JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. CLAUSIUS

Sur un nouveau principe de Mécanique relatif aux mouvements stationnaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 193-220.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__193_0>

Sur un nouveau principe de Mécanique relatif aux mouvements stationnaires;

PAR M. R. CLAUSIUS.

(Lu à la Société Rhénane des Sciences naturelles et médicales le 16 juin 1873.
Traduit de l'allemand par M. F. FOLIE.)

Dans un Mémoire publié en 1870 [*], j'ai établi et démontré, pour un point matériel qui se meut sur une trajectoire fermée, une équation qui a des rapports étroits avec le principe de la moindre action et avec celui de Hamilton, mais qui en diffère néanmoins d'une manière essentielle. Dans la suite de ce même Mémoire, j'ai cherché à appliquer cette équation à la Théorie de la chaleur; mais ce sujet, considéré même d'un point de vue purement mécanique, m'a paru d'une assez grande importance pour me déterminer à le poursuivre dans cette direction, et à donner à l'équation que j'avais établie une forme aussi générale que possible; l'application de cette équation à des cas particuliers en sera naturellement facilitée et rendue plus sûre. C'est le résultat de cette recherche que je me propose de communiquer dans ces pages.

1. Il sera utile d'établir d'abord l'équation sous sa première forme, et d'y relier ensuite les développements ultérieurs.

Soit donné un point matériel de masse m, soumis à l'action d'une force qui a une *fonction de force*, ou, suivant une autre dénomination, un *ergiel*, et décrivant sous l'influence de cette force une trajectoire

[*] *Sur la réduction du second principe fondamental de la Théorie mécanique de la chaleur à des principes généraux de Mécanique.* (*Bulletin de la Société rhénane des Sciences naturelles et médicales*, p. 167, 1870; *Annales de Poggendorff*, t. CXLII, p. 433; traduit en anglais dans le *Philosophical Magazine*, 4e série, t. XLII, p. 161.

fermée. Représentons par U l'ergiel, par v la vitesse du point, par i la durée de sa révolution. Nous aurons à prendre les moyennes des quantités qui sont variables pendant le mouvement, et nous désignerons ces moyennes en surmontant d'un trait horizontal le signe qui représente la grandeur variable.

Outre ce mouvement originairement donné du point, considérons-en un autre infiniment peu différent du premier, que nous nommerons *mouvement modifié*. La modification pourra être produite soit parce que le point de départ du mouvement a été changé, soit parce que les composantes de la vitesse initiale sont autres que dans le mouvement primitif. De plus, l'ergiel peut avoir subi une modification. Pour exprimer celle-ci, nous admettons que la fonction U renferme, outre les coordonnées du point mobile, une ou plusieurs quantités c_1, $c_2, \ldots$, qui sont constantes dans chaque mouvement, mais qui peuvent changer de valeur dans le passage d'un mouvement à l'autre.

Actuellement si, pour chacune des grandeurs considérées, nous envisageons la différence entre les valeurs qu'elle a, dans le mouvement primitif et dans le mouvement modifié, comme une variation de cette grandeur, que nous désignerons par la caractéristique δ, et si, pour abréger, nous comprenons sous un signe sommatoire les termes relatifs aux quantités c_1, $c_2, \ldots$, l'équation dont il s'agit s'écrira

$$(1) \qquad \delta\overline{\mathrm{U}} - \sum \frac{d\overline{\mathrm{U}}}{dc}\,\delta c = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i.$$

Il ne sera pas inutile d'ajouter ici la démonstration que j'ai donnée de cette équation, dans le travail cité plus haut.

Comme nous l'avons déjà dit, nous considérons comme variation d'une quantité la différence entre les deux valeurs que prend cette quantité dans le mouvement primitif et dans le mouvement modifié. Or, si la quantité dont on doit prendre la variation est variable dans le cours du mouvement, on devra, pour chaque valeur de cette quantité dans le mouvement primitif, trouver dans le mouvement modifié une valeur déterminée correspondante de cette quantité, et prendre, pour variation de celle-ci, la différence entre ces deux valeurs correspondantes.

Pour déterminer les valeurs correspondantes, nous procéderons de la manière suivante : nous choisirons, sur les deux trajectoires que le point parcourt dans les deux mouvements, deux positions infiniment voisines comme origines du mouvement, et nous prendrons pour origines du temps les moments où le point mobile a passé par ces positions. Nous désignerons respectivement par t et t^* le temps compté à partir de ces origines dans le mouvement primitif et dans le mouvement modifié, et nous poserons

$$t = i\varphi \quad \text{et} \quad t^* = (i + \delta i)\varphi,$$

φ étant une quantité que j'ai appelée *la phase du mouvement*, et qui, dans les deux mouvements, augmente d'une unité pendant chaque révolution. Cette quantité étant ainsi définie, nous prendrons pour règle de *considérer comme correspondantes les valeurs d'une variable qui appartiennent à des phases égales*.

D'après cette règle, les équations précédentes donnent, pour la variation du temps,

$$\delta t = t^* - t = \varphi\,\delta i,$$

tandis que la différentielle du temps sera

$$dt = i d\varphi.$$

Considérons à présent une autre variable, par exemple l'une des coordonnées x du point mobile, et, en supposant que sa variation δx soit formée d'après la règle précédente, prenons les coefficients différentiels de cette variation par rapport à φ et à t. Comme φ a été considéré comme constant dans la formation de la variation, on pourra, en prenant le coefficient différentiel par rapport à φ, intervertir l'ordre de la différentiation et de la variation, et poser

$$\frac{d(\delta x)}{d\varphi} = \delta \frac{dx}{d\varphi};$$

mais il ne sera pas permis d'intervertir cet ordre dans la formation des coefficients différentiels pris par rapport au temps t; pour ceux-ci, on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d(\delta x)}{dt} &= \frac{d(\delta x)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \\
&= \delta\frac{dx}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \\
&= \delta\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans ces équations les coefficients différentiels $\frac{dt}{d\varphi}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs i et $\frac{1}{i}$ déduites de l'équation précédente $dt = i d\varphi$, nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d(\delta x)}{dt} &= \delta\left(\frac{dx}{dt}i\right)\frac{1}{i} \\
&= \left(i\delta\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\delta i\right)\frac{1}{i} \\
&= \delta\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\delta\log i.
\end{aligned}$$

Ces préliminaires exposés, différentions, par rapport à t, le produit $\frac{dx}{dt}\delta x$; nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) &= \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{dx}{dt}\frac{d(\delta x)}{dt} \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\delta\log i \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\delta\log i.
\end{aligned}$$

Multiplions cette équation par dt, et intégrons ensuite, pour la durée d'une révolution entière, c'est-à-dire depuis $t = 0$ jusqu'à $t = i$.

L'intégrale du premier membre a pour valeur zéro, parce que le produit $\frac{dx}{dt}\delta x$ a, pour $t = i$, la même valeur que pour $t = 0$. Afin de pouvoir écrire l'intégrale du second membre sous une forme commode, nous ferons usage du signe que nous avons adopté pour représenter les valeurs moyennes, et à l'aide duquel nous pourrons écrire, Z représentant une variable quelconque qui se rapporte au mouvement considéré,

$$\int_0^i Z dt = i\overline{Z}.$$

De cette manière, l'équation qui résulte de l'intégration prend la forme suivante :

$$o = i\left[\overline{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x} + \frac{1}{2}\overline{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\delta\log i\right].$$

Nous pourrons supprimer le facteur i, commun à tous les termes. En outre, il y a encore une remarque à faire relativement à ce second membre : l'espèce de variation que nous avons introduite jouit de cette propriété particulière, que la valeur moyenne de la variation d'une quantité est égale à la variation de la valeur moyenne de cette quantité, de sorte qu'on peut poser

$$\overline{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \delta\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Si nous transposons enfin le premier terme d'un membre dans l'autre, l'équation prendra la forme

$$-\overline{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x} = \frac{1}{2}\delta\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\delta\log i.$$

Nous aurons évidemment des équations analogues en y et z, et, si nous faisons la somme de ces trois équations, en écrivant

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2,$$

nous obtiendrons

$$-\left(\overline{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z}\right) = \frac{1}{2}\delta\overline{v^2} + \overline{v^2}\delta\log i.$$

Après avoir multiplié les deux membres par la masse m du point mobile, nous pourrons remplacer les produits $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$

par les composantes X, Y, Z de la force qui le sollicite; l'équation deviendra ainsi

$$-(\overline{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z}) = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i.$$

Admettons enfin que la force qui agit sur le point matériel mobile a un ergiel. Si nous représentons celui-ci par U, nous savons que

$$X = -\frac{dU}{dx},\quad Y = -\frac{dU}{dy},\quad Z = -\frac{dU}{dz},$$

et, par suite, dans les cas où l'ergiel est représenté par la même fonction des coordonnées dans le mouvement modifié que dans le mouvement primitif, nous pourrons écrire

$$\delta U = -(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Si, au contraire, dans le mouvement modifié, l'ergiel est représenté par une fonction un peu différente, en ce sens que certaines constantes $c_1, c_2, \ldots$, qui entrent dans l'expression de la fonction, prendraient, dans le mouvement modifié, les valeurs variées $c_1 + \delta c_1$, $c_2 + \delta c_2, \ldots$, on devra écrire

$$\begin{aligned}\delta U &= -(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \frac{dU}{dc_1}\delta c_1 + \frac{dU}{dc_2}\delta c_2 + \ldots\\ &= -(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \sum \frac{dU}{dc}\delta c.\end{aligned}$$

En tenant compte de cette équation, nous pourrons donner à celle que nous avons établie plus haut la forme suivante :

$$\delta\overline{U} - \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i,$$

ce qui est l'équation (1), que nous avions à démontrer.

2. Pour généraliser cette équation, on pourrait supposer d'abord qu'au lieu d'un seul point matériel mobile il y en ait plusieurs qui se meuvent tous sur des trajectoires fermées. Si les durées de toutes les révolutions étaient, dans ce cas, égales, et se modifiaient de la même manière dans le passage d'un mouvement à un autre, l'extension de l'équation à ce cas s'effectuerait évidemment sans la moindre difficulté. Si, au contraire, les durées des révolutions sont différentes et varient dans des rapports différents, cette extension exige de nouveaux développements.

Un cas plus général encore est celui où les points ne parcourent pas des trajectoires fermées, mais où, les coordonnées de ces points variant d'une manière périodique, les périodes ont des durées différentes, et qui peuvent même varier suivant des rapports différents dans le passage d'un mouvement à l'autre.

Ce dernier cas est encore susceptible d'une extension plus grande, en ce sens que ce ne seraient pas les coordonnées elles-mêmes qui seraient affectées de ces variations périodiques, mais plutôt certaines quantités dont les coordonnées seraient des fonctions.

On peut enfin généraliser davantage encore l'hypothèse précédente, en admettant que ces quantités, en fonction desquelles s'expriment les coordonnées, au lieu de varier périodiquement, sont soumises à une condition mathématique moins restrictive, qui sera remplie par des variations périodiques, mais pourra l'être également sans que ces variations soient nécessairement périodiques : c'est ce dernier cas que nous allons traiter.

3. Avant de l'aborder, nous commencerons par exposer quelques considérations de Mécanique, qui serviront à faciliter l'intelligence du sujet.

Soit donné un système de points matériels de masses respectives m_1, m_2,..., se mouvant sous l'influence de forces qui ont un ergiel. Si les positions de ces points sont déterminées par les coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1; $x_2, y_2, z_2, \ldots$, l'ergiel U sera une fonction de ces coordonnées. La force vive du système s'exprimera par la formule suivante, si nous convenons de représenter par des lettres accentuées les coefficients différentiels des variables pris par rapport au temps, ainsi $\frac{dx_1}{dt}$ par x'_1 :

$$(2) \qquad \mathrm{T} = \sum \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

On sait qu'il existe une relation simple entre T et U. Pour l'exprimer il s'agit d'abord de déterminer le signe dont on affectera l'ergiel U. On choisit ordinairement ce signe de telle sorte que la différentielle de U représente le travail effectué pendant un déplacement infiniment petit des points matériels, et que par suite le principe de l'équivalence de la force vive et du travail soit exprimé par l'équation

$$T = U + \text{const.}$$

Mais si l'on veut donner à ce principe la forme sous laquelle on s'en sert aujourd'hui, surtout grâce aux belles recherches de Helmholtz, et qui répond à la dénomination usitée de *Principe de la conservation de l'énergie*, il est plus commode de prendre l'ergiel U en signe contraire, de sorte que sa différentielle prise *négativement* représente le travail effectué, et qu'on devra écrire, par suite,

$$T + U = \text{const.}$$

Alors T et U sont les deux quantités que Rankine a nommées l'énergie actuelle et l'énergie potentielle, et dont la somme constante est l'énergie totale ou simplement l'*énergie* du système. Si nous représentons cette dernière par E, l'équation précédente s'écrira

$$T + U = E. \tag{3}$$

Actuellement si, pour déterminer les positions des points mobiles, nous nous servons, au lieu des coordonnées rectangulaires, d'autres variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, l'ergiel U devra naturellement être considéré comme une fonction de ces variables. Quant aux autres quantités qui entrent dans les équations du mouvement, et quant aux formes que prennent celles-ci lorsqu'on fait usage de ces variables générales, elles ont été déterminées par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*.

Afin de reconnaître ce que devient dans ce cas l'expression de la force vive, nous poserons, puisque les coordonnées rectangulaires des points sont des fonctions de ces variables générales,

$$x = f(q_1, q_2, \ldots q_n);$$

de là résulte

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{df}{dq_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{df}{dq_n}\frac{dq_n}{dt},$$

que nous pouvons aussi écrire

$$(4) \qquad x' = \frac{df}{dq_1}q'_1 + \frac{df}{dq_2}q'_2 + \ldots + \frac{df}{dq_n}q'_n.$$

Toutes les vitesses composantes des points mobiles s'exprimeront de la même manière. Comme les coefficients différentiels $\frac{df}{dq_1}, \frac{df}{dq_2}, \ldots, \frac{df}{dq_n}$ sont des fonctions des n quantités q, les expressions des vitesses composantes renfermeront les n quantités q ainsi que les n quantités q', et elles seront homogènes et du premier degré relativement à celles-ci. Si l'on suppose ces expressions introduites dans l'équation (2), on obtiendra pour la force vive T une expression qui renfermera aussi les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et qui sera une fonction homogène du second degré relativement à cette dernière série de quantités.

De cette circonstance il résulte qu'on peut écrire

$$2T = \frac{dT}{dq'_1}q'_1 + \frac{dT}{dq'_2}q'_2 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n}q'_n,$$

ou bien, en faisant usage du signe sommatoire,

$$(5) \qquad 2T = \sum \frac{dT}{dq'}q'.$$

Comme les coefficients différentiels de T, qui figurent dans cette expression, reviendront fréquemment par la suite, il sera utile de les représenter par un symbole plus simple. Nous nous servirons à cette fin de la lettre p affectée de l'indice ν, qui représentera l'un des nombres entiers de 1 à n; ainsi

$$(6) \qquad p_\nu = \frac{dT}{dq'_\nu}.$$

L'équation précédente s'écrira alors

$$(7) \qquad 2T = \Sigma pq'.$$

Les équations différentielles du mouvement prennent, d'après Lagrange, pour les variables générales q, la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dq'_\nu}\right) = \frac{d\mathrm{T}}{dq_\nu} - \frac{d\mathrm{U}}{dq_\nu},$$

ou bien, en vertu de (6),

$$\frac{dp_\nu}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{dq_\nu} - \frac{d\mathrm{U}}{dq_\nu}. \tag{8}$$

4. Pour ce qui regarde les équations démontrées par Hamilton dans ses Mémoires de 1834 à 1835 [*], si l'on représente les valeurs initiales de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et $h_1, h_2, \ldots, h_n$, elles s'écriront

$$\delta\int_0^t 2\mathrm{T}dt = \Sigma(p\,\delta q - h\,\delta k) + t\,\delta\mathrm{E}, \tag{I}$$

$$\delta\int_0^t (\mathrm{T}-\mathrm{U})dt = \Sigma(p\,\delta q - h\,\delta k) - \mathrm{E}\,\delta t. \tag{I$_a$}$$

Ces deux équations ne diffèrent pas essentiellement l'une de l'autre, puisque la seconde se déduit immédiatement de la première en tenant compte de l'équation $\mathrm{T}+\mathrm{U}=\mathrm{E}$. On peut donc les considérer comme une équation unique mise sous deux formes différentes.

Dans la première forme de l'équation, l'intégrale

$$\int_0^t 2\mathrm{T}dt$$

doit être regardée comme une fonction des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et E; et l'équation se décomposera par suite en autant d'équations différentes qu'il y a de variations indépendantes dans le second membre. Du moment que la fonction représentée par cette intégrale sera connue, on pourra par la simple élimination de la quantité E entre les équations qui résultent de cette décomposition, former

[*] *Phil. Trans. for the years* 1834 *and* 1835.

toutes les intégrales premières et secondes des équations différentielles du mouvement. La seconde forme de l'équation est sous ce rapport encore plus favorable. Dans celle-ci l'intégrale

$$\int_0^t (\mathrm{T} - \mathrm{U})dt$$

doit être regardée comme une fonction des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et t; et lorsque cette fonction est connue, on obtient immédiatement, par la décomposition de l'équation, les intégrales premières et secondes des équations différentielles du mouvement.

5. On voit aisément par ce qui précède que l'équation de Hamilton est de la plus haute importance en Mécanique. Néanmoins elle n'est pas, pour deux motifs, appropriée à notre but.

En premier lieu, quelque générale qu'elle soit sous d'autres rapports, elle n'a pas assez de généralité dans un certain sens. Dans cette équation deux mouvements infiniment peu différents sont comparés entre eux, et leur différence peut être ramenée à ce que les coordonnées et les vitesses composantes initiales des points mobiles ont, dans l'un des mouvements, des valeurs un peu différentes de celles qu'elles ont dans l'autre; mais l'ergiel U est supposé, dans les deux mouvements, une seule et même fonction des coordonnées. Or la différence entre deux mouvements peut aussi être due à ce que l'ergiel a éprouvé une variation qui est indépendante de celle des coordonnées. Ce cas se présente très-fréquemment dans la théorie de la chaleur. Il en est ainsi lorsque les forces extérieures sous l'action desquelles les molécules d'un corps effectuent leurs mouvements éprouvent une modification qui peut s'exprimer mathématiquement par une variation de l'ergiel, et qui occasionne naturellement aussi un changement dans le mouvement moléculaire. Des passages de cette nature, d'un mouvement à un autre, ne peuvent pas se traiter au moyen de l'équation de Hamilton.

Le second des motifs mentionnés plus haut se rapporte spécialement aux mouvements stationnaires. Lorsque l'on veut définir un mouvement stationnaire comme tel, d'une manière précise, il ne s'agit pas de déterminer les lieux et les vitesses de tous les points en particulier, à de certains moments, mais plutôt de déterminer le caractère général, indépendant du temps, de ce mouvement. Une équation qui doit remplir ce but peut, à la vérité, renfermer des termes variables, mais la variabilité de ceux-ci doit se renfermer entre de certaines oscillations de leurs valeurs qui se reproduisent de telle manière que l'équation présente les mêmes caractères essentiels pour un temps postérieur que pour un temps antérieur. S'il se présente, au contraire, des termes qui subissent avec le temps des variations de plus en plus grandes, de sorte que l'équation est autre pour un temps postérieur que pour un temps antérieur, cette circonstance la rendra impropre à notre but.

C'est de ce point de vue que nous allons examiner l'équation de Hamilton. Elle renferme les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ qui peuvent se définir de la manière suivante : δq_ν est la différence entre la valeur que prend q_ν à un certain moment dans le mouvement primitif, et la valeur *correspondante* qu'il a dans le mouvement modifié. Il s'agit maintenant de savoir, parmi l'infinité de valeurs que prend l'une après l'autre q_ν dans le mouvement modifié, laquelle on doit regarder comme valeur correspondante. Hamilton ne s'est pas expliqué à ce sujet; mais l'étude attentive des développements et des équations qu'il donne fait aisément reconnaître comment il faut entendre les variations qui s'y présentent. Si nous partons des valeurs que les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ont au temps t dans le mouvement primitif, les valeurs correspondantes dans le mouvement modifié seront celles que ces quantités auront au temps $t + \delta t$, la variation δt étant encore indéterminée, mais *égale pour toutes les quantités*.

Que la variation δt ait en effet une valeur commune pour tout le système, c'est ce que l'on reconnaît immédiatement par ce fait que δt entre dans l'équation (I_a) comme une quantité qui s'applique à tout le système.

Une autre circonstance qui ne laisse subsister aucun doute à ce sujet est la suivante. Hamilton suppose dans la déduction de ses équations le principe de la conservation de l'énergie, en vertu duquel la somme T + U est constante. Or ce théorème n'est naturellement vrai que quand, dans la formation des quantités T et U, les variables qui déterminent les positions et les vitesses des points sont introduites avec les valeurs qu'elles ont à un même instant, que celui-ci soit t ou

$t + \delta t$; mais il n'est pas permis de réunir les valeurs qu'elles ont à des instants différents pour en former les quantités T et U. Dès lors, dans les équations ainsi obtenues, il va de soi, aussi longtemps que le contraire n'a pas été énoncé explicitement et établi comme admissible, qu'on n'a introduit dans le calcul que des valeurs simultanées de toutes les variables.

Pour voir maintenant de quelle manière se comportent ces variations qui répondent à une variation commune de temps δt, nous choisirons un cas simple comme exemple. Nous supposerons que, dans le mouvement primitif, tous les points décrivent des trajectoires fermées, et que, dans le mouvement modifié, ils décrivent également tous, en partant d'origines infiniment peu différentes, des trajectoires fermées infiniment voisines des premières, mais que les durées des révolutions soient modifiées dans différents rapports pour les différents points.

Comme la variation de temps δt est arbitraire, nous commencerons par poser $\delta t = 0$, c'est-à-dire nous regarderons comme correspondantes des valeurs des variables qui appartiennent à un même temps compté à partir de l'origine du mouvement. Lorsqu'un point a, dans les deux mouvements, des durées de révolution différentes, les deux positions qu'il occupe à un même temps, compté à partir de l'origine du mouvement, sont d'autant plus éloignées l'une de l'autre que le temps est plus grand. Il en résulte que les valeurs correspondantes des variables, qui dépendent des positions des points, deviennent de plus en plus différentes avec le temps, et que, par suite, les variations de ces variables ne subissent pas seulement des oscillations qui se répètent d'une manière périodique, mais qu'au contraire les variations de ces variables doivent devenir de plus en plus grandes avec le temps.

Si l'on ne pose pas, comme précédemment, la variation du temps δt égale à zéro, mais qu'on la choisisse d'une manière convenable eu égard à la durée de la révolution modifiée de l'un des points, on pourra à la vérité, pour les variables qui ne dépendent que de la position de ce point, faire en sorte que leurs variations ne changent que d'une manière périodique; mais quant aux autres variables qui dépendent de la position des autres points, dont les durées de révolution se sont modifiées dans d'autres rapports, elles resteront affectées de cet inconvénient, que leurs variations croîtront de plus en plus avec le temps, ce qui rend l'équation impropre à notre but.

6. Je vais maintenant exposer la manière dont je traite les mouvements stationnaires.

Pour définir d'une manière précise les valeurs correspondantes d'une quantité quelconque Z, qui varie dans le cours du mouvement, et, par là même, la variation δZ qui représente la différence de ces valeurs correspondantes, nous choisirons une quantité qui dépend du temps, comme quantité régulatrice, et nous conviendrons de regarder comme correspondantes les valeurs de la variable Z qui répondent à des valeurs égales de la régulatrice.

Si l'on choisit d'abord le temps lui-même comme quantité régulatrice, on obtient le mode de variation dont il a été question plus haut, et que nous caractériserons en employant la lettre t en indice à côté du signe δ, c'est-à-dire en écrivant $\delta_t Z$.

Mais, au lieu du temps, on peut prendre comme régulatrice une autre quantité φ qui varie avec le temps, de sorte que φ peut être considéré comme fonction de t, ou réciproquement. Commençons par poser, en général, dans le mouvement primitif,

$$t = f(\varphi); \tag{9}$$

dans le mouvement modifié, où la relation entre le temps et la quantité φ peut être un peu différente, nous désignerons, pour distinguer, le temps par t^*, et nous poserons

$$t^* = f(\varphi) + \varepsilon f_1(\varphi), \tag{9a}$$

f et f_1 représentant des fonctions encore indéterminées, et ε un facteur constant infiniment petit. Si, dans ces deux équations, la quantité φ a la même valeur, les temps t et t^* devront être regardés comme correspondants. Si, en outre, la variable considérée plus haut a dans le mouvement primitif, au temps t, la valeur Z, et dans le mouvement modifié, au temps t^*, la valeur Z^*, alors Z et Z^* seront des valeurs correspondantes de cette quantité, et la différence $Z^* - Z$ sera sa variation. Nous désignerons ce mode de variation, dans lequel φ est la quantité régulatrice, par $\delta_\varphi Z$. De même, la différence $t^* - t$ qui, d'après les deux équations précédentes, a pour valeur $\varepsilon f_1(\varphi)$, sera désignée par $\delta_\varphi t$.

Nous avons précédemment représenté le temps par une fonction de φ que nous avons laissée indéterminée, et qui éprouve un changement infiniment petit dans le passage d'un mouvement à l'autre. Pour la détermination de cette fonction, on pourra se régler d'après la nature du sujet à traiter. Dans les recherches suivantes, nous avons choisi pour cette fonction une forme très-simple, qui se rattache à la notion de *phase* que j'ai introduite dans mon précédent Mémoire.

Pour définir cette notion de phase, commençons par supposer que les changements que la quantité Z éprouve dans le cours du mouvement aient lieu d'une manière périodique, et représentons par i la durée de la période. J'ai posé, pour ce cas, l'équation

$$t = i\varphi, \tag{10}$$

et j'ai nommé *phase* du changement la quantité φ ainsi définie. Dans le mouvement modifié, représentons la durée de la période par $i + \delta i$, et posons

$$t^* = (i + \delta i)\varphi. \tag{10a}$$

Si, dans ces deux équations, la phase φ a la même valeur, t et t^* seront des temps correspondants, et l'on aura par suite

$$\delta_\varphi t = t^* - t = \varphi\delta i. \tag{11}$$

De même, pour la quantité Z, les valeurs qui répondent à des phases égales sont correspondantes, et la variation $\delta_\varphi Z$ a ainsi une signification très-simple.

Des variations de cette nature ne prennent pas avec le temps des valeurs de plus en plus grandes, mais ne changent que périodiquement comme les quantités mêmes dont elles sont les variations.

7. La notion de phase qui a été définie précédemment, et qui se rapporte à des changements périodiques, peut s'appliquer à l'étude des mouvements qui ont lieu régulièrement sur des trajectoires fermées; mais si l'on a un système de points qui, tout en se mouvant d'une manière stationnaire, ne décrivent pas des trajectoires fermées, et pour lesquels les valeurs des diverses variables qui déterminent les positions de ces points ne changent pas d'une façon périodique, on devra faire usage d'une notion un peu plus générale, que l'on peut également envisager comme une phase, en donnant à ce mot une signification un peu plus large.

En employant, comme plus haut, les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$, pour déterminer les positions des points, nous allons, sans supposer que chaque quantité accomplit régulièrement ses changements dans des périodes d'une durée déterminée, introduire cependant pour chacune d'elles un certain intervalle de temps. Désignons ces intervalles par $i_1, i_2, \ldots, i_n$; à l'aide de ceux-ci, nous définirons, au moyen des équations suivantes, les phases relatives aux différentes quantités, phases que nous désignerons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$,

$$t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2, \ldots, = i_n \varphi_n. \tag{12}$$

Prenons maintenant les variations des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de telle manière que, pour chaque variable, la phase qui lui correspond soit regardée comme la quantité régulatrice, qui reste constante dans l'acte de variation, tandis que l'intervalle de temps qui lui correspond peut subir un changement. Les variations ainsi formées devront être représentées, d'après ce qui précède, par les signes $\delta_{\varphi_1} q_1, \delta_{\varphi_2} q_2, \ldots, \delta_{\varphi_n} q_n$.

Formons, au moyen de ces variations, pour la variable q_ν, la fraction

$$\frac{p_\nu \delta_{\varphi_\nu} q_\nu - k\delta k}{t}.$$

Si la quantité q_ν accomplissait ses changements d'une manière périodique, et que i_ν fût la durée de la période, la variation $\delta_{\varphi_\nu} q_\nu$ ne changerait aussi que périodiquement, et par suite cette fraction, qui a t pour dénominateur, accomplirait des oscillations de plus en plus faibles à mesure que le temps croît, et tendrait par suite vers zéro. Il en serait de même pour les n variables, si elles changeaient d'une manière périodique, les durées des périodes pouvant du reste être différentes pour les différentes variables. Mais, au lieu d'admettre l'hypothèse que les changements des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ soient périodiques, nous poserons seulement la condition que la moyenne de la somme

$$\sum \frac{p\delta_\varphi q - h\delta k}{t}$$

devienne très-petite pour des temps considérables, condition qui, d'après ce que nous avons vu, est certainement remplie pour des changements périodiques, mais qui peut l'être aussi par d'autres changements qui ont lieu d'une manière stationnaire.

Ces préliminaires exposés, nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Si les variations, dans la formation desquelles les quantités φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *déterminées par les équations*

$$t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2 \ldots = i_n \varphi_n,$$

sont regardées comme constantes, satisfont à la condition que la somme

$$\sum \frac{p d_\varphi q - h\delta k}{t}$$

a une valeur moyenne qui tend vers zéro à mesure que le temps croît, on aura l'équation suivante :

$$\text{(II)} \qquad \delta\left(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}}\right) = \sum \overline{pq'}\, \delta \log i + \sum \frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\delta c,$$

dans laquelle le premier signe sommatoire s'étend, comme dans la somme précédente, à n termes répondant aux n variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, *tandis que le second s'étend aux quantités* $c_1, c_2, \ldots$, *renfermées dans* U, *lesquelles sont constantes dans le cours de chaque mouvement, mais changent de valeur dans le passage d'un mouvement à l'autre.*

Cette équation (II) est la forme généralisée, que j'ai mentionnée en commençant, de mon équation. Tandis que, dans l'équation (I) de Hamilton l'intégrale $\int_0^t 2\mathrm{T}dt$ doit être regardée comme une fonction des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, de leurs valeurs initiales $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et de l'énergie E, et que dans l'équation (I_a) l'intégrale $\int_0^t (\mathrm{T}-\mathrm{U})\,dt$ doit être regardée comme une fonction des quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ et t, dans celle-ci, au contraire, la valeur moyenne $\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}$ apparaît comme une fonction des intervalles de temps $i_1, i_2, \ldots, i_n$ et des quantités $c_1, c_2, \ldots$ Elle pourra également se séparer en autant d'équations partielles qu'il y aura de variations indépendantes dans le second membre; mais ces équations seront naturellement toutes différentes de celles qui résultent de la décomposition de l'équation de Hamilton.

8. Pour démontrer notre théorème, formons pour chacune des n variables le produit $p\delta_t q$, et différentions-le par rapport au temps. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d}{dt}(p\,\delta_t q) = p\,\frac{d(\delta_t q)}{dt} + \frac{dp}{dt}\,\delta_t q = p\,\delta_t\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{dp}{dt}\,\delta_t q = p\,\delta_t q' + \frac{dp}{dt}\,\delta_t q.$$

Introduisons, au lieu du signe abréviatif p, d'après (6), l'expression plus complète $\frac{d\mathrm{T}}{dq'}$, et posons, en outre, d'après (8),

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{dq} - \frac{d\mathrm{U}}{dq}.$$

Nous obtiendrons ainsi

$$(13) \qquad \frac{d}{dt}(p\,\delta_t q) = \frac{d\mathrm{T}}{dq'}\,\delta_t q' + \frac{d\mathrm{T}}{dq}\,\delta_t q - \frac{d\mathrm{U}}{dq}\,\delta_t q.$$

Une semblable équation a lieu pour chacune des n variables; si nous faisons la somme de ces n équations, nous aurons

$$(14) \qquad \frac{d}{dt}\sum p\,\delta_t q = \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq'}\,\delta_t q' + \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq}\,\delta_t q - \sum \frac{d\mathrm{U}}{dq}\,\delta_t q.$$

Comme la quantité T est une fonction de $2n$ quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, on peut écrire

$$\delta_t \mathrm{T} = \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq}\,\delta_t q + \sum \frac{d\mathrm{T}}{dq'}\,\delta_t q'.$$

Cette expression renferme les deux premières sommes du second membre de notre précédente équation. Quant à la dernière somme de ce second membre, si dans U les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$ seules étaient variables, on pourrait la remplacer par $\delta_t \mathrm{U}$; mais, comme par hypothèse U renferme encore d'autres quantités $c_1, c_2, \ldots,$ qui sont bien indépendantes du temps, mais peuvent changer de valeur dans le passage d'un mouvement à l'autre, il en résulte que

$$\delta_t \mathrm{U} = \sum \frac{d\mathrm{U}}{dq}\,\delta_t q + \sum \frac{d\mathrm{U}}{dc}\,\delta c.$$

Au moyen des deux équations précédentes, l'équation (14) devient

$$\frac{d}{dt}\sum p\,\delta_t q = \delta_t \mathrm{T} - \delta_t \mathrm{U} + \sum \frac{d\mathrm{U}}{dc}\,\delta c,$$

qu'on peut écrire

$$(15) \qquad \delta_t(\mathrm{U} - \mathrm{T}) = -\frac{d}{dt}\sum p\,\delta_t q + \sum \frac{d\mathrm{U}}{dc}\,\delta c.$$

Multiplions par dt, intégrons de zéro à t, et divisons enfin par t : nous obtiendrons, en nous rappelant que h et k sont les valeurs initiales de p et de q,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta_t(\mathrm{U} - \mathrm{T})\,dt = -\sum \frac{p\,\delta_t q - h\,\delta k}{t} + \sum \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d\mathrm{U}}{dc}\,\delta c\,dt.$$

En nous servant de la notation introduite pour la désignation des valeurs moyennes, nous pourrons écrire, dans le dernier terme du second membre,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d\mathrm{U}}{dc}\,\delta c\,dt = \overline{\frac{d\mathrm{U}}{dc}}\,\delta c.$$

Dans le premier membre, nous laisserons provisoirement le signe intégral, et nous nous bornerons à transposer le signe de variation δ_t, ce qui est permis, puisque t est regardé comme constant dans cette variation.

Notre équation deviendra ainsi

$$(16)\qquad \delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right] = -\sum\frac{p\,\delta_t q - h\,\delta k}{t} + \sum\frac{d\overline{\mathrm{U}}}{dc}\,\delta c.$$

Dans le second membre nous introduirons, au lieu des variations dans lesquelles le *temps* est regardé comme constant, celles dans lesquelles les *phases* relatives aux variables respectives sont regardées comme constantes.

Le procédé qui conduit à cette transformation est sans difficulté, comme on va le voir. Soit représentée par Z une quantité quelconque, fonction du temps; posons, dans le mouvement primitif,

$$\mathrm{Z} = \mathrm{F}(t),$$

et dans le mouvement modifié

$$\mathrm{Z}^* = \mathrm{F}(t^*) + \varepsilon \mathrm{F}_1(t^*),$$

t et t^* désignant deux temps correspondants, F et F_1 deux fonctions quelconques et ε un facteur infiniment petit. Si l'on veut former la variation $\delta_t \mathrm{Z}$, on n'aura qu'à poser simplement $t^* = t$, et prendre la différence $\mathrm{Z}^* - \mathrm{Z}$: on aura ainsi

$$\delta_t \mathrm{Z} = \varepsilon \mathrm{F}_1(t).$$

Veut-on, au contraire, trouver la variation $\delta_\varphi \mathrm{Z}$, on devra prendre pour t^* la valeur du temps qui répond à une valeur invariable de φ, c'est-à-dire

$$t^* = t + \delta_\varphi t,$$

et former ensuite la différence $\mathrm{Z}^* - \mathrm{Z}$. Alors on aura

$$\delta_\varphi \mathrm{Z} = \mathrm{F}(t + \delta_\varphi t) + \varepsilon \mathrm{F}_1(t + \delta_\varphi t) - \mathrm{F}(t).$$

De là résulte, en négligeant les termes d'ordre supérieur en $\delta_\varphi t$ et en ε,

$$\delta_\varphi \mathrm{Z} = \varepsilon \mathrm{F}_1(t) + \frac{d\mathrm{F}(t)}{dt}\,\delta_\varphi t,$$

équation qu'on peut aussi écrire, d'après ce qui précède,

$$(17)\qquad \delta_\varphi Z = \delta_t Z + Z' \delta_\varphi t.$$

On aura une équation de la même forme pour chacune des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, en employant successivement chacune des phases $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. On obtiendra ainsi pour q_ν, en écrivant les termes dans un ordre différent,

$$\delta_t q_\nu = \delta_{\varphi_\nu} q_\nu - q'_\nu \delta_{\varphi_\nu} t.$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation (16), elle devient

$$(18)\quad \delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right] = \sum pq' \frac{\delta_\varphi t}{t} - \sum \frac{p\delta_\varphi q - n\delta k}{t} + \sum \frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\delta c,$$

et si nous posons, d'après (12),

$$t = i_\nu \varphi_\nu,$$

d'où résultent

$$\delta_{\varphi_\nu} t = \varphi_\nu \delta i_\nu$$

et

$$\frac{\delta_{\varphi_\nu} t}{t} = \frac{\delta i_\nu}{i_\nu} = \delta \log i_\nu,$$

nous obtiendrons

$$(19)\quad \delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right] = \sum pq' \delta \log i - \sum \frac{p\delta_\varphi q - h\delta k}{t} + \sum \frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\delta c.$$

Dans cette équation, qui est valable pour un temps quelconque, nous allons prendre les valeurs moyennes de tous les termes. La dernière somme, qui est déjà indépendante du temps, n'en éprouvera aucune modification. La valeur moyenne de l'avant-dernière est, par hypothèse, égale à zéro pour des intervalles de temps considérables. Dans les autres termes, nous ne ferons qu'indiquer les valeurs moyennes Nous obtiendrons de cette manière

$$(20)\qquad \overline{\delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right]} = \sum \overline{pq'}\delta \log i + \sum \frac{\overline{d\mathrm{U}}}{dc}\delta c.$$

Examinons de plus près le premier membre de cette équation. L'expression qui y figure entre crochets,

$$\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt,$$

est la valeur moyenne de la quantité U — T pendant l'intervalle de temps compris entre zéro et t, et est par suite une fonction de t qui, à mesure que t croît, s'approche davantage de la valeur constante $\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}$, qui représente la valeur moyenne pour des temps très-considérables. Il ne résulte cependant pas encore de là que la variation de cette fonction indiquée par δ_t doive tendre vers une limite fixe à mesure que le temps croît. Nous avons en effet vu plus haut que, pour une fonction dont les changements ne consistent qu'en oscillations de grandeur constante, la variation indiquée par δ_t peut prendre des valeurs croissant avec le temps. D'après cela, on doit regarder comme possible que, pour une fonction de la nature de celle dont il est ici question, dont les oscillations décroissent de plus en plus à mesure que le temps croît, la variation indiquée par δ_t effectue des oscillations dont la grandeur ne diminue pas à mesure que le temps croît : il ne serait donc pas permis, en général, de remplacer la variation

$$\delta_t\left[\frac{1}{t}\int_0^t (\mathrm{U}-\mathrm{T})\,dt\right]$$

par le signe

$$\delta(\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}),$$

qui représente la variation que l'on obtient en considérant la valeur moyenne $\overline{\mathrm{U}}-\overline{\mathrm{T}}$ comme une quantité indépendante du temps et en prenant la variation de cette quantité.

Mais, dans notre équation (20), n'entre pas la première des deux variations dont il vient d'être question, mais seulement sa *valeur moyenne*. Celle-ci sera constante pour des intervalles de temps considérables, comme on peut s'en apercevoir par ce fait, que le second membre de l'équation renferme une expression qui devient constante pour de tels intervalles. Par suite de ce fait, la différence mentionnée précédemment, et qui était fondée sur la variabilité de la variation, disparaît, et nous pouvons par suite désigner par le signe $\delta(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}})$ cette *valeur moyenne, devenue constante, de la variation.* L'équation (20) deviendra ainsi

$$\delta(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}}) = \sum \overline{pq'}\,\delta \log i + \sum \overline{\frac{d\mathrm{U}}{dc}}\,\delta c,$$

ce qui est l'équation (II) que nous avions à démontrer.

9. Comme exemple de l'application de cette équation, nous traiterons en détail un cas particulier très-simple.

Soient donnés deux points matériels qui s'attirent suivant une loi quelconque, ou même qui se repoussent à de certaines distances, et qui se meuvent l'un autour de l'autre sous l'influence de cette force.

Comme le centre de gravité du système reste fixe, et que le mouvement des deux points s'effectue dans un plan, nous pourrons déterminer les positions des deux points par deux variables, qui sont leur distance mutuelle r et l'angle θ que la droite qui les unit fait avec une droite fixe. Si m et μ désignent les masses des deux points, leurs distances au centre de gravité commun seront, en effet,

$$\frac{\mu}{m+\mu}r \quad \text{et} \quad \frac{m}{m+\mu}r.$$

Si, en outre, θ désigne l'angle que la partie de la droite r, qui va du centre de gravité à la masse m, fait avec la direction positive de l'axe des x d'un système de coordonnées rectangulaires choisi dans le plan, les coordonnées rectangulaires des deux points s'exprimeront de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu}{m+\mu} r\cos\theta, & y_1 &= \frac{\mu}{m+\mu} r\sin\theta, \\ x_2 &= -\frac{m}{m+\mu} r\cos\theta; & y_2 &= -\frac{m}{m+\mu} r\sin\theta. \end{aligned}$$

A l'aide de ces équations, l'expression

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}(x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{\mu}{2}(x_2'^2 + y_2'^2)$$

se transforme dans la suivante :

$$(21)\qquad T = \frac{1}{2}\frac{m\mu}{m+\mu}(r'^2 + r^2\theta'^2).$$

Si l'on substitue maintenant r et θ à la place des variables désignées plus haut, d'une manière générale, par q_1 et q_2, on obtiendra

$$(22)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{dT}{dr'} = \dfrac{m\mu}{m+\mu} r', \\ p_2 = \dfrac{dT}{d\theta'} = \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\theta'. \end{cases}$$

De là résulte, en outre, l'équation suivante, dans laquelle les valeurs initiales des quantités r, r', θ et θ' sont représentées par R, R', Θ, Θ' :

$$(23)\qquad \sum \frac{p\,\delta_\varphi q - h\,\delta k}{t} = \frac{m\mu}{m+\mu}\,\frac{r'\delta_{\varphi_1} r - R'\delta R + r^2\theta'\delta_{\varphi_2}\theta - R^2\Theta'\delta\Theta}{t}.$$

Les phases φ_1 et φ_2 seront, en vertu de (12), définies par les équations

$$(24)\qquad t = i_1\varphi_1 = i_2\varphi_2,$$

et il s'agit de savoir si les intervalles de temps i_1 et i_2 qui y entrent peuvent se déterminer de telle sorte que la valeur moyenne de l'expression (23) tende vers zéro à mesure que le temps augmente. Par l'examen superficiel du mouvement considéré, on voit immédiatement quels sont les intervalles de temps qu'on doit choisir pour i_1 et i_2, puisque le mouvement peut se décomposer en deux parties : le rapprochement et l'éloignement alternatifs des deux points, et la rotation de la droite qui les unit, qui peuvent être considérés séparément comme les changements des quantités r et θ.

Le changement de r est périodique, et si nous prenons la durée de sa période pour i_1, la partie relative à r de la fraction qui entre dans (23), c'est-à-dire la fraction

$$\frac{r'\delta_{\varphi_1} r - R\delta R}{t},$$

dont le numérateur ne varie que d'une manière périodique, remplit évidemment la condition que sa valeur moyenne tend vers zéro quand le temps augmente.

Pour ce qui regarde l'intervalle de temps relatif à θ, il semble naturel d'avoir égard à la durée de révolution de la ligne de jonction, c'est-à-dire au temps pendant lequel l'angle θ croît de 2π. Mais, comme les révolutions successives ne doivent pas en général s'effectuer en des temps égaux, nous désignerons par i_2 la durée moyenne de révolution de la ligne de jonction. Cela étant, nous obtiendrons, pour la vitesse angulaire moyenne $\overline{\theta'}$, l'équation

$$(25)\qquad \overline{\theta'} = \frac{2\pi}{i_2}.$$

En outre, en vertu du théorème que les rayons vecteurs décrivent des aires égales en des temps égaux, nous avons

$$(26)\qquad r^2\theta' = a,$$

a désignant une constante, et, par suite, nous pouvons poser

$$\theta' = a\frac{1}{r^2} \quad \text{et} \quad \overline{\theta'} = a\overline{\frac{1}{r^2}}.$$

En faisant usage des équations précédentes on peut mettre l'équation identique

$$\theta' = \overline{\theta'} + \theta' - \overline{\theta'}$$

sous la forme suivante :

$$\theta' = \frac{2\pi}{i_2} + a\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right);$$

si l'on multiplie par dt, et qu'on intègre entre o et t, on obtient

$$\theta = \Theta + \frac{2\pi}{i_2}t + a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right)dt,$$

équation qui, à cause de $t = i_2\varphi_2$, se transforme en

$$(27)\qquad \theta = \Theta + 2\pi\varphi_2 + a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right)dt,$$

Varions maintenant cette expression de θ en regardant φ_2 comme constant, nous obtiendrons

$$(28)\qquad \delta_{\varphi_2}\theta = \delta\Theta + \delta_{\varphi_2}\left[a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\overline{1}}{r^2}\right)dt\right].$$

L'expression

$$a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\overline{1}}{r^2}\right)dt$$

est une fonction de t qui varie périodiquement, et qui a la même durée de période que la quantité r qui y entre, c'est-à-dire i_1. Nous devons donc chercher à remplacer la variation de cette expression, désignée par δ_{φ_2}, par la variation désignée par δ_{φ_1}.

Or, d'après l'équation (17), nous avons, pour une fonction quelconque Z,

$$\delta_{\varphi_1}Z = \delta_t Z + Z'\delta_{\varphi_1}t$$
$$\delta_{\varphi_2}Z = \delta_t Z + Z'\delta_{\varphi_2}t,$$

d'où résulte

$$\delta_{\varphi_2}Z = \delta_{\varphi_1}Z + Z'(\delta_{\varphi_2}t - \delta_{\varphi_1}t).$$

Mais comme on a de plus

$$\delta_{\varphi_1}t = \varphi_1\delta i_1 = t\frac{\delta i_1}{i_1},$$
$$\delta_{\varphi_2}t = \varphi_2\delta i_2 = t\frac{\delta i_2}{i_2},$$

l'équation précédente devient

$$(29)\qquad \delta_{\varphi_2}Z = \delta_{\varphi_1}Z + \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1}\right)tZ'.$$

Si l'on fait usage de ce mode de transformation sur le dernier terme de l'équation (28), on obtient

$$(30)\qquad \delta_{\varphi_2}\theta = \delta\Theta + \delta_{\varphi_1}\left[a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\overline{1}}{r^2}\right)dt\right] + \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1}\right)ta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\overline{1}}{r^2}\right).$$

Considérons maintenant la partie relative à θ de la fraction qui entre dans l'équation (23), nous pourrons d'abord lui donner une forme plus simple, en posant d'après l'équation (26)

$$\frac{r^2\theta'\delta_{\varphi_2}\theta - \mathrm{R}^2\Theta'\delta\Theta}{t} = \frac{a(\delta_{\varphi_2}\theta - \delta\Theta)}{t}.$$

Si nous introduisons ici l'expression précédente de $\delta_{\varphi_2}\theta$, nous aurons

$$(31)\quad \frac{r^2\theta'\delta_{\varphi_2}\theta - \mathrm{R}^2\Theta'\delta\Theta}{t} = \frac{a}{t}\delta_{\varphi_1}\left[a\int_0^t\left(\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right)dt\right] + a^2\left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \overline{\frac{1}{r^2}}\right).$$

Le premier terme du second membre de cette expression effectue des oscillations de plus en plus petites, à mesure que le temps croît, et a par suite pour limite zéro. Le second terme, au contraire, effectue des oscillations toujours également grandes; mais, si l'on prend la *valeur moyenne* de l'expression, le second terme disparaît aussi, puisque la différence $\frac{1}{r^2} - \overline{\frac{1}{r^2}}$ devient alors $\overline{\frac{1}{r^2}} - \overline{\frac{1}{r^2}}$; de sorte que la partie de la fraction relative à θ, tout comme celle qui est relative à r, remplit la condition posée dans notre théorème, que sa valeur moyenne tende vers zéro à mesure que le temps croît.

Cela étant démontré, nous pouvons appliquer l'équation (II) posée dans notre théorème au cas actuel, et nous obtiendrons de cette manière l'équation suivante :

$$(32)\qquad \delta(\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{T}}) = \frac{m\mu}{m+\mu}(\overline{r'^2}\delta\log i_1 + \overline{r^2\theta'^2}\delta\log i_2) + \sum\frac{d\overline{\mathrm{U}}}{dc}\delta c,$$

qui exprime une relation remarquable entre les intervalles de temps i_1 et i_2 et les valeurs moyennes de l'ergiel et de la force vive.

Si la masse μ est regardée comme très-grande vis-à-vis de m, l'équation précédente se transforme en celle qui s'applique au mouvement d'un point matériel autour d'un centre fixe. J'ai donné cette dernière équation dans un travail publié depuis peu [*], et j'ai ajouté qu'on

[*] *Bulletin de la Soc. royale des sciences de Gœttingue*, du 25 décembre 1872, et *Ann. Math. de Clebsch et Neumann*; t. IV, p. 390.

pouvait déduire de la même manière l'équation correspondante pour deux points qui se meuvent l'un autour de l'autre. Ici, au contraire, cette équation s'est trouvée être un cas particulier d'une équation beaucoup plus générale.

10. On peut donner à l'équation (II) différentes autres formes qui sont à la fois intéressantes au point de vue théorique et commodes dans les applications.

En vertu de l'équation (7), on peut poser

$$\delta\overline{T} = \frac{1}{2}\sum \delta\overline{pq'}. \tag{33}$$

Si l'on ajoute cette équation à l'équation (II), il vient

$$\delta\overline{U} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{i^2}\delta(\overline{pq'}i^2) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\delta c, \tag{III}$$

ou bien, sous une autre forme,

$$\delta\overline{U} = \frac{1}{2}\sum \overline{pq'}\,\delta\log(\overline{pq'}i^2) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\delta c. \tag{III$_a$}$$

Si, de nouveau, l'on ajoute l'équation (33) à celles-ci, et que l'on remplace, en vertu de (3), la somme $\overline{U} + \overline{T}$ par E, on obtient

$$\delta E = \sum \frac{1}{i}\delta(\overline{pq'}i) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\delta c, \tag{IV}$$

qu'on peut aussi écrire

$$\delta E = \sum \overline{pq'}\,\delta\log(\overline{pq'}i) + \sum \overline{\frac{dU}{dc}}\delta c. \tag{IV$_a$}$$

Je me réserve de donner dans un travail subséquent de nouvelles transformations de ces équations, qui peuvent être obtenues au moyen de mon théorème sur le *viriel*, ainsi que les applications de ces équations à la théorie de la chaleur.