JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOURGET

Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 101-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__101_0>

Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice;

PAR M. J. BOURGET,

Docteur ès Sciences.

INTRODUCTION.

La fonction perturbatrice est

$$R = \frac{rr'\cos\delta}{r'^3} - \frac{1}{\rho},$$

en nommant

r, r' les distances au Soleil des deux planètes m et m',
δ la distance apparente des deux planètes vue du Soleil,
ρ leur distance vraie.

Il est facile de calculer les perturbations de la planète m, produites par m', quand on a développé R suivant les puissances des exponentielles imaginaires E^{iT}, $E^{iT'}$, E désignant la base des logarithmes népériens, et i le symbole $\sqrt{-1}$. On sait que chacun des termes de cette série, uni à son conjugué, fournit, au moyen d'un système d'équations différentielles simultanées, une inégalité du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice.

Le développement de R est un problème difficile, non pas en lui-même, mais par la longueur des calculs qui s'y rapportent. On cherche habituellement à exprimer le coefficient du terme général $E^{(n'T'+nT)i}$, que nous désignerons par $A_{n,n'}$, en séries ordonnées suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons des deux planètes, quantités petites dans le plus grand nombre des cas. Pour obtenir ce résultat, on suit le plus souvent la méthode donnée par Laplace dans la *Mécanique céleste;* mais, comme les calculs y sont superposés, on ne peut point par cette voie obtenir un terme isolé du développement; de plus, la moindre erreur dans les longs calculs que l'on est obligé de faire, quand on veut aller jusqu'à un ordre élevé, entraîne à d'autres erreurs, qu'il est impossible de corriger sans reprendre en entier tout le travail.

On comprend donc l'importance d'une méthode qui permettrait de trouver, sous forme algébrique, un coefficient déterminé $A_{n,n'}$, par une série d'opérations simples, faciles à répéter, et ne dépendant d'aucune autre.

Cette méthode a été indiquée pour la première fois par Cauchy [*]. J'ai présenté moi-même deux Mémoires à l'Institut, dans lesquels j'apportais quelques perfectionnements aux calculs de l'illustre géomètre [**]. M. Puiseux, de son côté, a publié dans le *Journal de M. Liouville* deux articles sur le même sujet [***]. C'est en lisant son travail qu'il m'a semblé possible de simplifier encore notablement la solution du problème du développement de R, par l'introduction des transcendantes de Bessel. J'ai déjà montré, dans deux autres Mémoires, que ces transcendantes fournissent une solution très-élégante du problème de Kepler et d'autres problèmes analogues [****], et qu'elles permettent de calculer par interpolation les coefficients des divers termes de la fonction perturbatrice [*****].

En résumé, j'arrive à une expression très-simple du terme général de la fonction perturbatrice; mais les quantités petites, suivant lesquelles s'ordonnent les développements en séries, ne sont pas les quantités habituelles. L'excentricité e est remplacée par $\eta = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$, ψ étant donné par $e = \sin\psi$; l'excentricité entre aussi dans les transcendantes de Bessel définies par l'équation

$$(o, n)_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} E^{\frac{\pi e}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du, \quad \text{où} \quad x = E^{u\sqrt{-1}} = E^{ui},$$

[*] *Comptes rendus de l'Académie*, t. XI.

[**] *Comptes rendus de l'Académie*, 1856, mars, juillet.

[***] *Journal de M. Liouville*, 1860.

[****] *Journal de M. Liouville*, 1861.

[*****] *Annales de l'Observatoire*, t. VII.

et l'on sait que chaque transcendante est de l'ordre marqué par la valeur absolue de son indice j. Enfin l'inclinaison mutuelle des orbites y entre par la quantité $\nu = \sin^2 \frac{1}{2} I$, qui est du second ordre. Les séries de notre développement procèdent donc suivant les puissances de η, η', ν, et suivant les facteurs $(o, n)_j$, $(o, n')_{j'}$. La symétrie des résultats nous semble faire compensation à l'accroissement du nombre des lettres ordonnatrices.

Nous remarquerons aussi que nous évitons l'emploi des transcendantes $b_s^{(i)}$ de Laplace; chaque terme de $A_{n,n'}$ se présente sous forme de série ordonnée suivant les puissances de $\alpha = \frac{a}{a'}$.

Pour arriver à l'expression explicite d'un coefficient correspondant à un argument donné, ou encore pour trouver tous les termes d'un ordre donné, il suffit de résoudre en nombres entiers et positifs certaines équations de la forme

$$x + y + z + t + u + v = n.$$

La simplicité et la régularité de cette opération permettent d'éviter toute erreur dans le résultat final.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE $\frac{1}{\rho}$.

I. — *Notations conventionnelles.*

Nous désignerons par t le temps compté à partir d'une époque quelconque prise pour origine et rapporté à l'année julienne, prise pour unité ($365^{\text{jours moy.}},25$). Nous prendrons pour plan fixe le plan de l'écliptique dans sa position moyenne à l'origine du temps, et nous rapporterons les longitudes à la position moyenne qu'occupe la ligne des équinoxes à cette époque. Sur l'orbite d'une planète, nous compterons les longitudes à partir du rabattement sur cette orbite de cette ligne des équinoxes, ce rabattement s'effectuant autour de la ligne du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique.

Nous appellerons

a le demi-grand axe de l'orbite elliptique,
μ le moyen mouvement,
e l'excentricité,
f la racine $\sqrt{1-e^2}$,
ψ l'angle d'excentricité donné par l'équation $\sin\psi = e$,
η la tangente de la moitié de ψ,
ϖ la longitude du périhélie,
φ l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan fixe,
I l'inclinaison mutuelle des orbites des deux planètes considérées,
θ la longitude du nœud ascendant,
ε la longitude de l'époque,
r le rayon vecteur héliocentrique,
ρ la distance des deux planètes,
δ leur distance angulaire vue du Soleil,
s $\cos\delta$,
u l'anomalie excentrique,
v la longitude vraie,
w l'anomalie vraie ou $v - \varpi$,
T l'anomalie moyenne ou $\mu t + \varepsilon - \varpi$,
l la longitude moyenne ou $\mu t + \varepsilon$,
ζ la partie μt de la longitude moyenne dans le mouvement troublé,
m la masse de la planète rapportée à celle du Soleil,
E la base des logarithmes népériens,
i le symbole $\sqrt{-1}$,
x l'exponentielle E^{ui},
o $\cos^2\frac{1}{2}I$,
ν $\sin^2\frac{1}{2}I$,
c $\frac{e}{2\eta} = \frac{1}{1+\eta^2} = \cos^2\frac{1}{2}\psi$,

H, H'	les distances angulaires de l'intersection commune des deux orbites aux nœuds ascendants sur l'écliptique,
χ, χ'	$\varpi - \theta - H$, $\varpi' - \theta' - H'$,
ω	l'angle $\chi - \chi'$,
Ω	l'angle $\chi + \chi'$,
α	le rapport $\frac{a}{a'}$ des demi-grands axes,
$(o, n)_j$	$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j} E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du.$

Les lettres non accentuées se rapportent généralement à la planète troublée m; les lettres accentuées se rapportent à la planète perturbatrice m'.

Nous poserons, en outre, pour abréger,

$$(k)_l = \frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{1.2\ldots l}, \tag{1}$$

$$[k]_l = \frac{k(k+1)\ldots(k+l-1)}{1.2\ldots l}, \tag{2}$$

le nombre k étant quelconque, et le nombre l étant entier et positif. Le symbole $(k)_l$ représente le coefficient binomial; il devra donc être regardé comme nul toutes les fois que l sera négatif ou fractionnaire, et aussi toutes les fois que l sera supérieur à k, lorsque ce dernier nombre sera entier et positif. Cette notation comprend tous les coefficients binomiaux si l'on y ajoute les deux conventions

$$(k)_0 = 1, \quad (o)_0 = 1. \tag{3}$$

On trouve aisément que

$$(k)_l = (k)_{k-l}, \tag{4}$$

k étant entier et positif, et que

$$(-k)_l = [k]_l(-1)^l. \tag{5}$$

Nous rappellerons maintenant les formules du mouvement elliptique, dont nous aurons à faire usage,

$$e = \sin\psi = \frac{2\eta}{1+\eta^2}, \tag{6}$$

$$f = \cos\psi = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}, \tag{7}$$

$$r = a(1 - e\cos u) = ac\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x), \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned} r\cos w &= a(\cos u - e),\\ r\sin w &= af\sin u, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} rE^{wi} &= acx\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^2,\\ rE^{-wi} &= ac\frac{1}{x}(1 - \eta x)^2. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Le triangle sphérique formé par le nœud ascendant I de la planète perturbatrice sur l'orbite de la planète troublée et les deux positions m et m' apparentes des planètes à l'époque t permet de transformer $\cos\delta = s$, qui entre dans la fonction perturbatrice, et l'on a

$$\cos\delta = o\cos(w - w' + \omega) + \nu\cos(w + w' + \Omega), \tag{11}$$

ou bien

$$\cos\delta = \cos(w - w' + \omega) - 2\nu\sin(w + \chi)\sin(w' + \chi'). \tag{12}$$

De là on conclut

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr's\\ &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(w - w' + \omega) + 4\nu rr'\sin(w + \chi)\sin(w' + \chi'). \end{aligned}$$

Posons

$$U = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(w - w' + \omega), \tag{13}$$

$$V = 4\nu rr'\sin(w + \chi)\sin(w' + \chi'), \tag{14}$$

et nous aurons

$$(15) \qquad \rho^2 = \mathrm{U} + \mathrm{V}.$$

Nous supposerons la planète perturbatrice plus éloignée du Soleil que la planète troublée; donc le rapport

$$(16) \qquad \alpha = \frac{a}{a'}$$

est moindre que l'unité.

Les transcendantes de Bessel, qui s'introduisent naturellement dans notre développement, sont définies par l'équation

$$(17) \qquad (o, n)_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-j}\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}du.$$

Elles jouissent de propriétés remarquables; nous rappellerons les suivantes, qui nous seront utiles :

$$(18) \qquad (o, n)_{-j} = (o, n)_j \quad \text{si } j \text{ est pair,}$$

$$(19) \qquad (o, n)_{-j} = -(o, n)_j \quad \text{si } j \text{ est impair,}$$

$$(20) \qquad \begin{cases} (o, o)_j = 0 & \text{si } j \text{ n'est pas nul,} \\ (o, o)_0 = 1, & \end{cases}$$

$$(21) \qquad (o, -n)_{-j} = (o, n)_j.$$

II. — *Réduction du problème du développement de $\frac{1}{\rho}$ à d'autres plus simples.*

Désignons par $\mathrm{B}_{n,n'}$ le coefficient de l'exponentielle $\mathrm{E}^{(n\mathrm{T}+n'\mathrm{T}')i}$ dans le développement de $\frac{1}{\rho}$, nous aurons

$$\mathrm{B}_{n,n'} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\,\mathrm{E}^{-(n\mathrm{T}+n'\mathrm{T}')i}d\mathrm{T}\,d\mathrm{T}'.$$

Au lieu de l'anomalie moyenne, prenons pour variable l'anomalie excentrique. Comme

$$\mathrm{T} = u - e\sin u = u - \frac{e}{2i}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

on a

$$(22)\qquad d\mathrm{T} = \frac{r}{a}\,du = c\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\,du,$$

et

$$(23)\qquad \mathrm{E}^{-n\mathrm{T}i} = x^{-n}\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)};$$

d'ailleurs les limites de l'intégration restent les mêmes; donc

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{n,n'} = cc'\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\,x^{-n}x'^{-n'}&\\ \times\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x')&\\ \times\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{E}^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'&.\end{aligned}$$

Développons maintenant $\frac{1}{\rho}$ par la formule du binôme; nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = (\mathrm{U} + \mathrm{V})^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty}{}_k(-1)^k\left[\frac{1}{2}\right]_k \mathrm{U}^{-\frac{2k+1}{2}}\mathrm{V}^k,$$

k désignant un nombre entier positif qui peut être nul. Transportons la valeur de $\frac{1}{\rho}$ dans $\mathrm{B}_{n,n'}$, nous aurons, en transposant les signes *sommes*,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{B}_{n,n'} = cc'\sum_0^{\infty}{}_k(-1)^k\left[\frac{1}{2}\right]_k&\\ \times\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}^{-\frac{2k+1}{2}}\mathrm{V}^k x^{-n}x'^{-n'}&\\ \times\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x')&\\ \times\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{E}^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}\,du\,du'&.\end{aligned}\right.$$

Nous sommes donc ramenés aux développements de U et de V, et nous chercherons, dans ces développements, à isoler les fonctions relatives à chacune des planètes, afin de pouvoir effectuer isolément les deux intégrations.

III. — *Développement de la fonction* U.

D'après la formule (13), qui définit la fonction U, on peut poser

$$U = r'^2 \left[1 - \frac{r}{r'} E^{(w-w'+\omega)i}\right]\left[1 - \frac{r}{r'} E^{-(w-w'+\omega)i}\right],$$

ou bien

$$U = r'^2 \left(1 - \frac{rE^{wi}}{r'E^{w'i}} E^{\omega i}\right)\left(1 - \frac{rE^{-wi}}{r'E^{-w'i}} E^{-\omega i}\right).$$

Au moyen des formules (8) et (10), cette expression devient

$$\begin{aligned} U = a'^2 c'^2 \left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^2 (1 - \eta' x')^2 & \left[1 - \alpha \frac{c}{c'} \frac{x}{x'} \frac{\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^2}{\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^2} E^{\omega i}\right] \\ & \times \left[1 - \alpha \frac{c}{c'} \frac{x'}{x} \frac{(1 - \eta x)^2}{(1 - \eta' x')^2} E^{-\omega i}\right]. \end{aligned}$$

Élevons maintenant les deux membres à la puissance $\frac{2k+1}{2}$, et nous aurons

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} U^{-\frac{2k+1}{2}} = (a'c')^{-(2k+1)} & \sum_{0}^{\infty}{}_p \sum_{0}^{\infty}{}_q \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{p+q} E^{(p-q)\omega i} \\ & \times x^{p-q} \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2p} (1 - \eta x)^{2q} \\ & \times x'^{-p+q} \left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{-(2k+2p+1)} (1 - \eta' x')^{-(2k+2q+1)}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, x et x', relatives à chacune des planètes, se trouvent dans des facteurs simples différents; nous nous y arrêterons.

IV. — *Développement de la fonction* V.

La fonction V, donnée par la formule (14), peut se mettre sous la forme

$$V = \nu . 2r\sin(w+\chi)2r'\sin(w'+\chi').$$

Remplaçons les sinus par des exponentielles imaginaires; nous aurons

$$V = (-1)\,\nu\,(rE^{wi}E^{\chi i} - rE^{-wi}E^{-\chi i})\,(r'E^{w'i}E^{\chi' i} - r'E^{-w'i}E^{-\chi' i});$$

introduisons maintenant les anomalies excentriques, et nous obtiendrons

$$\begin{aligned} V = -\,\nu aa'cc'&\left[x\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^2 E^{\chi i} - \frac{1}{x}(1-\eta x)^2 E^{-\chi i}\right] \\ &\times\left[x'\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^2 E^{\chi' i} - \frac{1}{x'}(1-\eta' x')^2 E^{-\chi' i}\right]. \end{aligned}$$

Élevons maintenant les deux membres à la puissance entière k; il viendra

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} V^k = (aa'cc')^k\nu^k &\sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} (-1)^{k+g+g'}(k)_g(k)_{g'}E^{(k-2g)\chi i}E^{(k-2g')\chi' i} \\ &\times x^{k-2g}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^{2k-2g}(1-\eta x)^{2g} \\ &\times x'^{k-2g'}\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{2k-2g'}(1-\eta' x')^{2g'}. \end{aligned}\right.$$

Nous nous arrêterons à cette formule, dans laquelle les variables relatives à chacune des planètes se trouvent dans des facteurs simples différents.

Remarque. — Nous avons étendu jusqu'à l'infini les valeurs de g et de g'; mais il est clair qu'au delà de k les valeurs de ces deux nombres donneront zéro pour $(k)_g$ et $(k)_{g'}$; cette extension ne présente donc aucun inconvénient.

V. — *Formule générale du coefficient* $B_{n,n'}$.

Pour arriver à cette formule, il suffit maintenant de substituer, dans l'équation (24), les valeurs de $U^{-\frac{2k+1}{2}}$, V^k, données par les équations (25) et (26). En donnant quelque attention au calcul de cette substitution, on voit que l'intégrale double primitive se trouve remplacée, dans chaque terme, par un produit de deux intégrales simples, et l'on obtient

$$\begin{aligned}
B_{n,n'} = \frac{c'}{a} & \sum_0^\infty {}_k \sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q \sum_0^\infty {}_g \sum_0^\infty {}_{g'} (-1)^{g+g'} \left[\frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q (k)_g (k)_{g'} \\
& \times \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1} \nu^k \, E^{(p-q)\omega i + (k-2g)\chi i + (k-2g')\chi' i} \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{-n+p-q+k-2g} \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2p+2k-2g+1} (1 - \eta x)^{2q+2g+1} \\
& \qquad\qquad \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x'^{-n'-p+q+k-2g'} \left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{-2p-2g'} (1 - \eta' x')^{-2q-2k+2g'} \\
& \qquad\qquad \times E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du'.
\end{aligned}$$

Posons

(27) $$\gamma = k - g, \quad \gamma' = k - g',$$

(28) $$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= (p-q)\omega + (k-2g)\chi + (k-2g')\chi' \\ &= (p-q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{aligned} \right.$$

puis développons les facteurs sous les intégrales par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\eta}{x}\right)^{2p+2k-2g+1} &= \sum_0^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda (2p + 2\gamma + 1)_\lambda \eta^\lambda x^{-\lambda}, \\
(1 - \eta x)^{2q+2g+1} &= \sum_0^\infty {}_\mu (-1)^\mu (2q + 2g + 1)_\mu \eta^\mu x^\mu, \\
\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)^{-(2p+2g')} &= \sum_0^\infty {}_{\lambda'} [2p + 2g']_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} x'^{-\lambda'}, \\
(1 - \eta' x')^{-(2q+2k-2g')} &= \sum_0^\infty {}_{\mu'} [2q + 2\gamma']_{\mu'} \eta'^{\mu'} x'^{\mu'}.
\end{aligned}$$

Si maintenant nous substituons dans la formule ci-dessus de $B_{n,n'}$, et si nous faisons usage des transcendantes de Bessel $(o, n)_j$, nous obtiendrons, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned} B_{n,n'} = \frac{c'}{a} \sum_0^\infty{}_k \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} \sum_0^\infty{}_\lambda \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_{\lambda'} \sum_0^\infty{}_{\mu'} (-1)^{g+g'+\lambda+\mu} E^{\sigma i} \\ \times \left[\frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q (k)_g (k)_{g'} (2p+2\gamma+1)_\lambda \\ \times (2q+2g+1)_\mu [2p+2g']_{\lambda'} [2q+2\gamma']_{\mu'} \\ \times \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1} \nu^k \eta^{\lambda+\mu} \eta'^{\lambda'+\mu'} (o, n)_{n-p+q-\gamma+g+\lambda-\mu} \\ \times (o, n')_{n'+p-q-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'}. \end{aligned}$$

Nous poserons encore, pour abréger,

$$\lambda + \mu = m, \tag{29}$$

$$\lambda' + \mu' = m', \tag{30}$$

et

$$n - p + q - \gamma + g + \lambda - \mu = j = \pm h \quad (h \geq 0), \tag{31}$$

$$n' + p - q - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' = j' = \pm h' \quad (h' \geq 0). \tag{32}$$

La formule du terme général $B_{n,n'}$ se simplifiera et deviendra

$$\left\{\begin{aligned} B_{n,n'} = \frac{c'}{a} \sum_0^\infty{}_k \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q \sum_0^\infty{}_g \sum_0^\infty{}_{g'} \sum_0^\infty{}_\lambda \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_{\lambda'} \sum_0^\infty{}_{\mu'} (-1)^{g+g'+m} E^{\sigma i} \\ \times \left[\frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{2k+1}{2}\right]_p \left[\frac{2k+1}{2}\right]_q (k)_g (k)_{g'} (2p+2\gamma+1)_\lambda \\ \times (2q+2g+1)_\mu [2p+2g']_{\lambda'} [2q+2\gamma']_{\mu'} \\ \times \left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1} \nu^k \eta^m \eta'^{m'} (o, n')_j (o, n')_{j'}. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Mais il faut, pour les applications numériques, revenir aux quantités réelles. Pour cela, remarquons qu'en remplaçant dans le terme de la série, qui a $B_{n,n'}$ pour coefficient, les lettres

$$n,\quad n',\ p,\ q,\ g,\ g',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu',\ \gamma,\ \gamma',$$

respectivement par

$$-n,\ -n',\ q,\ p,\ \gamma,\ \gamma',\ \mu,\ \lambda,\ \mu',\ \lambda',\ g,\ g',$$

tous les facteurs de ces termes restent les mêmes, et σ change seul de signe. Or le premier $B_{n,n'}$ est le coefficient de $E^{(nT+n'T')i}$; le second est le coefficient de $E^{-(nT+n'T')i}$. Donc, dans $\frac{1}{\rho}$, nous trouvons les deux termes

$$ME^{(nT+n'T'+\sigma)i},$$
$$ME^{-(nT+n'T'+\sigma)i},$$

qui, réunis, donnent le terme unique

$$2M\cos(nT+n'T'+\sigma), \tag{34}$$

et l'on a ainsi, pour le coefficient $2M$ du cosinus d'un argument donné,

$$\cos(nT+n'T'+\sigma),$$

la formule simple suivante :

$$\left\{\begin{aligned}2M = {}&\frac{2c'}{a}(-1)^{g+g'+m}\left[\frac{1}{2}\right]_k\left[\frac{2k+1}{2}\right]_p\left[\frac{2k+1}{2}\right]_q(k)_g\,(k)_{g'}\\&\times(2p+2\gamma+1)_\lambda(2q+2g+1)_\mu[2p+2g']_{\lambda'}\\&\times[2q+2\gamma']_{\mu'}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^{k+p+q+1}\nu^k\eta^m\eta'^{m'}(o,n)_j(o,n')_{j'}.\end{aligned}\right. \tag{35}$$

La formule (34) donne un des termes du développement de $\frac{1}{\rho}$; nous obtiendrons tous les termes de ce développement en donnant aux divers nombres

$$n,\ n',\ k,\ p,\ q,\ g,\ g',\ \gamma,\ \gamma',\ \lambda,\ \mu,\ \lambda',\ \mu'$$

toutes les valeurs possibles. Toutefois il ne faudra pas donner à ces nombres un système de valeur conjugué d'un autre, ou tel que l'on reproduise le même terme $2M\cos(nT + n'T' + \sigma)$. On évitera la possibilité de cette rencontre en convenant de ne donner à n' que des valeurs positives, les autres nombres recevant toutes les valeurs possibles. Cette supposition restrictive est permise, puisque, en imaginant écrits tous les termes de la forme (34), on peut changer les signes des arcs de manière à rendre positifs les coefficients de T'.

Remarque. — Si nous trouvons que plusieurs termes correspondent aux mêmes valeurs de k, n, n', p, q, g, g', le nombre σ ne variera pas, et le terme (34) ne variera que par son coefficient $2M$. On obtiendra donc une série de termes correspondant tous au même

$$\cos(nT + n'T' + \sigma).$$

Nous allons voir qu'il en est toujours ainsi, et que chacun de ces cosinus est en effet multiplié par une série indéfinie de coefficients $2M$. Cette série se limite naturellement par sa convergence dans le cours des applications numériques.

VI. — *Degré d'un terme relativement aux excentricités et à l'inclinaison.*

Nous regarderons e et η comme du même ordre de petitesse, et $\nu = \sin^2\frac{1}{2}I$ comme du second ordre. Les transcendantes de Bessel sont, d'après leur définition, d'un ordre marqué par le *module* ou la valeur absolue de leur indice. D'après cela, l'ordre Δ d'un terme sera donné par la formule

$$\Delta = 2k + m + m' + h + h'. \tag{36}$$

Il existe entre Δ et l'*argument* $(n + n')$ une relation remarquable et très-importante que nous allons faire connaître. Posons les deux équations

$$\begin{aligned} n - p + q - \gamma + g + \lambda - \mu &= j = \pm h, \\ n' + p - q - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' &= j' = \pm h', \end{aligned}$$

tirons-en la valeur de $n+n'$

$$n+n'=\gamma+\gamma'-g-g'-\lambda-\lambda'+\mu+\mu'+j+j';$$

de là nous déduisons

$$\Delta-(n+n')=2g+2g'+2\lambda+2\lambda'+h+h'-j-j',$$
$$\Delta+(n+n')=2\gamma+2\gamma'+2\mu+2\mu'+h+h'+j+j'.$$

Distinguons maintenant les divers cas qui peuvent se présenter dans la distribution des signes de j et de j', nous formerons le tableau suivant :

PREMIER CAS : $j\geq 0$, $j'\geq 0$.

$$\Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'),$$
$$\Delta+(n+n')=2(\gamma+\gamma'+\mu+\mu'+h+h').$$

DEUXIÈME CAS : $j\geq 0$, $j'<0$.

$$\Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'+h'),$$
$$\Delta+(n+n')=2(\gamma+\gamma'+\mu+\mu'+h).$$

TROISIÈME CAS : $j<0$, $j'\geq 0$.

$$\Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'+h),$$
$$\Delta+(n+n')=2(\gamma+\gamma'+\mu+\mu'+h').$$

QUATRIÈME CAS : $j<0$, $j'<0$.

$$\Delta-(n+n')=2(g+g'+\lambda+\lambda'+h+h'),$$
$$\Delta+(n+n')=2(\gamma+\gamma'+\mu+\mu').$$

Nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Le degré d'un terme est au moins égal à la valeur absolue de l'argument, et quand il le surpasse, c'est d'un nombre pair positif.

Ce théorème, bien connu d'ailleurs, est très-important à signaler dans notre méthode de développement. On peut en tirer une solution facile des deux questions suivantes, qui se présentent dans les applications de la Mécanique céleste :

1° Trouver tous les termes correspondant à un argument $nT+n'T'$ donné;

2° Trouver tous les termes d'un ordre donné.

Pour faciliter toutes les applications ultérieures, nous allons donner les tableaux des formules dont nous ferons usage; elles se distribuent en deux catégories, suivant le signe de $(n+n')$. Chacune des catégories renferme quatre tableaux, que nous distinguerons par les lettres

$$\begin{array}{cccc} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4. \end{array}$$

VII. — *Tableau des formules propres aux applications.*

Premier cas : $n + n' \geq 0$.

$$(A_1)\ \left\{\begin{array}{l} j \geq 0 \\ j' \geq 0 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} \Delta - (n+n') = 2(g+g'+\lambda+\lambda'), \\ \Delta = 2k+m+h+m'+h', \\ q = p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'-h', \\ \sigma = (p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(A_2)\ \left\{\begin{array}{l} j \geq 0 \\ j' < 0 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} \Delta - (n+n') = 2(g+g'+\lambda+\lambda'+h'), \\ \Delta = 2k+m+h+m'+h', \\ q = p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'+h', \\ \sigma = (p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(A_3)\ \left\{\begin{array}{l} j < 0 \\ j' \geq 0 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} \Delta - (n+n') = 2(g+g'+\lambda+\lambda'+h), \\ \Delta = 2k+m+h+m'+h', \\ q = p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'-h', \\ \sigma = (p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$(A_4)\ \left\{\begin{array}{l} j < 0 \\ j' < 0 \end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l} \Delta - (n+n') = 2(g+g'+\lambda+\lambda'+h+h'), \\ \Delta = 2k+m+h+m'+h', \\ q = p+n'-\gamma'+g'+\lambda'-\mu'+h', \\ \sigma = (p-q)\omega+(\gamma-g)\chi+(\gamma'-g')\chi'; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \lambda+\mu = m, \\ \lambda'+\mu' = m', \\ \gamma+g = k, \\ \gamma'+g' = k. \end{array}$$

DEUXIÈME CAS : $n + n' < 0$.

$$(B_1)\ \begin{cases} j \geqq 0 \\ j' \geqq 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta + (n+n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h + h'), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' - h', \\ \sigma = (p-q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{cases}$$

$$(B_2)\ \begin{cases} j \geqq 0 \\ j' < 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta + (n+n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' + h', \\ \sigma = (p-q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{cases}$$

$$(B_3)\ \begin{cases} j < 0 \\ j' \geqq 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta + (n+n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu' + h'), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' - h', \\ \sigma = (p-q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{cases}$$

$$(B_4)\ \begin{cases} j < 0 \\ j' < 0 \end{cases} \begin{cases} \Delta + (n+n') = 2(\gamma + \gamma' + \mu + \mu'), \\ \Delta = 2k + m + h + m' + h', \\ q = p + n' - \gamma' + g' + \lambda' - \mu' + h', \\ \sigma = (p-q)\omega + (\gamma - g)\chi + (\gamma' - g')\chi'; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= m, \\ \lambda' + \mu' &= m', \\ \gamma + g &= k, \\ \gamma' + g' &= k. \end{aligned}$$

VIII. — *Trouver tous les termes correspondant à un argument donné.*

Dans ce cas, les nombres n et n' sont connus; donc on connaît aussi leur somme $n + n'$. Nous savons que le degré Δ est au moins égal à la valeur absolue de $n + n'$; donc on posera successivement

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{mod.}(n+n') \\ \Delta &= \text{mod.}(n+n') + 2, \\ \Delta &= \text{mod.}(n+n') + 4. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On prendra à part chacune de ces hypothèses, et suivant le signe de $n + n'$, on lui appliquera les relations A, ou les relations B.

La première équation étant résolue, on passera à la seconde pour chaque système de solutions de la première; on connaîtra donc les nombres

$$g,\ g',\ \lambda,\ \lambda',\ \gamma,\ \gamma',\ \mu,\ \mu',\ k,\ m,\ h,\ m',\ h'.$$

On en déduira q en fonction de p et ϖ. Dans chacun des termes formés, on devra donner à p toutes les valeurs entières et positives depuis zéro jusqu'à l'infini; chacun des termes représente donc une série indéfinie; mais cette série est ordonnée suivant les puissances de $\frac{\alpha c}{c'}$, et elle se limitera d'elle-même dans les applications numériques.

Remarque. — Il existe une formule très-simple, exprimant le nombre des solutions distinctes d'une équation à $p+1$ inconnues de la forme

$$x + y + z + \ldots = n,$$

en nombres entiers, nuls ou positifs. En nommant $C_m^{(n)}$ le nombre des combinaisons de m objets n à n, on trouve que le nombre des solutions demandées est

$$C_{n+p}^{p} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{1.2\ldots p}. \tag{37}$$

On arrive facilement à cette conséquence en considérant successivement des équations à 2, 3,... inconnues.

Cette remarque nous servira à vérifier que, dans un calcul déterminé, nous n'avons oublié aucune solution.

IX. — *Trouver tous les termes d'un ordre donné.*

Dans ce cas, nous connaissons Δ. Les nombres n et n' peuvent varier et nous allons indiquer comment on peut trouver régulièrement tous les arguments qui correspondent à cet ordre, et les coefficients des termes de $\frac{1}{\rho}$ relatifs à chacun d'eux.

Nous savons que la valeur absolue de $n + n'$ est au plus égale à Δ, et plus généralement lui est inférieure d'un nombre pair. Nous poserons donc successivement

$$\begin{array}{ll} n+n'=\Delta, & n+n'=-\Delta, \\ n+n'=\Delta-2, & n+n'=-\Delta+2, \\ n+n'=\Delta-4, & n+n'=-\Delta+4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

jusqu'à ce que Δ soit épuisé. S'il est pair, on arrivera à poser $n + n' = 0$; s'il est impair, on terminera en posant $n + n' = 1$, $n + n' = -1$.

Après avoir numéroté toutes les hypothèses possibles, on passera à la résolution des équations A ou B, suivant le signe de $n + n'$. On déduira de ces équations

$$g,\ g',\ \lambda,\ \lambda',\ \gamma,\ \gamma',\ \mu,\ \mu',\ k,\ m,\ h,\ m',\ h',\ q,\ n,$$

en fonction de p et de n'. Ces nombres entiers et positifs devront ensuite recevoir toutes les valeurs possibles y compris zéro.

Dans les applications on se trouvera limité naturellement par les puissances de $\frac{\alpha c}{c'}$, qui décroissent et deviennent bientôt négligeables.

SECONDE PARTIE.

DÉVELOPPEMENT DE $\frac{rr's}{r'^3}$.

I. — *Réduction du problème à d'autres plus simples.*

Désignons par

$$C_{n,n'}$$

le coefficient de $E^{(nT+n'T')i}$; dans ce développement, nous aurons

$$C_{n,n'} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{rs}{r'^3} E^{-(nT+n'T')i}\, dT\, dT'.$$

Prenons pour variables les anomalies excentriques, au lieu des anomalies moyennes, il viendra (II, première Partie):

$$C_{n,n'} = cc' \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{rs}{r'^2} x^{-n} x'^{-n'} \times \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du du'.$$

Mais nous avons

$$\frac{rs}{r'^2} = \frac{r}{r'^2}\Big[o \cos(w - w' + \omega) + \nu \cos(w + w' + \Omega)\Big];$$

donc en posant

$$C'_{n,n'} = cc' o \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos(w - w' + \omega)}{r'^2} x^{-n} x'^{-n'} \times \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du du',$$

et

$$C''_{n,n'} = cc' \nu \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos(w - w' + \Omega)}{r'^2} x^{-n} x'^{-n'} \times \left(1 - \frac{\eta}{x}\right)(1 - \eta x)\left(1 - \frac{\eta'}{x'}\right)(1 - \eta' x') \times E^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} E^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du du',$$

on a

$$C_{n,n'} = C'_{n,n'} + C''_{n,n'},$$

et le problème proposé est ramené à l'évaluation des intégrales $C'_{n,n'}$ et $C''_{n,n}$.

II. — *Développement de l'intégrale* $C'_{n,n'}$. *Formule des termes de* R *qui en proviennent.*

Transformons $\cos(w - w' + \omega)$ en exponentielles imaginaires, nous aurons (I, première Partie)

$$\frac{1}{r'}\frac{r}{r'}\cos(w - w' + \omega) = \frac{1}{2r'}\left(\frac{r E^{wi}}{r' E^{w'i}} E^{\omega i} + \frac{r E^{-wi}}{r' E^{-w'i}} E^{-\omega i}\right);$$

remplaçons maintenant r', $r\mathrm{E}^{wi}$, $r\mathrm{E}^{-wi}$, $r'\mathrm{E}^{w'i}$, $r'\mathrm{E}^{-w'i}$ par leurs valeurs en η, x, η', x' trouvées dans la première Partie, nous aurons

$$\begin{aligned}&\frac{r\cos(w - w' + \omega)}{r'^2}\\ &= \frac{1}{2ac}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \frac{\mathrm{E}^{\omega i} x x'^{-1}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^2\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2} + \mathrm{E}^{-\omega i} x^{-1} x' (1-\eta x)^2 (1-\eta' x')^{-2}}{\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)(1-\eta' x')}.\end{aligned}$$

Substituons cette expression dans la formule de $C'_{n,n'}$, elle se séparera en deux intégrales plus simples et nous aurons

$$\begin{aligned}C'_{n,n'} = {} & \frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \mathrm{E}^{\omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n+1} x'^{-n'-1}\\ &\qquad\times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^2(1-\eta x)\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2}\\ &\qquad\qquad\times \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\mathrm{E}^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}du\,du'\\ &+\frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \mathrm{E}^{\omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n-1} x'^{-n'+1}\\ &\qquad\times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)(1-\eta x)^2(1-\eta' x')^{-2}\\ &\qquad\qquad\times \mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\mathrm{E}^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}du\,du'.\end{aligned}$$

Posons pour abréger

$$\text{(38)}\qquad \mathrm{G}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n+1}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^2(1-\eta x)\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}du,$$

$$\text{(39)}\qquad \mathrm{H}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n-1}\left(1-\frac{\eta}{x}\right)(1-\eta x)^2\,\mathrm{E}^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}du,$$

$$\text{(40)}\qquad \left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2} = \sum_0^\infty{}_{\lambda'}[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}x'^{\lambda'},$$

$$\text{(41)}\qquad (1-\eta' x')^{-2} = \sum_0^\infty{}_{\mu'}[2]_{\mu'}\eta'^{\mu'}x'^{\mu'},$$

et nous obtiendrons la formule simple que voici :

$$C'_{n,n'} = \frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \Bigg[E^{\omega i} G_n \sum_{\lambda'}^{\infty}\!{}_{0} [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} (o, n')_{n'+1+\lambda'}$$
$$+ E^{-\omega i} H_n \sum_{\mu'}^{\infty}\!{}_{0} [2]_{\mu'} \eta'^{\mu'} (o, n')_{n'-1-\mu'} \Bigg].$$

Remarque. — Les quantités G_n et H_n sont des transcendantes auxiliaires, mais il est facile de les évaluer au moyen des transcendantes de Bessel ; en effet

$$\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^2(1-\eta x) = 1+\eta^2-\eta\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\eta(1+\eta^2)\frac{1}{x}$$
$$+2\eta^2\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\eta^2(1+\eta^2)\frac{1}{x^2}-\eta^3\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2},$$

ou

$$= -\eta x + (1+3\eta^2) - 3\eta(1+\eta^2)\frac{1}{x} + \eta^2(3+\eta^2)\frac{1}{x^2} - \frac{\eta^3}{x^3};$$

donc

$$(42)\quad \begin{cases} G_n = (1+\eta^2)(o,n)_{n-1} - \eta(1,n)_{n-1} - 2\eta(1+\eta^2)(o,n)_n \\ \qquad + 2\eta^2(1,n)_n + \eta^2(1+\eta^2)(o,n)_{n+1} - \eta^3(1,n)_{n+1}, \end{cases}$$

ou bien

$$(42)\quad \begin{cases} G_n = -\eta(o,n)_{n-2} + (1+3\eta^2)(o,n)_{n-1} - 3\eta(1+\eta^2)(o,n)_n \\ \qquad + \eta^2(3+\eta^2)(o,n)_{n+1} - \eta^3(o,n)_{n+2}. \end{cases}$$

De même

$$(1-\eta x)^2\left(1-\frac{\eta}{x}\right) = 1+\eta^2-\eta\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\eta(1+\eta^2)x$$
$$+2\eta^2 x\left(x+\frac{1}{x}\right)+\eta^2(1+\eta^2)x^2-\eta^3\left(x+\frac{1}{x}\right)x^2,$$

ou

$$= -\frac{\eta}{x} + (1+3\eta^2) - 3\eta(1+\eta^2)x + \eta^2(3+\eta^2)x^2 - \eta^3 x^3;$$

donc

$$(43)\quad \begin{cases} H_n = (1+\eta^2)(o,n)_{n+1} - \eta(1,n)_{n+1} - 2\eta(1+\eta^2)(o,n)_n \\ \qquad + 2\eta^2(1,n)_n + \eta^2(1+\eta^2)(o,n)_{n-1} - \eta^3(1,n)_{n-1}, \end{cases}$$

ou bien

$$(43)\quad \begin{cases} H_n = -\eta(o,n)_{n+2} + (1+3\eta^2)(o,n)_{n+1} - 3\eta(1+\eta^2)(o,n)_n \\ \qquad + \eta^2(3+\eta^2)(o,n)_{n-1} - \eta^3(o,n)_{n-2}. \end{cases}$$

De ces formules et des propriétés des transcendantes de Bessel, il résulte que

$$(44)\qquad 1^\circ \qquad H_{-n} = G_n;$$

2° L'ordre de G_n, relativement à e ou η considérés comme lettres ordonnatrices, est égal au *module* de $(n-1)$;

3° L'ordre de H_n est égal au *module de* $(n+1)$.

Ces transcendantes seront faciles à calculer quand on aura le tableau des transcendantes de Bessel pour une planète. Dans la pratique, le calcul se simplifiera en négligeant, dans chacune de ces quantités G_n, H_n, les parties d'ordre supérieur à mod. $(n-1)$, mod. $(n+1)$.

La remarque précédente va nous permettre de trouver facilement la formule de tous les termes R qui se rapportent à $C'_{n,n'}$.

En effet, multiplions $C'_{n,n'}$ par $E^{(nT+n'T')i}$, nous aurons pour la formule des termes de R qui se rapportent à cette partie

$$\frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_{\lambda'}\limits_{o}^{\infty} [2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'} G_n(o,n')_{n'+1+\lambda'} E^{(nT+n'T'+\omega)i}$$
$$+ \frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_{\mu'}\limits_{o}^{\infty} [2]_{\mu'}\eta'^{\mu'} H_n(o,n')_{n'-1-\mu'} E^{(nT+n'T'-\omega)i}.$$

Nous obtenons donc deux séries indéfinies de termes; car il faut faire varier dans chacune des parties ci-dessus

$$\begin{array}{llcll} \lambda', \mu' & \text{de} & o & \text{à} & +\infty, \\ n, n' & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

Mais remarquons que ces deux séries sont indépendantes l'une de l'autre; donc nous pouvons, dans la seconde, mettre λ' à la place de μ', et remplacer n et n' par $-n$ et $-n'$; d'où il résulte que l'ensemble des termes qui constituent ces deux séries peut se partager en groupes de deux ayant la forme suivante :

$$\frac{o}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}\big\{G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'}E^{(nT+n'T'+\omega)i} + H_{-n}(o, n')_{-n'-1-\lambda'}E^{-(nT+n'T'+\omega)i}\big\}.$$

Or

$$H_{-n} = G_n, \quad (o, -n')_{-n'-1-\lambda'} = (o, n')_{n'+1+\lambda'};$$

donc ce groupe se réduit à

$$o\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'}\cos(nT + n'T' + \omega),$$

et pour obtenir tous les groupes pareils, dont l'ensemble constitue la série des termes que l'on cherche, il faut, dans la dernière formule, faire varier

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda' & \text{de} & 0 & \text{à} & +\infty, \\ n,\ n' & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

Supposons que, λ' conservant la même valeur, n et n' changent de signes, la formule précédente donnera le groupe

$$o\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}H_n(o, n')_{n'-1-\lambda'}\cos(nT + n'T' - \omega).$$

Réunissons ces deux termes, et nous aurons le terme suivant :

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} & o\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}\big\{G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'}\cos(nT + n'T' + \omega) \\ & \qquad + H_n(o, n')_{n'-1-\lambda'}\cos(nT + n'T' - \omega)\big\}. \end{aligned} \right.$$

Pour former avec ce terme unique tous les termes cherchés, il faut éviter de donner, pour la même valeur de λ', à n et n' des valeurs égales et de signes contraires à celles qu'on aurait déjà prises; car on reformerait inutilement un terme déjà formé.

On évitera ce danger en faisant varier

$$\begin{array}{llcrcl} \lambda' \text{ et } n' & \text{de} & o & \text{à} & +\infty, \\ n & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

Nous nous arrêterons à ce résultat, dont la forme est simple et réelle.

III. — *Développement de l'intégrale $C''_{n,n'}$. Formule des termes de* R *qui en proviennent.*

Nous pouvons faire sur cette seconde partie de $C_{n,n'}$ des calculs analogues à ceux que nous avons faits sur la première; nous trouvons facilement que l'on peut lui donner la forme

$$\begin{aligned} C''_{n,n'} = {} & \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 E^{\Omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n+1}x'^{-n'+1} \\ & \qquad \times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^3(1-\eta x)(1-\eta' x')^{-2} \\ & \qquad \times E^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}E^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}du\,du' \\ & + \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 E^{-\Omega i}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-n-1}x'^{-n'-1} \\ & \qquad \times\left(1-\frac{\eta}{x}\right)(1-\eta x)^3\left(1-\frac{\eta'}{x'}\right)^{-2} \\ & \qquad \times E^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}E^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}du\,du'; \end{aligned}$$

donc, en vertu des notations adoptées dans le paragraphe précédent, nous aurons

$$\begin{aligned} C''_{n,n'} = \frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \Bigg[& E^{\Omega i}G_n\sum_{\mu'}^{\infty}{}_{0}\,[2]_{\mu'}\eta'^{\mu'}(o,n')_{n'-1-\mu'} \\ & + E^{-\Omega i}H_n\sum_{\lambda'}^{\infty}{}_{0}\,[2]_{\lambda'}\eta'^{\lambda'}(o,n')_{n'+1+\lambda'}\Bigg]. \end{aligned}$$

Multiplions maintenant $C''_{n,n'}$ par $E^{(nT+n'T')i}$, nous aurons, pour la formule des termes de R correspondants,

$$\frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_0^\infty{}_{\mu'} [2]_{\mu'} \eta'^{\mu'} G_n(o, n')_{n'-1-\mu'} E^{(nT+n'T'+\Omega)i}$$

$$+\frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 \sum_0^\infty{}_{\lambda'} [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} H_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} E^{(nT+n'T'-\Omega)i}.$$

Nous obtenons ainsi deux séries indéfinies de termes; car il faut faire varier

$$\begin{array}{llllll} \lambda' & \text{et} & \mu' & \text{de} & o & \text{à} & +\infty, \\ n & & n' & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

Ces deux séries sont indépendantes l'une de l'autre; nous pouvons donc remplacer, dans la première, μ' par λ'. Nous pouvons aussi changer le signe de n' dans les deux; nous prendrons ensuite dans la seconde série, pour la même valeur de λ', des nombres n et n' égaux et de signes contraires à ceux que nous aurons choisis dans la première. Il résultera de là que l'ensemble des termes qui constituent les deux séries peut se partager en groupes de deux ayant la forme suivante :

$$\frac{\nu}{2}\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} \left[G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} E^{(nT-n'T'+\Omega)i} \right.$$
$$\left. + H_{-n}(o, -n')_{-n'-1-\lambda'} E^{-(nT-n'T'+\Omega)i}\right].$$

Ce groupe se réduit donc à

$$\nu\frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} G_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(nT - n'T' + \Omega);$$

et, pour obtenir tous les groupes pareils dont l'ensemble constitue la série des termes que l'on cherche, il faut faire varier

$$\begin{array}{lllll} \lambda' & \text{de} & o & \text{à} & +\infty, \\ n, n' & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

Supposons que, λ' conservant la même valeur, n et n' changent de signes, la formule précédente donnera

$$\nu \frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' - \Omega).$$

Réunissons ces deux termes, nous aurons le groupe

$$(46)\quad \left\{ \begin{aligned} \nu \frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} [\mathrm{G}_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' + \Omega) \\ + \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' - \Omega)]. \end{aligned} \right.$$

Pour former avec ce terme unique tous les termes cherchés, il faut faire varier

$$\begin{array}{ccccc} \lambda' \text{ et } n' & \text{de} & o & \text{à} & +\infty, \\ n & \text{de} & -\infty & \text{à} & +\infty. \end{array}$$

IV. — *Forme d'un terme quelconque du développement de $\frac{rr's}{r'^3}$.*

Réunissons les deux formules trouvées aux sections II et III, nous aurons le terme suivant, comme formule générale :

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{c'}{a}\left(\frac{\alpha c}{c'}\right)^2 [2]_{\lambda'} \eta'^{\lambda'} \Big\{ o[\mathrm{G}_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(n\mathrm{T} + n'\mathrm{T}' + \omega) \\ + \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} + n'\mathrm{T}' - \omega)] \\ + \nu[\mathrm{G}_n(o, n')_{n'+1+\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' + \Omega) \\ + \mathrm{H}_n(o, n')_{n'-1-\lambda'} \cos(n\mathrm{T} - n'\mathrm{T}' - \Omega)] \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Ce terme général se compose de quatre parties; toutes choses égales d'ailleurs, les deux dernières, qui renferment ν en facteur, sont d'un ordre supérieur de deux unités à l'ordre des deux premières.

Chacune de ces quatre parties fournit une série indéfinie de termes dans le développement de la fonction $\frac{rr's}{r'^3}$. Ces séries sont indépendantes, et il conviendra de les développer séparément.

Remarque I. — On ne peut pas supposer $n' = o$, car on voit que les quatre transcendantes $(o, n')_i$ s'annulent dans cette hypothèse.

Remarque II. — On ne peut pas, *a fortiori*, supposer $n = 0$, $n' = 0$ à la fois; donc cette partie de la fonction perturbatrice ne fournit rien à la partie *séculaire* de R.

Remarque III. — Si l'on voulait, on pourrait décomposer o en deux parties, l'une de l'ordre zéro, l'autre du second; mais pour la symétrie des calculs, la formule ci-dessus est préférable.

Remarque IV. — Il est facile de faire voir que l'ordre d'un terme est au moins égal à l'argument $n + n'$ pris en valeur absolue, et que s'il le surpasse, c'est toujours d'un nombre pair. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce théorème; elle est facile et analogue à celle que nous avons donnée pour la première partie de la fonction perturbatrice.

Remarque V. — Il est facile de voir que les termes de R qui viennent de $\frac{rr'}{r'^3}$ peuvent se déduire de la formule générale de ceux qui viennent de $\frac{1}{\rho}$; mais il est préférable, pour la symétrie des calculs, de les tirer directement des formules que nous venons de développer. Ce procédé a d'ailleurs l'avantage de montrer l'influence de chacune des parties de la fonction perturbatrice, dans le calcul d'une inégalité déterminée.