JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Sur les surfaces isothermes paraboloïdales

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 307-318.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__307_0>

Sur les surfaces isothermes paraboloïdales;

Par M. G. LAMÉ [*].

Dans mon Mémoire sur les surfaces orthogonales toutes isothermes [**], j'ai fait voir que le système paraboloïdal n'était qu'un cas particulier des surfaces orthogonales et isothermes du second ordre; mais il ne sera pas inutile de rechercher directement ce système, afin d'éclaircir, par un nouvel exemple, la méthode générale que j'ai indiquée pour résoudre des questions de cette nature.

Soit donc proposé de trouver les surfaces isothermes comprises dans l'équation

$$2lx + my^2 + nz^3 = 1, \tag{1}$$

laquelle s'étend à tous les paraboloïdes, tant elliptiques qu'hyperboliques.

Le problème d'Analyse qu'il s'agit de résoudre consiste à regarder les coefficients l, m, n comme des fonctions inconnues d'un paramètre λ, et à déterminer ces fonctions par la condition que le quotient

$$\frac{\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2} \tag{2}$$

---

[*] Ce Mémoire de mon savant ami et regretté confrère doit remonter à l'année 1843 ou au moins à 1844. J'ignore par quelle suite de circonstances il a été retardé à l'impression, puis négligé et comme oublié par son illustre auteur, qui n'est mort que longtemps après, en 1870. Enfin il se retrouve aujourd'hui, et je m'empresse de le communiquer au public, car on le lira encore avec plaisir et avec profit. Lamé possédait un talent très-pénétrant, d'un genre tout particulier, et en ce sens on peut dire qu'il n'a pas été remplacé jusqu'ici. (J. Liouville.)

[**] Lu à l'Académie des Sciences, le 21 août 1843, et imprimé la même année dans le *Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 397; *voir* aussi p. 515.

soit exprimable en λ seul, lorsque, considérant à la fois toutes les surfaces comprises dans l'équation (1), ce paramètre λ devient une fonction de x, y, z, donnée par cette même équation.

Désignons par L le premier membre de l'équation (1); posons pour simplifier

$$(3) \qquad l^2 + m^2y^2 + n^2z^2 = \mathrm{M};$$

enfin employons une notation connue, en représentant par la même lettre accentuée une ou deux fois (F', F'') les dérivées première et seconde de toute fonction (F) de λ, prises par rapport à ce paramètre seul. On déduit de l'équation (1), par des différentiations successives et l'élimination,

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{L}'^2 \left[\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 4\mathrm{M}, \\ \mathrm{L}'^3 \left(\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 4\left(\mathrm{M'L'} - \mathrm{ML''} - \dfrac{m+n}{2}\mathrm{L}'^2\right), \end{cases}$$

d'où l'on conclut pour le rapport (2)

$$\frac{\mathrm{M'L'} - \mathrm{ML''} - \dfrac{m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{ML'}},$$

ce qui réduit le problème proposé à faire en sorte que l'équation

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{M'L'} - \mathrm{ML''} - \dfrac{m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{ML'}} = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

dans laquelle φ ne contient que λ, soit vérifiée en même temps que l'équation (1), ou $\mathrm{L} = 1$.

La question se simplifie encore si l'on élimine x entre les équations (1) et (5). En effet, en posant

$$(6) \qquad l' + (lm' - l'm)y^2 + (ln' - l'n)z^2 = \mathrm{N},$$

la valeur de x tirée de l'équation (1) donne

$$l\mathrm{L}' = \mathrm{N}, \quad l\mathrm{L}'' = \mathrm{N}',$$

et l'équation (5) devient

$$(7) \qquad M'N\varphi - M(N'\varphi + N\varphi') - \frac{m+n}{2l}\varphi N^2 = 0.$$

Or cette équation finale doit être identique, quelles que soient les deux seules variables indépendantes y et z actuellement présentes. Donc, pour trouver les familles de surfaces isothermes comprises dans la formule (1), il suffit de chercher les fonctions l, m, n, φ de λ qui peuvent vérifier l'équation (7), quels que soient y et z.

Le premier membre de cette équation (7) se présente sous la forme d'un polynôme du quatrième degré, à puissances paires de y et z; mais il se réduit au second degré seulement si l'on pose

$$(8) \qquad \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n},$$

car N (6) se réduit à l', et N' à l''. Les équations (8) donnent par l'intégration

$$(9) \qquad l = \alpha\psi, \quad m = \beta\psi, \quad n = \gamma\psi,$$

ψ étant une fonction de λ; α, β, γ des constantes; d'où l'on conclut

$$(10) \qquad \begin{cases} M = \psi^2 F, \quad M' = 2\psi\psi' F, \\ F = \alpha^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2. \end{cases}$$

Toutes ces valeurs, substituées dans l'équation (7), la transforment ainsi

$$(11) \qquad \frac{d\frac{\psi^2}{\varphi\psi'}}{d\lambda}(\alpha^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) = \frac{\beta+\gamma}{2\varphi},$$

et pour que cette équation soit vérifiée, quels que soient y et z, il faut que l'on ait

$$(12) \qquad \frac{d\frac{\psi^2}{\varphi\psi'}}{d\lambda} = 0, \quad \gamma = -\beta.$$

Rien n'empêche de prendre $\psi = \frac{1}{\lambda}$ et φ constant, pour satisfaire à la première équation (12); la formule (1) devient alors

$$(13) \qquad 2\alpha x + \beta(y^2 - z^2) = \lambda,$$

et représente une famille isolée de paraboloïdes hyperboliques, qui sont évidemment isothermes, puisque la fonction λ (13) satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = 1.$$

Cherchons maintenant à vérifier l'équation (7) sans poser les relations (8). Comme cette vérification doit avoir lieu indépendamment des coordonnées y et z, on peut les supposer constantes quand λ varie, et écrire l'équation (7) de cette manière :

$$(14) \qquad \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}\varphi}\right] = \frac{m+n}{2l\varphi},$$

c'est-à-dire que le problème proposé sera résolu si l'on fait en sorte que la fraction

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} \text{ ou } \frac{l' + (lm' - ml')y^2 + (ln' - nl')z^2}{l^2 + m^2y^2 + n^2z^2}$$

se réduise identiquement à une fonction ψ de λ seul; car l'équation (14) deviendra

$$(16) \qquad \varphi \frac{d\frac{1}{\varphi\psi}}{d\lambda} = \frac{m+n}{2l},$$

et servira à déterminer la fonction φ.

Pour que la fraction (15) soit indépendante de y et de z, il faut et il suffit que

$$(17) \qquad \frac{d\frac{1}{l}}{d\lambda} = \frac{d\frac{l}{m}}{d\lambda} = \frac{d\frac{l}{n}}{d\lambda};$$

or rien n'empêche de prendre pour le paramètre λ la fonction $\frac{1}{l}$, d'où

$l = \frac{1}{\lambda}$, et les équations (17) donneront, par l'intégration

$$(18) \qquad l = \frac{1}{\lambda}, \quad m = \frac{1}{\lambda(\lambda - \beta)}, \quad n = \frac{1}{\lambda(\lambda - \gamma)},$$

β et γ étant des constantes différentes.

On aura alors $\psi = \frac{l'}{l^2} = -1$, et l'équation (16) deviendra, par la substitution des valeurs de l, m, n, ψ,

$$(19) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda - \beta} + \frac{1}{\lambda - \gamma}\right),$$

équation dont l'intégration donnera

$$(20) \quad \varphi = \sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\lambda - \gamma}, \text{ ou } \varphi = \sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\gamma - \lambda}, \text{ ou } \varphi = \sqrt{\beta - \lambda}\sqrt{\gamma - \lambda},$$

suivant que λ surpassera γ plus grand que β, ou sera compris entre γ et β, ou enfin sera moindre que β.

Ces trois cas différents conduisent aux familles conjuguées des paraboloïdes, représentées par les équations

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2x}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda - \beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda - \gamma)} = 1, \\ &\frac{2x}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1 - \beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma - \lambda_1)} = 1, \\ &\frac{2x}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta - \lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma - \lambda_2)} = 1, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles on a $\lambda > \gamma > \lambda_1 > \beta > \lambda_2 > 0$.

La fonction φ étant déterminée, on sait que la température est exprimée par le binôme $\left(A\int\frac{d\lambda}{\varphi} + B\right)$, A et B étant constants; si donc on représente par ε, ε_1, ε_2, l'intégrale $\int\frac{d\lambda}{\varphi}$, prise entre telles limites que l'on jugera convenable, pour les trois familles (21), on pourra poser, d'après les valeurs (20) de φ,

$$(22) \; \varepsilon = \int_\gamma^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\lambda - \gamma}}, \quad \varepsilon_1 = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 - \beta}\sqrt{\gamma - \lambda_1}}, \quad \varepsilon_2 = \int_{\lambda_2}^{\beta} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\beta - \lambda_2}\sqrt{\gamma - \lambda_2}}:$$

et la température sera une fonction linéaire de ε, ou ε_1, ou ε_2, suivant le système de surfaces isothermes (21) que l'on aura en vue.

Les intégrales (22) peuvent s'obtenir par les méthodes connues, et l'on trouve que les fonctions λ de ε, λ_1 de ε_1, λ_2 de ε_2 se mettent sous la forme

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\left(\frac{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}}{2}\right),\\ \lambda_1 &= \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\varepsilon_1,\\ \lambda_2 &= \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\left(\frac{e^{\varepsilon_2}+e^{-\varepsilon_2}}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

On pourrait, au lieu de λ, λ_1, λ_2, prendre pour paramètres des surfaces (21) les transcendantes ε, ε_1, ε_2. Les limites de ces nouveaux paramètres sont, pour ε, zéro et l'infini; pour ε_1, zéro et π; pour ε_2, zéro et l'intégrale complète

$$(24)\qquad \varpi = \int_0^\beta \frac{d\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha}\,\sqrt{\gamma-\alpha}},$$

qui est telle que l'on a

$$(25)\qquad \frac{e^{\varpi}+e^{-\varpi}}{2} = \frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}.$$

On remarquera que les limites supérieures et inférieures se correspondent pour λ et ε, pour λ_1 et ε_1; mais qu'il y a réciprocité entre l'ordre de ces limites pour λ_2 et ε_2.

Les valeurs de x, y, z, en λ, λ_1, λ_2, obtenues par l'élimination à l'aide des trois équations (21), conduisent aux relations suivantes :

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} 2x &= \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - \beta - \gamma,\\ y\sqrt{\gamma-\beta} &= \sqrt{\lambda-\beta}\,\sqrt{\lambda_1-\beta}\,\sqrt{\beta-\lambda_2},\\ z\sqrt{\gamma-\beta} &= \sqrt{\lambda-\gamma}\,\sqrt{\gamma-\lambda_1}\,\sqrt{\gamma-\lambda_2}.\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs vérifient les équations

$$1 + \frac{y^2}{(\lambda-\beta)(\lambda_1-\beta)} - \frac{z^2}{(\lambda-\gamma)(\gamma-\lambda_1)} = 0,$$
$$1 - \frac{y^2}{(\lambda-\beta)(\beta-\lambda_2)} - \frac{z^2}{(\lambda-\gamma)(\gamma-\lambda_2)} = 0,$$
$$1 - \frac{y^2}{(\lambda_1-\beta)(\beta-\lambda_2)} + \frac{z^2}{(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2)} = 0,$$

lesquelles expriment que les trois systèmes de surfaces (21) se coupent à angle droit.

La première et la troisième des équations (21), aux paramètres λ et λ_2, représentent des paraboloïdes ayant leurs axes principaux sur la même droite, qui est l'axe des x, mais en sens opposés; quant à la famille au paramètre λ_1, elle se compose de paraboloïdes hyperboliques. Si l'on fait $z=0$ dans les équations (21), on trouve, pour les équations des courbes d'intersection par le plan des xy,

$$\lambda - \frac{\beta}{2} - x = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2},$$
$$\lambda_1 - \frac{\beta}{2} - x = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2},$$
$$x + \frac{\beta}{2} - \lambda_2 = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2};$$

c'est-à-dire que ces sections principales sont des paraboles ayant toutes pour foyer le point B, dont les coordonnées sont

$$z=0, \quad y=0, \quad x=\frac{\beta}{2}.$$

Pareillement, si l'on fait $y=0$ dans les équations (21), on trouve pour les équations des traces sur le plan des zx,

$$\lambda - \frac{\gamma}{2} - x = \sqrt{z^2 + \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2},$$
$$x + \frac{\gamma}{2} - \lambda_1 = \sqrt{z^2 + \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2},$$
$$x + \frac{\gamma}{2} - \lambda_2 = \sqrt{z^2 + \left(x - \frac{\gamma}{2}\right)^2};$$

c'est-à-dire que ces sections principales sont des paraboles, ayant toutes pour foyer le point C, dont les coordonnées sont

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \frac{\gamma}{2}.$$

Le paraboloïde elliptique de la famille ε_2, qui correspond à $\varepsilon_2 = \varpi$ (24), ou à $\lambda_2 = 0$, a pour équation

$$(27) \qquad \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 2x;$$

son sommet est à l'origine A, et il enveloppe tous les autres paraboloïdes de la même famille. Celui qui correspond à la valeur zéro de ε_2, ou $\lambda_2 = \beta$, devient une aire plane, sur le plan des zy, ou $y = 0$, limitée extérieurement par la parabole ayant, sur l'axe des x, son sommet en B et son foyer en C.

La surface ε correspondant à $\varepsilon = 0$, ou $\lambda = \gamma$, est une aire plane, située sur le plan des xy ou $z = 0$, limitée extérieurement par la parabole ayant son sommet en C et son foyer en B. Tous les autres paraboloïdes ε ont leurs sommets plus éloignés que le point C, et sont tournés vers les abscisses négatives; leurs sections par le plan des xy ont toutes leur foyer en B, et leurs sections par le plan des zx en C.

Tout paraboloïde hyperbolique ε_1 a son sommet en D sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à $\frac{\lambda_1}{2}$, c'est-à-dire entre B et C; sa section par le plan des zx est une parabole s'ouvrant vers les abscisses positives, ayant son sommet en D et son foyer en C; sa section par le plan des xy est une parabole s'ouvrant vers les abscisses négatives, ou vers l'origine, ayant son sommet en D et son foyer en B.

Le paraboloïde correspondant à $\varepsilon_1 = 0$, ou $\lambda_1 = \beta$, est une aire plane, située sur le plan des xy comme la surface $\varepsilon_2 = 0$; mais cette aire est limitée intérieurement par la parabole ayant son sommet en B et son foyer en C; en sorte que l'intérieur de cette parabole est la surface $\varepsilon_2 = 0$, ou $\lambda_2 = \beta$, et l'extérieur, la surface $\varepsilon_1 = 0$, ou $\lambda_1 = \beta$.

Le paraboloïde correspondant à $\varepsilon_1 = \pi$, ou $\lambda_1 = \gamma$, est une aire plane, située sur le plan des yx comme la surface $\varepsilon = 0$; mais cette aire est limitée intérieurement par la parabole dont le sommet est en C et le foyer en B; c'est-à-dire que sur le plan des yx l'intérieur de cette parabole est la surface $\varepsilon = 0$, ou $\lambda = \gamma$, et l'extérieur, la surface $\varepsilon_1 = \pi$, ou $\lambda_1 = \gamma$.

Les surfaces (21) forment donc un système particulier de surfaces orthogonales, qui pourra être utilisé dans des recherches spéciales. Si l'on prend λ, λ_1, λ_2 pour paramètres de ces surfaces ou pour coordonnées curvilignes, les paramètres différentiels du premier ordre h, h_1, h_2, déduits de la première équation (4), transformée à l'aide des valeurs (3), (18) et (26), sont

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{ds} &= h = 2\frac{\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\sqrt{\lambda-\lambda_2}},\\ \frac{d\lambda_1}{ds_1} &= h_1 = 2\frac{\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda-\lambda_1}},\\ \frac{d\lambda_2}{ds_2} &= h_2 = 2\frac{\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on adopte pour paramètres les transcendantes ε, ε_1, ε_2, les paramètres différentiels du premier ordre η, η_1, η_2 seront plus simplement

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{ds} &= \eta = \frac{2}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\sqrt{\lambda-\lambda_2}},\\ \frac{d\varepsilon_1}{ds_1} &= \eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda-\lambda_1}},\\ \frac{d\varepsilon_2}{ds_2} &= \eta_2 = \frac{2}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (26) serviront de formules de transformation quand on adoptera les paramètres λ, λ_1, λ_2. Dans le cas où l'on choisirait ε, ε_1, ε_2, il faudrait se servir de celles-ci :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} 2x &= \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)[\mathrm{E}(\varepsilon) - \cos\varepsilon_1 + \mathrm{E}(\varepsilon_2)],\\ y &= (\gamma-\beta)\,\mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\mathcal{E}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right),\\ z &= (\gamma-\beta)\,\mathcal{E}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on a posé généralement, pour simplifier,

$$(31)\qquad \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}=\mathrm{E}(\alpha),\quad \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}=\mathcal{E}(\alpha),$$

et qui se déduisent des équations (26) en y substituant les valeurs (23).

Dans les formules (28) et (29), ds, ds_1, ds_2 représentent les éléments des courbes d'intersection des surfaces (21), courbes qui sont, comme l'on sait, les lignes de courbure de ces surfaces.

Pour faire une application du système coordonné qui vient d'être défini, proposons-nous d'évaluer le volume compris entre le paraboloïde $\varepsilon_2=\varpi$ (27), ou $\lambda_2=0$, et un des paraboloïdes ε. La différentielle du volume est

$$ds\,ds_1\,ds_2=\frac{d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{h\,h_1\,h_2}=\frac{d\varepsilon\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2}{\eta\,\eta_1\,\eta_2},$$

et l'intégrale qu'il s'agit d'obtenir est, d'après les valeurs (28),

$$(32)\qquad \mathrm{V}=\frac{1}{8}\int_0^{\beta}\int_{\beta}^{\gamma}\int_{\gamma}^{\lambda}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}},$$

ou, d'après les formules (29),

$$(33)\qquad \mathrm{V}=\frac{1}{8}\int_0^{\varpi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varepsilon}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)\,d\varepsilon\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2;$$

λ, λ_1, λ_2, dans cette dernière intégrale, étant les fonctions respectives de ε, ε_1, ε_2, données par les équations (23).

On a identiquement

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)=(\lambda_1-\lambda_2)\lambda^2+(\lambda_2-\lambda)\lambda_1^2+(\lambda-\lambda_1)\lambda_2^2,$$

et l'intégrale (33) se décompose ainsi :

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{V}=\frac{1}{8}\Big[&\left(\varepsilon_2\int\lambda_1 d\varepsilon_1-\varepsilon_1\int\lambda_2 d\varepsilon_2\right)\int\lambda^2 d\varepsilon\\ &+\left(\varepsilon\int\lambda_2 d\varepsilon_2-\varepsilon_2\int\lambda\, d\varepsilon\right)\int\lambda_1^2 d\varepsilon_1\\ &+\left(\varepsilon_1\int\lambda\, d\varepsilon-\varepsilon\int\lambda_1 d\varepsilon_1\right)\int\lambda_2^2 d\varepsilon_2\Big],\end{aligned}\right.$$

en prenant d'abord toutes les intégrales depuis $\varepsilon=0$, $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$.

Les fonctions (23) donnent successivement, en adoptant la notation (31),

$$\int_0^{\varepsilon} \lambda\, d\varepsilon = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\mathcal{E}(\varepsilon),$$

$$\int_0^{\varepsilon_1} \lambda_1\, d\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\varepsilon_1 - \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\sin\varepsilon_1,$$

$$\int_0^{\varepsilon_2} \lambda_2\, d\varepsilon_2 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\varepsilon_2 - \left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\mathcal{E}(\varepsilon_2),$$

$$\int_0^{\varepsilon} \lambda^2\, d\varepsilon = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)^2\varepsilon + \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}\mathcal{E}(\varepsilon) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2[\mathrm{E}(\varepsilon)\mathcal{E}(\varepsilon)+\varepsilon],$$

$$\int_0^{\varepsilon_1} \lambda_1^2\, d\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)^2\varepsilon_1 - \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}\sin\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_1+\varepsilon_1),$$

$$\int_0^{\varepsilon_2} \lambda_2^2\, d\varepsilon_2 = \left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)^2\varepsilon_2 - \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}\mathcal{E}(\varepsilon_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2[\mathrm{E}(\varepsilon_2)\mathcal{E}(\varepsilon_2)+\varepsilon_2];$$

et ces valeurs substituées dans V (34) donnent, toutes les réductions faites,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V} = \frac{(\gamma-\beta)^3}{32}\{&\varepsilon[\mathrm{E}(\varepsilon_2)-\cos\varepsilon_1]\mathcal{E}(\varepsilon_2)\sin\varepsilon_1\\ &+\varepsilon_1[\mathrm{E}(\varepsilon)+\mathrm{E}(\varepsilon_2)]\mathcal{E}(\varepsilon)\mathcal{E}(\varepsilon_1)\\ &-\varepsilon_2[\mathrm{E}(\varepsilon)+\cos\varepsilon_1]\mathcal{E}(\varepsilon)\sin\varepsilon_1\}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, si l'on fait $\varepsilon_1 = \pi$, $\varepsilon_2 = \varpi$, il vient, pour l'intégrale (33),

$$(36)\qquad \mathrm{V} = \frac{\pi}{32}(\gamma-\beta)^3[\mathrm{E}(\varepsilon)+\mathrm{E}(\varpi)]\mathcal{E}(\varepsilon)\mathcal{E}(\varpi).$$

Si l'on remarque maintenant que, d'après la formule (25),

$$\mathrm{E}(\varpi) = \frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta},\quad \mathcal{E}(\varpi) = \frac{2\sqrt{\beta\gamma}}{\gamma-\beta},$$

et que la valeur λ (23) donne successivement

$$\lambda = \frac{\gamma-\beta}{2}[\mathrm{E}(\varepsilon)+\mathrm{E}(\varpi)],\quad \lambda-\beta = \frac{\gamma-\beta}{2}[\mathrm{E}(\varepsilon)+1],\quad \lambda-\gamma = \frac{\gamma-\beta}{2}[\mathrm{E}(\varepsilon)-1],$$

$$\sqrt{\lambda-\beta}\,\sqrt{\lambda-\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{2}\mathcal{E}(\varepsilon);$$

d'où réunissant

$$\frac{\gamma-\beta}{2}[\mathrm{E}(\varepsilon)+\mathrm{E}(\varpi)] = \lambda,\quad \frac{\gamma-\beta}{2}\mathcal{E}(\varepsilon) = \sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma},\quad \frac{\gamma-\beta}{2}\mathcal{E}(\varpi) = \sqrt{\beta\gamma},$$

et en multipliant

$$\frac{(\gamma-\beta)^3}{8}[\mathrm{E}(\varepsilon)+\mathrm{E}(\varpi)]\,\mathcal{E}(\varepsilon)\,\mathcal{E}(\varpi)=\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma},$$

on voit que l'intégrale (36), et par suite (32), ont pour valeur

$$\mathrm{V}=\frac{\pi}{4}\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}, \tag{37}$$

ou que l'on a

$$\left\{\begin{aligned}&\int_0^\beta\int_\beta^\gamma\int_\gamma^\lambda\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda)(\lambda-\lambda_1)\,d\lambda\,d\lambda_1\,d\lambda_2}{\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}\\&\quad=2\pi\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}.\end{aligned}\right. \tag{38}$$

Les deux paraboloïdes elliptiques opposés, qui limitent le volume V (37), sont homofocaux et se coupent à angles droits; λ est le double de la distance qui sépare leurs sommets: ces paraboloïdes ont pour équations

$$\frac{y^2}{\lambda(\lambda-\beta)}+\frac{z^2}{\lambda(\lambda-\gamma)}+\frac{2x}{\lambda}=1,\quad \frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}-2x=0; \tag{39}$$

et, par l'élimination de x, on trouve

$$\frac{y^2}{\beta(\lambda-\beta)}+\frac{z^2}{\gamma(\lambda-\gamma)}=1 \tag{40}$$

pour l'équation du cylindre droit à base elliptique qui contient leur intersection à double courbure. Or le volume de ce cylindre, limité à deux bases tangentes aux sommets des deux paraboloïdes, et qui a conséquemment pour hauteur $\frac{\lambda}{2}$, sera évidemment, d'après l'équation (40),

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\beta\gamma}\,\lambda\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma},\quad \text{ou}\quad 2\mathrm{V}\,(37).$$

On peut donc dire très-simplement que le volume cherché est la moitié de celui du cylindre droit, à base elliptique, qui l'enveloppe.