JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. BRETON (DE CHAMP)

Sur de prétendues inadvertances, dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 81-98.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__81_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur de prétendues inadvertances, dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique;

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

---

1. Poinsot a publié, dans le volume de ce Journal pour l'année 1846 [*], une Note intitulée : *Remarque sur un point fondamental de la Mécanique analytique de Lagrange,* Note dont l'objet est d'appeler l'attention sur une inadvertance que l'illustre géomètre aurait commise en affirmant que, dans sa méthode, rien n'oblige à se servir de coordonnées rectangles plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps. (*Mécanique analytique,* 1re édition, p. 23; ou 2e édition, t. I, p. 38.)

Déjà le même auteur, dans un Mémoire *Sur la composition des moments en Mécanique,* lu à l'Académie des Sciences le 17 septembre 1827, avait signalé d'autres inadvertances qu'il croyait voir dans la manière dont les lois de cette composition sont présentées par Lagrange.

Or la vérité est que toutes ces critiques de Poinsot portent à faux. Comme, par suite de la confiance qu'inspirait ce savant, elles ont été introduites à titre de rectifications dans la troisième édition de la *Mécanique analytique,* il pourra n'être pas inutile de montrer ici de quel côté est l'erreur.

2. L'ordre des matières nous conduit à nous occuper d'abord du contenu de la Note de 1846, et de la doctrine qui y est représentée

[*] 1re série, t. XI, p. 261.

comme défectueuse. Pour l'intelligence de ce qui va suivre, il convient de rappeler d'abord quelques-unes de ses parties essentielles.

Dans le problème de l'équilibre d'un système de corps ou points matériels sollicités par des forces P, Q, R,..., Lagrange imagine que, des points auxquels elles sont appliquées, on mène des lignes droites p, q, r,..., respectivement dans les directions de ces forces, et il désigne par dp, dq, dr,... les variations ou différences de ces lignes que produirait un déplacement infiniment petit du système, compatible avec les conditions auxquelles celui-ci doit satisfaire. Ce système sera en équilibre si la relation

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots = 0$$

est vérifiée, quel que soit le déplacement considéré. C'est là ce que Lagrange appelle l'*équation générale de l'équilibre*.

Il indique la manière d'obtenir les expressions des différentielles dp, dq, dr,.... A cet effet, il rapporte tous les points du système à trois axes fixes ox, oy, oz, perpendiculaires entre eux. La longueur p, par exemple, peut alors être exprimée par la formule

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

x, y, z étant les coordonnées du point auquel la force P est appliquée, et a, b, c celles d'un point quelconque pris sur la direction de cette force. La différentielle dp, dont il s'agit de former l'expression, est évidemment égale à la différence entre deux lignes partant de ce dernier point et aboutissant, l'une, à la position primitive du point d'application de P, et l'autre, au lieu du même point après que ses coordonnées sont devenues, par le déplacement du système, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. On voit que, pour obtenir cette différentielle, il faut faire varier dans la formule ci-dessus x, y, z, en traitant a, b, c comme des constantes. On obtient ainsi

$$dp = \frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz.$$

Ce point, dont les coordonnées a, b, c figurent dans l'expression ci-dessus de p, est appelé par Lagrange le *centre de tendance* de la force P. Chaque force extérieure a de même son centre de tendance, que l'on peut placer partout où l'on veut dans la ligne qui marque la direction de cette force. La variation de cette ligne demeure d'ailleurs la même, quelle que soit la position de ce centre. C'est ainsi que, les multiplicateurs de dx, dy, dz dans dp, savoir :

$$\frac{x-a}{p}, \quad \frac{y-b}{p}, \quad \frac{z-c}{p},$$

étant les cosinus des angles que la ligne p fait respectivement avec les axes ox, oy, oz, la variation de cette ligne est indépendante de sa longueur.

L'introduction de ces centres de tendance est un artifice qui évidemment a pour but de permettre toujours d'obtenir pour chaque force extérieure, telle que P, la différentielle dp qui doit lui être associée dans le terme $\mathrm{P}dp$ de la formule générale de l'équilibre. Lagrange indique plusieurs manières de faire disparaître de cette équation les coordonnées de ces centres, de telle sorte qu'en dernier résultat les données immédiates de chaque question y figurent seules.

Il ajoute :

« Au reste, si nous avons toujours déterminé les lieux des corps par des coordonnées rectangles, c'est que cette manière a l'avantage de la simplicité et de la facilité du calcul; mais ce n'est pas que l'on ne puisse en employer d'autres dans l'usage de la méthode précédente; car il est clair que rien n'oblige dans cette méthode à se servir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps. »

3. C'est dans ces dernières lignes que Poinsot a cru apercevoir une inexactitude. Il lui a semblé que les formules présentées par Lagrange, notamment pour la composition des forces appliquées sur un point, devaient se trouver en défaut dans le cas de coordonnées parallèles à trois axes fixes *obliques* entre eux.

Ces formules ont pour objet de réduire des forces quelconques P, Q, R,..., qui agissent sur un même point suivant des lignes p, q, r,..., à trois autres forces Ξ, Π, Σ, dirigées suivant les lignes ξ, π, σ. Pour résoudre ce problème, « il n'y aura, dit Lagrange, qu'à considérer l'équilibre des forces P, Q, R,..., et Ξ, Π, Σ, appliquées à ce même point et dirigées respectivement suivant les lignes p, q, r,..., $-\xi$, $-\pi$, $-\sigma$, et former en conséquence l'équation

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0,$$

laquelle doit être vraie, de quelque manière qu'on fasse varier la position du point de concours de toutes les forces. Or, quelles que soient les lignes ξ, π, σ, il est clair que, pourvu qu'elles ne soient pas toutes dans un même plan, elles suffisent pour déterminer la position de ce point; par conséquent on pourra toujours exprimer les lignes p, q, r,... par des fonctions de ξ, π, σ, et l'équation précédente devra avoir lieu, par rapport aux variations de chacune de ces trois quantités en particulier; d'où il s'ensuit qu'on aura

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\xi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\xi} + \ldots,$$

$$\Pi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\pi} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\pi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = \mathrm{P}\frac{dp}{d\sigma} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\sigma} + \ldots \text{ »}$$

(*Mécanique analytique*, 1re édition, p. 62).

Poinsot présente à ce sujet diverses observations, et notamment celles qui suivent :

« Mais il y a, sur ce point de doctrine, une remarque essentielle à faire, et qui paraît avoir échappé à l'auteur de la *Mécanique analytique* : c'est que les formules dont il s'agit ne conviennent point, comme on pourrait le croire, à toute espèce de lignes ou coordonnées ξ, π, σ, bien que ces lignes soient propres à déterminer les lieux des corps,.... Pour l'exactitude de ces formules, il faut que les lignes ξ, π, σ soient de telle nature que leurs différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ expriment les vitesses virtuelles mêmes du point d'application des forces Ξ, Π, Σ, c'est-à-dire que chacune d'elles, $d\xi$, soit la projection *orthogonale* sur la direction de la force Ξ, du déplacement quelconque infiniment petit qu'on suppose donné à ce point dans l'espace... ». (Note de 1846, n° 2.)

Il cherche ensuite à prouver que l'emploi de coordonnées obliques pourrait conduire à des conséquences fausses.

4. Évidemment Poinsot n'avait pas fait attention que l'accomplissement de la condition même qu'il signale comme nécessaire, en supposant que les coordonnées obliques n'y satisfont pas, est, au contraire, toujours assurée, dès que l'on assigne à chaque force, telle que P, un centre de tendance, conformément à ce que prescrit (n° 2) la doctrine de Lagrange.

En effet supposons que le point m, auquel la force P est appliquée suivant la direction mp, soit transporté en n par le déplacement infiniment petit donné à ce point, et que j soit le centre de tendance de cette force P. Nous aurons

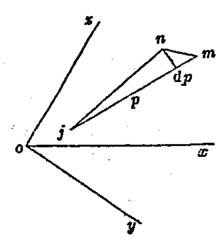
$$\overline{jn}^2 = \overline{jm}^2 + \overline{mn}^2 - 2jm\, mn \cos\widehat{jmn};$$

d'où, par une transformation facile,

$$jm - jn = \frac{2jm}{jm + jn}\, mn \cos\widehat{jmn} - \frac{\overline{mn}^2}{jm + jn}.$$

Le point j pouvant être placé partout où l'on voudra sur la ligne p (n° 2), il est permis de traiter le déplacement mn comme infiniment

Fig. 1.



petit par rapport à jn, et $jm + jn$ comme différant infiniment peu de $2jm$. On aura donc, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$jm - jn = mn \cos\widehat{jmn}.$$

Par conséquent $jm - jn$ ou dp est bien la projection orthogonale du déplacement infiniment petit mn sur la direction p de la force P. Cette conclusion subsiste, quelle que soit la nature des coordonnées qu'on aura choisies pour déterminer les lieux des corps.

Si ce sont des coordonnées obliques, parallèles à trois axes fixes ox, oy, oz, au lieu d'avoir, comme dans le cas des coordonnées rectangles (n° 2),

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

on aura, en désignant toujours par a, b, c les coordonnées du centre de tendance de P,

$$p = \sqrt{\begin{array}{l}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\widehat{xy} \\ \quad + (y-b)(z-c)\cos\widehat{yz} + (z-c)(x-a)\cos\widehat{zx},\end{array}}$$

et il viendra

$$\begin{aligned} dp = {} & \frac{x-a+(y-b)\cos\widehat{xy}+(z-c)\cos\widehat{zx}}{p}\,dx \\ & + \frac{y-b+(z-c)\cos\widehat{yz}+(x-a)\cos\widehat{xy}}{p}\,dy \\ & + \frac{z-c+(x-a)\cos\widehat{zx}+(y-b)\cos\widehat{yz}}{p}\,dz. \end{aligned}$$

5. Afin de fixer les idées sur la manière d'appliquer cette méthode analytique, je vais traiter le cas très-simple où il s'agit de décomposer une force P agissant sur un point m suivant une ligne donnée p, en trois autres forces Ξ, Π, Σ, agissant sur le même point suivant trois lignes ξ, π, σ également données.

La formule générale de l'équilibre se réduit alors à

$$\mathrm{P}dp - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0,$$

et elle donne (n° 3)

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\xi}, \quad \Pi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\pi}, \quad \Sigma = \mathrm{P}\frac{dp}{d\sigma}.$$

Supposons d'abord que tout le système soit rapporté à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, comme Lagrange le recommande en vue de la simplicité et de la facilité du calcul. Nommons x, y, z les coordonnées du point m; a, b, c celles du centre ou point de tendance de la force P, et α, β, γ; ε, ζ, η; λ, μ, ν les coordonnées analogues pour les forces Ξ, Π, Σ. On aura

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$
$$\xi = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$
$$\pi = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\zeta)^2 + (z-\eta)^2},$$
$$\sigma = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2}.$$

Nous devons regarder x, y, z et p comme des fonctions de ξ, π, σ. Pour déterminer la valeur de $\frac{dp}{d\xi}$, il faut différentier ces quatre équations en ne faisant varier que ξ. On obtient ainsi

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{(x-a)}{p}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-b)}{p}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-c)}{p}\frac{dz}{d\xi},$$
$$1 = \frac{(x-\alpha)}{\xi}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-\beta)}{\xi}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-\gamma)}{\xi}\frac{dz}{d\xi},$$
$$0 = \frac{(x-\varepsilon)}{\pi}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-\zeta)}{\pi}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-\eta)}{\pi}\frac{dz}{d\xi},$$
$$0 = \frac{(x-\lambda)}{\sigma}\frac{dx}{d\xi} + \frac{(y-\mu)}{\sigma}\frac{dy}{d\xi} + \frac{(z-\nu)}{\sigma}\frac{dz}{d\xi}.$$

Soit ds le déplacement du point m qui résulte de cette variation $d\xi$. Multiplions tous les termes de ces nouvelles équations par $\frac{d\xi}{ds}$, et remarquons ensuite que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$; $\frac{x-\alpha}{\xi}$,... sont les cosinus des angles que les lignes ds, p, ξ, π et σ font avec les axes ox, oy, oz. D'après cela, les deux dernières équations signifient que ds est perpendiculaire à chacune des lignes π et σ, et que, par conséquent, la ligne ms, qui marque la direction de ce déplacement, est la perpendiculaire au plan $\pi m \sigma$ menée par le point m; les deux autres, que dp et $d\xi$ sont les projections orthogonales de ds respectivement sur les lignes p et ξ. Il est donc permis d'écrire $dp = ds \cos \widehat{smp}$, $d\xi = ds \cos \widehat{sm\xi}$, d'où

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{\cos \widehat{smp}}{\cos \widehat{sm\xi}} \quad \text{et} \quad \Xi = \frac{\mathrm{P} \cos \widehat{smp}}{\cos \widehat{sm\xi}}.$$

Pour construire cette composante Ξ, on portera sur la ligne p, à partir du point m, une longueur proportionnelle à P, et l'on mènera, par le point ainsi déterminé, un plan parallèle à celui des droites π, σ. La longueur $m\xi$ interceptée par ce plan sur la ligne ξ représentera en grandeur la composante Ξ; car la longueur interceptée sur la droite ms par ce plan, perpendiculaire à sa direction, sera égale à $\mathrm{P} \cos \widehat{smp}$ et à $m\xi \cos \widehat{sm\xi}$. On aura donc

$$m\xi = \frac{\mathrm{P} \cos \widehat{smp}}{\cos sm\xi} = \Xi.$$

Cette construction est précisément celle qui est donnée dans les *Éléments de Statique*.

En faisant varier π, et ensuite σ, dans les expressions ci-dessus de p, ξ, π, σ, on formera deux nouveaux groupes de quatre équations, qui conduiront de même à la construction des composantes Π et Σ.

Nous devons reconnaître, toutefois, qu'au lieu d'interpréter géométriquement les équations composant chacun de ces groupes, il eût été plus conforme à l'esprit de la *Mécanique analytique* de tirer, des trois dernières équations du premier, par exemple, les valeurs de $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dz}{d\xi}$, et d'en conclure celle de $\frac{dp}{d\xi}$. Je laisse au lecteur le soin d'effectuer ces calculs.

6. Supposons maintenant que les axes ox, oy, oz soient obliques entre eux. Afin de ne pas nous jeter dans de trop grandes complications admettons, qu'on les ait choisis parallèles aux lignes ξ, π, σ et conservons les notations précédentes. Nous aurons (n° 4)

$$p = \sqrt{\begin{array}{l}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\widehat{xy} \\ \quad + 2(y-b)(z-c)\cos\widehat{yz} + 2(z-c)(x-a)\cos\widehat{zx}.\end{array}}$$

Par la variation de ξ, le point m aura un déplacement ds, lequel sera la diagonale d'un rhomboïde ayant pour arêtes parallèles aux axes dx, dy, dz. La projection orthogonale de ce déplacement sur la ligne ξ sera $d\xi$; elle se réduira à zéro sur chacune des lignes π et σ, qui demeurent constantes pendant qu'on fait varier ξ. De là ces trois relations

$$\begin{aligned}
d\xi &= dx + dy\cos\widehat{xy} + dz\cos\widehat{zx},\\
0 &= dy + dz\cos\widehat{yz} + dx\cos\widehat{xy},\\
0 &= dz + dx\cos\widehat{zx} + dy\cos\widehat{yz};
\end{aligned}$$

d'autre part on a, d'après l'expression de dp (n° 4),

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{d\xi} = {} & \frac{x-a+(y-b)\cos\widehat{xy}+(z-c)\cos\widehat{zx}}{p}\frac{dx}{d\xi}\\
&+ \frac{y-b+(z-c)\cos\widehat{yz}+(x-a)\cos\widehat{xy}}{p}\frac{dy}{d\xi}\\
&+ \frac{z-c+(x-a)\cos\widehat{zx}+(y-b)\cos\widehat{yz}}{p}\frac{dz}{d\xi};
\end{aligned}$$

ce que nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{d\xi} = {} & \frac{x-a}{p}\left(\frac{dx}{d\xi} + \frac{dy}{d\xi}\cos\widehat{xy} + \frac{dz}{d\xi}\cos\widehat{zx}\right)\\
&+ \frac{y-b}{p}\left(\frac{dy}{d\xi} + \frac{dz}{d\xi}\cos\widehat{yz} + \frac{dx}{d\xi}\cos\widehat{xy}\right)\\
&+ \frac{z-c}{p}\left(\frac{dz}{d\xi} + \frac{dx}{d\xi}\cos\widehat{zx} + \frac{dy}{d\xi}\cos\widehat{yz}\right).
\end{aligned}$$

En ayant égard, dans cette dernière expression de $\frac{dp}{d\xi}$, aux trois relations ci-dessus, et en procédant d'une manière analogue pour obtenir $\frac{dp}{d\pi}$ et $\frac{dp}{d\sigma}$, il vient

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{x-a}{p}, \quad \frac{dp}{d\pi} = \frac{y-b}{p}, \quad \frac{dp}{d\sigma} = \frac{z-c}{p};$$

on a, par conséquent,

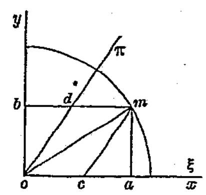
$$\Xi = \frac{P(x-a)}{p}, \quad \Pi = \frac{P(y-b)}{p}, \quad \Sigma = \frac{P(z-c)}{p},$$

ce qui nous ramène à la construction connue.

7. Considérons actuellement, avec Poinsot (Note de 1846, n° 5), un point m assujetti à demeurer sur la circonférence d'un cercle fixe. Si l'on nomme x et y les coordonnées de ce point par rapport à deux axes rectangulaires menés par le centre, deux forces X, Y, respectivement parallèles à ces axes, et telles que l'on ait $X : Y :: x : y$, donneront une résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle, et tiendront ainsi le point m en équilibre sur cette ligne.

Cela posé, si nous prenons, au lieu des coordonnées rectangles x et y, deux autres coordonnées ξ et π de même origine, par exemple, l'une, ξ, suivant les x, l'autre, π, formant un angle α avec la première, le point m sera pareillement tenu en équilibre par deux nouvelles forces Ξ et Π telles, que l'on ait $\Xi : \Pi :: \xi : \pi$.

Fig. 2.



En effet, dans la figure ci-dessus, les deux parallélogrammes *oamb*, *ocmd*, construits respectivement sur les lignes x, y d'une part et ξ, π

de l'autre, ont pour diagonale commune le rayon *om*, lequel se trouve ainsi représenter en grandeur, comme en direction, la résultante de chacun de ces deux systèmes de forces.

Par conséquent, si l'on réduit par les formules de Lagrange les forces X et Y, qui agissent sur le point *m* suivant les lignes x, y, à deux autres forces Ξ et Π, agissant sur le même point suivant les lignes ξ, π, ces nouvelles forces devront se trouver proportionnelles aux coordonnées ξ, π.

Or ces formules donnent, pour ce cas,

$$\Xi = X\frac{dx}{d\xi} + Y\frac{dy}{d\xi}, \quad \Pi = X\frac{dx}{d\pi} + Y\frac{dy}{d\pi}.$$

Comme on a

$$x = \xi + \pi\cos\alpha, \quad y = \pi\sin\alpha,$$

Poinsot tire de ces deux relations

$$\frac{dx}{d\xi} = 1, \quad \frac{dy}{d\xi} = 0, \quad \frac{dx}{d\pi} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{d\pi} = \sin\alpha;$$

d'où

$$\Xi = X, \quad \Pi = X\cos\alpha + Y\sin\alpha = X\left(\cos\alpha + \frac{y}{x}\sin\alpha\right),$$

puisque l'on a $X : Y :: x : y$. Remplaçant x et y par leurs valeurs ci-dessus en fonction des nouvelles coordonnées, il vient

$$\Pi = X\frac{\pi + \xi\cos\alpha}{\xi + \pi\cos\alpha},$$

ce qui donne $\Xi : \Pi :: \xi + \pi\cos\alpha : \pi + \xi\cos\alpha$. Il faudrait donc que l'on eût également $\xi + \pi\cos\alpha : \pi + \xi\cos\alpha :: \xi : \pi$, ou $(\xi^2 - \pi^2)\cos\alpha = 0$, condition à laquelle on ne peut satisfaire pour tous les points de la circonférence qu'en posant $\cos\alpha = 0$, c'est-à-dire en prenant la ligne π perpendiculaire à ξ.

Suivant Poinsot, c'est là une preuve que la méthode exposée dans l'Ouvrage de Lagrange est en défaut lorsqu'on se sert de coordonnées obliques.

8. Appliquons cette méthode correctement : nous obtiendrons un tout autre résultat. Il faut remarquer d'abord que les formules de Lagrange, invoquées par Poinsot, supposent essentiellement (n° 3) que ξ et π sont deux variables indépendantes, et que, par conséquent, il n'y a pas lieu ici d'avoir égard à la relation entre ces deux coordonnées, nécessaire pour que le point m soit assujetti à se trouver sur la circonférence du cercle. La considération de cette circonférence n'a servi, dans la présente question, qu'à former *a priori* ces deux systèmes X, Y et Ξ, Π, que nous savons pouvoir être substitués l'un à l'autre. Et il ne s'agit plus que de faire voir comment le second se déduit du premier par les formules citées.

Supposons, comme du reste Lagrange le fait habituellement, que toutes ces forces tendent à diminuer les coordonnées du point m, auquel elles sont appliquées, et faisons varier d'abord ξ (n[os] 2 et 4), la ligne π demeurant constante. Il résultera de cette variation $d\xi$ un déplacement ds du point m, sur la perpendiculaire à la ligne π menée par ce point, et nous aurons

$$d\xi = ds \sin\alpha, \quad dx = d\xi, \quad dy = -ds\cos\alpha.$$

Je mets le signe — à la variation dy, parce qu'elle est contraire au sens d'action que nous attribuons à Y. D'après cela, il vient

$$\Xi = X - Y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Faisons ensuite varier π, la ligne ξ demeurant à son tour constante. Le nouveau déplacement ds du point m, résultant de cette variation $d\pi$, aura lieu dans la ligne y, perpendiculaire à ξ. Nous aurons

$$d\pi = ds \sin\alpha, \quad dx = 0, \quad dy = ds,$$

et, par suite,

$$\Pi = \frac{Y}{\sin\alpha}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux qu'on obtient par l'application des règles connues de la *Statique*. Ils satisfont d'ailleurs à la condition $\Xi : \Pi :: \xi : \pi$, qu'on s'était imposée tout d'abord (nº **7**).

9. Poinsot considère, plus généralement (Note de 1846, nºs **3** et **4**), un point m sollicité par des forces P, Q, R,..., en nombre quelconque, dirigées vers autant de centres fixes o, o', o'',..., et la surface représentée par l'équation

$$f(p, q, r, \ldots) = \text{const.},$$

$f(p, q, r, \ldots)$ désignant une fonction quelconque des rayons vecteurs $p, q, r, \ldots$, menés de ce point m à tous ces centres. D'après un théorème qu'il a démontré dans son Mémoire intitulé : *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*, si les forces P, Q, R,... sont respectivement proportionnelles aux dérivées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$,... de cette fonction, prises successivement par rapport à ces variables p, q, r,..., leur résultante sera perpendiculaire à la surface. Supposons que l'on veuille réduire toutes ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, dirigées suivant trois lignes $m\xi$, $m\pi$, $m\sigma$, obliques entre elles et non comprises dans un même plan. On pourra regarder $p, q, r, \ldots$ comme des fonctions de ces nouvelles lignes ξ, π, σ, de telle sorte que, en différentiant à ce point de vue, on aura, d'après l'hypothèse ci-dessus,

$$f'(p)\frac{dp}{d\xi} + f'(q)\frac{dq}{d\xi} + f'(r)\frac{dr}{d\xi} + \ldots = \Xi,$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\pi} + f'(q)\frac{dq}{d\pi} + f'(r)\frac{dr}{d\pi} + \ldots = \Pi,$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\sigma} + f'(q)\frac{dq}{d\sigma} + f'(r)\frac{dr}{d\sigma} + \ldots = \Sigma.$$

Or il semble à Poinsot, par des raisons qu'il me paraît inutile de rapporter, que cela n'est pas exact.

Ici, de même que dans l'exemple précédent, nous ferons abstraction de la surface considérée, et nous n'entreprendrons de démontrer que l'équivalence des deux systèmes P, Q, R,... et Ξ, Π, Σ; car les formules mises en suspicion par Poinsot sont uniquement relatives à cette équivalence, et elles sont établies dans la supposition que le déplacement virtuel du point m peut avoir lieu non pas seulement dans une surface, mais aussi dans toutes les directions autour de ce point.

Rapportons tout le système à trois axes ox, oy, oz parallèles aux lignes ξ, π, σ (n° **6**). Appelons a, b, c les coordonnées du point o; a', b', c' celles du point o'; a'', b'', c'' celles du point o'',..., et x, y, z celles du point m. Nous aurons

$$p=\sqrt{\begin{aligned}&(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(x-a)(y-b)\cos\widehat{xy}\\&+2(y-b)(z-c)\cos\widehat{yz}+2(z-c)(x-a)\cos\widehat{zx},\end{aligned}}$$

$$q=\sqrt{\begin{aligned}&(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2+2(x-a')(y-b')\cos\widehat{xy}\\&+2(y-b')(z-c')\cos\widehat{yz}+2(z-c')(x-a')\cos\widehat{zx},\end{aligned}}$$

$$r=\sqrt{\begin{aligned}&(x-a'')^2+(y-b'')^2+(z-c'')^2+2(x-a'')(y-b'')\cos\widehat{xy}\\&+2(y-b'')(z-c'')\cos\widehat{yz}+2(z-c'')(x-a'')\cos\widehat{zx},\end{aligned}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où (n° **6**)

$$\frac{dp}{d\xi}=\frac{x-a}{p},\quad \frac{dp}{d\pi}=\frac{y-b}{p},\quad \frac{dp}{d\sigma}=\frac{z-c}{p},\quad \frac{dq}{d\xi}=\frac{x-a'}{q},\ldots,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
f'(p)\frac{x-a}{p}+f'(q)\frac{x-a'}{q}+f'(r)\frac{x-a''}{r}+\ldots&=\Xi,\\
f'(p)\frac{y-b}{p}+f'(q)\frac{y-b'}{q}+f'(r)\frac{y-b''}{r}+\ldots&=\Pi,\\
f'(p)\frac{z-c}{p}+f'(q)\frac{z-c'}{q}+f'(r)\frac{z-c''}{r}+\ldots&=\Xi.
\end{aligned}$$

On voit que Ξ n'est autre chose que la somme des composantes des forces P, Q, R,..., suivant la ligne ξ; que, de même, Π et Σ sont pareillement les sommes des composantes des mêmes forces suivant les lignes π et σ.

Du reste, il est facile de vérifier *a posteriori* l'équivalence de ces deux systèmes de forces; car soit ds un déplacement donné au point m dans une direction quelconque; représentons par $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ ses projections orthogonales et par dx, dy, dz ses projections obliques sur les lignes ξ, π, σ; nous aurons

$$d\xi = dx + dy \cos \widehat{xy} + dz \cos \widehat{zx},$$
$$d\pi = dy + dz \cos \widehat{yz} + dx \cos \widehat{xy},$$
$$d\sigma = dz + dx \cos \widehat{zx} + dy \cos \widehat{yz}.$$

Multiplions les premiers membres de ces trois égalités respectivement par Ξ, Π, Σ, et les seconds membres par les expressions que nous venons d'obtenir pour ces trois composantes. Il viendra, en ajoutant,

$$\Xi\, d\xi + \Pi\, d\pi + \Sigma\, d\sigma = f'(p)\,dp + f'(q)\,dq + f'(r)\,dr + \ldots,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence des deux systèmes.

On voit que Poinsot s'est trompé en croyant démontrer que les formules de Lagrange ne sont pas toujours bonnes, et qu'elles se trouvent en défaut notamment dans le cas d'axes obliques.

10. Il nous reste à parler des critiques de Poinsot relatives à la manière dont la composition des moments est présentée dans la *Mécanique analytique*. On sait que les lois de cette composition n'étaient pas encore connues en 1788, c'est-à-dire à l'époque où la première édition de cet Ouvrage, si justement célèbre, fut publiée. Elles furent trouvées, peu de temps après, par Euler et Laplace [*]; Lagrange les

---

[*] *Bulletin universel des Sciences, publié sous la direction du baron de Férussac,* 1re section, t. VII, 1827, p. 357.

introduisit dans le tome I de la seconde édition, publié en 1811. Elles s'offraient naturellement comme une conséquence très-simple du principe des vitesses virtuelles et de celui de la composition des rotations autour d'axes concourants, donné dans la première édition (1re Partie, 3e Section). En vertu de ce dernier principe, trois rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, autour de trois axes rectangulaires *ol*, *om*, *on*, se composent en une seule $d\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}$, autour d'un axe *oh*, faisant avec *ol*, *om*, *on* trois angles λ, μ, ν, donnés par les équations

$$d\psi = d\theta\cos\lambda, \quad d\omega = d\theta\cos\mu, \quad d\varphi = d\theta\cos\nu.$$

Chacune de ces rotations, telle que $d\psi$, donne lieu à un déplacement $d\psi$ pour tout point situé à une distance de l'axe correspondant *ol* égale à l'unité de longueur. Dès lors on peut concevoir qu'une force L soit appliquée à l'un de ces points, perpendiculairement au plan passant par ce point et par l'axe *ol*, et que d'autres forces M, N, H, relatives aux axes *om*, *on*, *oh*, soient pareillement appliquées au système. Les rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, $d\theta$ étant compatibles avec les conditions auxquelles ce système doit satisfaire, il sera en équilibre si les grandeurs de ces forces sont telles que l'on ait

$$\mathrm{L}d\psi + \mathrm{M}d\omega + \mathrm{N}\,d\varphi = \mathrm{H}d\theta.$$

Or, si nous mettons à la place de $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ leurs valeurs ci-dessus, il vient

$$(\mathrm{L}\cos\lambda + \mathrm{M}\cos\mu + \mathrm{N}\cos\nu - \mathrm{H})\,d\theta = 0.$$

Comme $d\theta$ est arbitraire, il faut que l'on ait

$$\mathrm{L}\cos\lambda + \mathrm{M}\cos\mu + \mathrm{N}\cos\nu - \mathrm{H} = 0,$$

équation à laquelle on satisfera évidemment en posant

$$\mathrm{L} = \mathrm{H}\cos\lambda, \quad \mathrm{M} = \mathrm{H}\cos\mu, \quad \mathrm{N} = \mathrm{H}\cos\nu,$$

ce qui donne les lois connues de la composition des moments. Telle est, du moins pour le fond, la manière dont Lagrange y parvient.

11. « Mais cette démonstration, dit Poinsot, outre l'inconvénient qu'elle a de supposer la connaissance de l'effet dynamique du moment et de n'être pas tirée du seul principe de l'équilibre, présente encore un autre défaut qu'on n'a point remarqué : c'est qu'elle suppose que les trois moments composants autour de trois axes rectangulaires soient proportionnels aux trois rotations instantanées qu'ils tendent à produire autour des mêmes axes, ce qui n'a pas lieu en général; car les rotations que des moments, ou plutôt des couples, tendent à produire sur un corps, ne se font point autour des axes de ces couples, et ne sont point proportionnels à leurs moments, etc. [*]. »

Il en est de ces critiques comme de celles de la Note de 1846 : pas une qui porte juste; car c'est bien du seul principe de l'équilibre que la démonstration ci-dessus est tirée, et elle ne suppose en aucune façon la connaissance de l'effet dynamique du moment. Les déplacements que l'on y considère sont purement virtuels [**] et, par conséquent, indépendants des forces appliquées. Ce qu'objecte Poinsot relativement aux grandeurs des rotations instantanées des corps et aux axes autour desquels ces rotations ont lieu prouve qu'il a confondu les rotations *virtuelles*, qui sont essentiellement censées produites sans l'intervention des forces, avec les rotations *spontanées*, qui naissent d'impulsions imprimées aux corps.

12. Dans ce qui précède, je me suis attaché uniquement aux deux points de doctrine sur lesquels Poinsot avait cru devoir appeler d'une manière expresse l'attention des géomètres. Cependant il y aurait aussi plus d'une remarque à faire sur le contenu d'une partie des annotations qui ont été jointes à la troisième édition de la *Mécanique analytique;* mais, pour remplir convenablement cet objet, il faudrait dépasser de beaucoup les limites que comporte le présent article. Du reste, c'est là un travail de révision que l'on peut ajourner sans inconvénient.

---

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 564.

[**] « Le mot *virtuel* indique que le mouvement attribué au système est seulement possible, mais il n'a pas réellement lieu, et l'on n'a pas à considérer les forces qui seraient capables d'opérer ce mouvement. » (STURM, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, n° 439.)

En effet, la *Mécanique analytique* devant être comprise dans l'édition officielle des *OEuvres de Lagrange*, dont la publication se poursuit, depuis plusieurs années, par les soins de M. Serret, il est permis de penser que l'éminent géomètre sera nécessairement conduit à faire ce travail, et l'on peut être assuré d'avance que les commentaires, qu'il jugera ensuite indispensable de conserver ou d'introduire, ne laisseront rien à désirer.