JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. GRAINDORGE

Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 129-138.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__129_0>

Sur la sommation de quelques séries, et sur quelques intégrales définies nouvelles;

Par J. GRAINDORGE,

Docteur ès sciences, Répétiteur à l'Université de Liége.

1. Soit à trouver la somme de la série

$$s = \frac{\sin^2\varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \dots$$

En prenant la dérivée par rapport à φ, on a

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \frac{\sin 6\varphi}{3^3} + \dots$$

Or

$$\sin\varphi' + \frac{\sin 2\varphi'}{2^3} + \frac{\sin 3\varphi'}{3^3} + \dots = \frac{1}{12}\varphi'(\pi - \varphi')(2\pi - \varphi');$$

donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{3}\varphi(\pi - 2\varphi)(\pi - \varphi).$$

Intégrant et observant que $s = 0$ pour $\varphi = 0$, on a

$$s = \frac{\pi^2\varphi^2}{6} - \frac{\pi^2\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^4}{6},$$

puis

$$(1) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \dots = \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2.$$

Si, dans cette formule, nous remplaçons φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, il vient

$$(2) \qquad \frac{\cos^2\varphi}{1^4} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \frac{\sin^2 4\varphi}{4^4} + \cdots = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{4} - \varphi^2\right)^2.$$

En retranchant la formule (1) de la formule (2), on trouve

$$\frac{\cos 2\varphi}{1^4} + \frac{\cos 6\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{12}(3\pi - 4\varphi),$$

et, en remplaçant 2φ par φ,

$$(3) \qquad \frac{\cos\varphi}{1^4} + \frac{\cos 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} - \frac{\pi\varphi^2}{48}(3\pi - 2\varphi).$$

Cette dernière donne, en remplaçant φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$(4) \qquad \frac{\sin\varphi}{1^4} - \frac{\sin 3\varphi}{3^4} + \frac{\sin 5\varphi}{5^4} - \cdots = \frac{\pi\varphi}{96}(3\pi^2 - 4\varphi^2).$$

Ces formules subsistent pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et π; les trois dernières sont en défaut pour $\varphi = \pi$.

2. La même méthode, appliquée à la série

$$u = \frac{\cos^2\varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \cdots,$$

donne

$$\frac{du}{d\varphi} = \pi\varphi^2 - \frac{\pi^2\varphi}{3} - \frac{2\varphi^3}{3};$$

d'où

$$u = \mathrm{C} + \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\pi^2\varphi^2}{6} - \frac{\varphi^4}{6} = \mathrm{C} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2.$$

La constante se détermine en faisant $\varphi = 0$:

$$C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Par conséquent,

$$(5) \qquad \frac{\cos^2\varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\varphi^2}{6}(\pi - \varphi)^2 \text{ [*]}.$$

En remplaçant φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$, on obtient

$$(6) \qquad \frac{\sin^2\varphi}{1^4} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^4} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{1440} - \frac{\varphi^2(2\varphi^2 - \pi^2)}{12}.$$

Ces deux séries subsistent pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et π. La formule (6) est en défaut pour $\varphi = \pi$.

3. En faisant les mêmes calculs sur la série

$$v = \frac{\sin^3\varphi}{1^3} + \frac{\sin^3 2\varphi}{2^3} + \frac{\sin^3 3\varphi}{3^3} + \cdots,$$

on trouve

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{2\sin^2\varphi\cos\varphi}{1^2} + \frac{2\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi}{2^2} + \cdots,$$

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi\sin 2\varphi}{1^2} + \frac{\sin 2\varphi\sin 4\varphi}{2^2} + \cdots;$$

par suite

$$\frac{4}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1^2} + \frac{\cos 2\varphi}{2^2} + \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \cdots - \left(\frac{\cos 3\varphi}{1^2} + \frac{\cos 6\varphi}{2^2} + \cdots\right),$$

---

[*] Cette série peut d'ailleurs se déduire de la formule (1) retranchée de

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots.$$

d'où

$$\frac{4}{3}\frac{dv}{d\varphi} = \pi\varphi - 2\varphi^2.$$

Intégrant, on a

$$v = \frac{\varphi^2}{8}(3\pi - 4\varphi).$$

Donc

$$\frac{\sin^3\varphi}{1^3} + \frac{\sin^3 2\varphi}{2^3} + \cdots = \frac{\varphi^2}{8}(3\pi - 4\varphi). \tag{7}$$

Cette formule a lieu pour les valeurs de φ comprises entre o et π; elle est en défaut pour $\varphi = \pi$.

4. La même méthode, appliquée à la série

$$z = \frac{\sin^4\varphi}{1^4} + \frac{\sin^4 2\varphi}{2^4} + \cdots,$$

donne facilement

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi(\cos\varphi - \cos 3\varphi)}{1^3} + \frac{\sin 2\varphi(\cos 2\varphi - \cos 6\varphi)}{2^3} + \cdots,$$

ou bien

$$\begin{aligned} 2\frac{dz}{d\varphi} &= \frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \cdots - \left(\frac{\sin 4\varphi - \sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 8\varphi - \sin 4\varphi}{2^3} + \cdots\right) \\ &= 2\left(\frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \cdots\right) - \left(\frac{\sin 4\varphi}{1^3} + \frac{\sin 8\varphi}{2^3} + \cdots\right); \end{aligned}$$

en vertu de la formule citée, et après quelques réductions, on a

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pi\varphi^2 - 2\varphi^3,$$

ce qui donne par l'intégration

$$z = \frac{\sin^4\varphi}{1^4} + \frac{\sin^4 2\varphi}{2^4} + \cdots = \frac{\pi\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^4}{2}. \tag{8}$$

Cette formule subsiste pour les valeurs de φ depuis o jusqu'à π, excepté pour $\varphi = \pi$.

5. On peut de la même manière trouver la somme

$$w = \frac{\cos^4\varphi}{1^4} + \frac{\cos^4 2\varphi}{2^4} + \frac{\cos^4 3\varphi}{3^4} + \ldots.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\varphi} &= -\frac{2\cos^3\varphi\sin 2\varphi}{1^3} - \frac{2\cos^3 2\varphi\sin 4\varphi}{2^3} - \ldots\\ &= -\frac{2\sin 2\varphi}{1^3}(1 - \sin^2\varphi) - \frac{2\sin 4\varphi}{2^3}(1 - \sin^2 2\varphi) - \ldots\\ &= -2\left(\frac{\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{\sin 4\varphi}{2^3} + \ldots\right) + \left(\frac{2\sin^2\varphi\sin 2\varphi}{1^3} + \frac{2\sin^2 2\varphi\sin 4\varphi}{2^3} + \ldots\right);\end{aligned}$$

et, par suite, d'après les formules ci-dessus,

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{2}{3}\varphi(\pi - 2\varphi)(\pi - \varphi) + \pi\varphi^2 - 2\varphi^3 = 3\pi\varphi^2 - \frac{10\varphi^3}{3} - \frac{2\pi^2\varphi}{3}.$$

En intégrant, on trouve

$$w = C + \pi\varphi^3 - \frac{5}{6}\varphi^4 - \frac{\pi^2\varphi^2}{3}.$$

La constante se détermine en faisant $\varphi = 0$, ce qui donne

$$C = \frac{\pi^4}{90}.$$

Par conséquent,

$$(9)\qquad \frac{\cos^4\varphi}{1^4} + \frac{\cos^4 2\varphi}{2^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} + \pi\varphi^3 - \frac{5}{6}\varphi^4 - \frac{\pi^2\varphi^2}{3}.$$

Cette formule est vraie pour les valeurs de φ comprises entre o et π; elle est en défaut pour $\varphi = \pi$.

6. On trouve, par le même procédé,

$$y = \frac{\sin^2\varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \ldots = \frac{\pi\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{2}, \tag{10}$$

$$y_1 = \frac{\sin^2\varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 3\varphi}{3^2} + \ldots = \frac{\pi}{4}\varphi, \tag{11}$$

$$y_2 = \frac{\cos^2\varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{2^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\varphi}{2}(\pi - \varphi), \tag{12}$$

$$y_3 = \frac{\cos^2\varphi}{1^2} + \frac{\cos^2 3\varphi}{3^2} + \ldots = \frac{\pi}{8}(\pi - 2\varphi). \tag{13}$$

Quoique nous ayons vainement cherché ces quatre séries dans différents Traités, nous croyons cependant qu'elles ne sont pas nouvelles. Elles ont lieu pour les valeurs de φ comprises entre o et π : les formules (11) et (13) sont en défaut pour $\varphi = \pi$.

7. Ces résultats étant connus, nous aurons

$$\frac{1}{4x}\, l.\, \frac{1 - 2x\cos 2\varphi + x^2}{(1-x)^2} = \sin^2\varphi + \frac{x}{2}\sin^2 2\varphi + \frac{x^2}{3}\sin^2 3\varphi + \ldots;$$

d'où, en intégrant entre les limites o et 1,

$$\frac{1}{4}\int_0^1 l.\, \frac{1 - 2x\cos 2\varphi + x^2}{(1-x)^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\sin^2\varphi}{1^2} + \frac{\sin^2 2\varphi}{2^2} + \ldots = \frac{\varphi(\pi - \varphi)}{2},$$

ou, en remplaçant 2φ par φ,

$$\int_0^1 l.\, \frac{1 - 2x\cos\varphi + x^2}{(1-x)^2}\,\frac{dx}{x} = \varphi\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{14}$$

8. La relation

$$-\frac{1}{4}\, l.\, [(1 - 2x\cos 2\varphi + x^2)(1-x)^2] = x\cos^2\varphi + \frac{x^2}{2}\cos^2 2\varphi + \ldots$$

nous donne de la même manière

$$-\frac{1}{4}\int_0^1 l.\,[(1-2x\cos 2\varphi+x^2)(1-x)^2]\,\frac{dx}{x}=\frac{\cos^2\varphi}{1^2}+\frac{\cos^2 2\varphi}{2^2}+\ldots;$$

d'où l'on déduit, en vertu de (12) et en remplaçant 2φ par φ,

$$(15)\quad \int_0^1 l.\,[(1-2x\cos\varphi+x^2)(1-x)^2]\,\frac{dx}{x}=\varphi\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{2}{3}\pi^2.$$

En faisant $\varphi=0$, on retrouve l'intégrale connue

$$\int_0^1 l.\,(1-x)\,\frac{dx}{x}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

9. Ajoutant les intégrales (14) et (15), on a

$$\int_0^1 l.(1-2x\cos\varphi+x^2)^2\,\frac{dx}{x}=2\varphi\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{2}{3}\pi^2,$$

d'où

$$(16)\quad \int_0^1 l.\,(1-2x\cos\varphi+x^2)\,\frac{dx}{x}=\varphi\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{3}\pi^2.$$

10. De la même manière, la relation

$$\frac{1}{8}\,l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right]=x\sin^2\varphi+\frac{x^3}{3}\sin^2 3\varphi+\ldots$$

conduit à celle-ci :

$$\frac{1}{8}\int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=\frac{\sin^2\varphi}{1^2}+\frac{\sin^2 3\varphi}{3^2}+\ldots;$$

d'où, à cause de la formule (11),

$$\int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=2\pi\varphi,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(17) \qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1-2x\cos\varphi+x^2}{1+2x\cos\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x} = \pi\varphi.$$

11. Si, dans cette formule, nous faisons $\varphi = \frac{\pi}{4}$, il vient

$$(18) \qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right]\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

12. La combinaison de la formule

$$\frac{1}{8}l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+2x\cos 2\varphi+x^2}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}\right] = x\cos^2\varphi + \frac{x^3}{3}\cos^2 3\varphi + \ldots$$

avec la formule (13) nous donne

$$\int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+2x\cos 2\varphi+x^2}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x} = \pi(\pi-2\varphi),$$

ou bien

$$(19) \qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x} = \pi(\pi-\varphi).$$

13. Pour $\varphi = 0$, cette dernière égalité devient

$$(20) \qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4},$$

formule connue; et, pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$$(21) \qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right]\frac{dx}{x} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

14. En combinant les formules (19) et (20), on trouve

$$(22)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{2}-\pi\varphi,$$

que l'on peut aussi déduire de l'intégrale (17).

15. Si nous ajoutons les formules (15) et (19), nous aurons

$$(23)\qquad \int_0^1 l.\,[(1+x)^2(1+2x\cos\varphi+x^2)]\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\pi^2-\frac{\varphi^2}{2};$$

ce qui donne, pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$$(24)\qquad \int_0^1 l.\,(1+x)^2\left[(1+x\sqrt{2}+x^2)\right]\frac{dx}{x}=\frac{29\pi^2}{96}.$$

16. En remplaçant φ par $\frac{\pi}{4}$ dans (22), on trouve

$$(25)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{4},$$

et, en retranchant l'intégrale (20),

$$(26)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1-x}{1+x}\,\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)\frac{dx}{x}=0.$$

17. Ajoutant (16) et (22), on a

$$(27)\qquad \int_0^1 l.\,(1+2x\cos\varphi+x^2)\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\varphi^2}{2},$$

et, pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$$(28)\qquad \int_0^1 l.\,(1+x\sqrt{2}+x^2)\frac{dx}{x}=\frac{13\pi^2}{96}.$$

18. A cause de

$$\frac{1}{4} l.\left(\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}\right)=x\sin\varphi-\frac{x^3}{3}\sin 3\varphi+\ldots$$

et de

$$\frac{\sin\varphi}{1^2}-\frac{\sin 3\varphi}{3^2}+\frac{\sin 5\varphi}{5^2}-\ldots=\frac{\pi\varphi}{4},$$

on a

$$(29)\qquad \int_0^1 l.\left(\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\pi\varphi,$$

résultat que l'on peut déduire de (22) en changeant φ en $\frac{\pi}{2}-\varphi$.

19. Enfin, si l'on retranche membre à membre les relations (17), (29), on obtient

$$(30)\qquad \int_0^1 l.\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos\varphi+x^2}{1+2x\cos\varphi+x^2}\,\frac{1-2x\sin\varphi+x^2}{1+2x\sin\varphi+x^2}\right]\frac{dx}{x}=0.$$