Nos équations sont

$$(1)\qquad Y = -\int_0^y \frac{dX}{dx}\,dy,$$

$$(2)\qquad n^2X = g\frac{dK}{dx} + n^2\int_k^y \frac{dY}{dx}\,dy,$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{d^2X}{dy^2}+\frac{d^2X}{dx^2}=0.$$

Nous supposons un mouvement uniforme oscillatoire, et nous prendrons X de la forme

$$(4)\qquad X = P\cos(nt - mx - Q),$$

où P et Q sont des fonctions de y. La substitution de X dans nos équations nous permettra, tout en déterminant ces fonctions, de vérifier l'exactitude de notre hypothèse.

Si nous posons $P\cos Q = R$ et $P\sin Q = S$, nous aurons

$$X = R\cos(nt - mx) + S\sin(nt - mx)$$

et, substituant dans (3),

$$\frac{d^2R}{dy^2} - m^2R = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2S}{dy^2} - m^2S = 0,$$

d'où

$$R = Ce^{my} + De^{-my} \quad \text{et} \quad S = C'e^{my} + D'e^{-my},$$

C, C', D et D' désignant des constantes; nous aurons donc pour X

$$(5)\qquad X = (Ce^{my} + De^{-my})\cos(nt - mx) + (C'e^{my} + D'e^{-my})\sin(nt - mx);$$

nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned}
Y &= -(Ce^{my} - De^{-my} - C + D)\sin(nt - mx)\\
&\quad + (C'e^{my} - D'e^{-my} - C' + D')\cos(nt - mx),\\
K &= -(Ce^{mk} - De^{-mk} - C + D)\sin(nt - mx)\\
&\quad + (C'e^{mk} - D'e^{-mk} - C' + D')\cos(nt - mx),\\
\frac{dY}{dx} &= \ \ m(Ce^{my} - De^{-my} - C + D)\cos(nt - mx)\\
&\quad + m(C'e^{my} - D'e^{-my} - C' + D')\sin(nt - mx),\\
\int_y^k \frac{dY}{dx}\,dy &= -[Ce^{my} + De^{-my} - Ce^{mk} - De^{-mk}\\
&\qquad\qquad + m(y-k) - C + D]\cos(nt - mx)\\
&\quad - [C'e^{my} + D'e^{-my} - C'e^{mk} - D'e^{-mk}\\
&\qquad\qquad + m(y-k) - C' + D']\sin(nt - mx),
\end{aligned}$$

et, substituant dans l'équation (2), nous avons

$$\begin{aligned}
& n^2(Ce^{my}+De^{-my})\cos(nt-mx)+n^2(C'e^{my}+D'e^{-my})\sin(nt-mx)\\
= \;& mg(Ce^{mk}-De^{-mk}-C+D)\cos(nt-mx)\\
& +mg(C'e^{mk}-D'e^{-mk}-C'+D')\sin(nt-mx)\\
& +n^2[Ce^{my}+De^{-my}-Ce^{mk}-De^{-mk}+m(y-k)-C+D]\cos(nt-mx)\\
& +n^2[C'e^{my}+D'e^{-my}-C'e^{mk}-D'e^{-mk}+m(y-k)-C'+D']\sin(nt-mx);
\end{aligned}$$

réduisant et égalant séparément à zéro les coefficients de $\cos(nt-mx)$ et $\sin(nt-mx)$, en remarquant que y est indépendant de k, nous obtenons

$$D = C \quad \text{et} \quad D' = C'$$

et

$$mgC(e^{mk}-e^{-mk})+n^2C(e^{mk}+e^{-mk}) = 0,$$
$$mgC'(e^{mk}-e^{-mk})+n^2C'(e^{mk}+e^{-mk}) = 0,$$

équations qui ne déterminent que $\frac{C}{C'}$ et exigent, pour être compatibles, la relation

$$n^2 = mg\frac{e^{mk}-e^{-mk}}{e^{mk}+e^{-mk}}. \tag{6}$$

L'équation (5) devient

$$X = (e^{my}+e^{-my})[C\cos(nt-mx)+C'\sin(nt+mx)]$$

ou, en posant $A = \sqrt{C^2+C'^2}$ et $\operatorname{tang} B = \frac{C}{C'}$,

$$X = A(e^{my}+e^{-my})\cos(nt-mx-B), \tag{7}$$

d'où l'on déduit

$$Y = -A(e^{my}-e^{-my})\sin(nt-mx-B).$$

Ces expressions nous montrent la simultanéité du mouvement des molécules situées primitivement sur une même verticale, et nous permettent, par un changement de l'origine du temps, de faire disparaître la constante B. Nous avons donc finalement, pour les composantes des déplacements du mouvement ondulatoire,

$$(8) \qquad X = A(e^{my} + e^{-my})\cos(nt - mx)$$

et

$$Y = -A(e^{my} - e^{-my})\sin(nt - mx),$$

où A est une constante et où m et n sont liées par la relation (6). $nt - mx$ est ce que l'on appelle la *phase* de la vague; nous voyons que X et Y ne changent pas quand nt et mx varient respectivement d'un multiple pair de 2π; le mouvement est donc le même au même instant en des points distants de $\frac{2\pi}{m}$, et repasse en un même point par la même valeur, à des intervalles de temps $\frac{2\pi}{n}$.

$\frac{2\pi}{m} = \lambda$ est la *longueur* ou *amplitude* de la vague.

$\frac{2\pi}{n} = \tau$ est sa *période*.

Sa *vitesse* est donnée par $\frac{n}{m}$ (5) ou $\frac{\lambda}{\tau}$, et, en tenant compte de (6), elle est

$$v = \sqrt{\frac{g(e^{mk} - e^{-mk})}{m(e^{mk} + e^{-mk})}};$$

pour une profondeur donnée, elle varie avec la largeur et la période de la vague, et, pour une largeur ou une période donnée, elle varie avec la profondeur.

7. Les vagues que nous rencontrons le plus souvent dans la nature sont de deux sortes, ou des vagues très-courtes par rapport à la profondeur de l'eau, comme celles qui animent la surface de la mer ou des rivières, ou des vagues très-longues, appelées *vagues-marées* (*voir* n° **17**), dont la période est liée au mouvement des astres, et qui produisent les marées dans les rivières et les canaux resserrés.

La relation (6) peut s'écrire

$$\tau^2 = \frac{2\pi\lambda}{g}\,\frac{e^{\frac{4\pi k}{\lambda}} + 1}{e^{\frac{4\pi k}{\lambda}} - 1}.$$

Dans les vagues ordinaires, où λ est très-petit, $\tau^2 = \frac{2\pi\lambda}{g}$ et $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$; la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la longueur.

Dans les vagues-marées, $\tau^2 = \frac{\lambda^2}{gk}$ et $v = \sqrt{gk}$; la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur.

Nous voyons aussi, d'après les équations (8), que les plus grands déplacements horizontaux et verticaux d'une molécule sont $A(e^{my}+e^{-my})$ et $A(e^{my}-e^{-my})$, ou sont proportionnels à $e^{\frac{2\pi}{\lambda}y}+e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}$ et à $e^{\frac{2\pi}{\lambda}y}-e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}$. Au fond de l'eau $Y=0$ et $X=2A$; dans les lames courtes, les déplacements horizontaux et verticaux sont à peu près égaux, excepté près du fond, et insensibles par rapport à ceux de la surface, à partir d'une certaine profondeur; à une profondeur simplement égale à λ, ce rapport est de $\frac{1}{535}$.

Dans les vagues-marées, au contraire, le déplacement horizontal est à très-peu près le même au fond et à la surface; le déplacement vertical varie comme la hauteur et est beaucoup plus faible que l'horizontal, puisque leur rapport, pour une assez grande valeur de λ, est $\frac{4\pi k}{2\lambda}$.

8. Les valeurs de X et Y peuvent s'écrire

$$X = A\left(e^{\frac{2\pi}{\lambda}y}+e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}\right)\cos(nt-mx) = C\cos(nt-mx),$$
$$Y = -A\left(e^{\frac{2\pi}{\lambda}y}-e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}\right)\sin(nt-mx) = -C'\cos(nt-mx);$$

la courbe décrite par un point quelconque x, y est donc

$$\frac{X^2}{C^2}+\frac{Y^2}{C'^2}=1,$$

équation d'une ellipse ayant pour centre le point considéré, qui est très-allongée dans le cas de la vague-marée, et qui devient un cercle dans les vagues assez courtes pour qu'on puisse négliger $e^{-\frac{2\pi}{\lambda}y}$; dans ce dernier cas, en appelant θ l'inclinaison d'un rayon quelconque,

$$\tang\theta = -\cot(nt - mx) \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + nt - mx;$$

donc les molécules se meuvent uniformément autour de leur position de repos, ayant leur plus grande vitesse en avant ou en arrière quand elles sont au point le plus haut ou le plus bas de la circonférence; nous avons du reste, en général,

$$\frac{dX}{dt} = -nC\sin(nt - mx) = n\frac{C}{C'}Y;$$

la vitesse horizontale a sa plus grande valeur absolue au moment de la haute ou de la basse mer, et est nulle à mi-marée, ou quand l'eau est à son niveau moyen.

9. Reprenons les équations (1) et (2); puisque nous les avons satisfaites par le groupe des valeurs (8), nous les satisferons également par le groupe des valeurs

$$(9) \qquad \begin{cases} X = A(e^{my} + e^{-my})\cos(nt + mx), \\ Y = -A(e^{my} - e^{-my})\sin(nt + mx), \end{cases}$$

qui correspondent à une vague égale à la première, mais parcourant le canal avec une vitesse égale et de sens contraire.

De plus, d'après la forme de nos équations différentielles, si nous les satisfaisons par un certain nombre de fonctions X', X'', X''',..., Y', Y'', Y''',..., nous les satisferons également par une combinaison linéaire quelconque de ces fonctions; nous voyons donc que des vagues en nombre quelconque peuvent exister sur une surface liquide, et que la dépression ou l'élévation de l'eau sera la résultante arithmétique des dépressions ou élévations partielles.

Prenons, par exemple, les vagues représentées par les équations (8) et (9), et supposons-les exister simultanément: nous aurons

$$(10) \qquad \begin{cases} X = 2A(e^{my} + e^{-my})\cos nt \cos mx, \\ Y = 2A(e^{my} - e^{-my})\cos nt \sin mx. \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a pas de terme en $nt - mx$, l'eau est animée d'un mouvement ondulatoire et stationnaire; pour un point donné, le rapport $\frac{X}{Y}$ est constant; donc chaque molécule se meut en ligne droite, le maximum de X a lieu pour les points où mx est un multiple de $\frac{\pi}{2}$, et Y y est nul; celui de Y a lieu pour ceux où mx est un multiple de π, et X y est nul.

Théorie des longues vagues quand la profondeur du canal est sensiblement modifiée par l'élévation de la marée.

Le phénomène dont nous allons étudier les lois est des plus importants et se présente journellement dans toutes les rivières où la marée se fait sentir.

10. Nous allons d'abord supposer que *la largeur est uniforme* et *la profondeur constante*, et que le canal n'a pas de courant vers la mer. Nous venons de voir (n° **7**) que, pour la *vague-marée*, le déplacement vertical est extrêmement petit par rapport à l'horizontal, et par suite négligeable, et que toutes les molécules d'eau d'une même file verticale ont des déplacements horizontaux égaux, de sorte que, pour l'estimation de la pression en un point, nous n'avons à tenir compte que de la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de ce point; nous allons établir les équations de *continuité* et de *mouvement* d'après ces nouvelles conditions, et nous pourrons pousser plus loin l'étude de la question.

(*a*) *Équation de continuité.* — Soient x et $x+h$ les abscisses de deux files verticales de molécules, et k la profondeur de l'eau au repos; au bout du temps t la distance des deux files sera

$$h\left(1+\frac{dX}{dx}\right),$$

et k sera devenu

$$V = k + K,$$

d'où

$$hk = h\left(1+\frac{dX}{dx}\right)V,$$

et

(1) $$V = \frac{k}{1 + \frac{dX}{dx}}$$

pour la relation cherchée.

(*b*) *Équation du mouvement.* — Les colonnes d'eau agissant sur les points dont les coordonnées sont y et $x + X$ et y et $x + X + h'\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)$ ont pour hauteur $V - y$ et $V + h'\frac{dV}{dx} - y$; donc l'élément horizontal de longueur $h'\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)$ est soumis à une pression $-gh'\frac{dV}{dx}$; nous avons alors, pour notre équation, en remarquant que x est indépendant de t,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -g\frac{dV}{dx}\frac{1}{1 + \frac{dX}{dx}}$$

ou, en vertu de (1),

(2) $$\frac{d^2X}{dt^2} = gk\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)^3}.$$

Nous résoudrons cette équation, qui nous donne la solution du problème, par approximations successives, pour les vagues-marées, $v^2 = gk$; développant le dénominateur, nous obtenons

(3) $$\frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = v^2\frac{d^2X}{dx^2}\left[-3\frac{dX}{dx} + 6\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \ldots\right].$$

Première approximation. — En négligeant le deuxième membre, nous avons simplement

$$\frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = 0,$$

équation bien connue, que l'on résout en posant $vt - x = u$, et $vt + x = w$, d'où

$$\frac{d^2X}{du.dw} = 0, \quad \frac{dX}{dw} = \psi'(w) \quad \text{et} \quad X = \varphi(u) + \psi(w)$$

ou

$$X = \varphi(vt - x) + \psi(vt + x),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires à déterminer, d'après les conditions du problème; or $\psi(vt + x)$ représente une vague se mouvant en arrière, et, comme nous n'en observons pas dans le phénomène en question, nous n'aurons pas de terme de ce genre dans X; de plus, la théorie des marées nous apprend qu'à l'embouchure d'une rivière, en mer libre, le mouvement de l'eau ne dépend que de termes de la forme $\cos(nt + A)$, où n et A sont des quantités indépendantes du temps; nous prendrons donc X de la forme $a\cos(nt - mx - A)$ ou, en déplaçant l'origine du temps et nous rappelant que $v = \frac{n}{m}$ (3),

$$X = a\cos(mvt - mx). \tag{4}$$

X pourra d'ailleurs se composer d'une somme de termes en sinus ou cosinus de $(mvt - mx)$, dont chacun se traitera de la même manière.

Seconde approximation. — Substituant dans le second membre de (3) les valeurs de $\frac{dX}{dx}$ et $\frac{d^2X}{dx^2}$ déduites de (4) et nous bornant au premier terme, nous avons

$$\frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{3}{2}a^2v^2m^3\sin(2mvt - 2mx).$$

En traitant cette équation comme la précédente, nous aurons pour solution

$$X = \varphi(vt - x) + \psi(vt + x) - \frac{3}{16}a^2m^2(vt + x)\cos(2mvt - 2mx);$$

les fonctions φ et ψ doivent être choisies de manière que X satisfasse aux lois de la marée à l'embouchure et contienne le même terme en a que la première valeur approchée; il faut donc détruire le terme $vt\cos(2mvt - 2mx)$, qui impliquerait une marée croissant constamment avec le temps; nous poserons donc

$$\begin{aligned}\varphi(vt - x) + \psi(vt + x) &\\ = a\cos(mvt - mx) &+ \frac{3}{16}a^2m^2(vt - x)\cos(2mvt - 2mx)\\ &+ ca^2\cos(2mvt - 2mx) + c'a^2\sin(2mvt - 2mx);\end{aligned}$$

d'où

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = a\cos(mvt - mx) - \frac{3}{8}a^2m^2x\cos(2mvt - 2mx) \\ \qquad + ca^2\cos(mvt - 2mx) + c'a^2\sin(2mvt - 2mx), \end{cases}$$

où c et c' vont être déterminés d'après la loi de la marée à l'embouchure. Portons la valeur de $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, déduite de (5) dans l'expression de V; développons le dénominateur, en nous arrêtant aux termes en a^2, et remplaçons les puissances des lignes trigonométriques par leurs valeurs en fonction des multiples de ces arcs; nous aurons

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{V} = k\Big[1 - am\sin(mvt - mx) + \frac{a^2m^2}{2} \\ \qquad + \frac{3}{4}a^2m^3x\sin(2mvt - 2mx) - 2a^2mc\sin(2mvt - 2mx) \\ \qquad\qquad + a^2\left(2mc' - \frac{m^2}{8}\right)\cos(2mvt - 2mx\Big]; \end{cases}$$

c'est la hauteur de l'eau à l'endroit où se trouvent actuellement les molécules dont l'abscisse était primitivement x; si nous voulons cette hauteur pour les points dont l'abscisse actuelle est x', nous remarquerons que $x' = x + \mathrm{X}$; d'où, en nous bornant à la première approximation,

$$x = x' - \mathrm{X}' = x' - a\cos(mvt - mx').$$

Substituant dans (6), le terme en a devient

$$\sin[mvt - mx' + ma\cos(mvt - mx')]$$
$$= \sin(mvt - mx') + \frac{ma}{2} + \frac{ma}{2}\cos(2mvt - 2mx');$$

les termes en a^2 ne changent pas avec notre degré d'approximation, et nous avons

$$\mathrm{V} = k\Big[1 - am\sin(mvt - mx')$$
$$+ \frac{3}{4}a^2m^3x'\sin(2mvt - 2mx') - 2a^2mc\sin(2mvt - 2mx')$$
$$+ a^2\left(2mc' - \frac{5m^2}{8}\right)\cos(2mvt - 2m'x)\Big].$$

Prenons pour origine des abscisses le point où le canal débouche en mer; d'après les lois de la marée, V ne peut dépendre que de $\sin mvt$; donc, pour $x' = 0$, les termes en $(2mvt - 2mx)$ doivent disparaître, ce qui nous donne

$$c = 0 \quad \text{et} \quad c' = -\frac{5m}{16},$$

et la valeur de V devient, en posant $am = b$,

$$(7) \quad V = k\left[1 - b\sin(mvt - mx') + \frac{3}{4}b^2 mx' \sin(2mvt - 2mx')\right];$$

d'où, pour l'élévation au-dessus du niveau moyen,

$$(8) \quad K = -bk\sin(mvt - mx') + \frac{3}{4}b^2 mx' \sin(2mvt - 2mx').$$

Le premier terme est semblable à celui que nous avons trouvé (**6**); le second terme, entièrement différent, contient un facteur x' en dehors de la fonction périodique : on peut le considérer comme représentant une vague dont la longueur augmente à mesure qu'elle remonte le canal.

Si l'on construit les courbes représentées par (8), en prenant K pour ordonnée et successivement x' et t comme abscisses, on obtient la forme de l'onde à un moment donné, et la loi de la marée en un point donné; ces courbes mettent très-bien en évidence les faits énoncés au n° **2**.

11. Nous pouvons, du reste, calculer le temps de la montée et de la baissée; l'expression de K peut s'écrire

$$-bk\left[\sin(mvt - mx') - \cos(mvt - mx')\frac{3}{2}bmx'\sin(mvt - mx')\right],$$

ou, le second terme étant petit par rapport au premier,

$$K = -bk\sin\left[mvt - mx' - \frac{3}{2}bmx'\sin(mvt - mx')\right].$$

Les phases de la basse mer s'obtiendront en donnant au sinus sa plus grande valeur positive, ou en faisant

$$mvt - mx' - \frac{3}{2} bmx' \sin(mvt - mx') = 2q\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Prenons comme première approximation

$$mvt - mx' = 2q\pi + \frac{\pi}{2},$$

substituant,

$$mvt - mx' - \frac{3}{2} bmx' = \frac{\pi}{2},$$

d'où, pour les mers basses successives,

$$t_1 = \frac{1}{mv}\left(\frac{\pi}{2} + mx' + \frac{3}{2} bmx'\right),$$

$$t_2 = \frac{1}{mv}\left(\frac{5\pi}{2} + mx' + \frac{3}{2} bmx'\right), \ldots;$$

nous aurons de même, pour les mers hautes,

$$t'_1 = \frac{1}{mv}\left(\frac{3\pi}{2} + mx' - \frac{3}{2} bmx'\right),$$

$$t'_2 = \frac{1}{mv}\left(\frac{7\pi}{2} + mx' - \frac{3}{2} bmx'\right), \ldots,$$

d'où, pour l'intervalle d'une mer basse à une mer haute,

$$t'_1 - t_1 = \frac{1}{mv}(\pi - 3bmx')$$

et d'une mer haute à une mer basse

$$t_2 - t'_1 = \frac{1}{mv}(\pi + 3bmx').$$

La baissée dure donc plus que la montée de l'intervalle de temps

$\frac{6bx'}{v}$, où $\frac{x'}{v}$ est le temps employé par la vague-marée pour se propager de l'embouchure au point considéré, et b, d'après (8), est le rapport de la hauteur maximum de la marée à la profondeur moyenne.

Ainsi, en rivière, les moments de la haute et de la basse mer et la différence de la durée des phases correspondantes dépendent de la distance de la station considérée à l'embouchure et pour une même station de la grandeur de la marée, ce qu'apprend l'observation. Nous pouvons encore tirer de nos formules d'autres résultats conformes encore à l'observation; en effet, la haute mer ayant lieu au point x', au temps $\frac{1}{mv}\left(\frac{3\pi}{2} + mx' - \frac{3}{2}bmx'\right)$, a lieu au point $x' + x_1$ au temps $\frac{1}{mv}\left[\frac{3\pi}{2} + m(x' + x_1) - \frac{3}{2}bm(x' + x_1)\right]$; donc le temps employé à parcourir l'espace x_1 est $\frac{x_1}{v}\left(1 - \frac{3b}{2}\right)$, et la vitesse de propagation est approximativement $v\left(1 + \frac{3b}{2}\right)$ ou $\sqrt{gk(1 + 3b)}$; pour la vitesse de la basse mer, nous trouverions de même $\sqrt{gk(1 - 3b)}$. Or les vitesses de la vague-marée en mer libre, pour des profondeurs répondant à la haute et à la basse mer, seraient respectivement $\sqrt{gk(1 + b)}$ et $\sqrt{gk(1 - b)}$; donc la vague-marée se propage à haute mer plus rapidement que dans une mer libre de même profondeur et moins rapidement à mer basse. Quant à la vitesse du courant, nous avons, en remplaçant les constantes par leurs valeurs dans (5),

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} X = a\cos(mvt - mx) - \frac{3}{8}a^2m^2x\cos(2mvt - 2mx) \\ + \frac{5}{16}ma^2\sin(2mvt - 2mx), \end{aligned}\right.$$

et

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = amv\Big[-\sin(mvt - mx) + \frac{3}{4}am^2x\sin(2mvt - 2mx) \\ + \frac{5}{8}ma\sin(2mvt - 2mx)\Big]. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir la vitesse en x', nous y remplacerons, comme dans la valeur de V, x par $x' - a\cos(mvt - mx')$, et nous aurons

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi = amv\Big[-\sin(mvt - mx') - \frac{ma}{2} + \frac{ma}{8}\cos(2mvt - 2mx')\\ + \frac{3}{4}am^2x'\sin(2mvt - 2mx)\Big];\end{aligned}\right.$$

à haute et à basse mer, nous avons

$$\varphi_1 = bv\left(1 - \frac{5b}{8}\right) \quad \text{et} \quad \varphi'_1 = -bv\left(1 + \frac{5b}{8}\right).$$

Ces valeurs répondent à très-peu près aux maxima de la vitesse dans les deux sens de la rivière, et nous vérifions que le courant de *jusant* est plus fort que le courant de *flot*.

Nous pourrions procéder à une troisième approximation, qui sera quelquefois nécessaire dans la pratique; en procédant exactement comme plus haut et en partant de la valeur (9) de X, nous obtiendrions

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}V = k\Big\{&1 - b\sin(mvt - mx')\\ &+ \Big[\frac{3}{4}b^2\sin(2mvt - 2mx')\\ &\quad + \frac{33}{32}b^3\cos(mvt - mx')\\ &\quad - \frac{21}{32}b^3\cos(3mvt - 3mx')\Big]mx'\\ &+ \Big[\frac{9}{32}b^3\sin(mvt - mx')\\ &\quad - \frac{27}{32}b^3\sin(3mvt - 3mx')\Big]m^2x'^2\Big\}.\end{aligned}\right.$$

On discuterait de même les valeurs des durées de la montée et de la baissée, de la vitesse des courants de flot et de jusant; mais, les résultats de la deuxième approximation n'étant pas modifiés dans leur caractère essentiel, et représentant le phénomène que nous avions en vue avec une assez grande exactitude, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

12. Étudions maintenant les modifications apportées aux résultats précédents, si *l'eau du canal est animée vers la mer d'un courant*, dont nous représenterons par e la vitesse moyenne.

Les équations du problème resteront les mêmes qu'au n° **10**; mais, pour tenir compte des nouvelles circonstances, nous prendrons pour la première approximation

$$\mathrm{X} = a\cos(mvt - mx) - et;$$

pour la deuxième, nous aurons encore

$$\mathrm{X} = \varphi(vt - x) + \psi(vt + x) - \frac{3}{16}a^2m^2(vt + x)\cos(2mvt - 2mx).$$

Mais les fonctions arbitraires ne seront plus les mêmes; car, d'un côté, nous devons comprendre dans X la première valeur approchée, de l'autre, comme, au bout d'un certain temps, toutes les molécules arrivent à la mer, nous ne pouvons avoir de terme contenant le facteur x, autrement la loi de la marée à l'embouchure dépendrait de x, ce qui est impossible; elle ne peut non plus dépendre de t; nous introduirons donc un terme $f(vt - x)\cos(2mvt - 2mx)$, et nous prendrons finalement

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} = {} & a\cos(mvt - mx) - et \\ & - \frac{3}{8}a^2m^2x\cos(2mvt - 2mx) + ca^2\cos(2mvt - 2mx) \\ & + c'a^2\sin(2mvt - 2mx) + f(vt - x)\cos(2mvt - mx), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(6')\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V} = k\Big\{ & 1 - am\sin(mvt - mx) + \frac{a^2m^2}{2} \\ & - \left[2ca^2m + 2fmvt - \left(2fm + \frac{3}{4}a^2m^3\right)x\right] \\ & \times\sin(2mvt - 2mx) \\ & + \left(2c'a^2m + f + \frac{3}{8}a^2m^2\right)\cos(2mvt - 2mx)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

C'est la hauteur au point dont l'abscisse primitive était x; si nous la voulons pour le point dont l'abscisse est $x' = x + \mathrm{X}$, nous avons, en nous bornant à la première approximation,

$$x = x' - a\cos(mvt - mx) + et$$

d'où, par approximation successive et partant de $x = x' + et$,

$$x = x' + et - a\cos(mvt - met - mx').$$

Remplaçant x par cette valeur dans (6′), en nous contentant de $x = x' + et$ pour les termes en a^2, nous avons

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V} = k\Big(& 1 - am\sin(mvt - met - mx') \\ &+ \Big\{-2ca^2m + \Big[-2fm(v - e) + \tfrac{3}{4}a^2m^3e\Big]t \\ &\qquad\qquad + \Big(2fm + \tfrac{3}{4}a^2m^2\Big)x'\Big\} \\ &\times \sin(2mvt - 2met - 2mx') \\ &+ \Big(2c'a^2m + f - \tfrac{5}{8}a^2m^2\Big)\cos(2mvt - 2met - 2mx')\Big). \end{aligned}\right.$$

A la mer, où $x' = 0$, la marée est représentée par

$$-kam\sin(v - e)mt,$$

d'où

$$c = 0, \quad f = \frac{3}{8}a^2m^2\frac{e}{v - e} \quad \text{et} \quad c' = \frac{5v - 8e}{v - e}\,\frac{m}{16};$$

et, en posant $am = b$, nous obtenons, pour $\mathrm{K} = \mathrm{V} - k$,

$$(8')\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K} = &- bk\sin(mvt - met - mx') \\ &+ \frac{3}{4}b^2k\frac{v}{v - e}mx'\sin(2mvt - 2met - 2mx'). \end{aligned}\right.$$

Nous pourrions continuer, comme dans le problème précédent, l'étude des valeurs de K, ce qui sera nécessaire dans la pratique, mais le point qui offre le plus d'intérêt est celui de la durée de la *montée* et de la *baissée* de l'eau; en procédant comme au n° **11**, nous trouverions, pour les époques successives de la basse et de la haute mer,

$$t_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{\pi}{2} + mx' + \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right),$$

$$t_2 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{5\pi}{2} + mx' + \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right);$$

et

$$t'_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{3\pi}{2} + mx' - \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right),$$

$$t'_2 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\frac{7\pi}{2} + mx' - \frac{3b}{2}\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où, pour la durée de la montée,

$$t'_1 - t_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\pi - 3b\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right)$$

et, pour celle de la baissée,

$$t_2 - t'_1 = \frac{1}{(v-e)m}\left(\pi + 3b\,\frac{v}{v-e}\,mx'\right);$$

la différence est $6bx'\,\frac{v}{(v-e)^2}$, ou, comme $v - e = \frac{m}{n}$, $6bx'\left(\frac{m}{n} + e\frac{m^2}{n^2}\right)$; quand il n'y a pas de courant, elle est $6bx'\,\frac{m}{n}$.

Nous voyons donc que l'un des effets du courant est de multiplier par $\left(1 + \frac{em}{n}\right)$ la différence de la durée de la baissée et de la montée.

13. Les recherches précédentes ont supposé que le canal avait une profondeur constante dans sa section transversale; nous pouvons étudier le cas où la vague-marée se propage dans un canal dont la section transversale sera toujours constante, mais de profil quelconque.

Soit $u = \psi(y)$ l'aire de cette section jusqu'à la hauteur y (les ordonnées étant comptées du point le plus bas), de sorte que $\frac{du}{dy} = z$,

z représentant une ordonnée horizontale perpendiculaire à la direction du canal. En raisonnant absolument comme au n° **10**, et conservant les mêmes notations, nous trouvons

$$(1)\qquad \psi(\mathrm{V}) = \frac{\psi(k)}{1+\dfrac{d\mathrm{X}}{dx}}$$

pour l'équation de continuité, et

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = -g\frac{d\mathrm{V}}{dx}\frac{1}{1+\dfrac{d\mathrm{X}}{dx}}$$

pour l'équation de mouvement; ou, en éliminant $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$,

$$(2)\qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \frac{g\psi(k)}{\psi'(\mathrm{V})}\frac{\dfrac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}}{\left(1+\dfrac{d\mathrm{X}}{dx}\right)^3}.$$

Cette équation se résoudra, comme les équations analogues que nous avons déjà rencontrées, par approximations successives.

Comme première approximation, prenons $\mathrm{V}=k$ et négligeons $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, qui est fort petit : nous avons

$$(3)\qquad \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \frac{g\psi(k)}{\psi'(k)}\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2},$$

ou, en posant $\frac{\psi(k)}{\psi'(k)} = k'$ et $v'^2 = gk'$,

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = v'^2\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2},$$

dont la solution (**10**) est $\mathrm{X} = \chi(v't - x) + \omega(v't + x)$, ce qui nous montre que la vague se propage avec la même vitesse $v' = \sqrt{gk'}$ que si le canal avait une profondeur constante, égale à $\frac{\psi(k)}{\psi'(k)}$ ou $\frac{\psi(k)}{\varphi(k)}$. Dans le cas d'une section triangulaire, par exemple, $\varphi(y) = z = ay$, et $\psi(y) = \frac{ay^2}{2}$, d'où $k' = \frac{k}{2}$, et la vitesse est la même que dans un canal rectangulaire de hauteur égale à la moitié de celle du triangle; dans le cas d'une section parabolique, $\varphi(y) = z = \sqrt{ay}$, $\psi(y) = \frac{2}{3}\sqrt{ay^3}$ et $k' = \frac{2k}{3}$; en général, il suffit de transformer le profil quelconque donné en un rectangle de même aire et même largeur et dont la hauteur déterminera la vitesse par la relation $v = \sqrt{gh}$.

Pour une seconde approximation, nous développerons l'équation (1)

$$\psi(\mathrm{V}) = \psi(k) + \psi'(k)(\mathrm{V} - k) = \psi(k) - \psi(k)\frac{d\mathrm{X}}{dx},$$

d'où

$$\mathrm{V} - k = -\frac{\psi(k)}{\psi'(k)}\frac{d\mathrm{X}}{dx},$$

puis

$$\psi'(\mathrm{V}) = \psi'(k) + \psi''(k)(\mathrm{V} - k) = \psi'(k) - \frac{\psi(k)\psi''(k)}{\psi'(k)}\frac{d\mathrm{X}}{dx};$$

d'où, remplaçant dans (2) $\frac{\psi(k)}{\psi'(v)}$ par la valeur déduite de ces relations, nous obtenons

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \frac{g\psi(k)}{\psi'(k)}\left[1 - \frac{3\psi'(k)^2 - \psi(k)\psi''(k)}{\psi'(k)^2}\frac{d\mathrm{X}}{dx}\right]\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2}. \tag{4}$$

Cette équation, après y avoir remplacé $\psi(k)$ et $\psi'(k)$ par leurs valeurs déterminées dans chaque cas particulier, se traitera absolument comme l'équation (3) du n° **10**. Cette discussion suppose évidemment que le mouvement dans la direction des z est insignifiant par rapport à celui dans le sens des x, et tout au plus comparable au mouvement vertical; nous ne pourrons donc appliquer ces formules que dans le cas d'une rivière ou d'un canal encaissé dans ses rives, et elles seront en défaut quand, à mer basse, la rivière se réduit à de petits bras coulant au milieu de larges bancs de sable.

Des mouvements ondulatoires sous l'action des forces extérieures.

14. *Canal de largeur constante et de profondeur variable.* — Nous avons trouvé pour les équations générales, dans le cas où nous considérons l'action des forces extérieures (4),

$$Y = \Xi \frac{d\eta}{dx} - \int_{\eta}^{y} \frac{dX}{dx} dy, \tag{1}$$

et

$$\frac{d^2X}{dt^2} = F - \frac{d}{dx}\left(gK + \int_{y}^{k} \frac{d^2Y}{dt^2} dy\right), \tag{2}$$

et nous avons vu (5) que ces équations ne pouvaient être satisfaites dans le cas d'une profondeur variable, quand la force extérieure est nulle.

Nous ne pourrons donc appliquer avec une entière exactitude les résultats que nous avons obtenus dans le cas d'une profondeur constante; mais comme, dans ce qui suit, nous supposerons que la profondeur varie lentement, nous conserverons la forme trouvée pour les déplacements, ce qui nous permettra d'apprécier encore très-exactement l'effet de la variation de profondeur d'un canal sur les circonstances générales des vagues. Nous avons trouvé (6)

$$X = A\,(e^{my} + e^{-my}) \cos(nt - mx),$$

où m et n sont reliés par la relation

$$n^2 = mg \frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}};$$

en comptant les ordonnées à partir d'un plan horizontal à une distance constante η du fond, il faudrait y changer y en $y - \eta$. Concevons notre canal divisé en sections assez petites pour que nous puissions y considérer les profondeurs comme constantes; les valeurs de X et de n^2 auront pour chacune d'elles la même forme que plus haut; nous pouvons donc raisonnablement conclure que la même chose aura lieu pour le canal entier, en y considérant η comme variable, et m comme une fonction de x (n dont dépend la période de la vague est invariable). A deviendra aussi une fonction de x, dont la forme sera à déterminer, et dans $\cos(nt - mx)$, mx, qui représente la décroissance de la phase pour l'espace x, sera remplacé par $\int m\,dx = M$; nous prendrons donc

$$X = A\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] \cos(nt - M) \tag{3}$$

et

$$n^2 = mg\,\frac{e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}}{e^{(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}}, \tag{4}$$

où η est une fonction de x, m une fonction implicite de x donnée par la relation $m = \frac{d\mathrm{M}}{dx}$, et A une fonction à déterminer.

Calculons Y; nous aurons d'abord

$\Xi = 2\mathrm{A}\cos(nt - \mathrm{M})$ (valeur de X pour le fond du canal, où $y = \eta$),

et

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{X}}{dx} &= \frac{d\mathrm{A}}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M})\\ &\quad + \mathrm{A}\,\frac{dm}{dx}(y-\eta)\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M});\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Y} = &- \frac{d\mathrm{A}}{dx}\,\frac{1}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M})\\ &- \mathrm{A}\,\frac{1}{m}\,\frac{dm}{dx}(y-\eta)\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M})\\ &+ \mathrm{A}\,\frac{1}{m^2}\,\frac{dm}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M})\\ &+ \mathrm{A}\,\frac{d\eta}{dx}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M})\\ &- \mathrm{A}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\sin(nt - \mathrm{M}),\end{aligned}$$

ou

$$\mathrm{Y} = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{\mathrm{A}}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt - \mathrm{M})\right\}. \tag{5}$$

Les variables x, y et t étant indépendantes, nous pouvons, dans la valeur de F, tirée de l'équation (2),

$$\mathrm{F} = \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} + \frac{d}{dx}\left(g\mathrm{K} + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}\,dy\right),$$

accomplir la différentiation et l'intégration sous le signe $\frac{d}{dx}$; nous avons donc

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{n^2A}{m}\left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)\right\},$$

$$\int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}dy = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)\right\}$$
$$+\frac{d}{dx}\left\{\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right]\cos(nt-M)\right\},$$

$$gK = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{gA}{m}\left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right]\cos(nt-M)\right\}$$

et

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -n^2A\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M);$$

d'où, en tenant compte de la relation (4),

$$F = -n^2A\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)$$
$$-\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right]\cos(nt-M)\right\}.$$

Pour faciliter la différentiation du second terme, nous remarquerons que, la profondeur variant lentement, $\frac{d\eta}{dx}$ et par suite $\frac{dm}{dx}$ et $\frac{dA}{dx}$, qui en dépendent, sont des quantités assez petites pour que nous puissions en négliger les puissances, les produits et les différentielles secondes; si donc nous posons

$$\frac{n^2A}{m^2}\left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] = P,$$

nous négligerons $\frac{d^2P}{dx^2}$, et nous aurons

$$\frac{d}{dx}[P\cos(nt-M)] = \frac{dP}{dx}\cos(nt-M) + Pm\sin(nt-M),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[P\cos(nt-M)] = \left(2\frac{dP}{dx}m + P\frac{dm}{dx}\right)\sin(nt-M) - m^2P\cos(nt-M)$$

et

$$F = -\left(2\frac{dP}{dx}m + P\frac{dm}{dx}\right)\sin(nt-M) = -2m^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(Pm^{\frac{1}{2}}\right)\sin(nt-M),$$

ou

$$(6)\qquad F = -2n^2 m^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left\{ A m^{-\frac{3}{2}} \left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] \sin(nt - M)\right\}.$$

Nous voyons déjà qu'en faisant la différentiation nous aurions un terme en A et un autre en $\frac{dA}{dx}$, et que par suite nous pourrions toujours trouver une valeur de $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$ qui annulerait F pour une valeur donnée de y, mais non quel que soit y; il faudra donc toujours une force, peut-être extrêmement petite, pour maintenir le mouvement ondulatoire.

En nous reportant au n° **8**, nous voyons qu'une des hypothèses les plus plausibles que nous puissions faire pour déterminer A, c'est que la résultante des forces horizontales qui agissent du fond à la surface est nulle.

En développant la valeur (6), nous avons

$$\begin{aligned} F = \Big\{ & -2n^2 \frac{dA}{dx} \frac{1}{m} \left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right] \\ & -2n^2 A \frac{1}{m} \frac{dm}{dx} (y-\eta) \left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right] \\ & +3n^2 A \frac{1}{m^2} \frac{dm}{dx} \left[e^{m(y-\eta)} + e^{m(\eta-y)}\right] \\ & \qquad + 2n^2 A \frac{d\eta}{dx} \left[e^{m(y-\eta)} - e^{m(\eta-y)}\right] \Big\} \sin(nt - M), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\eta^k F\,dy = \Big\{ & -2n^2 \frac{dA}{dx} \frac{1}{m^2} \left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \\ & -2n^2 A \frac{1}{m^2} \frac{dm}{dx} (k-\eta) \left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right] \\ & +5n^2 A \frac{1}{m^3} \frac{dm}{dx} \left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \\ & +2n^2 A \frac{1}{m} \frac{dx}{d\eta} \left[e^{m(k-\eta)} + e^{m(\eta-k)}\right] \\ & \qquad -4n^2 A \frac{1}{m} \frac{d\eta}{dx} \Big\} \sin(nt - M) \\ = & -2n^2 m^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{dA}{dx} m^{-\frac{5}{2}} \left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right] \\ & \qquad + A \frac{d}{dx}\left\{ m^{-\frac{5}{2}} \left[e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)}\right]\right\} \\ & \qquad\qquad + 2A m^{-\frac{3}{2}} \frac{d\eta}{dx} \Big) \sin(nt - M) \end{aligned}$$

et, en égalant les termes entre crochets à zéro,

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}\left\{m^{-\frac{5}{2}}\left[e^{m(k-\eta)}-e^{m(\eta-k)}\right]\right\} - 2m^{\frac{3}{2}}\frac{d\eta}{dx}}{m^{-\frac{5}{2}}\left[e^{m(k-\eta)}-e^{m(\eta-k)}\right]};$$

d'où, pour la valeur de A,

$$(7) \qquad A = \frac{Cm^{\frac{5}{2}}}{e^{m(k-\eta)}-e^{m(\eta-k)}}e^{Q},$$

Q étant donné par

$$(8) \qquad \frac{dQ}{dx} = -\frac{2m\frac{d\eta}{dx}}{e^{m(k-\eta)}-e^{m(\eta-k)}}.$$

D'après la relation (3), le coefficient du déplacement horizontal à la surface est

$$(9) \qquad A_1 = A\left[e^{m(k-\eta)}+e^{m(\eta-k)}\right] = \frac{Cg}{n^2}m^{\frac{7}{2}}e^{Q};$$

d'après la relation (5), K sera de la forme $B\sin(nt-M)+b\cos(nt-M)$ ou, en posant $\frac{b}{B}=\tang\alpha$, $\sqrt{B^2+b^2}\sin(nt-M+\alpha)$; comme b est très-petit par rapport à B, nous pouvons négliger b^2 sous le radical, et le coefficient du déplacement vertical à la surface est

$$(10) \qquad A_2 = A\left[e^{m(k-\eta)}-e^{m(\eta-k)}\right] = Cm^{\frac{5}{2}}e^{Q}.$$

Il ne nous reste donc qu'à déterminer la fonction Q, ce que nous ne pourrons faire en général; mais les limites suivantes donneront une idée de la valeur générale de cette fonction :

1° Si nous avons des vagues très-courtes pour leur profondeur, comme cela a lieu le plus souvent pour la mer ou les rivières (7), λ est très-petit ou m est très-grand; donc $\frac{dQ}{dx}$ est très-petit, et $e^{Q}=1$; les coefficients A_1 et A_2 sont proportionnels à $\lambda^{-\frac{7}{2}}$ et $\lambda^{-\frac{5}{2}}$, et l'on peut s'assurer que cette proportion est encore très-rigoureuse, même quand la profondeur n'est que la moitié de la longueur de la vague.

2° Dans les vagues-marées, λ est très-grand et m très-petit; donc

$$e^{m(k-\eta)} - e^{m(\eta-k)} = 2m(k-\eta) \quad \text{et} \quad \int \frac{dQ}{dx}dx = \mathrm{l}.(k-\eta) \quad \text{ou} \quad e^{Q} = k-\eta;$$

et, en tenant compte de la relation (4), qui devient $m = \frac{n}{\sqrt{g}} \frac{1}{(k-\eta)^{\frac{1}{2}}}$,

nous voyons que A_1 et A_2 sont ici proportionnels à $\lambda^{-\frac{3}{2}}$ et $\lambda^{-\frac{1}{2}}$.

15. *Canal de profondeur constante et de largeur variable.* — Nous pouvons, d'une manière tout à fait semblable, étudier les mouvements des vagues dans un canal étroit de profondeur constante, mais de largeur variable. Soit β la largeur variable; elle devient $\beta + \frac{d\beta}{dx}$ au bout du temps t, et nous aurons, pour exprimer la continuité,

$$\beta h l = \beta\left(1 + \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx}X\right) h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right) l\left(1 + \frac{dY}{dy}\right)$$

ou

$$0 = \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx}X + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy},$$

et

$$(1) \qquad Y = -\int_0^y \left(\frac{dX}{dx} + \frac{X}{\beta}\frac{d\beta}{dx}\right)$$

sera l'équation de continuité.

L'équation de mouvement est toujours

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = F - \frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}dy\right).$$

En procédant comme dans la question précédente, nous verrons que nous serons amené à prendre

$$(3) \qquad X = A(e^{my} + e^{-my})\cos(nt - mx)$$

avec

$$(4) \qquad n^2 = mg\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}},$$

A étant une fonction de x; en calculant les quantités qui entrent dans nos équations, nous trouvons

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Y} = -(e^{my} - e^{-my}) \Big[\frac{1}{m} \frac{d\mathrm{A}}{dx} \cos(nt - mx) + \mathrm{A} \sin(nt - mx) \\ + \frac{1}{m} \frac{\mathrm{A}}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \cos(nt - mx) \Big] \end{aligned} \right.$$

et

$$(6)\qquad \mathrm{F} = -(e^{my} + e^{-my}) \left(\frac{2n^2}{m} \frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{n^2}{m} \frac{\mathrm{A}}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \right) \sin(nt - mx).$$

Cette expression est constamment nulle ou le mouvement peut continuer sans force extérieure si $\frac{2d\mathrm{A}}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{\beta} \frac{d\beta}{dx} = 0$ ou $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\beta}}$, C étant une constante; c'est-à-dire qu'il faudrait que le coefficient du déplacement horizontal fût en raison inverse de la racine carrée de la largeur; le coefficient de déplacement vertical à la surface diffère très-peu de $-\mathrm{A}(e^{mk} - e^{-mk})$, et ainsi la hauteur des vagues sera, dans ce cas, en raison inverse de la racine carrée de la largeur du canal.

Dans le cas d'un canal de largeur et de profondeur constantes, nous avons vu (8) que les maxima de vitesses en avant ou en arrière ont lieu pour les points situés aux parties supérieures et inférieures des trajectoires circulaires ou elliptiques des molécules; il n'en est plus de même dans les deux derniers cas où le maximum et le minimum de Y ne répondent plus aux maxima absolus de x; et l'on voit, en formant l'expression de K, que, lorsque des vagues se propagent dans une rivière où la profondeur et la largeur vont en diminuant séparément, ou simultanément, ce qui a lieu le plus souvent, le niveau de l'eau à la fin du courant de flot est plus élevé que le niveau moyen, et plus bas à la fin du courant de jusant.

16. *Des vagues-marées dans un canal de largeur et de profondeur variables.* — Nous pourrions combiner les résultats des deux questions précédentes; mais nous pouvons arriver beaucoup plus facilement à la solution dans le cas des vagues-marées, qui est le plus important pour la pratique.

Soient $z = \varphi(y, x)$ l'équation du profil du canal et $u = \psi(y, z)$ son aire; la profondeur étant variable, nous prendrons (**14**)

$$(1) \qquad X = A\cos(nt - M),$$

où $M = \int m\,dx$. Or, d'après le nº **13**, la vague qui traverse un canal de section uniforme dont l'aire est $\psi(k)$ est représentée par

$$X = \chi(v't - x) = \chi_1\left[nt - nx\sqrt{\frac{\varphi(k)}{g\psi(k)}}\right];$$

nous avons donc pour M

$$(2) \qquad M = n\int\sqrt{\frac{\varphi(k, x)}{g\psi(k, x)}}\,dx,$$

Nous formerons l'équation de continuité, comme nous l'avons déjà fait dans le cas des longues vagues; le volume $h\psi(k, x)$, compris entre les deux sections qui sont distantes de h à l'état de repos, devient, dans le mouvement, $h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)\psi(V, x + X)$; et, comme $\frac{d\psi(k, x)}{dx} = \varphi(k, x)$, nous avons

$$h\psi(k, x) = h\left(1 + \frac{dX}{dx}\right)\left[\psi(k, x) + \varphi(k, x)(V - k) + \frac{d\psi(k, x)}{dx}X\right],$$

d'où

$$(3) \qquad V - k = -\frac{1}{\varphi(k, x)}\frac{d}{dx}\left[X\psi(k, x)\right].$$

Pour l'équation de mouvement, nous prendrons simplement

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -g\frac{dV}{dx},$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = g\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\varphi(k, x)}\frac{d}{dx}[X\psi(k, x)]\right\}$$

et, en tenant compte des relations (1) et (2),

$$-n^2A\cos(nt - M) = g\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\varphi(k, x)}\frac{d}{dx}[A\psi(k, x)]\cos(nt - M) + nA\sqrt{\frac{\psi(k, x)}{g\varphi(k, x)}}\sin(nt - M)\right\}.$$

Comme les fonctions φ et ψ varient lentement, nous négligerons les termes du second ordre, d'où

$$-n^2 A\cos(nt-M) = n\sqrt{g}\left\{\frac{1}{\sqrt{\varphi(k,x)\psi(k,x)}}\frac{d}{dx}[A\psi(k,x)] + \frac{d}{dx}\frac{A\psi(k,x)}{\sqrt{\varphi(k,x)\psi(k,x)}}\right\}$$
$$\times \sin(nt-M) - n^2 A\cos(nt-M)$$

et, en posant $A\psi(k,x) = \nu$ et $\sqrt{\varphi(k,x)\psi(k,x)} = \mu$,

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\nu}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{\nu}{\mu} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\nu}\frac{d\nu}{dx} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = 0,$$

équation dont l'intégrale est $\frac{\nu^2}{\mu} = C^2$, C étant une constante; d'où

$$(5) \qquad A = C\psi(k,x)^{-\frac{3}{4}}\varphi(k,x)^{-\frac{1}{4}}$$

pour le coefficient de déplacement horizontal.

Le déplacement vertical est $K = V - k$ (3) ou

$$K = -\frac{1}{\varphi(k,x)}\left[\frac{d}{dx}A\psi(k,x)\cos(nt-M) + A\psi(k,x)\sin(nt-M)n\sqrt{\frac{\varphi(k,x)}{g\psi(k,x)}}\right];$$

nous pouvons sans grande erreur négliger le premier terme devant le second, d'où

$$K = -\frac{n}{\sqrt{g}}A\sqrt{\frac{\psi(k,x)}{\varphi(k,x)}}\sin(nt-M),$$

et le coefficient du déplacement vertical est, en vertu de (5),

$$(6) \qquad B = -\frac{nC}{\sqrt{g}}\psi(k,x)^{-\frac{1}{4}}\varphi(k,x)^{-\frac{1}{4}}.$$

17. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les forces extérieures n'agissaient que dans la direction horizontale du mouvement; or, les marées étant un phénomène périodique produit par l'attraction des astres et principalement de la Lune, nous devons étudier maintenant la nature du mouvement ondulatoire produit par des forces périodiques, agissant dans une direction quelconque; nous nous bornerons du reste au cas du mouvement dans un canal de largeur et de profondeur uniformes.

Soient donc $\mathrm{H}\sin(it - mx)$ et $\mathrm{G}\cos(it - mx)$ les accélérations dans le sens horizontal et dans le sens vertical; nous devons prendre les équations générales du n°4, qui sont dans le cas actuel, en ajoutant l'accélération verticale à celle de la pesanteur,

$$(1) \qquad \mathrm{Y} = -\int_0^y \frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dy,$$

et

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{H}\sin(it - mx) - \frac{d}{dx}\left\{[g + \mathrm{G}\cos(it - mx)](k - y + \mathrm{K}) + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt^2}\,dy\right\}.$$

Or les forces agissantes sont assez faibles; K, d'après l'observation, est toujours assez petit, et $\frac{d}{dx}g(k - y) = 0$; cette équation se réduit donc à

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} &= \mathrm{H}\sin(it - mx) \\ &\quad - \frac{d}{dx}\left[g\mathrm{K} + (k - y)\mathrm{G}\cos(it - mx) + \int_y^k \frac{d^2\mathrm{Y}}{dt}\,dy\right]. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que X dépend de $\sin(it - mx)$; posons donc

$$(3) \qquad \mathrm{X} = \varphi''(y)\sin(it - mx);$$

en considérant φ'' comme la dérivée seconde d'une fonction φ, alors

$$(4) \qquad \mathrm{Y} = m[\varphi'(y) - \varphi'(0)]\cos(it - mx);$$

d'où, en effectuant les opérations indiquées dans l'équation (2),

$$\begin{aligned} -i^2\varphi''(y)\sin(it - mx) &= \mathrm{H}\sin(it - mx) - gm^2[\varphi'(k) - \varphi'(0)]\sin(it - mx) \\ &\quad - m(k - y)\mathrm{G}\sin(it - mx) \\ &\quad + i^2m^2[\varphi(k) - \varphi(y) - \varphi'(0)(k - y)]\sin(it - mx). \end{aligned}$$

Pour satisfaire à cette équation, égalons d'abord à zéro les termes en y; il vient

$$i^2\varphi''(y) = i^2 m^2 \varphi(y) \quad \text{et} \quad m(k-y)G + i^2 m^2 \varphi'(o)(k-y) = o;$$

la première de ces conditions donne

$$\psi(y) = A e^{my} + B e^{-my};$$

la seconde se réduit à

$$G + i^2 m \varphi'(o) = o, \quad \text{d'où} \quad B = A + \frac{G}{i^2 m^2}.$$

Remplaçant dans la partie restante de l'équation φ, φ' et φ'' par leurs valeurs

$$\varphi(y) = A(e^{my} + e^{-my}) + \frac{G}{i^2 m^2} e^{-my},$$

$$\varphi'(y) = mA(e^{my} - e^{-my}) - \frac{G}{i^2 m} e^{-my},$$

$$\varphi''(y) = m\varphi(y),$$

nous avons

$$H - gm^2\left[mA(e^{mk} - e^{-mk}) - \frac{G}{i^2 m} e^{-mk} + \frac{G}{i^2 m}\right] + i^2 m^2\left[A(e^{mk} + e^{-mk}) + \frac{G}{i^2 m^2} e^{-mk}\right] = o;$$

d'où

$$A = \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G - \left(1 + \frac{gm}{i^2}\right) G e^{-mk}}{i^2 m^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm^3 (e^{mk} - e^{-mk})}$$

et

$$B = \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G + \left(1 - \frac{gm}{i^2}\right) G e^{mk}}{i^2 m^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm^3 (e^{mk} - e^{-mk})},$$

puis

$$\varphi''(y) = \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G - \left(\frac{gm}{i^2} + 1\right) G e^{-mk}}{i^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})} e^{my} + \frac{-H + \frac{gm}{i^2} G - \left(\frac{gm}{i^2} - 1\right) G e^{mk}}{i^2 (e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})} e^{-my}$$

et

$$m\varphi'(y) = \frac{-\mathrm{H} + \frac{gm}{i^2}\mathrm{G} - \left(\frac{gm}{i^2} + 1\right)\mathrm{G}\,e^{-mk}}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})} e^{my}$$
$$- \frac{-\mathrm{H} + \frac{gm}{i^2}\mathrm{G} - \left(\frac{gm}{i^2} - 1\right)\mathrm{G}\,e^{mk}}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})} e^{-my}.$$

Nous pouvons ainsi former nos valeurs de X et de Y, et nous reconnaissons déjà que l'eau est animée d'un mouvement ondulatoire tout à fait semblable à ceux que nous avons étudiés jusqu'ici.

La vague définie par ces valeurs de X et de Y est une de ces vagues que nous avons déjà souvent mentionnées sous le nom de *vagues-marées;* celle-ci dépend entièrement de la continuité d'action des forces extérieures, et nous l'appellerons *vague-marée forcée;* il existe conjointement avec elle d'autres vagues, appelées *vagues-marées libres,* résultant de la valeur antérieure des forces, et de toute cause venant à modifier le mouvement, comme la réflexion sur un obstacle ou la variation périodique de la grandeur des forces attractives. Ces vagues peuvent avoir même période et longueur différente, ou même longueur et période différente, et diffèrent essentiellement de la vague forcée, parce que leurs longueurs et périodes sont alors liées par la relation que nous avons établie (**6**), quand il n'y avait pas de forces agissantes

$$n^2 = mg\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}}.$$

C'est à ces vagues qu'est due complétement la marée dans les rivières ou bras de mer étroits, et la presque totalité de la marée en mer libre dans les latitudes un peu élevées.

Si nous formons les valeurs de X et de Y à la surface, nous obtenons pour la vague forcée

$$\mathrm{X}_s = \frac{-\mathrm{H}(e^{mk} + e^{-mk}) + \mathrm{G}\frac{gm}{i^2}(e^{mk} - 2 + e^{-mk})}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})}\sin(it - mx)$$

et

$$\mathrm{K} = \frac{-\mathrm{H}(e^{mk} - e^{-mk}) + \mathrm{G}(e^{mk} - 2 + e^{-mk})}{i^2(e^{mk} + e^{-mk}) - gm(e^{mk} - e^{-mk})}\cos(it - mx),$$

et, en tenant compte de la relation entre n et m, nous avons, pour une vague libre de même longueur,

$$X_{s_1} = \frac{-\mathrm{H} + \mathrm{G}\dfrac{n^2}{i^2}\dfrac{e^{\frac{mk}{2}} - e^{-\frac{mk}{2}}}{e^{\frac{mk}{2}} + e^{-\frac{mk}{2}}}}{i^2 - n^2}\sin(it - mx)$$

et

$$\mathrm{K}_1 = \frac{-\mathrm{H}\dfrac{n^2}{gm} + \mathrm{G}\dfrac{n^2}{gm}\dfrac{e^{\frac{mk}{2}} - e^{-\frac{mk}{2}}}{e^{\frac{mk}{2}} + e^{-\frac{mk}{2}}}}{i^2 - n^2}\cos(it = mx).$$

Or, dans les vagues-marées, à l'équateur, la longueur de la vague atteint 25000 kilomètres, et les plus grandes profondeurs de l'Océan ne dépassent guère 8000 mètres ; le produit mk est donc très-petit, et l'on peut écrire

$$X_{s_1} = \frac{-\mathrm{H} + \mathrm{G}\dfrac{n^2}{i^2}\dfrac{mk}{2}}{i^2 - n^2}\sin(it - mx),$$

et

$$\mathrm{K}_1 = \frac{-\mathrm{H}\dfrac{n^2}{mg} + \mathrm{G}\dfrac{n^2}{mg}\dfrac{mk}{2}}{i^2 - n^2}\cos(it - mx).$$

Comme H et G sont des grandeurs de même ordre, nous voyons que l'effet des forces verticales est complétement insignifiant devant celui des forces horizontales, et nous sommes ainsi justifié de n'avoir, dans toutes les questions que nous avons traitées précédemment sur la hauteur de la marée en rivières, considéré que des forces extérieures horizontales. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les conséquences très-importantes qu'a tirées Airy de l'étude des vagues-marées, au point de vue de la théorie générale de la marée, et nous continuerons par l'examen d'un des cas qui se présentent le plus fréquemment dans la nature.

18. *Étude du mouvement ondulatoire qui se produit dans un canal dont les eaux sont soumises à l'attraction lunaire, etc., et qui, fermé à l'une de ses extrémités, communique à l'autre avec une mer libre à* *marée* [*]. — Rappelons d'abord que, lorsque l'on a une équation différentielle à second membre, une solution z de cette équation, et des solutions z_1, z_2,... de l'équation sans second membre, la combinaison linéaire $az + a_1 z_1 + a_2 z_2,\dots$ sera une solution de l'équation complète.

Or nous avons trouvé (**17**), pour la solution de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = F - \frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}\,dy\right)$$

dans le cas qui nous occupe, une valeur de la forme $X = C\cos(it - mx)$, et nous avons aussi (**6**), pour solution de l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{d}{dx}\left(gK + \int_y^k \frac{d^2Y}{dt^2}\,dy\right),$$

des valeurs de X de la forme

$$A\cos(nt - mx + a), \quad B\cos(nt + mx + b), \dots,$$

où m et n sont liées par la relation

$$(3) \qquad n^2 = mg\frac{e^{mk} - e^{-mk}}{e^{mk} + e^{-mk}}.$$

La somme de ces valeurs satisfera à l'équation (1); de plus, comme toutes les parties du canal, à un instant quelconque, sont soumises aux mêmes influences, les quantités i, n,... sont les mêmes; la solution la plus générale de l'équation (1) est donc

$$(4) \quad X = C\cos(nt - px) + D\cos(nt - mx + E) + F\cos(nt + mx + G).$$

Nous en déduisons immédiatement

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} K = &- Cpk\sin(nt - px) \\ &- Dmk\sin(nt - mx + E) + Fmk\sin(nt + mx + G); \end{aligned} \right.$$

[*] L'effet d'un rétrécissement brusque est à peu près celui d'un barrage pour la partie en aval, tandis que la marée se propage dans la partie en amont, comme s'il n'y avait plus de force extérieure.

mais, si nous désignons par A $\sin(nt+B)$ la loi de hauteur de la marée à l'embouchure, et a la distance du barrage à cette embouchure, nous devons avoir $X=0$ pour $x=a$, quel que soit t, et $K = A\sin(nt+B)$ pour $x=0$, c'est-à-dire

$$-Cpk\sin nt - Dmk\sin(nt+E) + Fmk\sin(nt+G) = A\sin(nt+B)$$

et

$$C\cos(nt-pa) + D\cos(nt-ma+E) + F\cos(nt+ma+G) = 0.$$

Développant et identifiant les termes en $\sin nt$ et $\cos nt$, nous avons

$$\begin{aligned}
&-Cpk - mk\,D\cos E + mk\,F\cos G = A\cos B,\\
&\qquad - mAD\sin E + mk\,F\sin G = A\sin B,\\
&C\cos pa + \cos ma\,D\cos E + \sin ma\,D\sin E\\
&\qquad + \cos ma\,F\cos G - \sin ma\,F\sin G = 0,\\
&C\sin pa - \cos ma\,D\sin E + \sin ma\,D\cos E\\
&\qquad - \cos ma\,F\sin G - \sin ma\,F\cos G = 0.
\end{aligned}$$

Tirant de là la valeur des constantes D, E, F, G, nous obtenons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
X = {} & \frac{A}{mk\cos ma}\sin(nt+B)\sin(ma-mx) + C\cos(nt-px)\\
& + \frac{Cp}{m\cos ma}\sin nt\sin(ma-mx) - \frac{C}{\cos ma}\cos(nt-pa)\cos mx
\end{aligned}\right.$$

et

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
K = {} & \frac{A}{\cos ma}\sin(nt+B)\cos(ma-mx) - Cpk\sin(nt-px)\\
& + \frac{Cpk}{\cos ma}\sin nt\cos(ma-mx) - \frac{Cmk}{\cos ma}\cos(nt-pa)\sin mx.
\end{aligned}\right.$$

Nous voyons que l'élévation de l'eau n'est plus une expression simple comme celles que nous avons trouvées jusqu'ici, et qu'elle peut être considérée comme due à la combinaison d'une vague-marée forcée (le terme en $nt-px$) et de trois vagues libres stationnaires (**9**).

Pour calculer les phases de la marée, nous pouvons mettre K sous la forme $K = P \sin nt - Q \cos nt$ et, en posant $\frac{Q}{P} = \tang \theta$,

$$K = \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(nt - \theta),$$

expression dans laquelle

$$P = \frac{A \cos B \cos(ma - mx)}{\cos ma} - Cpk \cos px + \frac{Cpk \cos(ma - mx)}{\cos ma} - \frac{Cmk \sin pa \sin mx}{\cos ma}$$

et

$$Q = -\frac{A \sin B \cos(ma - mx)}{\cos ma} - Cpk \sin px + \frac{Cmk \cos pa \sin mx}{\cos ma}.$$

La hauteur totale de la marée est donnée pour $K_1 = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$: le moment de la haute mer par $nt - \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\tang nt = -\frac{P}{Q}$, et celui de la basse mer par $nt - \theta = -\frac{\pi}{2}$ ou $\tang nt = \frac{P}{Q}$. Ces expressions, ainsi que celle de la propagation de la phase $\frac{d\theta}{dx}$, dépendant de x, sont fort complexes et ne peuvent être étudiées facilement qu'au moyen de courbes pour des valeurs données de x.

19. Mais dans les rivières, excepté peut-être quelques-uns des grands fleuves des régions équatoriales, on peut considérer l'attraction lunaire sur leurs eaux comme insensible, et les valeurs de X et de K deviennent, en supposant $C = 0$,

$$(6') \qquad X' = \frac{A}{mk \cos ma} \sin(nt + B) \sin(ma - mx)$$

et

$$(7') \qquad K' = \frac{A}{\cos ma} \sin(nt + B) \cos(ma - mx).$$

Nous voyons que toutes les oscillations aux différentes stations le long de la rivière ont lieu simultanément, ou qu'il y a haute ou basse mer en tous les points au même moment; la marée totale est

$$K'_1 = \frac{2A}{\cos ma}\cos(ma - mx);$$

et comme, dans les vagues-marées, on a toujours $ma < \frac{\pi}{2}$, la hauteur de la marée augmente de l'embouchure au barrage, où elle atteint son maximum $\frac{2A}{\cos ma}$. Nous voyons aussi que le plus grand déplacement horizontal a lieu au même moment que le plus grand vertical, et diminue de l'embouchure au barrage, où il est nul; les courants de flot et de jusant donnés par

$$(8') \qquad \frac{dX'}{dt} = \frac{nA}{mk\cos ma}\cos(nt + B)\sin(ma - mx)$$

ont leurs maxima au moment de la haute et de la basse mer, et diminuent d'intensité de l'embouchure au barrage.

20. Nous pouvons du reste pousser la question plus loin et étudier, comme au n° **10**, le cas où la profondeur de la rivière est sensiblement modifiée par la marée : l'équation du problème est

$$(1'') \quad \frac{d^2X}{dt^2} - v^2\frac{d^2X}{dx^2} = v^2\frac{d^2X}{dx^2}\left[-3\frac{dX}{dx} + 6\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 - \dots\right], \quad \text{où} \quad v^2 = gk.$$

Nous prendrons comme première valeur approchée

$$X = \frac{A}{mk\cos ma}\sin(mvt + B)\sin(ma - mx),$$

et nous procéderons comme au n° **10**, en substituant cette valeur dans le second membre de (1'') et nous arrêtant d'abord au terme en $\frac{dX}{dx}$; d'où

$$(6'') \quad \left\{ \begin{aligned} X'' = {} & \frac{A}{mk\cos ma}\sin(ma - mx)\sin(mvt + B) \\ & - \frac{A^2}{k^2\cos^2 ma}\left[\frac{3}{16m}\sin(2ma - 2mx)\right. \\ & \left. + \frac{3}{16}x\cos(2ma - 2mx)\cos(2mvt + 2B)\right] \\ & + \varphi(vt - x) + \psi(vt + x). \end{aligned} \right.$$

Nous en déduirons, pour l'élévation à une station distante de x' de l'embouchure du canal,

$$(7'')\left\{\begin{aligned} \mathrm{K}'' = & \frac{\mathrm{A}}{\cos ma}\cos(ma - mx')\sin(mvt + \mathrm{B}) \\ & + \frac{1}{8}\frac{\mathrm{A}^2}{k\cos^2 ma}[\cos(2ma - 2mx') - \cos 2ma] \\ & - \frac{3}{8}\frac{\mathrm{A}^2}{k\cos^2 ma}mx'\sin(2ma - 2mx')\cos(2mvt + 2\mathrm{B}). \end{aligned}\right.$$

La loi de la montée et de la baissée est maintenant différente de la précédente pour chaque station de la rivière, sauf à l'embouchure; mais la haute et la basse mer auront encore lieu partout simultanément. Le second terme de l'expression est constant pour une station donnée; le premier et le troisième sont de la forme

$$\mathrm{C}\sin(mvt + \mathrm{B}) + \mathrm{D}\cos(2mvt + 2\mathrm{B}).$$

De l'influence du frottement sur le mouvement ondulatoire.

21. Le frottement des molécules d'eau entre elles, et sur les bords et le fond d'une rivière, modifie beaucoup tous les résultats auxquels nous sommes arrivés; les effets ne pouvant toujours en être complétement analysés, nous allons seulement étudier, dans quelques-uns des cas traités précédemment, la nature des modifications éprouvées.

De la propagation des vagues-marées dans un canal dont l'eau est soumise à l'attraction lunaire, etc., en tenant compte des frottements. (*Voir* n° **17**.) Nous nous bornerons à l'examen du cas où les mouvements dus à la marée sont petits relativement à la profondeur du canal. L'équation du mouvement se réduit alors à

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{F} + v^2\frac{d^2\mathrm{X}}{dx^2},$$

où $v^2 = gk$, k étant la profondeur du canal, et F comprenant la force périodique horizontale $\mathrm{H}\sin(it - mx)$ et la résistance due au frottement; comme les vitesses sont toujours assez faibles, nous supposerons le frottement proportionnel à la simple vitesse, et nous aurons pour l'équation générale du problème

$$(1)\qquad \frac{d^2X}{dt^2} = H\sin(it - mx) - f\frac{dX}{dt} + v^2\frac{d^2X}{dx^2}.$$

Le mouvement sera périodique et de même période que la force; nous prendrons donc pour X la forme la plus générale qui satisfasse à cette équation

$$(2)\qquad X = A\cos it + B\sin it,$$

A et B étant des fonctions de x à déterminer. En substituant dans (1), nous aurons une équation

$$-i^2A\cos it - i^2B\sin it = H\cos mx\sin it - H\sin mx\cos it + fiA\sin it$$
$$- fiB\cos it + v^2\frac{d^2A}{dx^2}\cos it + v^2\frac{d^2B}{dx^2}\sin it,$$

qui doit être satisfaite quel que soit t, ce qui donne

$$(a)\qquad -i^2A = -H\sin mx - fiB + v^2\frac{d^2A}{dx^2},$$

$$(b)\qquad -i^2B = H\cos mx + fiA + v^2\frac{d^2B}{dx^2};$$

pour éliminer B, nous tirons de (a)

$$(c)\qquad fi\frac{d^2B}{dx^2} = v^2\frac{d^4A}{dx^4} + i^2\frac{d^2A}{dx^2} + m^2H\sin mx,$$

puis nous ajoutons ces trois équations multipliées respectivement par i^2, fi et v^2 :

$$(3)\qquad v^4\frac{d^4A}{dx^4} + 2v^2i^2\frac{d^2A}{dx^2} + (i^4 + f^2i^2)A$$
$$+ (v^2m^2 - i^2) - H\sin mx + fiH\cos mx = 0.$$

Si nous désignons par $\pm p \pm q\sqrt{-1}$ les racines de l'équation

$$v^4z^4 + 2v^2i^2z^2 + (i^4 + f^2i^2) = 0,$$

ou

$$p = -\frac{i^2}{2v^2} + \sqrt{\frac{i^4+f^2i^2}{4v^4}} \quad \text{et} \quad q = \frac{i^2}{2v^2} + \sqrt{\frac{i^2+f^2i^2}{4v^4}},$$

et si nous posons $M = (\nu^2 m^2 - i^2) H \sin mx + fi H \cos mx$, l'intégrale de l'équation différentielle précédente est

$$A = -\frac{1}{\nu^4} e^{px} \cos qx \int \frac{dx}{\cos^2 qx} \int e^{-2px} \cos^2 qx\, dx \int \frac{dx}{\cos^2 qx} \int e^{px} \cos qx\, M dx,$$

chaque intégration amenant une constante arbitraire; mais, sans effectuer ces calculs, nous pouvons remarquer que la portion de l'intégrale totale dépendant des constantes arbitraires est de la forme

$$C e^{px} \cos qx + C' e^{px} \sin qx + C'' e^{-px} \cos qx + C''' e^{-px} \sin qx,$$

et que la substitution de $\sin mx$ et $\cos mx$ dans les trois premiers termes de (3) donnera un terme en $\sin mx$ et $\cos mx$ avec $(m^4 \nu^4 - 2m^2 \nu^2 i^2 + f^2 i^2)$ en facteur; la solution la plus générale de l'équation sera donc

$$A = \frac{(i^2 - \nu^2 m^2) H}{\nu^4 m^4 - 2m^2 \nu^2 i^2 + i^4 + f^2 i^2} \sin mx - \frac{fi H}{\nu^4 m^4 - 2\nu^2 m^2 i^2 + i^4 + f^2 i^2} \cos mx$$
$$+ C e^{px} \cos qx + C' e^{px} \sin px + C'' e^{-px} \cos qx + C''' e^{-px} \sin qx.$$

Pour trouver B, nous remplacerons A par cette valeur dans (a), en remarquant que

$$\nu^2 \frac{d^2}{dx^2} (e^{px} \cos qx) + i^2 e^{px} \cos qx$$
$$= e^{px} [(p^2 \nu^2 - q^2 \nu^2 + i^2) \cos qx - 2\nu^2 pq \sin qx] = -fi\, e^{px} \sin qx,$$

en tenant compte des valeurs de p et de q, et nous aurons

$$B = \frac{-fi H}{(i^2 - \nu^2 m^2)^2 + f^2 i^2} \sin mx - \frac{(i^2 - \nu^2 m^2) H}{(i^2 - \nu^2 m^2)^2 + f^2 i^2} \cos mx - C e^{px} \cos qx$$
$$+ C' e^{px} \cos qx + C'' e^{-px} \sin qx - C''' e^{-px} \cos qx,$$

et l'équation (2) nous donnera la valeur de X.

22. Mais nous avons déjà vu (**19**) que, en général, nous pourrions, dans les rivières, négliger la force attractive des astres.

Supposons donc *une rivière de longueur indéfinie communiquant avec une mer à marée.*

La valeur de X se réduit à

$$X = e^{px}[C\cos(it + qx + C'\sin(it + qx)]$$
$$+ e^{-px}[C''\cos(it - qx) - C'''\sin(it - qx)\ ,$$

et, comme la marée se propage depuis la mer sans rencontrer d'obstacle, cette expression ne doit pas contenir de termes en $(it + qx)$, d'où, en définitive,

$$(1)\qquad X = e^{-px}[C''\cos(it - qx) - C'''\sin(it - qx)],$$

et

$$K = -k\frac{dX}{dx} = ke^{-px}[(pC'' - qC''')\cos(it - qx) - (qC'' + pC''')\sin(it - qx)].$$

La loi de la marée étant toujours représentée par $A\sin nt$, il en résulte

$$i = n,\quad pC'' - qC''' = 0,\quad qC'' + pC''' = A,$$

d'où

$$(2)\qquad K = Ae^{-px}\sin(nt - qx),$$

$$C'' = -\frac{qA}{k(p^2 + q^2)},\quad C''' = -\frac{pA}{k(p^2 + q^2)}$$

et enfin

$$(1')\qquad X = \frac{A}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}[p\sin(nt - qx) - q\cos(nt - qx)].$$

Ces valeurs montrent que la marée diminue constamment en remontant la rivière, et cessera en un certain point donné par la valeur de x, qui annulerait X. La vitesse du courant est donnée par

$$(3)\qquad \frac{dX}{dt} = \frac{nA}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}[q\sin(nt - qx) + q\cos(nt - qx)];$$

à mer haute

$$nt - qx = \frac{\pi}{2},\quad \frac{dX}{dt} = \frac{nA}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}q;$$

à hauteur moyenne

$$nt - qx = \pi,\quad \frac{dX}{dt} = -\frac{nA}{k(p^2 + q^2)}e^{-px}p.$$

Ainsi le courant de jusant se forme plus promptement après le moment de la haute mer que s'il n'y avait pas eu de frottement; l'inverse a lieu après la basse mer; on peut du reste étudier la durée de la montée et de la baissée comme nous l'avons fait au n° **11**.

23. Supposons maintenant que la rivière soit barrée à une distance a de l'embouchure. (*Voir* n° **11**.)

Nous aurons une vague réfléchie et nous conserverons alors la valeur générale de X,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= e^{px}[C\cos(it+qx) + C'\sin(it+qx)] \\ &\quad + e^{-px}[C''\cos(it-qx) - C'''\sin(it-qx)], \end{aligned}\right.$$

avec

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} K &= -ke^{px}[(pC+qC')\cos(it+qx) + (-qC+pC')\sin(it-qx)], \\ &\quad -ke^{-px}[(-pC''+qC''')\cos(it-qx) + (qC''+pC''')\sin(it-qx)]; \end{aligned}\right.$$

pour $x = 0$,

$$\begin{aligned} K_0 = &-k[(pC+qC')\cos it + (-qC+pC')\sin it] \\ &-k[(-pC''+qC''')\cos it + (qC''+pC''')\sin it], \end{aligned}$$

et nous en déduirons, d'après la loi de la marée à l'embouchure,

$$i = n,\quad pC + qC' - pC'' + qC''' = 0,\quad k(qC - pC' - qC'' - pC''') = A.$$

La condition relative au barrage est que X soit nul pour $x = a$, quel que soit t, d'où

$$\begin{aligned} e^{pa}(C\cos qa + C'\sin qa) + e^{-pa}(C''\cos qa + C'''\sin qa) &= 0, \\ e^{pa}(-C\sin qa + C'\cos qa) + e^{-pa}(C''\sin qa - C'''\cos qa) &= 0; \end{aligned}$$

les quatre dernières équations déterminent les constantes, et la valeur de K devient

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} K &= \frac{A}{\sqrt{e^{2pa} + e^{-2pa} + 2\cos 2qa}}[e^{px-pa}\sin(it+qx-E) \\ &\quad + e^{pa-px}\sin(it-qx+F)], \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle

$$\operatorname{tang}E = \frac{\sin 2qa}{e^{-2pa} + \cos 2qa}, \quad \operatorname{tang}F = \frac{\sin 2qa}{e^{2pa} + \cos 2qa},$$

d'où

$$E + F = 2qa.$$

La quantité entre crochets peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &\cos it\left[e^{px-pa}\sin(qx - E) - e^{pa-px}\sin(qx - F)\right] \\ &\quad + \sin it\left[e^{px-pa}\cos(qx - E) + e^{pa-px}\cos(qx - F)\right] \\ &= P\cos it + Q\sin it \end{aligned}$$

ou, en posant $\frac{Q}{P} = \operatorname{tang}D$,

$$\sqrt{P^2 + Q^2}\cos(it - D);$$

d'où

$$K = A\sqrt{\frac{e^{2px-2pa} + e^{2pa-2px} + 2\cos(2qa - 2qx)}{e^{2pa} + e^{-2pa} + 2\cos 2qa}}\cos(it - D).$$

Nous voyons que la marée totale n'augmente ici, à mesure que l'on remonte dans la rivière, que si $4q\sin(2qa - 2px) > 2p(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa})$; quand on ne considère pas le frottement, elle augmente toujours de l'embouchure au barrage.

Le moment de la haute mer est $t' = \frac{D}{i}$, et $\frac{1}{i}\frac{dD}{dx}$ nous représente l'inverse de la vitesse de propagation de la phase de la haute mer $\frac{1}{v}$, ou

$$\frac{dD}{dx} = \frac{P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}}{P^2 + Q^2},$$

d'où

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{i}\,\frac{q(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa}) + 2p\sin(2qa - 2qx)}{e^{2pa-2px} + e^{2px-2pa} + 2\cos(2qa - 2qx)}.$$

Cette quantité est toujours positive, ce qu'il est facile de voir; nous avons donc toujours une vague progressant en remontant la rivière, ce qui peut ne pas avoir lieu quand on ne considère pas le frottement.

En traitant la valeur de X, comme nous l'avons fait pour K, nous trouverons

$$(1')\quad \begin{cases} X = \dfrac{A}{k\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{e^{2pa}+e^{-2pa}+2\cos 2qa}} \\ \quad \times\left[e^{px-pa}\cos(it+qx-G) - e^{pa-px}\cos(it-qx-H)\right] \end{cases}$$

où

$$\operatorname{tang} G = \frac{-p - pe^{2pa}\cos 2qa + qe^{2pa}\sin 2qa}{q + pe^{2pa}\sin 2qa + qe^{2pa}\cos 2qa},$$

$$\operatorname{tang} H = \frac{pe^{4pa} + pe^{2pa}\cos 2qa + qe^{2pa}\sin 2qa}{-qe^{4pa} + pe^{2pa}\sin 2qa - qe^{2pa}\cos 2qa}$$

et

$$H - G = -2qa.$$

La quantité entre crochets est

$$\cos it\left[e^{px-pa}\cos(qx-G) - e^{pa-px}\cos(qx+H)\right]$$
$$-\sin it\left[e^{px-pa}\sin(qx-G) + e^{pa-px}\sin(qx+H)\right],$$

et peut se mettre sous la forme

$$P'\cos it - Q'\sin it = \sqrt{P'^2+Q'^2}\cos(it+D') \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} D' = \frac{Q'}{P'};$$

nous aurons alors pour X,

$$X = \frac{A}{k}\sqrt{\frac{e^{2pa-2px}+e^{2px-2pa}-2\cos(2qa-2qx)}{(p^2+q^2)(e^{2pa}+e^{-2pa}+2\cos 2qa)}}\cos(it+D').$$

Le moment où l'eau a son plus grand déplacement horizontal, ou l'instant où le flot cesse pour faire place au jusant, est $t'' = -\frac{D'}{i}$; nous voyons donc que la fin du flot a lieu à un temps $-\frac{1}{i}(D+D')$ après la haute mer. Calculons cette quantité; nous avons

$$\operatorname{tang}(D+D') = \frac{P'Q+PQ'}{PP'-QQ'}$$
$$= \frac{-(e^{2pa-2px}-e^{2px-2pa}) + 2\sin(2qa-2qx)\operatorname{tang}(E-G)}{(e^{2pa-2px}-e^{2px-2pa})\operatorname{tang}(E-G) + 2\sin(2qa-2qx)};$$

or

$$\operatorname{tang}(E - G) = \frac{p}{q},$$

d'où

$$-\operatorname{tang}(D + D') = \frac{q(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa}) - 2p\sin(2qa - 2qx)}{p(e^{2pa-2px} - e^{2px-2pa}) + 2q\sin(2qa - 2qx)}.$$

Le second membre étant toujours positif, la fin du flot a lieu après la haute mer; cet intervalle, qui est très-grand près de l'embouchure, diminue beaucoup près du barrage. Ces résultats, complétement d'accord avec l'observation, sont, comme on le voit, bien différents de ceux que nous avons obtenus au nº **18**, où nous avions négligé le frottement; ceux-ci cependant, ainsi que tous ceux que nous avions obtenus précédemment, doivent être étudiés en première analyse comme donnant le caractère général de la marée dans chaque cas considéré, le frottement s'y introduisant pour ainsi dire comme terme de correction, sans en modifier le caractère essentiel.